平成28年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護]))

1 平面上で原点Oと3点A(3, 1)，B(1, 2)，C(−1, 1)を考える．実数s, tに対し，点Pを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) s, tが条件

$$-1 \leqq s \leqq 1, \quad -1 \leqq t \leqq 1, \quad -1 \leqq s+t \leqq 1$$

を満たすとき，点P$(x,\ y)$の存在する範囲Dを図示せよ．

(2) 点Pが(1)で求めた範囲Dを動くとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$の最大値を求め，そのときのPの座標を求めよ．

2 放物線$C: y=-\dfrac{1}{2}x^2$を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 関数$y=-2|x|+k$のグラフが放物線Cと共有点をもつような実数kの範囲を求めよ．

(2) a, bを実数とする．関数$y=-2|x-a|+b$のグラフが放物線Cと共有点をちょうど4個もつような点$(a,\ b)$全体のなす領域Dをxy平面に図示せよ．

(3) (2)で求めた領域Dの面積を求めよ．

3 ある工場で作る部品A，B，Cはネジをそれぞれ7個，9個，12個使っている．出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ，ネジが全部で54個あった．残った部品A，B，Cの個数をそれぞれl, m, nとして，可能性のある組$(l,\ m,\ n)$をすべて求めよ．

4 鋭角三角形△ABCにおいて，頂点A，B，Cから各対辺に垂線AD，BE，CFを下ろす．これらの垂線は垂心Hで交わる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 四角形BCEFとAFHEが円に内接することを示せ．

(2) $\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ADF}$であることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より　$(x,\ y)=s(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(3s+t,\ s+2t)$

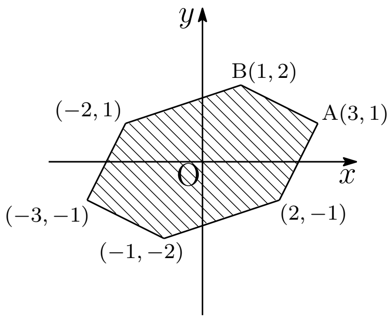
$$x=3s+t,\quad y=s+2t \quad \text{ゆえに} \quad s=\frac{2x-y}{5},\quad t=\frac{-x+3y}{5}$$

これらを $-1 \leqq s \leqq 1$，$-1 \leqq t \leqq 1$，$-1 \leqq s+t \leqq 1$ に代入すると

$$-1 \leqq \frac{2x-y}{5} \leqq 1,\quad -1 \leqq \frac{-x+3y}{5} \leqq 1,\quad -1 \leqq \frac{2x-y}{5}+\frac{-x+3y}{5} \leqq 1$$

それぞれの式を整理すると

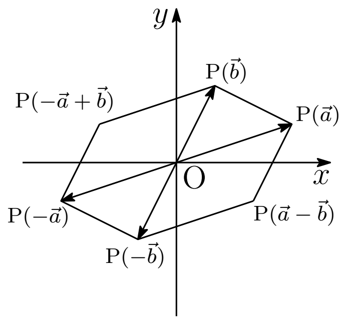
$$\begin{cases} 2x-5 \leqq y \leqq 2x+5 \\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{3} \leqq y \leqq \dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2} \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$



領域 D は右の図の斜線部分で境界線を含む．

補足 $-1 \leqq s \leqq 1$，$-1 \leqq t \leqq 1$，$-1 \leqq s+t \leqq 1$ より

$$\begin{array}{lll} s,\ t \geqq 0 & \text{のとき} & 0 \leqq s+t \leqq 1 \\ s,\ t \leqq 0 & \text{のとき} & -1 \leqq s+t \leqq 0 \\ st \leqq 0 & \Longrightarrow & -1 \leqq s+t \leqq 1 \end{array}$$



に注意して次の場合分けにより，$\mathrm{P}(s\vec{a}+t\vec{b})$ の描く領域を求めることもできる．

(i) $0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$0 \leqq s+t \leqq 1$ であるから，3 点 O，$\mathrm{P}(\vec{a})$，$\mathrm{P}(\vec{b})$ を頂点する三角形の周および内部．

(ii) $0 \leqq s \leqq 1$，$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，4 点 O，$\mathrm{P}(\vec{a})$，$\mathrm{P}(-\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{a}-\vec{b})$ を頂点する平行四辺形の周および内部．

(iii) $-1 \leqq s \leqq 0$，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，4 点 O，$\mathrm{P}(-\vec{a})$，$\mathrm{P}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(-\vec{a}+\vec{b})$ を頂点する平行四辺形の周および内部．

(iv) $-1 \leqq s \leqq 0$，$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，$-1 \leqq s+t \leqq 0$ であるから，3 点 O，$\mathrm{P}(-\vec{a})$，$\mathrm{P}(-\vec{b})$ を頂点する三角形の周および内部．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k$ とおくと　$-x+y=k$

ゆえに，直線 $y=x+k$ が領域 D と共有点をもつとき，切片 k のとり得る値の最大値を求めればよい．したがって

点 $\mathbf{P(-2,\ 1)}$ において，最大値 $\mathbf{3}$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) 放物線 $C : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ と関数 $y = -2|x| + k$ のグラフは，ともに y 軸に関して対称である．したがって，C と直線 $y = -2x + k$ が $x \geqq 0$ において共有点をもてばよい．2 式から y を消去して

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2x + k \quad \text{これを解いて} \quad x = 2 \pm \sqrt{4-2k}$$

$4 - 2k \geqq 0$，すなわち，$k \leqq 2$ のとき，解 $2 + \sqrt{4-2k} \geqq 0$ をもつ．
よって，求める実数 k の範囲は　　$\boldsymbol{k \leqq 2}$

(2) $y = -2|x-a| + b = \begin{cases} -2(x-a)+b & (x \geqq a) \\ 2(x-a)+b & (x \leqq a) \end{cases}$

関数 $y = -2|x-a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつとき，$x < a$ および $a < x$ の範囲でそれぞれ 2 個ずつ共有点をもつ．

(i) $x > a$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2(x-a) + b \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)^2 + 4a + 2b - 4 = 0$$

$g(x) = (x-2)^2 + 4a + 2b - 4$ とおくと，$g(x) = 0$ が $x > a$ の範囲に異なる 2 つ実数解をもつとき，$a < 2$，$g(a) > 0$，$g(2) < 0$ より

$$\begin{cases} a < 2 \\ (a-2)^2 + 4a + 2b - 4 > 0 \\ 4a + 2b - 4 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a < 2 \\ b > -\dfrac{1}{2}a^2 \\ b < -2a + 2 \end{cases}$$

(ii) $x < a$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 = 2(x-a) + b \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)^2 - 4a + 2b - 4 = 0$$

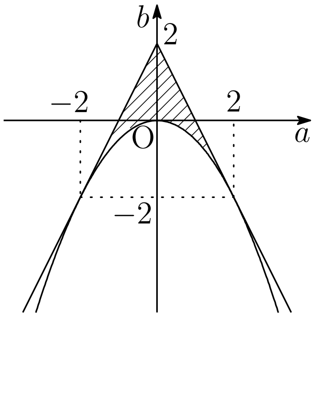
$h(x) = (x+2)^2 - 4a + 2b - 4$ とおくと，$h(x) = 0$ が $x < a$ の範囲に異なる 2 つ実数解をもつとき，$a > -2$，$h(a) > 0$，$h(-2) < 0$ より

$$\begin{cases} a > -2 \\ (a+2)^2 - 4a + 2b - 4 > 0 \\ -4a + 2b - 4 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a > -2 \\ b > -\dfrac{1}{2}a^2 \\ b < 2a + 2 \end{cases}$$

(i)，(ii) の結果から，領域 D は下の図の斜線部分で境界線を含まない．

(3) 領域 D の面積を S とすると

$$S = 2\int_0^2 \left\{-2a + 2 - \left(-\frac{1}{2}a^2\right)\right\} da$$
$$= \int_0^2 (a-2)^2\, da = \left[\ \frac{1}{3}(a-2)^3\ \right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$



$\boxed{\mathbf{3}}$ $l,\ m,\ n$ は非負の整数．$7l+9m+12n=54 \quad \cdots(*)$

$7\equiv 1,\ 9\equiv 12\equiv 54\equiv 0 \pmod 3$ であるから，$(*)$ より

$$l\equiv 0 \pmod 3$$

上式および $(*)$ から　　$l=0,\ 3,\ 6$

(i) $l=0$ を $(*)$ に代入して簡単にすると　$3m+4n=18 \quad \cdots①$

$3\equiv 18\equiv 0,\ 4\equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$n\equiv 0 \pmod 3$$

上式および ① から　$n=0,\ 3$　ゆえに　$(m,\ n)=(6,\ 0),\ (2,\ 3)$

(ii) $l=3$ を $(*)$ に代入して簡単にすると　$3m+4n=11 \quad \cdots②$

$3\equiv 0,\ 4\equiv 1,\ 11\equiv 2 \pmod 3$ であるから

$$n\equiv 2 \pmod 3$$

上式および ② から　$n=2$　ゆえに　$(m,\ n)=(1,\ 2)$

(iii) $l=6$ を $(*)$ に代入して簡単にすると　$3m+4n=4 \quad \cdots③$

$3\equiv 0,\ 4\equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$n\equiv 1 \pmod 3$$

上式および ③ から　$n=1$　ゆえに　$(m,\ n)=(0,\ 1)$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{(l,\ m,\ n)=(0,\ 6,\ 0),\ (0,\ 2,\ 3),\ (3,\ 1,\ 2),\ (6,\ 0,\ 1)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\angle\mathrm{BEC} = \angle\mathrm{BFC}$ より，四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する．

$\angle\mathrm{AEH} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{AFH}\ 90^\circ$ であるから，$\angle\mathrm{AEH} + \angle\mathrm{AFH} = 180$ より，四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する．

(2) $\triangle\mathrm{HCE}$ と $\triangle\mathrm{HBF}$ において

$$\angle\mathrm{CHE} = \angle\mathrm{BHF} \quad (\text{対頂角}),$$
$$\angle\mathrm{HEC} = \angle\mathrm{HFB} \quad (\mathrm{H}\ \text{は}\ \triangle\mathrm{ABC}\ \text{の垂心})$$

したがって　$\triangle\mathrm{HCE} \backsim \triangle\mathrm{HBF}$　ゆえに　$\angle\mathrm{HCE} = \angle\mathrm{HBF}$　$\cdots$①

四角形 ECDH の対角の和が 180° であるから四角形 ECDH は円に内接し，円周角の定理により　$\angle\mathrm{HCE} = \angle\mathrm{HDE}$　$\cdots$②

四角形 FBDH の対角の和が 180° であるから四角形 FBDH は円に内接し，円周角の定理により　$\angle\mathrm{HBF} = \angle\mathrm{HDF}$　$\cdots$③

①，②，③ より　$\angle\mathrm{HDE} = \angle\mathrm{HDF}$　よって　$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ADF}$