平成 28 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

1 平面上で原点 O と 3 点 A(3, 1)，B(1, 2)，C(−1, 1) を考える．実数 s, t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) s, t が条件

$$-1 \leqq s \leqq 1, \quad -1 \leqq t \leqq 1, \quad -1 \leqq s+t \leqq 1$$

を満たすとき，点 P$(x,\ y)$ の存在する範囲 D を図示せよ．

(2) 点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ．

2 放物線 $C : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ．

(2) a, b を実数とする．関数 $y = -2|x-a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 $(a,\ b)$ 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ．

(3) (2) で求めた領域 D の面積を求めよ．

3 ある工場で作る部品 A，B，C はネジをそれぞれ 7 個，9 個，12 個使っている．出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ，ネジが全部で 54 個あった．残った部品 A，B，C の個数をそれぞれ l, m, n として，可能性のある組 $(l,\ m,\ n)$ をすべて求めよ．

4 鋭角三角形 △ABC において，頂点 A，B，C から各対辺に垂線 AD，BE，CF を下ろす．これらの垂線は垂心 H で交わる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ．

(2) ∠ADE = ∠ADF であることを示せ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より　$(x,\ y)=s(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(3s+t,\ s+2t)$

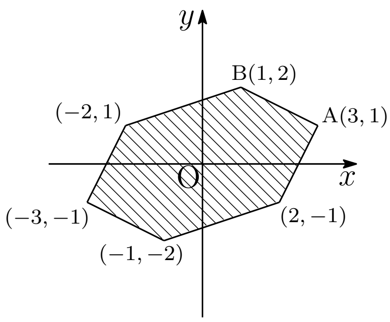
$$x=3s+t,\quad y=s+2t \quad \text{ゆえに} \quad s=\frac{2x-y}{5},\quad t=\frac{-x+3y}{5}$$

これらを $-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ に代入すると

$$-1\leqq\frac{2x-y}{5}\leqq 1,\quad -1\leqq\frac{-x+3y}{5}\leqq 1,\quad -1\leqq\frac{2x-y}{5}+\frac{-x+3y}{5}\leqq 1$$

それぞれの式を整理すると

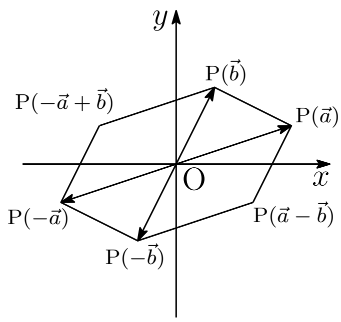
$$\begin{cases} 2x-5\leqq y\leqq 2x+5 \\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{3}\leqq y\leqq\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$



領域 D は右の図の斜線部分で境界線を含む．

補足　$-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ より

$$\begin{array}{lll} s,\ t\geqq 0 & \text{のとき} & 0\leqq s+t\leqq 1 \\ s,\ t\leqq 0 & \text{のとき} & -1\leqq s+t\leqq 0 \\ st\leqq 0 & \Longrightarrow & -1\leqq s+t\leqq 1 \end{array}$$



に注意して次の場合分けにより，$\mathrm{P}(s\vec{a}+t\vec{b})$ の描く領域を求めることもできる．

(i) $0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$0\leqq s+t\leqq 1$ であるから，3 点 O，$\mathrm{P}(\vec{a})$，$\mathrm{P}(\vec{b})$ を頂点する三角形の周および内部．

(ii) $0\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 0$ のとき，4 点 O，$\mathrm{P}(\vec{a})$，$\mathrm{P}(-\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{a}-\vec{b})$ を頂点する平行四辺形の周および内部．

(iii) $-1\leqq s\leqq 0$，$0\leqq t\leqq 1$ のとき，4 点 O，$\mathrm{P}(-\vec{a})$，$\mathrm{P}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(-\vec{a}+\vec{b})$ を頂点する平行四辺形の周および内部．

(iv) $-1\leqq s\leqq 0$，$-1\leqq t\leqq 0$ のとき，$-1\leqq s+t\leqq 0$ であるから，3 点 O，$\mathrm{P}(-\vec{a})$，$\mathrm{P}(-\vec{b})$ を頂点する三角形の周および内部．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k$ とおくと　$-x+y=k$

ゆえに，直線 $y=x+k$ が領域 D と共有点をもつとき，切片 k のとり得る値の最大値を求めればよい．したがって

点 $\mathbf{P(-2,\ 1)}$ において，最大値 $\mathbf{3}$

■

$\boxed{2}$ (1) 放物線 $C: y=-\dfrac{1}{2}x^2$ と関数 $y=-2|x|+k$ のグラフは，ともに y 軸に関して対称である．したがって，C と直線 $y=-2x+k$ が $x \geqq 0$ において共有点をもてばよい．2 式から y を消去して

$$-\frac{1}{2}x^2=-2x+k \quad これを解いて \quad x=2\pm\sqrt{4-2k}$$

$4-2k \geqq 0$，すなわち，$k \leqq 2$ のとき，解 $2+\sqrt{4-2k} \geqq 0$ をもつ．
よって，求める実数 k の範囲は　　$\boldsymbol{k \leqq 2}$

(2) $y=-2|x-a|+b=\begin{cases} -2(x-a)+b & (x \geqq a) \\ 2(x-a)+b & (x \leqq a) \end{cases}$

関数 $y=-2|x-a|+b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつとき，$x<a$ および $a<x$ の範囲でそれぞれ 2 個ずつ共有点をもつ．

(i) $x>a$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2=-2(x-a)+b \quad ゆえに \quad (x-2)^2+4a+2b-4=0$$

$g(x)=(x-2)^2+4a+2b-4$ とおくと，$g(x)=0$ が $x>a$ の範囲に異なる 2 つ実数解をもつとき，$a<2$，$g(a)>0$，$g(2)<0$ より

$$\begin{cases} a<2 \\ (a-2)^2+4a+2b-4>0 \\ 4a+2b-4<0 \end{cases} \quad ゆえに \quad \begin{cases} a<2 \\ b>-\dfrac{1}{2}a^2 \\ b<-2a+2 \end{cases}$$

(ii) $x<a$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2=2(x-a)+b \quad ゆえに \quad (x+2)^2-4a+2b-4=0$$

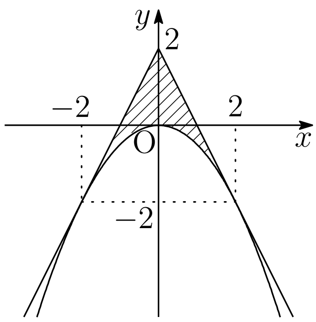
$h(x)=(x+2)^2-4a+2b-4$ とおくと，$h(x)=0$ が $x<a$ の範囲に異なる 2 つ実数解をもつとき，$a>-2$，$h(a)>0$，$h(-2)<0$ より

$$\begin{cases} a>-2 \\ (a+2)^2-4a+2b-4>0 \\ -4a+2b-4<0 \end{cases} \quad ゆえに \quad \begin{cases} a>-2 \\ b>-\dfrac{1}{2}a^2 \\ b<2a+2 \end{cases}$$

(i)，(ii) の結果から，領域 D は下の図の斜線部分で境界線を含まない．

(3) 領域 D の面積を S とすると

$$S=2\int_0^2\left\{-2x+2-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^2(x-2)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$



■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $l,\ m,\ n$ は非負の整数．$7l+9m+12n=54 \quad \cdots(*)$

$7\equiv 1,\ 9\equiv 12\equiv 54\equiv 0 \pmod 3$ であるから，$(*)$ より

$$l\equiv 0 \pmod 3$$

上式および $(*)$ から　　$l=0,\ 3,\ 6$

(i) $l=0$ を $(*)$ に代入して簡単にすると　$3m+4n=18 \quad \cdots ①$

$3\equiv 18\equiv 0,\ 4\equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$n\equiv 0 \pmod 3$$

上式および ① から　$n=0,\ 3$　ゆえに　$(m,\ n)=(6,\ 0),\ (2,\ 3)$

(ii) $l=3$ を $(*)$ に代入して簡単にすると　$3m+4n=11 \quad \cdots ②$

$3\equiv 0,\ 4\equiv 1,\ 11\equiv 2 \pmod 3$ であるから

$$n\equiv 2 \pmod 3$$

上式および ② から　$n=2$　ゆえに　$(m,\ n)=(1,\ 2)$

(iii) $l=6$ を $(*)$ に代入して簡単にすると　$3m+4n=4 \quad \cdots ③$

$3\equiv 0,\ 4\equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$n\equiv 1 \pmod 3$$

上式および ③ から　$n=1$　ゆえに　$(m,\ n)=(0,\ 1)$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{(l,\ m,\ n)=(0,\ 6,\ 0),\ (0,\ 2,\ 3),\ (3,\ 1,\ 2),\ (6,\ 0,\ 1)}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $\angle \mathrm{BEC} = \angle \mathrm{BFC}$ より，四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する．
$\angle \mathrm{AEH} = 90^\circ$，$\angle \mathrm{AFH}\ 90^\circ$ であるから，$\angle \mathrm{AEH} + \angle \mathrm{AFH} = 180$ より，四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する．

(2) $\triangle \mathrm{HCE}$ と $\triangle \mathrm{HBF}$ において

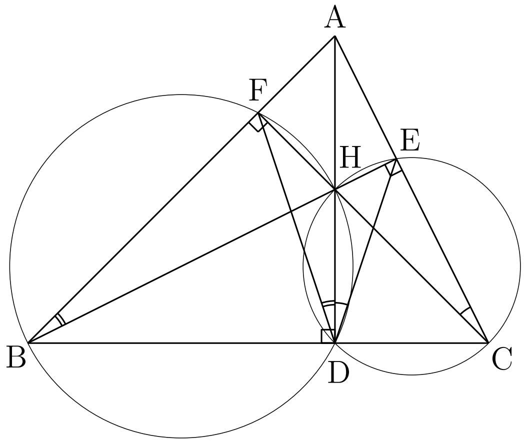
$$\angle \mathrm{CHE} = \angle \mathrm{BHF} \quad (\text{対頂角}),$$
$$\angle \mathrm{HEC} = \angle \mathrm{HFB} \quad (\mathrm{H}\ \text{は}\ \triangle \mathrm{ABC}\ \text{の垂心})$$

したがって　$\triangle \mathrm{HCE} \backsim \triangle \mathrm{HBF}$　ゆえに　$\angle \mathrm{HCE} = \angle \mathrm{HBF}$　$\cdots$ ①

四角形 ECDH の対角の和が 180° であるから四角形 ECDH は円に内接し，
円周角の定理により　$\angle \mathrm{HCE} = \angle \mathrm{HDE}$　$\cdots$ ②

四角形 FBDH の対角の和が 180° であるから四角形 FBDH は円に内接し，
円周角の定理により　$\angle \mathrm{HBF} = \angle \mathrm{HDF}$　$\cdots$ ③

①，②，③ より　$\angle \mathrm{HDE} = \angle \mathrm{HDF}$　よって　$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ADF}$



■