令和３年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

1 $a,\ b$ を実数とする．曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ．

2 正八角形 $\mathrm{A_1A_2 \cdots A_8}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ．

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ．

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 $(*)$ を満たすものの個数を求めよ．

$(*)$　四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる．

3 平面において，2 つの点 O，A の間の距離が 1 であるとし，点 O と点 A を中心とする 2 つの円をそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1，C_2 は 2 点 P，Q において交わり，$\angle\mathrm{OPA} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとし，C_2 の半径 r は $r < 1$ を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) C_1 の半径を求めよ．

(2) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\angle\mathrm{PAO}$ の大きさを求めよ．

(3) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，円 C_1 の内部と円 C_2 の内部との共通部分の面積を求めよ．

4 以下の問いに答えよ．

(1) 3 次関数 $y = x^3 + x^2$ のグラフと 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 16$ のグラフの共通接線 (どちらのグラフにも接する直線) は 2 本ある．それらの方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた 2 本の共通接線と 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 16$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=ax^2+bx+1$ とおくと，曲線 $y=f(x)$ は，点 $(0,\ 1)$ を通る．

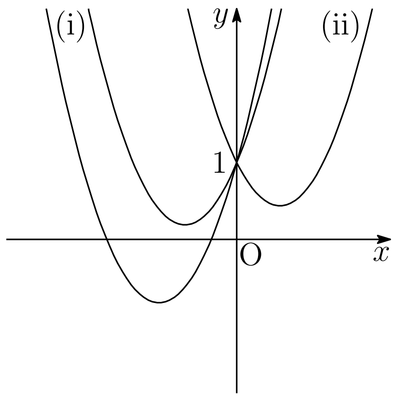
$a<0$ のとき，上に凸の放物線 $y=f(x)$ は x 軸の正の部分と共有点をもつ．

したがって，$a \geqq 0$ であることが必要である．

［1］$a=0$ のとき，直線 $y=bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないから

$$b \geqq 0$$

［2］$a>0$ のとき，$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+1-\dfrac{b^2}{4a}$ より，放物線 $y=f(x)$ の頂点に着目すると，条件を満たすのは，次の (i) または (ii) である．

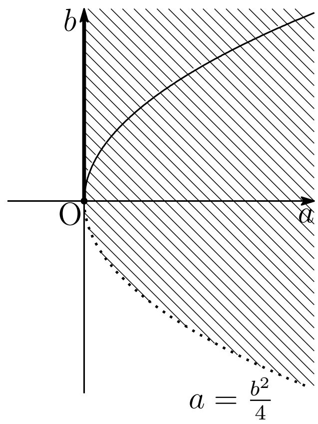


(i) $-\dfrac{b}{2a} \leqq 0$

(ii) $-\dfrac{b}{2a}>0,\ 1-\dfrac{b^2}{4a}>0$

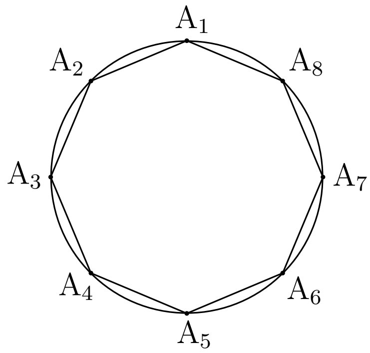
すなわち　(i) $b \geqq 0$　(ii) $b<0,\ a>\dfrac{b^2}{4}$

［1］,［2］より，求める領域は，下の図の斜線部分で，点線部分は含まない．



2 (1) 直角三角形の斜辺は，A_1A_5，A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 の 4 通りあり，それぞれの斜辺に対する頂点の選び方が 6 通りある．よって，求める個数は

$$4 \times 6 = \mathbf{24}\ (個)$$



(2) A_1 を挟む 2 辺が等しい二等辺三角形で直角三角形でないものが $\triangle A_1A_2A_8$，$\triangle A_1A_4A_6$ の 2 個あるから，二等辺三角形で直角三角形でないものの総数は

$$2 \times 8 = 16\ (個)$$

(1) と上の結果から，直角三角形または二等辺三角形であるものの個数は

$$24 + 16 = 40\ (個)$$

3 個の頂点を結んでできる三角形の総数は　${}_8C_3 = 56$ (個)

よって，求める個数は　　$56 - 40 = \mathbf{16}$ **(個)**

(3) 直角三角形の斜辺となるのは，A_1A_5，A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 であるから，直角三角形とならないのは，A_1 と A_5，A_2 と A_6，A_3 と A_7，A_4 と A_8 をともに含まない場合である．直角三角形とならない 4 点の選び方は

$$\{A_1,\ A_5\},\ \{A_2,\ A_6\},\ \{A_3,\ A_7\},\ \{A_4,\ A_8\}$$

の 4 組からそれぞれ 1 つずつ選ぶ場合の数　2^4 (個)

よって，求める場合の数は

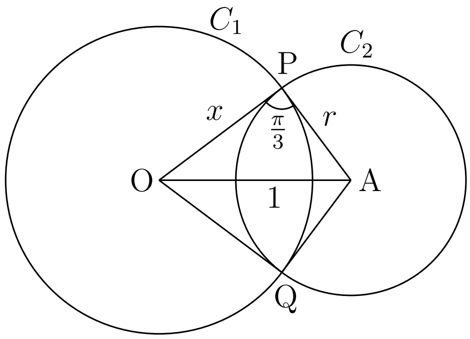
$${}_8C_4 - 2^4 = 70 - 16 = \mathbf{54}\ \textbf{(個)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{AP}=r\ (r<1)$，$\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\mathrm{OP}=x$ とおいて，$\triangle\mathrm{OAP}$ に余弦定理を適用すると

$$1^2=r^2+x^2-2rx\cos\frac{\pi}{3}\quad ゆえに\quad x^2-rx+r^2-1=0$$

$r<1$ より，この方程式が正・負の解をもつことに注意して

$$x=\boldsymbol{\frac{r+\sqrt{4-3r^2}}{2}}$$



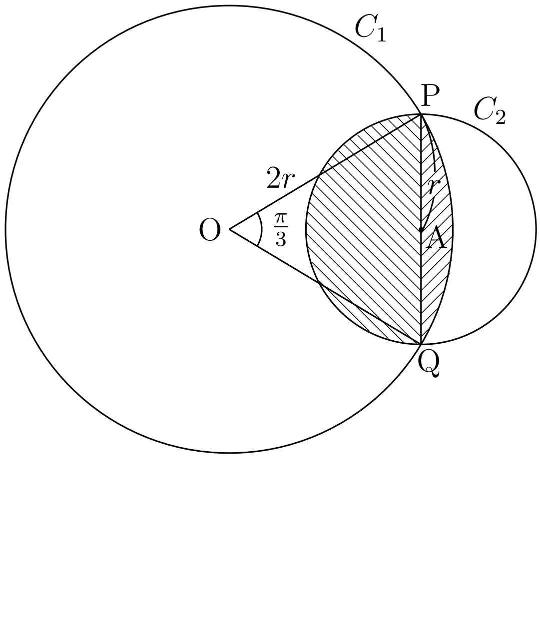
(2) (1) の結果に $r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を代入すると　$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\theta=\angle\mathrm{PAO}$ とおいて，正弦定理に適用すると

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\quad ゆえに\quad \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}=1\quad よって\quad \theta=\angle\mathbf{PAO}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(3) $r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．(2) の結果から，求める面積は

$$\frac{\pi}{2}r^2+\frac{1}{2}(2r)^2\left(\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=r^2\left(\frac{7}{6}\pi-\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{7\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y=x^3+x^2$ より　$y'=3x^2+2x$

$y=x^3+x^2$ 上の点 $(t,\ t^3+t^2)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3+t^2)=(3t^2+2t)(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2 \quad (*)$$

この直線と放物線 $y=x^2+4x+16$ が接するから，これらの方程式から y を消去した 2 次方程式

$$x^2+4x+16=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2$$

すなわち，2 次方程式

$$x^2-(3t^2+2t-4)x+2t^3+t^2+16=0 \qquad (**)$$

が重解をもつから，その係数について

$$(3t^2+2t-4)^2-4\cdot 1(2t^3+t^2+16)=0$$

これを整理すると

$$9t^4+4t^3-24t^2-16t-48=0$$
$$(t+2)(t-2)(9t^2+4t+12)=0$$

$9t^2+4t+12=(t+2)^2+8(t^2+1)>0$ に注意して解くと　$t=\pm 2$

求める 2 接線は，$t=2,-2$ をそれぞれ $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{y=16x-20,\ y=8x+12}$$

(2) $(**)$ より，放物線 $y=x^2+4x+16$ と接線 $(*)$ の接点の x 座標は

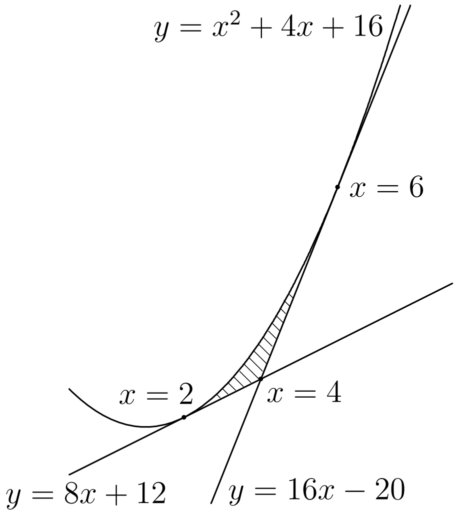
$$x=\frac{3t^2+2t-4}{2}$$

したがって，$t=2$ のとき $x=6$，$t=-2$ のとき $x=2$

また，2 接線の交点の x 座標は

$$16x-20=8x+12 \quad \text{これを解いて}\quad x=4$$

以上の結果から，求める面積は下の図の斜線部分である．



求める面積を S とすると[1]

$$\begin{aligned}
S &= \int_2^4 \{(x^2+4x+16)-(8x+12)\}\,dx \\
&\qquad\qquad + \int_4^6 \{(x^2+4x+16)-(16x-20)\}\,dx \\
&= \int_2^4 (x-2)^2\,dx + \int_4^6 (x-6)^2\,dx \\
&= \left[\,\frac{1}{3}(x-2)^3\,\right]_2^4 + \left[\,\frac{1}{3}(x-6)^3\,\right]_4^6 = \boldsymbol{\frac{16}{3}}
\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 を参照)