

平成29年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護]))

- 1 s を正の実数とする. 鋭角三角形 ABC において, 辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし, 辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする. 線分 CD と線分 AE の交点を F とする. 以下の問いに答えよ.
- (1) $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ とするとき, α と β を求めよ.
 - (2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする. FG の長さが最大となるときの s を求めよ.
- 2 p, q を実数とする. 関数 $f(x) = x^2 + px + q$ の $-1 \leq x \leq 2$ における最小値が 0 以上となる点 (p, q) 全体からなる領域を D とする. 以下の問いに答えよ.
- (1) pq 平面上に領域 D を図示せよ.
 - (2) D の点 (p, q) で $q \leq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ.
- 3 a を 3 で割り切れない正の整数とする. a を 3 で割ったときの商を b , 余りを c とする. 次の問いに答えよ.
- (1) $c = 2$ のとき, $2a + 1 = as + 3t$ を満たす負でない整数 s, t を b を用いて表せ.
 - (2) n を $n \geq 2a - 2$ を満たす整数とする. このとき $n = as + 3t$ を満たす負でない整数 s, t が存在することを示せ.
- 4 A 君と B 君はそれぞれ, 0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている. 2 人は, 自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする. 取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし, 0 が含まれている場合は残りの 2 枚のカードに書かれた数の合計とする. このとき, 次の問いに答えよ.
- (1) A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して, しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ.
 - (2) A 君の得点が整数でなく, かつ, B 君の得点より大きい確率を求めよ.

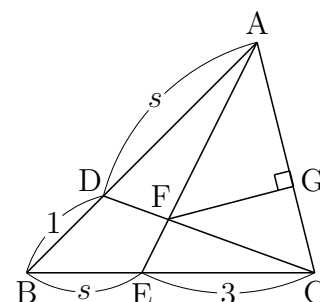
解答例

- 1 (1) $\triangle ABE$ と直線 CD について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{s}{1} \cdot \frac{s+3}{3} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$$

したがって $AF : FE = s(s+3) : 3$

点 E は線分 BC を $s : 3$ に内分する点であるから



$$\begin{aligned} \vec{AF} &= \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} \vec{AE} = \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} \cdot \frac{3\vec{AB} + s\vec{AC}}{s+3} \\ &= \frac{s}{s^2+3s+3} (3\vec{AB} + s\vec{AC}) \\ &= \frac{3s}{s^2+3s+3} \vec{AB} + \frac{s^2}{s^2+3s+3} \vec{AC} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \alpha = \frac{3s}{s^2+3s+3}, \quad \beta = \frac{s^2}{s^2+3s+3}$$

- (2) $\triangle AFC : \triangle AEC = AF : AE$, $\triangle AEC : \triangle ABC = EC : BC$ であるから

$$\triangle AFC = \frac{AF}{AE} \triangle AEC = \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} \triangle AEC,$$

$$\triangle AEC = \frac{EC}{BC} \triangle ABC = \frac{3}{s+3} \triangle ABC$$

$$\text{上の2式から} \quad \triangle AFC = \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} \cdot \frac{3}{s+3} \triangle ABC = \frac{3s}{s^2+3s+3} \triangle ABC$$

$\triangle AFC = \frac{1}{2} AC \cdot FG$ であるから

$$FG = \frac{2\triangle AFC}{AC} = \frac{6s}{s^2+3s+3} \cdot \frac{\triangle ABC}{AC}$$

$s > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係を用いて

$$\frac{s^2+3s+3}{s} = s + \frac{3}{s} + 3 \geq 2\sqrt{s \cdot \frac{3}{s}} + 3 = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\text{したがって} \quad FG = \frac{6s}{s^2+3s+3} \cdot \frac{\triangle ABC}{AC} \leq \frac{6}{2\sqrt{3}+3} \cdot \frac{\triangle ABC}{AC}$$

FG が最大となる、すなわち、上式において等号が成立するとき

$$s = \frac{3}{s} \quad \text{よって} \quad s = \sqrt{3}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad f(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

$-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値を m とする.

(i) $2 \leq -\frac{p}{2}$, すなわち, $p \leq -4$ のとき

$$m = f(2) = 2p + q + 4 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geq -2p - 4$$

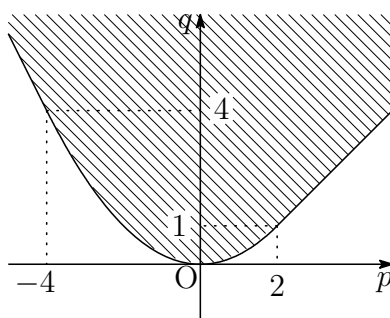
(ii) $-1 \leq -\frac{p}{2} \leq 2$, すなわち, $-4 \leq p \leq 2$ のとき

$$m = f\left(-\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2}{4} + q \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geq \frac{p^2}{4}$$

(iii) $-\frac{p}{2} \leq -1$, すなわち, $2 \geq p$ のとき

$$m = f(-1) = -p + q + 1 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geq p - 1$$

よって, 点 (p, q) の満たす領域 D は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



(2) (1) の境界線 $q = -2p - 4$ および $q = p - 1$ 上で $q = 5$ となるとき, それぞれの座標は $\left(-\frac{9}{2}, 5\right)$, $(6, 5)$ である. 3点 $\left(-\frac{9}{2}, 5\right)$, $(-4, 5)$, $(-4, 4)$ を頂点とする直角三角形の面積を S_1 , 3点 $(6, 5)$, $(2, 5)$, $(2, 1)$ を頂点とする直角三角形の面積を S_2 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^2 \left(5 - \frac{p^2}{4}\right) dp + S_1 + S_2 \\ &= \left[5p - \frac{p^3}{12}\right]_{-4}^2 + \frac{1}{4} + 8 = \frac{129}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad 2a + 1 = as + 3t \quad \cdots \textcircled{1}$$

$c = 2$ のとき, $a \geq 2$ であるから (s, t は非負整数)

$$2a + 1 = as + 3t \geq as \quad \text{ゆえに} \quad s \leq 2 + \frac{1}{a} < 3$$

$$\text{すなわち} \quad s = 0, 1, 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$c = 2$ より, $a \equiv 2 \pmod{3}$ であるから, これを $\textcircled{1}$ に適用すると

$$2 \cdot 2 + 1 \equiv 2s \quad \text{ゆえに} \quad 2s \equiv 5 \quad \text{すなわち} \quad s \equiv 1 \pmod{3}$$

上式と $\textcircled{2}$ より, $s = 1$. これを $\textcircled{1}$ に代入して整理すると

$$3t = a + 1 \quad \text{右辺は 3 の倍数であるから} \quad t = \frac{a+1}{3}$$

$$a = 3b + 2 \text{ であるから} \quad t = \frac{(3b+2)+1}{3} = b + 1$$

補足 $2s \equiv 5 \pmod{3}$ の両辺を 2 倍すると ($4 \equiv 1, 10 \equiv 1 \pmod{3}$)

$$4s \equiv 10 \quad \text{ゆえに} \quad s \equiv 1 \pmod{3}$$

$$(2) \quad n = as + 3t \quad \cdots (*)$$

(*) を満たす非負整数 s, t が存在するとき

$$n + 3 = as + 3(t + 1)$$

を満たす非負整数 $s, t + 1$ が存在する. したがって, $n = 2a - 2, 2a - 1, 2a$ について, (*) を満たす非負整数 s, t を示せばよい.

(i) $a \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$2a - 2 = a \cdot 0 + 3 \cdot \frac{2(a-1)}{3},$$

$$2a - 1 = a \cdot 1 + 3 \cdot \frac{a-1}{3},$$

$$2a = a \cdot 2 + 3 \cdot 0$$

(ii) $a \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$2a - 2 = a \cdot 1 + 3 \cdot \frac{a-2}{3},$$

$$2a - 1 = a \cdot 0 + 3 \cdot \frac{2(a-2)+3}{3},$$

$$2a = a \cdot 2 + 3 \cdot 0$$

(i), (ii) より, $n \geq 2a - 2$ について, (*) を満たす非負整数 s, t は存在する.

- 4 (1) 得点が3点となるのは, $\{0, 1, 2\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$ の3通り.
このうち, 0を取り出さないのが2通り.

よって, A, Bの少なくとも一方が0を取り出す確率は

$$\left(\frac{3}{20}\right)^2 - \left(\frac{2}{20}\right)^2 = \frac{9-4}{400} = \frac{1}{80}$$

- (2) 0から5の6枚のカードから3枚のカードを取り出すとき, 次の20通り.

得点	組合せ	場合の数
2	$\{1, 2, 3\}$	1
$\frac{7}{3}$	$\{1, 2, 4\}$	1
$\frac{8}{3}$	$\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}$	2
3	$\{0, 1, 2\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$	3
$\frac{10}{3}$	$\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}$	2
$\frac{11}{3}$	$\{2, 4, 5\}$	1
4	$\{0, 1, 3\}, \{3, 4, 5\}$	2
5	$\{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}$	2
6	$\{0, 1, 5\}, \{0, 2, 4\}$	2
7	$\{0, 2, 5\}, \{0, 3, 4\}$	2
8	$\{0, 3, 5\}$	1
9	$\{0, 4, 5\}$	1

A君がB君の得点より大きくなる(勝つ)のは, 次の場合である.

$$\text{A君が}\frac{7}{3}\text{点で勝つ確率は}\frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$$

$$\text{A君が}\frac{8}{3}\text{点で勝つ確率は}\frac{2}{20} \times \frac{1+1}{20} = \frac{4}{400}$$

$$\text{A君が}\frac{10}{3}\text{点で勝つ確率は}\frac{2}{20} \times \frac{1+1+2+3}{20} = \frac{14}{400}$$

$$\text{A君が}\frac{11}{3}\text{点で勝つ確率は}\frac{1}{20} \times \frac{1+1+2+3+2}{20} = \frac{9}{400}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{400} + \frac{4}{400} + \frac{14}{400} + \frac{9}{400} = \frac{28}{400} = \frac{7}{100}$$