平成 27 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

1 次の性質をもつ数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 3$$
$$a_{n+1} > a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$a_n{}^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}{}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$a_n + a_{n+2}$ を a_{n+1} を用いて表せ．

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ により定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

2 $t > 0$ を実数とする．座標平面において，3 点 A$(-2,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，P$(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える．

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ．

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ．

(3) 辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく．t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

3 サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に $p_1,\ p_2,\ p_3$ とし，x の 2 次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \qquad \cdots(*)$$

を考える．

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 $\alpha,\ \beta$ をもち，かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a > 0$ を実数とする．関数 $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする．

(1) $M(a)$ を求めよ．

(2) 実数 $x > 0$ に対し，$g(x) = M(x)^2$ とおく．xy 平面において，関数 $y = g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s > 0$ とその接線の傾きを求めよ．

(3) a が正の実数全体を動くとき，

$$k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$$

の最小値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$a_1=3,\ a_{n+1}>a_n$$

$$a_n{}^2-2a_na_{n+1}+a_{n+1}{}^2=3(a_n+a_{n+1}) \quad \cdots ①$$

①から $\quad a_{n+1}{}^2-2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}{}^2=3(a_{n+1}+a_{n+2}) \quad \cdots ②$

② − ① より

$$a_{n+2}{}^2-a_n{}^2-2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3(a_{n+2}-a_n)$$

$$(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}-3)=0$$

$a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$ より，$a_{n+2}-a_n\neq 0$ であるから

$$a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}-3=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}+3}$$

別解 ① より $\quad a_{n+1}{}^2-(2a_n+3)a_{n+1}+a^2-3a_n=0$

これを a_{n+1} について解くと $\quad a_{n+1}=\dfrac{2a_n+3\pm\sqrt{24a_n+9}}{2}$

① は a_{n+1}，a_n の対称式より $\quad a_n=\dfrac{2a_{n+1}+3\pm\sqrt{24a_{n+1}+9}}{2}$

$a_{n+1}>a_n\geqq 3$ であるから

$$a_{n+1}=\frac{2a_n+3+\sqrt{24a_n+9}}{2},\quad a_n=\frac{2a_{n+1}+3-\sqrt{24a_{n+1}+9}}{2}$$

第 1 式から $a_{n+2}=\dfrac{2a_{n+1}+3+\sqrt{24a_{n+1}+9}}{2}$．これと第 2 式を加える．

(2) (1) の結果から $\quad a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+3 \quad$ ゆえに $\quad b_{n+1}=b_n+3$

① に $n=1$ を代入すると

$$9-6a_2+a_2{}^2=3(3+a_2) \quad \text{ゆえに} \quad a_2(a_2-9)=0$$

$a_2>a_1=3$ に注意して，これを解くと $\quad a_2=9$

$\{b_n\}$ は $b_1=a_2-a_1=9-3=6$，公差 3 の等差数列であるから

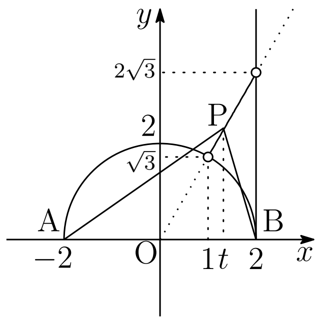
$$b_n=6+3(n-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b_n=3n+3}$$

(3) (2) の結果から $\quad a_{n+1}-a_n=3n+3$

$n\geqq 2$ のとき $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(3k+3) \quad$ ゆえに $\quad a_n=\dfrac{3}{2}n(n+1)$

これは，$n=1$ のときも成立するから $\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{3}{2}n(n+1)}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $t>0$ より，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ は直線 $y=\sqrt{3}x$ の第 1 象限の点である．右の図のように $\angle\mathrm{PAB}$ は鋭角．$\angle\mathrm{APB}$ が鋭角となるとき P は原点を中心とする半径 2 の円の外部にあるから



$$\mathrm{OP}>2 \quad ゆえに \quad \sqrt{t^2+(\sqrt{3}\,t)^2}>2$$

これを解いて $(t>0)$ $\qquad t>1 \quad \cdots ①$

$\angle\mathrm{PBA}$ が鋭角となるのは，P の x 座標に注目して $\qquad t<2 \quad \cdots ②$

①, ② より，$\triangle\mathrm{ABP}$ が鋭角三角形となる t の範囲は $\qquad \boldsymbol{1<t<2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t+2,\ \sqrt{3}\,t)$ に垂直で点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$(t+2)(x-2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}\,t)$ に垂直で点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ を通る直線の方程式は

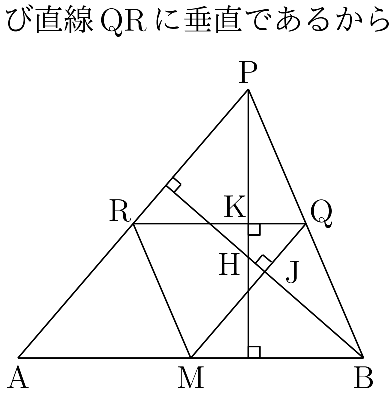
$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

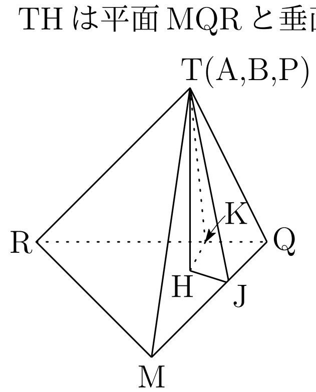
$\triangle\mathrm{ABP}$ の垂心は上の 2 本の直線の交点であるから $\qquad \boldsymbol{\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right)}$

(3) (2) で求めた $\triangle\mathrm{PAB}$ の垂心を H，直線 BH と直線 QM の交点を J，直線 PH と直線 QR の交点を K とおく．M，Q，R はそれぞれ辺 AB，BP，PA の中点であるから，中点連結定理により

$$\mathrm{MQ}/\!/\mathrm{PA}, \quad \mathrm{QR}/\!/\mathrm{AB} \quad ゆえに \quad \mathrm{HJ}\perp\mathrm{MQ}, \quad \mathrm{HK}\perp\mathrm{QR}$$

A，B，P が重なる四面体の頂点を T とすると，平面 THJ は直線 MQ と垂直，平面 THK は直線 QR と垂直である．これら 2 平面の交線 TH は，直線 MQ および直線 QR に垂直であるから，TH は平面 MQR と垂直である．





A$(-2,\ 0)$，P$(t,\ \sqrt{3}\,t)$ の中点 R の座標は $\left(\dfrac{-2+t}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$

K の x 座標は P の x 座標と等しく，y 座標は R の y 座標と等しいから

$$\mathrm{K}\left(t,\ \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{TK}=\mathrm{PK}=\frac{\sqrt{3}\,t}{2}$$

$1<t<2$ に注意して

$$\begin{aligned}
\mathrm{HK}&=\left|\frac{\sqrt{3}\,t}{2}-\frac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right|=\frac{|5t^2-8|}{2\sqrt{3}\,t},\\
\mathrm{TH}&=\sqrt{\mathrm{TK}^2-\mathrm{HK}^2}\\
&=\sqrt{\frac{3t^2}{4}-\frac{(5t^2-8)^2}{12t^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}
\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot\sqrt{3}\,t=2\sqrt{3}\,t$ ゆえに $\triangle\mathrm{MQR}=\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}$

四面体 TMQR の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{MQR}\cdot\mathrm{TH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\
&=\frac{1}{3}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\
&=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}
\end{aligned}$$

よって，$t^2=\dfrac{5}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$ のとき，V は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \cdots (*)$ が実数解をもつとき，

$$p_2{}^2 - 4{\cdot}2p_1{\cdot}2p_3 = p_2{}^2 - 16p_1p_3 \geqq 0$$

p_1，p_2，p_3 はそれぞれ 6 以下の自然数であるから，上式を満たすとき

$p_2 = 4,\ 5$ のとき　$(p_1,\ p_3) = (1,\ 1)$

$p_2 = 6$ のとき　$(p_1,\ p_2) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{2 \times 1 + 3}{6^3} = \mathbf{\dfrac{5}{216}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解 α，β と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{2p_3}{2p_1} = \frac{p_3}{p_1} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3 = p_1$$

このとき，2 次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_1 = 0$ が複素数解をもつとき

$$p_2{}^2 - 4{\cdot}2p_1{\cdot}2p_1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2 < 4p_1$$

上式を満たすとき

$p_1 = p_3 = 1$ のとき　$p_2 = 1,\ 2,\ 3$

$p_1 = p_3 = 2, 3, 4, 5, 6$ のとき　$p_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

よって，求める確率は　$\dfrac{3 + 5{\cdot}6}{6^3} = \mathbf{\dfrac{11}{72}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a>0$，$f(t)=-4t^3+(a+3)t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ より $(a>0)$

$$f'(t)=-12t^2+a+3=-12\left(t+\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)$$

$b=\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ とおくと　$f(t)=-4t^3+12b^2t$，$f'(t)=-12(t+b)(t-b)$

t	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$8b^3$	$\searrow$

(i) $b \leqq 1$，すなわち，$0<a \leqq 9$ のとき

$$M(a)=8b^3=8\left(\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii) $1 \leqq b$，すなわち，$9 \leqq a$ のとき

$$M(a)=f(1)=a-1$$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{M(a)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}} & (0<a \leqq 9) \\ a-1 & (9 \leqq a) \end{cases}}$

(2) (1) の結果から　$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{27}(x+3)^3 & (0<x \leqq 9) \\ (x-1)^2 & (9 \leqq x) \end{cases}$

$y=g(x)$ 上の点 $(s,\ g(s))$ における接線の方程式は

$$y-g(s)=g'(s)(x-s)$$

この直線が原点を通るとき　$g(s)=sg'(s)$

(i) $0<s \leqq 9$ のとき，$g'(s)=\dfrac{1}{9}(s+3)^2$ であるから

$$\frac{1}{27}(s+3)^3=s\cdot\frac{1}{9}(s+3)^2 \quad ゆえに \quad s=\frac{3}{2}$$

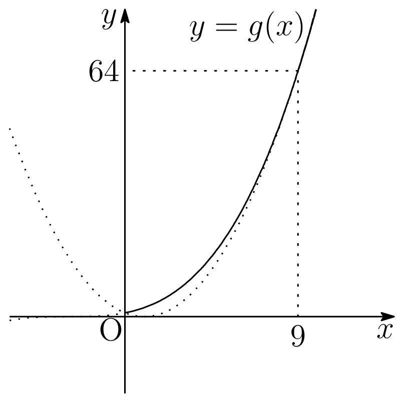
(ii) $9 \leqq s$ のとき，$g'(s)=2(s-1)$ であるから

$$(s-1)^2=s\cdot2(s-1) \quad ゆえに \quad s=-1$$

これは，$9 \leqq s$ に反するので，不適

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{s=\dfrac{3}{2}}$，　接線の傾きは　$g'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{2}+3\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$

(3) $$k=\frac{M(a)}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{M(a)^2}{a}}=\sqrt{\frac{g(a)}{a}}$$



$\dfrac{g(a)}{a}$ は $y=g(x)$ 上の点 $(a,\ g(a))$ と原点を結ぶ直線の傾きを表す．

(2) の結果および $y=g(x)$ のグラフの概形から，k の最小値は

$$k=\sqrt{g'\left(\frac{3}{2}\right)}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

別解 $$\frac{g(a)}{a}=\begin{cases}\dfrac{1}{27a}(a+3)^3 & (0<a\leqq 9)\\ \dfrac{1}{a}(a-1)^2 & (9\leqq a)\end{cases}$$

(i) $0<a\leqq 9$ のとき，$a=b^3$ とおくと，$0<b\leqq 3^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{1}{27a}(a+3)^3=\frac{1}{27b^3}(b^3+3)^3=\left(\frac{b^3+3}{3b}\right)^3=\left(\frac{b^2}{3}+\frac{1}{b}\right)^3$$

ここで，$b>0$ のとき，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{b^2}{3}+\frac{1}{b}=\frac{b^2}{3}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{3}\cdot\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{2b}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

上式において，等号が成立するとき，$0<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<3^{\frac{2}{3}}$ に注意して

$$\frac{b^2}{3}=\frac{1}{2b}\quad すなわち\quad b=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

したがって，$a=\dfrac{3}{2}$ のとき，k は最小値 $\sqrt{\dfrac{g\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{2}$ をとる．

(ii) $9\leqq a$ のとき

$$\frac{1}{a}(a-1)^2=a+\frac{1}{a}-2>a-2\geqq 7\quad ゆえに\quad k>\sqrt{7}$$

(i)，(ii) より，求める最小値は $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$