平成29年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護]))

問題 1 2 3 4

1 s を正の実数とする．鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする．線分 CD と線分 AE の交点を F とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ．

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする．FG の長さが最大となるときの s を求めよ．

2 p，q を実数とする．関数 $f(x) = x^2 + px + q$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最小値が 0 以上となる点 $(p,\ q)$ 全体からなる領域を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) pq 平面上に領域 D を図示せよ．

(2) D の点 $(p,\ q)$ で $q \leqq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ．

3 a を 3 で割り切れない正の整数とする．a を 3 で割ったときの商を b，余りを c とする．次の問いに答えよ．

(1) $c = 2$ のとき，$2a + 1 = as + 3t$ を満たす負でない整数 s，t を b を用いて表せ．

(2) n を $n \geqq 2a - 2$ を満たす整数とする．このとき $n = as + 3t$ を満たす負でない整数 s，t が存在することを示せ．

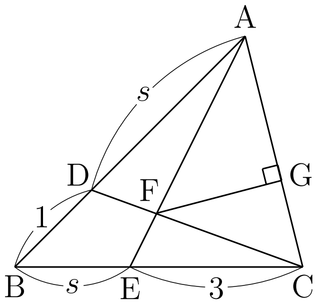
4 A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている．2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする．取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残りの 2 枚のカードに書かれた数の合計とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ．

(2) A 君の得点が整数でなく，かつ，B 君の得点より大きい確率を求めよ．

解答例

1 (1) $\triangle$ABE と直線 CD について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1$$

したがって　　$\mathrm{AF}:\mathrm{FE}=s(s+3):3$

点 E は線分 BC を $s:3$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}}&=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}\\&=\frac{s}{s^2+3s+3}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\frac{3s}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{s^2}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}}$，　$\boldsymbol{\beta=\dfrac{s^2}{s^2+3s+3}}$

(2) $\triangle\mathrm{AFC}:\triangle\mathrm{AEC}=\mathrm{AF}:\mathrm{AE}$，$\triangle\mathrm{AEC}:\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{EC}:\mathrm{BC}$ であるから

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}}\triangle\mathrm{AEC}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\triangle\mathrm{AEC},$$

$$\triangle\mathrm{AEC}=\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}$$

上の 2 式から　$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\dfrac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}\triangle\mathrm{ABC}$

$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}$ であるから

$$\mathrm{FG}=\frac{2\triangle\mathrm{AFC}}{\mathrm{AC}}=\frac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$$

$s>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係を用いて

$$\frac{s^2+3s+3}{s}=s+\frac{3}{s}+3\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}+3=2\sqrt{3}+3$$

したがって　　$\mathrm{FG}=\dfrac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{3}+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$

FG が最大となる，すなわち，上式において等号が成立するとき

$$s=\frac{3}{s}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{s=\sqrt{3}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $$f(x)=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を m とする．

(i) $2 \leqq -\dfrac{p}{2}$，すなわち，$p \leqq -4$ のとき

$$m=f(2)=2p+q+4 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq -2p-4$$

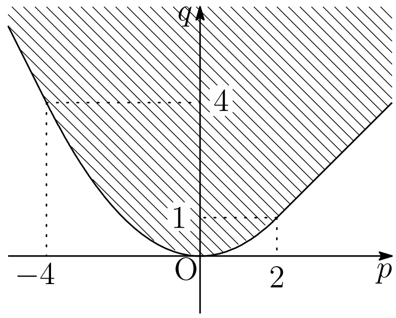
(ii) $-1 \leqq -\dfrac{p}{2} \leqq 2$，すなわち，$-4 \leqq p \leqq 2$ のとき

$$m=f\left(-\frac{p}{2}\right)=-\frac{p^2}{4}+q \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq \frac{p^2}{4}$$

(iii) $-\dfrac{p}{2} \leqq -1$，すなわち，$2 \leqq p$ のとき

$$m=f(-1)=-p+q+1 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq p-1$$

よって，点 $(p,\ q)$ の満たす領域 D は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) (1) の境界線 $q=-2p-4$ および $q=p-1$ 上で $q=5$ となるとき，それぞれの座標は $\left(-\dfrac{9}{2},\ 5\right)$，$(6,\ 5)$ である．3 点 $\left(-\dfrac{9}{2},\ 5\right)$，$(-4,\ 5)$，$(-4,\ 4)$ を頂点とする直角三角形の面積を S_1，3 点 $(6,\ 5)$，$(2,\ 5)$，$(2,\ 1)$ を頂点とする直角三角形の面積を S_2 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{4}, \quad S_2=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^{2}\left(5-\frac{p^2}{4}\right)dp+S_1+S_2 \\ &= \left[\,5p-\frac{p^3}{12}\,\right]_{-4}^{2}+\frac{1}{4}+8=\mathbf{\frac{129}{4}} \end{aligned}$$

■

3 (1)
$$2a+1=as+3t \quad \cdots ①$$

$c=2$ のとき，$a \geqq 2$ であるから (s，t は非負整数)

$$2a+1=as+3t \geqq as \quad ゆえに \quad s \leqq 2+\frac{1}{a}<3$$

すなわち　$s=0,\ 1,\ 2 \quad \cdots ②$

$c=2$ より，$a \equiv 2 \pmod 3$ であるから，これを ① に適用すると

$$2 \cdot 2+1 \equiv 2s \quad ゆえに \quad 2s \equiv 5 \quad すなわち \quad s \equiv 1 \pmod 3$$

上式と ② より，$\boldsymbol{s=1}$．これを ① に代入して整理すると

$$3t=a+1 \quad 右辺は 3 の倍数であるから \quad t=\frac{a+1}{3}$$

$a=3b+2$ であるから　$t=\dfrac{(3b+2)+1}{3}=\boldsymbol{b+1}$

補足 $2s \equiv 5 \pmod 3$ の両辺を 2 倍すると ($4 \equiv 1,\ \ 10 \equiv 1 \pmod 3$)

$$4s \equiv 10 \quad ゆえに \quad s \equiv 1 \pmod 3$$

(2)
$$n=as+3t \quad \cdots (*)$$

$(*)$ を満たす非負整数 $s,\ t$ が存在するとき

$$n+3=as+3(t+1)$$

を満たす非負整数 s，t が存在する．したがって，$n=2a-2,\ 2a-1,\ 2a$ について，$(*)$ を満たす非負整数 $s,\ t$ を示せばよい．

(i) $a \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned} 2a-2 &= a \cdot 0+3 \cdot \frac{2(a-1)}{3}, \\ 2a-1 &= a \cdot 1+3 \cdot \frac{a-1}{3}, \\ 2a &= a \cdot 2+3 \cdot 0 \end{aligned}$$

(ii) $a \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned} 2a-2 &= a \cdot 1+3 \cdot \frac{a-2}{3}, \\ 2a-1 &= a \cdot 0+3 \cdot \frac{2(a-2)+3}{3}, \\ 2a &= a \cdot 2+3 \cdot 0 \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，$n \geqq 2a-2$ について，$(*)$ を満たす非負整数 s，t は存在する．

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 得点が 3 点となるのは，$\{0,1,2\},\{1,3,5\},\{2,3,4\}$ の 3 通り．

このうち，0 を取り出さないのが 2 通り．

よって，A，B の少なくとも一方が 0 を取り出す確率は

$$\left(\frac{3}{20}\right)^2-\left(\frac{2}{20}\right)^2=\frac{9-4}{400}=\mathbf{\frac{1}{80}}$$

(2) 0 から 5 の 6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，次の 20 通り．

得点	組合せ	場合の数
2	$\{1,2,3\}$	1
$\frac{7}{3}$	$\{1,2,4\}$	1
$\frac{8}{3}$	$\{1,2,5\}$，$\{1,3,4\}$	2
3	$\{0,1,2\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$	3
$\frac{10}{3}$	$\{1,4,5\}$，$\{2,3,5\}$	2
$\frac{11}{3}$	$\{2,4,5\}$	1
4	$\{0,1,3\}$，$\{3,4,5\}$	2
5	$\{0,1,4\}$，$\{0,2,3\}$	2
6	$\{0,1,5\}$，$\{0,2,4\}$	2
7	$\{0,2,5\}$，$\{0,3,4\}$	2
8	$\{0,3,5\}$	1
9	$\{0,4,5\}$	1

A 君が B 君の得点より大きくなる (勝つ) のは，次の場合である．

A 君が $\frac{7}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$

A 君が $\frac{8}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{2}{20}\times\frac{1+1}{20}=\frac{4}{400}$

A 君が $\frac{10}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{2}{20}\times\frac{1+1+2+3}{20}=\frac{14}{400}$

A 君が $\frac{11}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{1}{20}\times\frac{1+1+2+3+2}{20}=\frac{9}{400}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{400}+\frac{4}{400}+\frac{14}{400}+\frac{9}{400}=\frac{28}{400}=\mathbf{\frac{7}{100}}$$

■