令和６年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

1 a を正の実数とし，$f(x)=x^2-2ax+4a^2$ とする．O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y=f(x)$ の頂点を A とする．直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする．ただし，$q>0$ とする．

(1) p，q の値を a を用いて表せ．また，$p>q$ であることを示せ．

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく．S を a を用いて表せ．

(3) (2) の S に対し，$S=\dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ．

2 $a,\ b,\ d$ を正の実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ d)$ が次の条件をすべて満たすとする．

$$\angle\mathrm{OAD}=15^\circ,\quad \angle\mathrm{OBD}=75^\circ,\quad \mathrm{AB}=6$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\tan 75^\circ$ の値を求めよ．

(2) $a,\ b,\ d$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) 2 点 O，D を直径の両端とする円を C とする．線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする．また，線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする．このとき，方べきの定理

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AO}^2,\quad \mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BO}^2$$

を示せ．

(4) (3) の点 P，Q に対し，積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}$ の値を求めよ．

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

(1) t を $t>1$ を満たす実数とする．正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$

(b) $x \geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする．このとき，不等式

$$x+1 > 2\log_t(x+1)$$

を示せ．

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ n を正の整数とする．2 つの整数 a_n，b_n を条件

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

により定める．ここで，$\sqrt{2}$ は無理数なので，このような整数の組 $(a_n,\ b_n)$ はただ 1 つに定まる．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いてそれぞれ表せ．さらに，b_4，b_5，b_6 の値をそれぞれ求めよ．

(2) 等式

$$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

が成り立つことを数学的に帰納法を用いて表せ．

(3) $n \geqq 2$ のとき，$b_{n+1}b_{n-1} - {b_n}^2$ を求めよ．

(4) $pb_6 - qb_5 = 1$，$0 \leqq p \leqq 100$，$0 \leqq q \leqq 100$ をすべて満たす整数 p，q の組 $(p,\ q)$ を 1 組求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $C: y=(x)$ について，$f(x)=(x-a)^2+3a^2$ より，頂点 A は $(a,\ 3a^2)$
直線 OA の傾きは $3a$ であるから，その方程式は $y=3ax$
これと $C: y=x^2-2ax+4a^2$ から y を消去すると

$$x^2-2ax+4a^2=3ax \quad ゆえに \quad (x-a)(x-4a)=0$$

点 P は点 A と異なるから，点 P の x 座標 p は $\boldsymbol{p=4a}$
$f'(x)=2x-2a$ より C 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線は

$$y=(2q-2a)(x-q)+q^2-2aq+4a^2$$

すなわち $y=2(q-a)x-q^2+4a^2$
これが原点を通るから $(q>0,\ a>0)$

$$-q^2+4a^2=0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{q=2a}$$

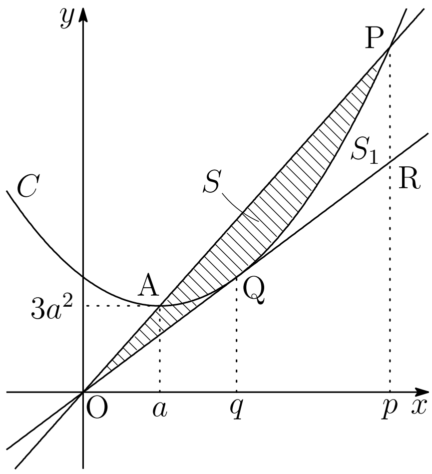
$p=4a,\ q=2a$ であるから $(a>0)$ $\quad p>q$

(2) 曲線 $C: y=f(x)$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線 $y=2ax$ および直線 $x=p$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする．このとき[1]

$$f(x)=f(q)+f'(q)(x-q)+(x-q)^2$$

であるから

$$\begin{aligned}S_1&=\int_q^p\{f(x)-f(q)-f'(q)(x-q)\}\,dx\\&=\int_q^p(x-q)^2\,dx=\frac{1}{3}(p-q)^3\\&=\frac{1}{3}(4a-2a)^3=\frac{8}{3}a^3\end{aligned}$$



接線 OQ と直線 $x=p$ の交点を R とすると
$\mathrm{P}(4a,\ 12a^2)$，$\mathrm{R}(4a,\ 8a^2)$ より

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{OPR}-S_1\\&=\frac{1}{2}\cdot4a(12a^2-8a^2)-\frac{8}{3}a^3=\boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}\end{aligned}$$

(3) $S=\dfrac{2}{3}$ を (2) の結果に代入すると $\dfrac{16}{3}a^3=\dfrac{2}{3}$ これを解いて $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

別解 直線 $x=2a$ と直線 OP の交点を Q′ とすると　$\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$，$\mathrm{Q'}(2a,\ 6a^2)$

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}p\cdot\mathrm{QQ'}=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 2a^2=4a^3$$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は，1/6 公式により

$$\frac{1}{6}(p-q)^3=\frac{1}{6}(4a-2a)^3=\frac{4}{3}a^3$$

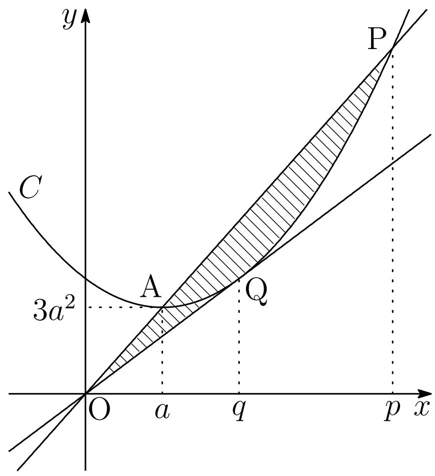
よって，求める面積は　$S=4a^2+\frac{4}{3}a^3=\boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}$

解説

$$\begin{aligned} xy'-y &= x(2x-2a)-(x^2-2ax+4a^2)\\ &=(x-2a)^2+4a(x-2a)\end{aligned}$$

求める面積 S は (ガウス・グリーンの定理の系)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{2a}^{4a}(xy'-y)\,dx=\frac{1}{2}\int_{2a}^{4a}\{(x-2a)^2+4a(x-2a)\}\,dx\\ &=\frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}(x-2a)^3+2a(x-2a)^2\,\Big]_{2a}^{4a}=\boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}\end{aligned}$$



補足 解説の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}\,dt$$

の変数 t を x に変更したものである．このとき，定義域は動径の偏角が正の向きになるようにとる．例えば，C と線分 OQ，OA で囲まれた部分の面積 S' を求める場合は次のようになる．

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2}\int_{2a}^{a}(xy'-y)\,dx=\frac{1}{2}\int_{2a}^{a}\{(x-2a)^2+4a(x-2a)\}\,dx\\ &=\frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}(x-2a)^3+2a(x-2a)^2\,\Big]_{2a}^{a}=\frac{5}{6}a^3\end{aligned}$$

■

2 (1) 加法定理により

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \mathbf{2+\sqrt{3}}$$

(2) (1) の結果から　$\tan 15^\circ = \dfrac{1}{\tan 75^\circ} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

$a = d\tan 75^\circ = d(2+\sqrt{3})$，$b = d\tan 15^\circ = d(2-\sqrt{3})$

これらを $\mathrm{AB} = a - b = 6$ に代入すると

$$2\sqrt{3}d = 6 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{d = \sqrt{3}}$$

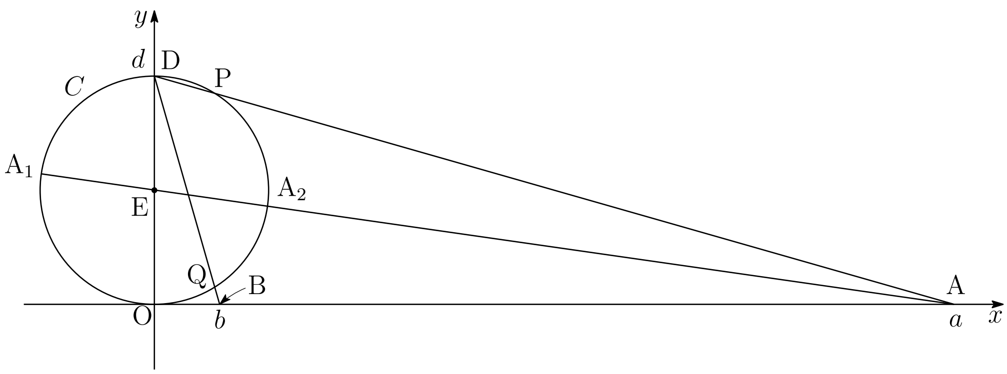
よって　$a = \sqrt{3}(2+\sqrt{3}) = \mathbf{2\sqrt{3}+3}$，　$b = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = \mathbf{2\sqrt{3}-3}$

(3) C の中心を E とし，その半径を $r = \mathrm{OE}$ とし，直線 AE と C の 2 つの交点を $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$ とすると，方べきの定理により

$$\mathrm{AP{\cdot}AD} = \mathrm{AA_1{\cdot}AA_2} = (\mathrm{AE}+r)(\mathrm{AE}-r) = \mathrm{AE}^2 - r^2$$
$$= \mathrm{AE}^2 - \mathrm{OE}^2 = \mathrm{AO}^2$$

同様に，直線 BE と C の 2 つの交点を $\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$ とすると

$$\mathrm{BQ{\cdot}BD} = \mathrm{BB_1{\cdot}BB_2} = (\mathrm{BE}+r)(\mathrm{BE}-r) = \mathrm{BE}^2 - r^2$$
$$= \mathrm{BE}^2 - \mathrm{OE}^2 = \mathrm{BO}^2$$



(4) (3) の結論の 2 式の辺々を掛けると　$\mathrm{AP{\cdot}AD} \times \mathrm{BQ{\cdot}BD} = \mathrm{AO^2{\cdot}BO^2}$

したがって　$\mathrm{AP{\cdot}BQ} = \dfrac{\mathrm{AO^2{\cdot}BO^2}}{\mathrm{AD{\cdot}BD}} = \dfrac{a^2b^2}{\sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)}}$

$d^2 = 3$，$a+b = 4\sqrt{3}$，$ab = 3$ より，$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 42$

$$\mathrm{AP{\cdot}BQ} = \frac{(ab)^2}{\sqrt{(ab)^2 + (a^2+b^2)d^2 + d^4}} = \frac{3^2}{\sqrt{3^2 + 42{\cdot}3 + 3^2}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x \geqq 2\log_t x$ より　$x+1 \geqq 2\log_t x + 1 = 2\log_t \sqrt{t}x$　$\cdots$①

$x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$ より $(t>1)$，$(\sqrt{t}-1)x > 1$ であるから

$\sqrt{t}x - (x+1) = (\sqrt{t}-1)x - 1 > 0$　ゆえに　$\sqrt{t}x > x+1$　$\cdots$②

①，② から　　$x+1 > 2\log_t(x+1)$

(2) (1) の結論に $t=2$ を代入すると，$x > \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ のとき

$$x \geqq 2\log_2 x \quad \Longrightarrow \quad x+1 > 2\log_2(x+1)$$

これから，$x > \sqrt{2}+1$ のとき　$2^x \geqq x^2 \quad \Longrightarrow \quad 2^{x+1} > (x+1)^2$　$\cdots(*)$

$(*)$ より，$2^N \geqq N^2$ $(N \geqq 3)$ を満たす自然数 N が存在するならば，$n > N$ であるすべての自然数 n について，次が成立する．

$$2^n > n^2$$

$n \leqq 2\log_2 n$ を変形すると　　$2^n \leqq n^2$　$\cdots(**)$

したがって，$(**)$ を満たす n は $n \leqq N$ に限られる．

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ について，2^n と n^2 の値を調べると，下の表から　$N=4$

n	1	2	3	4
2^n	2	4	8	16
n^2	1	4	9	16

よって，$(**)$ を満たす n は　　$\boldsymbol{n=2,\ 3,\ 4}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ より (a_n, b_n は整数)　$a_1 = 1,\ b_1 = 1$

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n \\ &= (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって　$(*)\begin{cases} \boldsymbol{a_{n+1} = a_n + 2b_n} \\ \boldsymbol{b_{n+1} = a_n + b_n} \end{cases}$

$(a_1,\ b_1) = (1,\ 1)$ より，順次，$n = 1, 2, 3, 4, 5$ を $(*)$ に代入すると

$$(a_2,\ b_2) = (3,\ 2),\quad (a_3,\ b_3) = (7,\ 5),\quad (a_4,\ b_4) = (17,\ 12),$$
$$(a_5,\ b_5) = (41,\ 29),\quad (a_6,\ b_6) = (99,\ 70)$$

よって　　$\boldsymbol{b_4 = 12,\quad b_5 = 29,\quad b_6 = 70}$

(2)　　(A)　　$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$

［1］$n = 1$ のとき，$a_1 = 1,\ b_1 = 1$ となり，(A) が成立する．

［2］$n = k$ のとき，

$$(1-\sqrt{2})^k = a_k - b_k\sqrt{2}$$

が成立すると仮定すると，$(*)$ に注意して

$$\begin{aligned} (1-\sqrt{2})^{k+1} &= (1-\sqrt{2})(a_k - b_k\sqrt{2}) \\ &= a_k + 2b_k - (a_k + b_k)\sqrt{2} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

(3) $a_n + b_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n$，$a_n - b_n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^n$ の辺々の掛けると

$$a_n{}^2 - 2b_n{}^2 = (-1)^n$$

$(*)$ の第 2 式より　$a_n = b_{n+1} - b_n$　これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n + 2b_n \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+2} - 2b_{n+1} = b_n$$

したがって　$$\begin{aligned} a_n{}^2 - 2b_n{}^2 &= (b_{n+1} - b_n)^2 - 2b_n{}^2 \\ &= b_{n+1}(b_{n+1} - 2b_n) - b_n{}^2 \\ &= b_{n+1}b_{n-1} - b_n{}^2 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{b_{n+1}b_{n-1} - b_n{}^2 = (-1)^n}$

(4) (3) の結果に $n=5$ を代入すると　$b_6b_4 - {b_5}^2 = (-1)^5$

$$12b_6 - 29b_5 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b_6 \cdot (-12) - b_5 \cdot (-29) = 1$$

$b_6 \cdot 29 - b_5 \cdot 70 = 0$ を上の第 2 式の辺々に加えると

$$b_6 \cdot 17 - b_5 \cdot 41 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(p,\ q) = (17,\ 41)}$$

別解 1 (ユークリッドの互除法)

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline
2\,) & 5\,) & 12\,) & 29\,) & 70 \\
 & 4 & 10 & 24 & 58 \\ \hline
 & 1 & 2 & 5 & 12
\end{array}$$

$b_6 = 70,\ b_5 = 29$ であり，$p = 12,\ q = 5,\ r = 2$ とおくと

$$b_6 = 2b_5 + p, \quad b_5 = 2p + q, \quad p = 2q + r, \quad q = 2r + 1$$

$1 = q - 2r$ に $r = p - 2q,\ q = b_5 - 2p,\ p = b_6 - 2b_5$ を順次代入すると

$$\begin{aligned}
1 &= q - 2r = q - 2(p - 2q) \\
&= -2p + 5q = -2p + 5(b_5 - 2p) \\
&= -12p + 5b_5 = -12(b_6 - 2b_5) + 5b_5 \\
&= 29b_5 - 12b_6
\end{aligned}$$

したがって　$b_6 \cdot (-12) - b_5 \cdot (-29) = 1$

$b_6 \cdot 29 - b_5 \cdot 70 = 0$ を上式の辺々に加えると

$$b_6 \cdot 17 - b_5 \cdot 41 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(p,\ q) = (17,\ 41)}$$

別解 2 (合同式)　$70p - 29q = 1$ について，$70 \equiv 12,\ 29 \equiv 0 \pmod{29}$ より

$$\begin{aligned}
70p - 29q \equiv 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 12p \equiv 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 36p \equiv 7p \equiv 3 \pmod{29} \\
&\Longleftrightarrow \quad 28p = -p \equiv 12 \quad \Longleftrightarrow \quad p \equiv 17 \pmod{29}
\end{aligned}$$

$p = 17$ を $70p - 29q = 1$ に代入することにより　$q = 41$

よって　　$\boldsymbol{(p,\ q) = (17,\ 41)}$　■