平成30年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護]))

1 xy 平面における2つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b$，$D: y=-x^2$ を考える．

(1) C と D が2点で交わり，その2交点の x 座標の差が1となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ．

(2) 実数 a，b が(1)の条件を満たすとき，C と D の2交点を結ぶ直線は，放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ に接することを示せ．

2 n を2以上，a を1以上の整数とする．箱の中に，1から n までの番号札がそれぞれ1枚ずつ，合計 n 枚入っている．この箱から，1枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行を a 回繰り返す．ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする．

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ．

(2) $p(2)$ を求めよ．

(3) $p(n-1)$ を求めよ．

3 実数 a は $0<a<4$ を満たすとする．xy 平面の直線 $l: y=ax$ と曲線

$$C: y=\begin{cases} -x^2+4x & (x<4\text{ のとき}) \\ 9a(x-4) & (x \geqq 4\text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える．C と l で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく．

(1) C と l の交点の座標を求めよ．

(2) $S(a)$ を求めよ．

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ．

4 空間内に四面体ABCDがある．辺ABの中点をM，辺CDの中点をNとする．t を0でない実数とし，点Gを

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{GC}}+t\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\vec{0}$$

を満たす点とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ で表せ．

(2) 点Gは点Nと一致しないことを示せ．

(3) 直線NGと直線MCは平行であることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C と D の方程式から y を消去して整理すると　$2x^2-2ax+a^2+b=0$

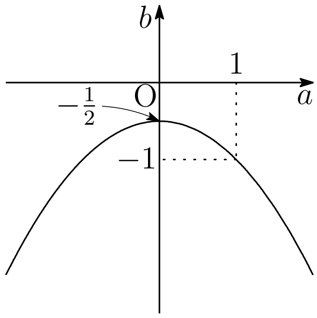
2 交点の x 座標は　$x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$　$\cdots$①

2 交点の x 座標の差が 1 であるから

$$\frac{a+\sqrt{-a^2-2b}}{2}-\frac{a-\sqrt{-a^2-2b}}{2}=1$$

ゆえに　$\sqrt{-a^2-2b}=1$　$\cdots$②

よって　$\boldsymbol{b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}}$　(右図)



(2) 2 交点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$ とすると，①，② より

$$\alpha=\frac{a-1}{2},\quad \beta=\frac{a+1}{2}\quad\cdots(*)$$

2 交点は D 上の点であるから，$\mathrm{A}(\alpha,-\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,-\beta^2)$ とする．

2 点 A，B を通る直線 l の方程式は　$y-\alpha^2=\dfrac{-\beta^2+\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$

ゆえに　$y=-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$　$(*)$ により　$l: y=-ax+\dfrac{a^2-1}{4}$

直線 l と放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ の方程式から y を消去すると

$$-ax+\frac{a^2-1}{4}=-x^2-\frac{1}{4}\quad\text{ゆえに}\quad\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0$$

よって，C と D の 2 交点を結ぶ直線は，放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ に接する．

補足 C，D の交点を通る放物線・直線の方程式は (k は定数)

$$(x-a)^2-y+b+k(x^2+y)=0$$

$k\neq-1$ のとき放物線，$k=-1$ のとき直線となるから，$k=-1$ より

$$(x-a)^2-y+b-(x^2+y)=0\quad\text{すなわち}\quad y=-ax+\frac{a^2}{2}+\frac{b}{2}$$

これに (1) の結果を代入すると，直線 l の方程式を得る．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $p(1)$ は，1 回で札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目に n の番号札を取り出す確率であるから

$$p(1) = \boldsymbol{\frac{1}{n}}$$

$p(n)$ は，n 回目で初めて札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目から $n-1$ 回目まで 1 の番号札を取り出す確率であるから (n 回目は任意の札)

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{n^{n-1}}}$$

(2) 1 回目が k の札を取り出すとすると ($k = 1, 2, \cdots, n-1$)，2 回目が $n-k$ 以上の札取り出す $k+1$ 通り．したがって

$$\begin{aligned} p(2) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2n^2}(n-1)(n+2)} \end{aligned}$$

(3) $n-2$ 回目まですべて 1 の番号札または 1 回だけ 2 の番号札である．

(i) $n-2$ 回目まですべて 1 の番号札で，$n-1$ 回目に 2 以上の番号札を取り出す確率は

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^{n-1}}$$

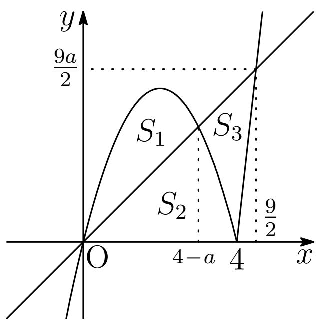
(ii) $n-2$ 回目までに k 回目だけが 2 の番号札 ($k = 1, 2, \cdots, n-2$)，それ以外は 1 の目である確率は ($n-1$ 回目は任意の札)

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \times (n-2) = \frac{n-2}{n^{n-2}}$$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$\frac{n-1}{n^{n-1}} + \frac{n-2}{n^{n-2}} = \boldsymbol{\frac{n^2-n-1}{n^{n-1}}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x<4$ のとき $\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=ax \end{cases}$



$0<a<4$ により，$4-a<0$ に注意して

$$\mathbf{(0,\ 0)\ (4-a,\ a(4-a))}$$

$x \geqq 4$ のとき $\begin{cases} y=9a(x-4) \\ y=ax \end{cases}$

これを解いて $\left(\mathbf{\dfrac{9}{2},\ \dfrac{9a}{2}}\right)$

(2) (1) の図の面積を S_1，S_2，S_3 とすると，交点の x 座標に注意して

$$S_1=\frac{1}{6}(4-a)^3, \quad S_1+S_2=\frac{1}{6}\cdot 4^3=\frac{32}{3}, \quad S_2+S_3=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{9a}{2}=9a$$

よって，求める面積は

$$\begin{aligned} S(a)&=S_1+S_3=2S_1-(S_1+S_2)+(S_2+S_3) \\ &=2\cdot\frac{1}{6}(4-a)^3-\frac{32}{3}+9a \\ &=\boldsymbol{-\frac{a^3}{3}+4a^2-7a+\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$S'(a)=-a^2+8a-7=-(a-1)(a-7)$$

したがって，$0<a<4$ における増減表は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって，求める最小値は $S(1)=\mathbf{\dfrac{22}{3}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{GC}}+t\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\vec{0}$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DG}})+(\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DG}})+(t-2)(\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DG}})-t\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\vec{0}$$

整理すると　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{DC}}-2t\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\vec{0}$

$t\neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2t}}$

(2) N は辺 CD の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2}$

これと (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}-\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2t}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{NG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}-2\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2t}$　$\cdots$①

点 G と点 N が一致すると仮定すると

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}-2\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{0}\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}$$

このとき，点 C は辺 AB の中点となり，不適.

(3) 点 M は辺 AB の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}$$

上式および ① より　$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=-t\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}-2\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2t}=-t\overrightarrow{\mathrm{NG}}$

よって，直線 NG と直線 MC は平行である.