

平成27年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護]))

問題 1 2 3 4

1 次の性質をもつ数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $a_n + a_{n+2}$ を a_{n+1} を用いて表せ.
- (2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

2 $t > 0$ を実数とする. 座標平面において, 3点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $P(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える.

- (1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ.
- (2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ.
- (3) 辺 AB , BP , PA の中点をそれぞれ M , Q , R とおく. t が(1)で求めた範囲を動くとき, 三角形 ABP を線分 MQ , QR , RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と, そのときの t の値を求めよ.

3 サイコロを3回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし, x の2次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \quad \dots(*)$$

を考える.

- (1) 方程式(*)が実数解をもつ確率を求めよ.
- (2) 方程式(*)が実数でない2つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ.

4 $a > 0$ を実数とする. 関数 $f(t) = -4t^3 + (a + 3)t$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値を $M(a)$ とする.

(1) $M(a)$ を求めよ.

(2) 実数 $x > 0$ に対し, $g(x) = M(x)^2$ とおく. xy 平面において, 関数 $y = g(x)$ のグラフに点 $(s, g(s))$ で接する直線が原点を通るとき, 実数 $s > 0$ とその接線の傾きを求めよ.

(3) a が正の実数全体を動くとき,

$$k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$$

の最小値を求めよ.

解答例

$$\begin{aligned} \text{1 (1)} \quad & a_1 = 3, a_{n+1} > a_n \\ & a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad \cdots \text{①} \\ \text{①から} \quad & a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} a_{n+2} + a_{n+2}^2 = 3(a_{n+1} + a_{n+2}) \quad \cdots \text{②} \\ \text{②} - \text{①より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_{n+2}^2 - a_n^2 - 2a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 3(a_{n+2} - a_n) \\ & (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 3) = 0 \end{aligned}$$

$a_{n+2} > a_{n+1} > a_n$ より, $a_{n+2} - a_n \neq 0$ であるから

$$a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 3 = 0 \quad \text{よって} \quad a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} + 3$$

別解 ①より $a_{n+1}^2 - (2a_n + 3)a_{n+1} + a^2 - 3a_n = 0$

$$\text{これを } a_{n+1} \text{ について解くと} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3 \pm \sqrt{24a_n + 9}}{2}$$

$$\text{①は } a_{n+1}, a_n \text{ の対称式より} \quad a_n = \frac{2a_{n+1} + 3 \pm \sqrt{24a_{n+1} + 9}}{2}$$

$a_{n+1} > a_n \geq 3$ であるから

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3 + \sqrt{24a_n + 9}}{2}, \quad a_n = \frac{2a_{n+1} + 3 - \sqrt{24a_{n+1} + 9}}{2}$$

第1式から $a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} + 3 + \sqrt{24a_{n+1} + 9}}{2}$. これと第2式を加える.

(2) (1)の結果から $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 3$ ゆえに $b_{n+1} = b_n + 3$
①に $n = 1$ を代入すると

$$9 - 6a_2 + a_2^2 = 3(3 + a_2) \quad \text{ゆえに} \quad a_2(a_2 - 9) = 0$$

$a_2 > a_1 = 3$ に注意して, これを解くと $a_2 = 9$

$\{b_n\}$ は $b_1 = a_2 - a_1 = 9 - 3 = 6$, 公差3の等差数列であるから

$$b_n = 6 + 3(n - 1) \quad \text{すなわち} \quad b_n = 3n + 3$$

(3) (2)の結果から $a_{n+1} - a_n = 3n + 3$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (3k + 3) \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{3}{2}n(n + 1)$$

これは, $n = 1$ のときも成立するから $a_n = \frac{3}{2}n(n + 1)$ ■

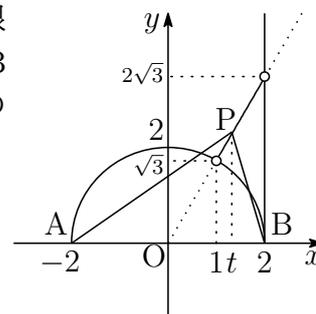
- 2 (1) $t > 0$ より, $P(t, \sqrt{3}t)$ は直線 $y = \sqrt{3}x$ の第1象限の点である. 右の図のように $\angle PAB$ は鋭角. $\angle APB$ が鋭角となるときの P は原点を中心とする半径2の円の外部にあるから

$$OP > 2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{t^2 + (\sqrt{3}t)^2} > 2$$

$$\text{これを解いて } (t > 0) \quad t > 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\angle PBA \text{ が鋭角となるのは, } P \text{ の } x \text{ 座標に注目して} \quad t < 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \triangle ABP \text{ が鋭角三角形となる } t \text{ の範囲は} \quad 1 < t < 2$$



- (2) $\vec{AP} = (t+2, \sqrt{3}t)$ に垂直で点 $B(2, 0)$ を通る直線の方程式は

$$(t+2)(x-2) + \sqrt{3}ty = 0$$

$$\vec{BP} = (t-2, \sqrt{3}t)$$
 に垂直で点 $A(-2, 0)$ を通る直線の方程式は

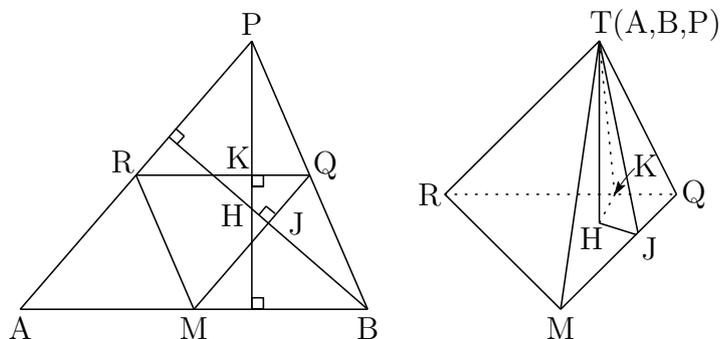
$$(t-2)(x+2) + \sqrt{3}ty = 0$$

$$\triangle ABP \text{ の垂心は上の2本の直線の交点であるから} \quad \left(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t} \right)$$

- (3) (2) で求めた $\triangle PAB$ の垂心を H , 直線 BH と直線 QM の交点を J , 直線 PH と直線 QR の交点を K とおく. M, Q, R はそれぞれ辺 AB, BP, PA の中点であるから, 中点連結定理により

$$MQ \parallel PA, \quad QR \parallel AB \quad \text{ゆえに} \quad HJ \perp MQ, \quad HK \perp QR$$

A, B, P が重なる四面体の頂点を T とすると, 平面 THJ は直線 MQ と垂直, 平面 THK は直線 QR と垂直である. これら2平面の交線 TH は, 直線 MQ および直線 QR に垂直であるから, TH は平面 MQR と垂直である.



$A(-2, 0)$, $P(t, \sqrt{3}t)$ の中点 R の座標は $\left(\frac{-2+t}{2}, \frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$

K の x 座標は P の x 座標と等しく, y 座標は R の y 座標と等しいから

$$K\left(t, \frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad TK = PK = \frac{\sqrt{3}t}{2}$$

$1 < t < 2$ に注意して

$$\begin{aligned} HK &= \left| \frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t} \right| = \frac{|5t^2-8|}{2\sqrt{3}t}, \\ TH &= \sqrt{TK^2 - HK^2} \\ &= \sqrt{\frac{3t^2}{4} - \frac{(5t^2-8)^2}{12t^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}t} \sqrt{(t^2-1)(4-t^2)} \end{aligned}$$

$$\triangle PAB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}t = 2\sqrt{3}t \quad \text{ゆえに} \quad \triangle MQR = \frac{1}{4} \triangle PAB = \frac{\sqrt{3}t}{2}$$

四面体 $TMQR$ の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \triangle MQR \cdot TH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}t}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}t} \sqrt{(t^2-1)(4-t^2)} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(t^2-1)(4-t^2)} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{-\left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} \end{aligned}$$

よって, $t^2 = \frac{5}{2}$, すなわち, $t = \frac{\sqrt{10}}{2}$ のとき, V は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる. ■

- 3** (1) 2次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \cdots (*)$ が実数解をもつとき,

$$p_2^2 - 4 \cdot 2p_1 \cdot 2p_3 = p_2^2 - 16p_1p_3 \geq 0$$

p_1, p_2, p_3 はそれぞれ6以下の自然数であるから, 上式を満たすとき

$$p_2 = 4, 5 \text{ のとき } (p_1, p_3) = (1, 1)$$

$$p_2 = 6 \text{ のとき } (p_1, p_3) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{2 \times 1 + 3}{6^3} = \frac{5}{216}$$

- (2) 2次方程式(*)の解 α, β と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{2p_3}{2p_1} = \frac{p_3}{p_1} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3 = p_1$$

このとき, 2次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_1 = 0$ が複素数解をもつとき

$$p_2^2 - 4 \cdot 2p_1 \cdot 2p_1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2 < 4p_1$$

上式を満たすとき

$$p_1 = p_3 = 1 \text{ のとき } p_2 = 1, 2, 3$$

$$p_1 = p_3 = 2, 3, 4, 5, 6 \text{ のとき } p_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{3 + 5 \cdot 6}{6^3} = \frac{11}{72}$$



4 (1) $a > 0$, $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ ($0 \leq t \leq 1$) より ($a > 0$)

$$f'(t) = -12t^2 + a + 3 = -12 \left(t + \sqrt{\frac{a+3}{12}} \right) \left(t - \sqrt{\frac{a+3}{12}} \right)$$

$$b = \sqrt{\frac{a+3}{12}} \text{ とおくと } f(t) = -4t^3 + 12b^2t, \quad f'(t) = -12(t+b)(t-b)$$

t	0	...	b	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	0	↗	$8b^3$	↘

(i) $b \leq 1$, すなわち, $0 < a \leq 9$ のとき

$$M(a) = 8b^3 = 8 \left(\sqrt{\frac{a+3}{12}} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} (a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii) $1 \leq b$, すなわち, $9 \leq a$ のとき

$$M(a) = f(1) = a - 1$$

$$(i), (ii) \text{ より } M(a) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{9} (a+3)^{\frac{3}{2}} & (0 < a \leq 9) \\ a - 1 & (9 \leq a) \end{cases}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{27} (x+3)^3 & (0 < x \leq 9) \\ (x-1)^2 & (9 \leq x) \end{cases}$$

$y = g(x)$ 上の点 $(s, g(s))$ における接線の方程式は

$$y - g(s) = g'(s)(x - s)$$

この直線が原点を通るとき $g(s) = sg'(s)$

(i) $0 < s \leq 9$ のとき, $g'(s) = \frac{1}{9}(s+3)^2$ であるから

$$\frac{1}{27}(s+3)^3 = s \cdot \frac{1}{9}(s+3)^2 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{3}{2}$$

(ii) $9 \leq s$ のとき, $g'(s) = 2(s-1)$ であるから

$$(s-1)^2 = s \cdot 2(s-1) \quad \text{ゆえに} \quad s = -1$$

これは, $9 \leq s$ に反するので, 不適

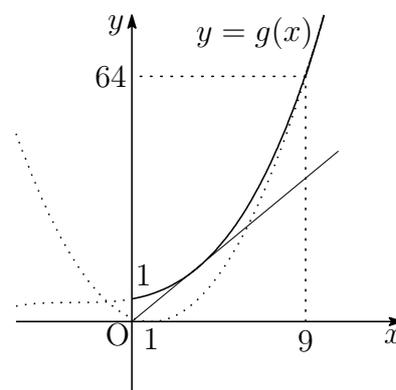
$$(i), (ii) \text{ より } s = \frac{3}{2}, \quad \text{接線の傾きは } g' \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{2} + 3 \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$(3) \quad k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{M(a)^2}{a}} = \sqrt{\frac{g(a)}{a}}$$

$\frac{g(a)}{a}$ は $y = g(x)$ 上の点 $(a, g(a))$ と原点を結ぶ直線の傾きを表す.

(2) の結果および $y = g(x)$ のグラフの概形から, k の最小値は

$$k = \sqrt{g' \left(\frac{3}{2} \right)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$



別解

$$\frac{g(a)}{a} = \begin{cases} \frac{1}{27a}(a+3)^3 & (0 < a \leq 9) \\ \frac{1}{a}(a-1)^2 & (9 \leq a) \end{cases}$$

(i) $0 < a \leq 9$ のとき, $a = b^3$ とおくと, $0 < b \leq 3^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{1}{27a}(a+3)^3 = \frac{1}{27b^3}(b^3+3)^3 = \left(\frac{b^3+3}{3b} \right)^3 = \left(\frac{b^2}{3} + \frac{1}{b} \right)^3$$

ここで, $b > 0$ のとき, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{b^2}{3} + \frac{1}{b} = \frac{b^2}{3} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b^2}{3} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{2b}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

上式において, 等号が成立するとき, $0 < \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{2}{3}}$ に注意して

$$\frac{b^2}{3} = \frac{1}{2b} \quad \text{すなわち} \quad b = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

したがって, $a = \frac{3}{2}$ のとき, k は最小値 $\sqrt{\frac{g\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}$ をとる.

(ii) $9 \leq a$ のとき

$$\frac{1}{a}(a-1)^2 = a + \frac{1}{a} - 2 > a - 2 \geq 7 \quad \text{ゆえに} \quad k > \sqrt{7}$$

(i), (ii) より, 求める最小値は $\frac{3}{2}$

