# 令和５年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
# 文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

**1** 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある．玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする．A，B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う．ただし取り出した玉は袋の中には戻さない．A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する．B が白玉を取り出したら B の勝ちとし，その時点でゲームを終了する．袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームは終了する．

(1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ．

(2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ．

**2** 平面上の半径 1 の円 $C$ の中心 O から距離 4 だけ離れた点 L をとる．点 L を通る円 $C$ の 2 本の接線を考え，この 2 本の接線と円 $C$ の接点をそれぞれ M，N とする．以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 LMN の面積を求めよ．

(2) 三角形 LMN の内接円の半径 $r$ と，三角形 LMN の外接円の半径 $R$ をそれぞれ求めよ．

**3** $a$ を実数とし，2 次関数 $f(x) = x^2 + 2ax - 3$ を考える．実数 $x$ が $a \leqq x \leqq a+3$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値および最小値を，それぞれ $M(a)$，$m(a)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $M(a)$ を $a$ を用いて表せ．

(2) $m(a)$ を $a$ を用いて表せ．

(3) $a$ がすべての実数を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

**4** 関数 $f(x)$ に対して，座標平面上の 2 つの点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える．実数 $x$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形の面積を $S$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = -2|x-1| + 2$ に対して，$S$ の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，曲線 $y = f(x)$ の接線で，傾きが 1 のものの方程式を求めよ．

(3) 設問 (2) の関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，$S$ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 赤玉 4 個，白玉 5 個の計 9 個を取り出す場合の総数は (9 個の玉を取り出して一列に並べる場合の総数)

$$\frac{9!}{4!5!} = 126 \quad (\text{通り})$$

ゲームが引き分けとなるのは，次の 1 通り．

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 白 | 赤 | 白 | 赤 | 白 | 赤 | 白 | 赤 | 白 |

よって，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{1}{126}}$

(2) A が勝つのは，次の場合である．

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 赤 | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 白 | 赤 | 赤 | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 白 | 赤 | 白 | 赤 | 赤 | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 白 | 赤 | 白 | 赤 | 白 | 赤 | 赤 | | |

これらの総数は

$$\frac{8!}{3!5!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{4!}{1!3!} + \frac{2!}{2!} = 56 + 15 + 4 + 1 = 76$$

よって，求める確率は $\dfrac{76}{126} = \boldsymbol{\dfrac{38}{63}}$ ■

**2** (1) 円 $C$ と OL の交点を A，B とし，OL と MN の交点を H とする．
方べきの定理により　$\mathrm{LA}\cdot\mathrm{LB} = \mathrm{LM}^2$

$$5\cdot 3 = \mathrm{LM}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{LM} = \sqrt{15}$$

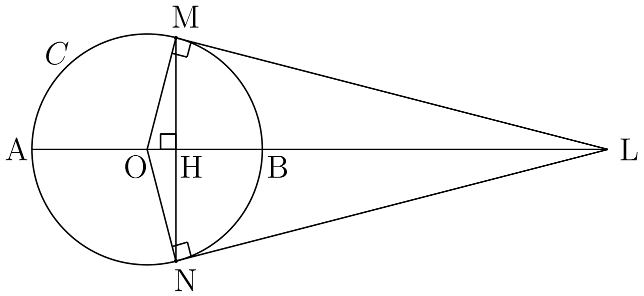
$\mathrm{OL}\cdot\mathrm{MH} = \mathrm{OM}\cdot\mathrm{LM}$ より　$4\mathrm{MH} = 1\cdot\sqrt{15}$　ゆえに　$\mathrm{MH} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OM}^2 - \mathrm{MH}^2} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{LH} = \mathrm{OL} - \mathrm{OH} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\mathrm{MN} = 2\cdot\mathrm{MH} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

△LMN の面積を $S$ とすると　$S = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{MN}\cdot\mathrm{LH} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}\cdot\dfrac{15}{4} = \boldsymbol{\dfrac{15\sqrt{15}}{16}}$




(2) △LMN の周の長さを $2s$ とすると

$$2s = \sqrt{15} + \sqrt{15} + \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{5\sqrt{15}}{4}$$

$S = rs$ より　$\dfrac{15\sqrt{15}}{16} = r\cdot\dfrac{5\sqrt{15}}{4}$　よって　$\boldsymbol{r = \dfrac{3}{4}}$

M，N は OL を直径とする円周上の点である．

したがって，△LMN の外接円の半径 $R$ は

$$2R = \mathrm{OL} = 4 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{R = 2}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=x^2+2ax-3$ より　$f(x)=(x+a)^2-a^2-3$

定義域 $a \leqq x \leqq a+3$ の中央は　$a+\dfrac{3}{2}$

(i) $-a \leqq a+\dfrac{3}{2}$，すなわち，$a \geqq -\dfrac{3}{4}$ のとき

$$M(a)=f(a+3)=3a^2+12a+6$$

(ii) $a+\dfrac{3}{2} \leqq -a$，すなわち，$a \leqq -\dfrac{3}{4}$ のとき

$$M(a)=f(a)=3a^2-3$$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{M(a)=\begin{cases} 3a^2+12a+6 & \left(a \geqq -\dfrac{3}{4}\right) \\ 3a^2-3 & \left(a \leqq -\dfrac{3}{4}\right) \end{cases}}$

(2) (i) $a \leqq -a \leqq a+3$，すなわち，$-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 0$ のとき

$$m(a)=f(-a)=-a^2-3$$

(ii) $-a \leqq a$，すなわち，$a \geqq 0$ のとき

$$m(a)=f(a)=3a^2-3$$

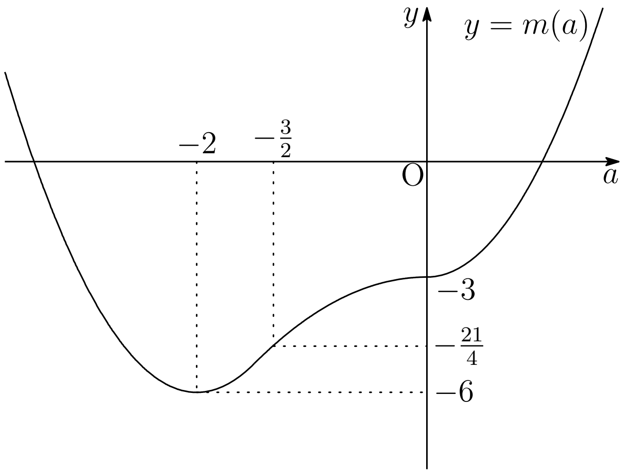
(iii) $a+3 \leqq -a$，すなわち，$a \leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき

$$m(a)=f(a+3)=3a^2+12a+6$$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{m(a)=\begin{cases} 3a^2+12a+6 & \left(a \leqq -\dfrac{3}{2}\right) \\ -a^2-3 & \left(-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 0\right) \\ 3a^2-3 & (0 \leqq a) \end{cases}}$

(3) (2) の結果から　$3a^2+12a+6=3(a+2)^2-6$

よって，求める最小値は　$m(-2)=\mathbf{-6}$

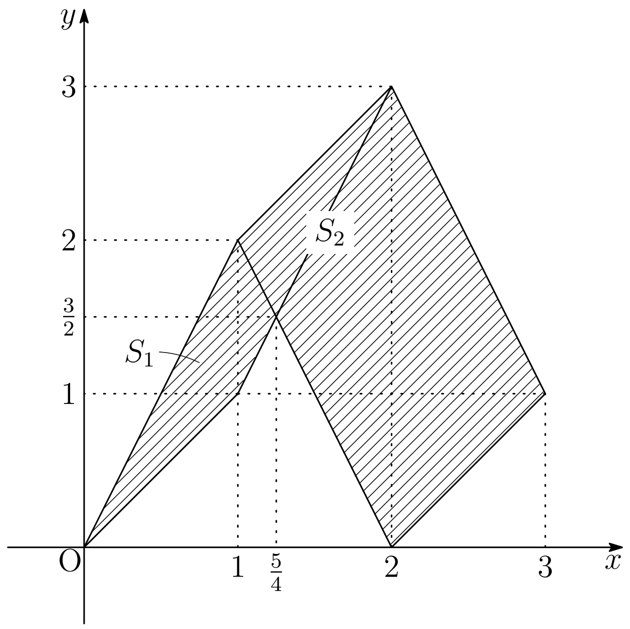



■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 線分 PQ が通過してできる図形は，下の図の斜線部分で境界線を含む．
下の図の $S_1$，$S_2$ の面積は

$$S_1 = \frac{1}{2}(2-1)\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{8} \quad S_2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3-1) = 3$$

よって　$S = S_1 + S_2 = \frac{5}{8} + 3 = \mathbf{\frac{29}{8}}$




(2) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ を微分すると　$f'(x) = x - 1$
$f'(x) = 1$ を解くと　$x = 2$　このとき　$f(2) = \frac{1}{2}$
求める接線は，点 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y - \frac{1}{2} = x - 2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - \frac{3}{2}}$$

(3) 線分 PQ が通過してできる図形は，下の図の斜線部分で境界線を含む．
この斜線部分の面積 $S$ は，カバリエリの原理により，下の図の平行四辺形 ABCD の面積に等しいから

$$\boldsymbol{S = 2}$$