平成 26 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

1 曲線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線を l_1，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線を l_2 とする．ただし，$a < b$ とする．l_1 と l_2 の交点を R とし，線分 PR，線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする．

(1) R の座標を a と b を用いて表せ．

(2) S を a と b を用いて表せ．

(3) l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ．

2 1，2，3，4，5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある．

(1) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す．書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ．

(2) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す．書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ．

(3) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す．1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ．

3 t を正の実数とする．三角形 OAB の辺 OA を $2:1$ に内分する点を M，辺 OB を $t:1$ に内分する点を N とする．線分 AN と線分 BM の交点を P とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および t を用いて表せ．

(2) 直線 OP は線分 BM と直交し，かつ $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線であるとする．このとき，辺 OA と辺 OB の長さの比と t の値を求めよ．

4 実数 x，y に対して $A = 2\sin x + \sin y$，$B = 2\cos x + \cos y$ とおく．

(1) $\cos(x - y)$ を A，B を用いて表せ．

(2) x，y が $A = 1$ を満たしながら変化するとき，B の最大値と最小値，およびそのときの $\sin x$，$\cos x$ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

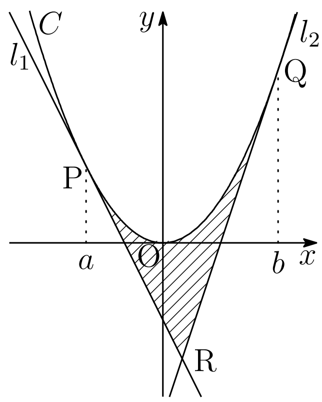
$$y-a^2=2a(x-a)$$

ゆえに　$y=2ax-a^2$　$\cdots$①

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は

$$y=2bx-b^2 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\frac{a+b}{2}},\ \boldsymbol{ab}\right)$



(2) 求める面積 S は，図の斜線部分の面積であるから[1]

$$\begin{aligned}
S &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \{x^2-(2ax-a^2)\}\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \{x^2-(2bx-b^2)\}\,dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (x-b)^2\,dx \\
&= \left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{(x-b)^3}{3}\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b} \\
&= \frac{1}{24}(b-a)^3 - \frac{1}{24}(a-b)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{12}(b-a)^3}
\end{aligned}$$

(3) 直線 ①，② が直交するから

$$2a\times 2b=-1 \quad ゆえに \quad a=-\frac{1}{4b}$$

これを (2) の結果に代入すると　$S=\dfrac{1}{12}\left(b+\dfrac{1}{4b}\right)^3$

$a<b$ より，$b>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$b+\frac{1}{4b} \geqq 2\sqrt{b\times\frac{1}{4b}}=1$$

よって，求める S の最小値は　$\dfrac{1}{12}\cdot 1^3=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ を参照

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 10 個の玉から 2 個取り出す場合の総数は ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ (通り)

書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，2 と 5 を 1 個ずつ取り出す場合であるから

$$2 \times 2 = 4 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は $\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{45}}$

(2) 10 個の玉から 4 個取り出す場合の総数は ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ (通り)

書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$\{1,\ 4,\ 5,\ 5\}$, $\{2,\ 2,\ 5,\ 5\}$ の組合せであるから

$$2{\cdot}2 + 1 = 5 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は $\dfrac{5}{210} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{42}}$

(3) 10 個の玉から 6 個の玉を順序を付けて取り出す場合の総数は

$${}_{10}\mathrm{P}_6 = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5 = 2^5{\cdot}3^3{\cdot}5^2{\cdot}7 \quad \text{(通り)}$$

(i) 1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数が異なるとき，前半 3 個の並べ方 (${}_5\mathrm{P}_3 \times 2^3$) に対し，後半 3 個の並べ方 (3! 通り) より

$${}_5\mathrm{P}_3 \times 2^3 \times 3! = 2^6{\cdot}3^2{\cdot}5 \quad \text{(通り)}$$

(ii) 1 個目から 3 個目までと，4 個目から 6 個目までが $\{2,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 3,\ 4\}$ の組合せであるとき，1，2，3，4 が区別されることと前半 3 個 ($3! \times 2^3$ 通り) と後半 3 個 (3! 通り) の組換えに注意して

$$3! \times 2^3 \times 3! \times 2 = 2^6{\cdot}3^2 \quad \text{(通り)}$$

(iii) 1 個目から 3 個目までと，4 個目から 6 個目までが $\{2,\ 2,\ 5\}$, $\{1,\ 4,\ 5\}$ の組合せであるとき，1，2，4，5 が区別されることと前半 3 個 ($3! \times 2^3$ 通り) と後半 3 個 (3! 通り) の組換えに注意して

$$3! \times 2^3 \times 3! \times 2 = 2^6{\cdot}3^2 \quad \text{(通り)}$$

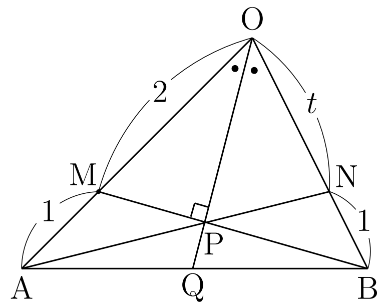
(i)〜(iii) から，求める確率は

$$\frac{2^6{\cdot}3^2{\cdot}5 + 2^6{\cdot}3^2 + 2^6{\cdot}3^2}{2^5{\cdot}3^3{\cdot}5^2{\cdot}7} = \frac{2^6{\cdot}3^2{\cdot}7}{2^5{\cdot}3^3{\cdot}5^2{\cdot}7} = \frac{2}{3{\cdot}5^2} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{75}}$$

■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{t+1}{t}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t+1}{t}y\overrightarrow{\mathrm{ON}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{2}x\overrightarrow{\mathrm{OM}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

点 P は，直線 AN および直線 BM 上の点であるから

$$x + \frac{t+1}{t}y = 1, \quad \frac{3}{2}x + y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{2}{t+3}, \quad y = \frac{t}{t+3}$$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{t+3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{t}{t+3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = t : 2$

また，線分 OQ は ∠AOB の二等分線であるから

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{QB} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OA} : \mathrm{OB} = t : 2$$

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと ($|\vec{a}| : |\vec{b}| = t : 2$)，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{t+3}(2\vec{a} + t\vec{b}), \quad \overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{3}(2\vec{a} - 3\vec{b})$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BM}}$ であるから

$$(2\vec{a} + t\vec{b})\cdot(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4|\vec{a}|^2 + 2(t-3)\vec{a}\cdot\vec{b} - 3t|\vec{b}|^2 = 0$$

$|\vec{a}| = \dfrac{t}{2}|\vec{b}|$ に注意して，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$t^2|\vec{b}|^2 + t(t-3)|\vec{b}|^2\cos\theta - 3t|\vec{b}|^2 = 0$$
$$t(t-3)(1+\cos\theta)|\vec{b}|^2 = 0$$

$t > 0$，$1 + \cos\theta \neq 0$，$|\vec{b}| \neq 0$ であるから　$\boldsymbol{t = 3}$

よって　$\mathbf{OA : OB = 3 : 2}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $A=2\sin x+\sin y$，$B=2\cos x+\cos y$ より

$$\begin{aligned}A^2+B^2&=(2\sin x+\sin y)^2+(2\cos x+\cos y)^2\\&=5+4(\cos x\cos y+\sin x\sin y)\\&=5+4\cos(x-y)\quad\cdots①\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\cos(x-y)=\dfrac{A^2+B^2-5}{4}}$

(2) $A=1$ のとき，① から　$B^2=4+4\cos(x-y)$

$-1\leqq\cos(x-y)\leqq 1$ であるから

$$0\leqq B^2\leqq 8\quad \text{ゆえに}\quad -2\sqrt{2}\leqq B\leqq 2\sqrt{2}$$

$B=\pm2\sqrt{2}$ のとき，$\cos(x-y)=1$ であるから，

$$x-y=2n\pi$$

とおくと (n は整数)，$y=x-2n\pi$ より，$A=1$ であるから

$$A=2\sin x+\sin(x-2n\pi)=3\sin x=1\quad \text{ゆえに}\quad \sin x=\frac{1}{3},$$
$$B=2\cos x+\cos(x-2n\pi)=3\cos x$$

$\sin x=\dfrac{1}{3}$ より，$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\boldsymbol{\sin x=\dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ のとき，B の最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{\sin x=\dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ のとき，B の最小値 $\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$ ■