平成31年度　東北大学2次試験前期日程 (数学問題)100分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

1 $a,\ b,\ c$ を実数とし，a は 0 でないとする．xy 平面上の直線 $y = ax$ と放物線 $y = x^2 + a$ が相異なる2点 $\mathrm{P}(b,\ ab)$，$\mathrm{Q}(c,\ ac)$ で交わっているとする．$c = b^2,\ b < 0$ のとき，a と b を求めよ．

2 a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする．次の不等式を考える．

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1) $n = 6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ．

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式によって定める．

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 3,\quad a_{n+2}a_n = 2{a_{n+1}}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) すべての正の整数 n について，a_n は正であることを示せ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

4 n を2以上の整数とする．金貨と銀貨を含む n 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た金貨は取り去り，取り去った金貨と同じ枚数の銀貨を加えるという試行の繰り返しを考える．初めは n 枚すべてが金貨であり，n 枚すべてが銀貨になった後も試行を繰り返す．k 回目の試行の直後に，n 枚の硬貨のなかに金貨が j 枚だけ残る確率を $P_k(j)$ $(0 \leqq j \leqq n)$ で表す．

(1) $P_1(j)$ を求めよ．

(2) $P_k(j)$ $(k \geqq 2)$ を求めよ．

(3) $n = 3$ とする．2回目の試行の直後では金貨が少なくとも1枚残るが，3回目の試行の直後には3枚すべてが銀貨になる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $y = ax$ と $y = x^2 + a$ から y を消去して整理すると　$x^2 - ax + a = 0$

この 2 次方程式の解が b，c であるから，解と係数の関係により

$$b + c = a, \quad bc = a \quad \cdots (*)$$

$c = b^2$ を上の 2 式に代入すると

$$b + b^2 = a, \quad b^3 = a \quad \cdots (**)$$

$(**)$ から a を消去して整理すると　$b(b^2 - b - 1) = 0$

$b < 0$ であるから　　$b^2 - b - 1 = 0 \quad \cdots$ ①

$b < 0$ に注意して ① を解くと　$\boldsymbol{b = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}}$

① より，$b^2 = b + 1$．これを $(**)$ の第 1 式に代入して

$$a = b + (b + 1) = 2b + 1 = 2 \times \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 = \boldsymbol{2 - \sqrt{5}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $n=6$ より $\quad \log_a(x-6) > \dfrac{1}{2}\log_a(12-x) \quad \cdots(*)$

真数は正であるから

$$x-6>0,\ 12-x>0 \quad \text{すなわち} \quad 6<x<12 \quad \cdots①$$

(i) $a>1$ のとき，$(*)$ より $\quad (x-6)^2 > 12-x$

ゆえに $\quad (x-3)(x-8)>0$ すなわち $x<3,\ 8<x \quad \cdots②$

よって，①，② を同時に満たす整数 x は $\quad$ **9，10，11**

(ii) $0<a<1$ のとき，$(*)$ より $\quad (x-6)^2 < 12-x$

ゆえに $\quad (x-3)(x-8)<0$ すなわち $3<x<8 \quad \cdots③$

よって，①，③ を同時に満たす整数 x は $\quad$ **7**

(2) $\quad \log_a(x-n) > \dfrac{1}{2}\log_a(2n-x) \quad \cdots(**)$

真数は正であるから

$$x-n>0,\ 2n-x>0 \quad \text{すなわち} \quad n<x<2n \quad \cdots④$$

(i) $a>1$ のとき，$(**)$ より $\quad (x-n)^2 > (2n-x)$

ゆえに $\quad x^2+(1-2n)x+n^2-2n>0$

$f(x)=x^2+(1-2n)x+n^2-2n$ とおくと

$$f(x)=\left(x-n+\frac{1}{2}\right)^2-n-\frac{1}{4}$$

$$f(n)=-n<0, \quad f(2n)=n^2>0 \qquad (n \text{ は正の整数})$$

これから，④ と 2 次不等式 $f(x)>0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(2n-1)=n(n-2)>0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(ii) $0<a<1$ のとき，$(**)$ より $\quad (x-n)^2 < 2n-x$

ゆえに $\quad x^2+(1-2n)x+n^2-2n<0$

同様に，④ と 2 次不等式 $f(x)<0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(n+1)=-n+2<0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(i)，(ii) より，求める n についての必要十分条件は $\quad \boldsymbol{n>2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $(*)$ $\quad a_{n+2}a_n = 2{a_{n+1}}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

自然数 n について，$a_n > 0$，$a_{n+1} > 0$ と仮定すると，$(*)$ より

$$a_{n+2} = \frac{2{a_{n+1}}^2}{a_n} > 0$$

$a_1 = 1 > 0$，$a_2 = 3 > 0$ より，すべての自然数 n について，a_n は正である．

(2) $(*)$ より $\quad \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2\cdot\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_2}{a_1}$，公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{n-1}\cdot\frac{a_2}{a_1} = 3\cdot 2^{n-1}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 3^{n-1}\cdot 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから $\quad \boldsymbol{a_n = 3^{n-1}\cdot 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $P_1(j)$ は，n 枚の金貨を同時に投げ，j 枚が裏である確率により

$$P_1(j) = {}_n\mathrm{C}_j \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-j} = \boldsymbol{\frac{{}_n\mathrm{C}_j}{2^n}}$$

(2) 1 枚の硬貨が k 回の試行で，金貨である確率を p とすると

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}$$

$P_k(j)$ は k 回の試行で，n 枚の金貨のうち丁度 j 枚が金貨となる確率

$$P_k(j) = {}_n\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{n-j} = \boldsymbol{\frac{{}_n\mathrm{C}_j}{2^{kj}} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-j}}$$

(3) 次の場合に分けて求める．

(i) 2 回目の試行の直後に金貨が 3 枚残り，3 回目の試行で残り 3 枚の金貨がすべて裏である確率は

$$P_2(3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{{}_3\mathrm{C}_3}{2^{2\cdot 3}} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)^{3-3} \times \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^9}$$

(ii) 2 回目の試行の直後に金貨が 2 枚残り，3 回目の試行で残り 2 枚の金貨がすべて裏である確率は

$$P_2(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^{2\cdot 2}} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)^{3-2} \times \frac{1}{2^2} = \frac{9}{2^8}$$

(iii) 2 回目の試行の直後に金貨が 1 枚残り，3 回目の試行で残り 1 枚の金貨が裏である確率は

$$P_2(1) \times \frac{1}{2} = \frac{{}_3\mathrm{C}_1}{2^{2\cdot 1}} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)^{3-1} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{2^7}$$

(i)～(iii) により，求める確率は

$$\frac{1}{2^9} + \frac{9}{2^8} + \frac{27}{2^7} = \boldsymbol{\frac{127}{512}}$$