令和４年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数 N を考える．ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす．

(1) $K=99$ のとき，N を求めよ．

(2) $K=99$ のとき，$l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよ．

(3) $N>K$ を満たす最小の K を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 t の関数

$$F(t)=\int_0^1 |x^2-t^2|\,dx$$

について考える．

(1) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$F(t)$ を t の整式として表せ．

(2) $t \geqq 0$ のとき，$F(t)$ を最小にする t の値 T と $F(T)$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a,\ b$ を正の実数とし，xy 平面上の直線 $\ell : ax+by-2=0$ を考える．

(1) 直線 ℓ と原点の距離が 2 以上であり，直線 ℓ と直線 $x=1$ の交点の y 座標が 2 以上であるような点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲 D を求め，ab 平面上に図示せよ．

(2) 点 $(a,\ b)$ が (1) で求めた範囲 D を動くとする．このとき，$3a+2b$ を最大にする $a,\ b$ の値と，$3a+2b$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ xyz 空間内の点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(\sqrt{6}, -\sqrt{3},\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 OABC を考える．3 点 OAB を含む平面からの距離が 1 の点のうち，点 O に最も近く，x 座標が正のものを H とする．

(1) H の座標を求めよ．

(2) 3 点 OAB を含む平面と点 C の距離を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $l,\ m,\ n$ は正の奇数であるから

$$l=2a+1,\quad m=2b+1,\quad n=2c+1\quad (a,\ b,\ c \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおくと，$l+m+n=99$ のとき

$$2a+1+2b+1+2c+1=99 \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c=48$$

これを満たす組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は

$${}_3\mathrm{H}_{48}={}_{3+48-1}\mathrm{C}_{48}={}_{50}\mathrm{C}_2=\frac{50\cdot49}{2}=\mathbf{1225}\ (\text{個})$$

(2) $l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つだけ含む組は

$$\text{(i)}\ \ l=m\neq n \qquad \text{(ii)}\ \ m=n\neq l \qquad \text{(iii)}\ \ n=l\neq m$$

の 3 つの場合がある．(i) について

$$2a+1=2b+1\neq 2c+1 \quad \text{ゆえに} \quad a=b\neq c,\ a+b+c=48$$

$b=a$ より，$c=48-2a\neq a$ であるから

$$a\geqq 0,\quad 48a-2a\geqq 0,\quad 48-2a\neq a$$

a は 16 を除く 0 以上 24 以下の整数で 24 組ある．

(ii)，(iii) の場合も (i) の場合と同様にそれぞれ 24 組ある．

また，$l=m=n$ が等しい同じ奇数を含む組が 1 組ある．

よって，求める個数は　$24\times3+1=\mathbf{73}$ (個)

(3) $K=2k+3$ とおき (k は 0 以上の整数)，N を求める．(1) と同様に

$$2a+1+2b+1+2c+1=2k+3 \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c=k$$

したがって　$N={}_3\mathrm{H}_k={}_{3+k-1}\mathrm{C}_k={}_{k+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$

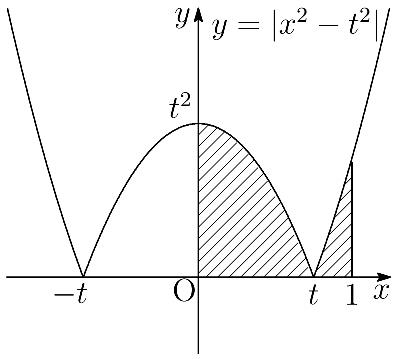
$N>K$ より　$\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}>2k+3$　ゆえに　$k(k-1)>4$

これを満たす最小の k が 3 であるから，求める K は　$2\cdot3+3=\mathbf{9}$　■

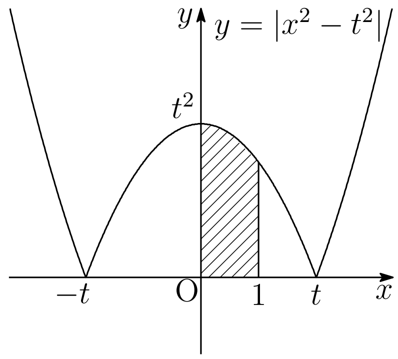
2 (1) $0 \leqq t \leqq 1$，$F(t) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - t^2|\,dx$ より

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t (t^2 - x^2)\,dx + \int_t^1 (x^2 - t^2)\,dx \\ &= \left[\, t^2 x - \frac{x^3}{3} \,\right]_0^t + \left[\, \frac{x^3}{3} - t^2 x \,\right]_t^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき



$1 \leqq t$ のとき



(2) $1 \leqq t$ のとき

$$F(t) = \int_0^1 (t^2 - x^2)\,dx = \left[\, t^2 x - \frac{x^3}{3} \,\right]_0^1 = t^2 - \frac{1}{3}$$

$1 \leqq t$ において，$F(t)$ は単調増加であるから，$t \geqq 0$ における最小値は $0 \leqq t \leqq 1$ で調べればよい．(1) の結果から

$$F'(t) = 4t^2 - 2t = 2t(2t - 1)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$F'(t)$		$-$	0	$+$	
$F(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

よって　$\boldsymbol{T = \dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\ell : ax + by - 2 = 0\ (a > 0,\ b > 0)$ と原点の距離が 2 以上であるから

$$\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \geqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2+b^2 \leqq 1$$

ℓ と直線 $x = 1$ の交点の y 座標は

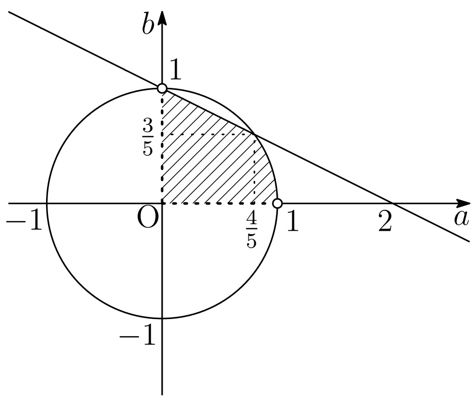
$$a + by - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{2-a}{b}$$

この y 座標が 2 以上であるから $\dfrac{2-a}{b} \geqq 2$ ゆえに $b \leqq -\dfrac{a}{2} + 1$

以上の結果から，点 $(a,\ b)$ の表す不等式は，次のようになる．

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \leqq -\dfrac{a}{2} + 1 \\ a^2 + b^2 \leqq 1 \end{cases}$$

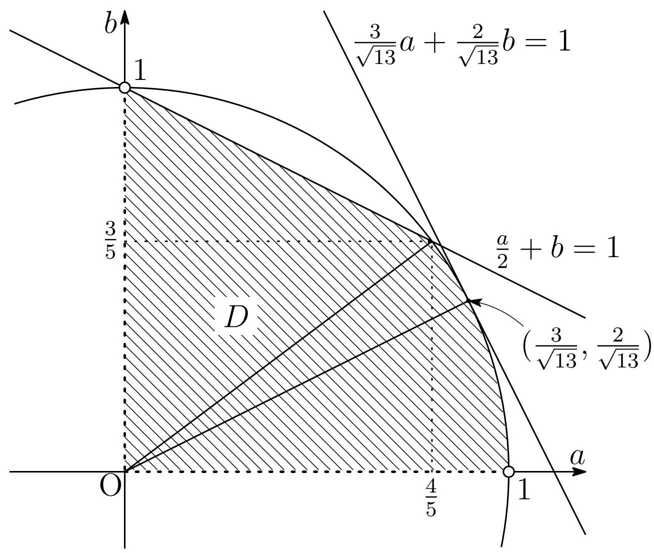
D の表す領域は，下の図の斜線部分である．ただし，点線部分と ◦ は含まない．



(2) $m : 3a + 2b = k$ とおくと，直線 m は傾き $\dfrac{2}{3}$ の直線と垂直である．m と円 $a^2 + b^2 = 1$ の接点は，直線 $b = \dfrac{2}{3}a$ との交点であるから

$$a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \ b = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

原点と点 $\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ を結ぶ直線の傾きが $\dfrac{3}{4}$ であるから，$\dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$ に注意すると，$3a + 2b$ は，$\boldsymbol{a = \dfrac{3}{\sqrt{13}}}$**，**$\boldsymbol{b = \dfrac{2}{\sqrt{13}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{13}}$ をとる．



4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-\sqrt{3},\ 0,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つは

$$(\sqrt{2}, -4,\ \sqrt{6})$$

であり，このベクトルの大きさは

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-4)^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{6}$$

したがって，これと平行な単位ベクトルは

$$\vec{n}=\frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{2}, -4,\ \sqrt{6})=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{1}{2}\right)$$

x 成分に注意すると　$\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{1}{2}}\right)$

(2) (1) で求めた単位ベクトル $\vec{n}$ を用いると，求める距離は　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{n}|$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{6}, -\sqrt{3},\ \sqrt{2})$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{n}&=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}+(-\sqrt{3})\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって，求める距離は　$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(3) $\triangle$OAB の面積は

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6\cdot 4-0^2}=\sqrt{6}$$

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{n}|=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{3}}$$

補足 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表す[1]．$|\vec{a}\times\vec{b}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張る平行四辺形の面積に等しい．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)