令和２年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

1 a を $-2 \leqq a \leqq 3$ を満たす実数とする．次の性質をもつ関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < -2 \text{ のとき}) \\ (x-a)(x+2) & (-2 \leqq x \leqq a \text{ のとき}) \\ 2(x-a)(x-3) & (a \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x > 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とおく．

(1) $S(a)$ を求めよ．

(2) $S(a)$ が最大となる a の値を求めよ．また，$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ．

2 n を正の整数，a，b を 0 以上の整数とする．

(1) $n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ．

(3) 等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす $a,\ b,\ n$ の組 $(a,\ b,\ n)$ をすべて求めよ．

3 a を 0 でない実数とする．xy 平面において，円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$，直線 $L : -4x + 3y + a = 0$，直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ を考える．

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ．

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) 集合 $\{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と L の共有点 $\} \cup \{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ．

4 6 枚の硬貨を同時に投げて，表がでた硬貨が s 枚，裏がでた硬貨が t 枚であったとき，ベクトル $\vec{p} = (x,\ y)$ を $\vec{p} = s(2,\ 1) + t(-1,\ 2)$ で定める．

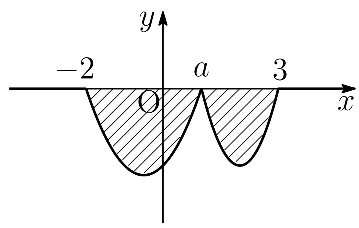
(1) $x + y$ の値を求めよ．

(2) $\vec{p} = (0,\ 6)$ となる確率を求めよ．

(3) $\vec{p}$ と $\vec{q} = (3,\ 1)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ 以下となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $S(a)$ は右の図の斜線部分の面積であるから



$$
\begin{aligned}
S(a) &= -\int_{-2}^{a}(x-a)(x+2)\,dx \\
&\qquad -\int_{a}^{3}2(x-a)(x-3)\,dx \\
&= \frac{1}{6}(a+2)^3+\frac{1}{3}(3-a)^3 \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{6}a^3+4a^2-7a+\frac{31}{3}}
\end{aligned}
$$

(2) (1) の結果から　$S'(a)=-\dfrac{1}{2}a^2+8a-7$

$S'(a)=0$ とすると　$a=8\pm5\sqrt{2}$

a	-2	$\cdots$	$8-5\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\frac{125}{3}$	↘	極小	↗	$\frac{125}{6}$

よって　$S(a)$ が最大となる a の値は　$\boldsymbol{a=-2}$

$S(a)$ が最小となる a の値は　$\boldsymbol{a=8-5\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $$2^n+n^2+8<3^n \quad \cdots(*)$$

［1］$n=3$ のとき

$$(*)\text{ の左辺}=2^3+3^2+8=25,\quad (*)\text{ の右辺}=3^3=27$$

したがって，このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，すなわち，$2^k+k^2+8<3^k$ であると仮定すると

$$\begin{aligned}3^{k+1}-\{2^{k+1}+(k+1)^2+8\}&>3(2^k+k^2+8)-2^{k+1}-(k+1)^2-8\\&=2^k+2k^2-2k+15\\&=2^k+k^2+(k-1)^2+14>0\end{aligned}$$

ゆえに　$2^{k+1}+(k+1)^2+8<3^{k+1}$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］,［2］より，$n\geqq 3$ に対して，$(*)$ が成立する．

(2) (1) の結果に注意すると

$$2^n+n^2+8\geqq 3^n \quad \cdots(**)$$

を満たす $n\geqq 3$ の整数は存在しないから，$n=1,\ 2$ について調べればよい．

- $n=1$ のとき，$2^1+1^2+8\geqq 3^1$ より，$(**)$ は成立する．
- $n=2$ のとき，$2^2+2^2+8\geqq 3^2$ より，$(**)$ は成立する．

よって　$\boldsymbol{n=1,\ 2}$

(3) (1) の結果から，$n\geqq 3$ のとき　$3^n-(2^n+n^2+8)>0$

また，与えられた等式から　$3^n-(2^n+n^2+8)=-an-b$

上の 2 式から　$-an-b>0$　ゆえに　$an+b<0 \quad \cdots(\mathrm{A})$

$a,\ b$ は 0 以上の整数であるから，$n\geqq 3$ のとき，(A) を満たす $(a,\ b,\ n)$ は存在しない．したがって，$n=1,\ 2$ について調べればよい．

(i) $n=1$ のとき　$2^1+1^2+8=3^1+a+b$　ゆえに　$a+b=8 \quad \cdots①$

(ii) $n=2$ のとき　$2^2+2^2+8=3^2+2a+b$　ゆえに　$2a+b=7 \quad \cdots②$

①，② より　$\boldsymbol{(a,\ b,\ n)=(j,\ 8-j,\ 1)\ \ (j=0,1,2,\cdots,8)}$,

$\boldsymbol{(a,\ b,\ n)=(k,\ 7-2k,\ 2)\ \ (k=0,1,2,3)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ より　$(x-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$

円 C は，中心 $(a,\ 2)$，半径 $|a|$ の円である．

$L : -4x + 3y + a = 0$，$M : 3x + 4y - 7a = 0$ の交点は

これらの 2 式を連立して解くと　$(a,\ a)$

これが円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ 上にあるから

$$(a-a)^2 + (a-2)^2 = a^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 1}$$

(2) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $L : -4x + 3y + a = 0$ の距離を d_1 とすると

$$d_1 = \frac{|-4a + 6 + a|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|-3a + 6|}{5}$$

C と L が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_1 < |a|$ であるから

$$\frac{|-3a + 6|}{5} < |a| \quad \text{ゆえに} \quad (3a-6)^2 < (5a)^2$$

したがって　$(a+3)(4a-3) > 0$　これを解いて　$\boldsymbol{a < -3,\ \dfrac{3}{4} < a}$

(3) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ の距離を d_2 とすると

$$d_2 = \frac{|3a + 8 - 7a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-4a + 8|}{5}$$

C と M が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_2 < |a|$ であるから

$$\frac{|-4a + 8|}{5} < |a| \quad \text{ゆえに} \quad (4a-8)^2 < (5a)^2$$

したがって　$(a+8)(9a-8) > 0$　これを解いて　$a < -8,\ \dfrac{8}{9} < a$

(2) の結果および上式の不等号を等号にした，すなわち，$a = -3,\ \dfrac{3}{4}, -8,\ \dfrac{8}{9}$ のとき，それぞれ円と直線が 1 点を共有する (1 点で接する)．

(i) C と L が 2 点を共有し，C と M が 1 点を共有するのは　$a = -8,\ \dfrac{8}{9}$

(ii) C と L が 1 点を共有し，C と M が 2 点を共有する a は存在しない．

(iii) (1) の結果から，$a = 1$ のとき，C と L は 2 点を共有し，同時に C と M も 2 点を共有する．このとき，その 1 点は C，L，M によって共有されるので，$a = 1$ は条件を満たす．

(i)〜(iii) から，求める a の値は　$\boldsymbol{a = -8,\ \dfrac{8}{9},\ 1}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\vec{p}=(x,\ y)$，$\vec{p}=s(2,-1)+t(-1,\ 2)$ より

$$\vec{p}=(2s-t,-s+2t)\quad \text{よって}\quad x+y=s+t=\mathbf{6}$$

(2) $\vec{p}=(0,\ 6)$ のとき

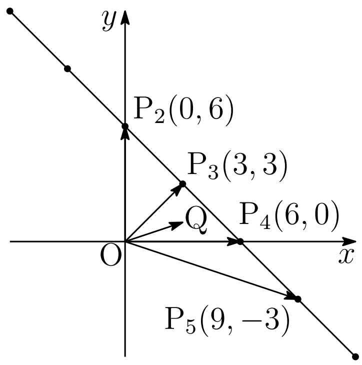
$$2s-t=0,\quad -s+2t=6\quad \text{これを解いて}\quad s=2,\ t=4$$

表が 2 枚，裏が 4 枚でる確率であるから

$$\frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{64}}$$

(3) $t=6-s$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{p}&=s(2,-1)+(6-s)(-1,\ 2)\\&=(3s-6,\ 12-3s)\end{aligned}$$



$0\leqq s\leqq 6$ に対する $\vec{p}$ の終点を P_s とし，
O を始点とする $\vec{q}$ の終点を Q とすると

$\mathrm{P}_0(-6,\ 12)$，$\mathrm{P}_1(-3,\ 9)$，$\mathrm{P}_2(0,\ 6)$，
$\mathrm{P}_3(3,\ 3)$，$\mathrm{P}_4(6,\ 0)$，$\mathrm{P}_5(9,-3)$，
$\mathrm{P}_6(12,-6)$，$\mathrm{Q}(3,-1)$

$\vec{q}=(3,\ 1)$ の偏角を θ とすると $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

$\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$，$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから $\dfrac{\pi}{12}<\theta<\dfrac{\pi}{6}$

P_2，P_3，P_4，P_5 の偏角は順に $\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{4}$，0，$-\theta$

ゆえに $\angle\mathrm{QOP}_2=\dfrac{\pi}{2}-\theta>\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{QOP}_3=\dfrac{\pi}{4}-\theta<\dfrac{\pi}{6}$

$\angle\mathrm{QOP}_4=\theta<\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{QOP}_5=2\theta>\dfrac{\pi}{2}$

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ 以下となる点は P_3，P_4

したがって，$s=3$ と $s=4$ となる確率であるから

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{6!}{4!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{64}}$$