平成25年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護]))

1 a を実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が，$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲に2つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(2) a が (1) で求めた範囲を動くとき，放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点の y 座標がとりうる値の範囲を求めよ．

2 四面体OABCにおいて，OA $=$ OB $=$ OC $=1$ とする．
$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．点Cから面OABに垂線を引き，その交点をHとする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) CHの長さを求めよ．

(3) 四面体OABCの体積を求めよ．

3 A，Bの2人が，サイコロを1回ずつ交互に投げるゲームを行う．自分の出したサイコロの目を合計して先に6以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する．Aから投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ．

(1) Bがちょうど1回投げてBが勝ちとなる確率を求めよ．

(2) Bがちょうど2回投げてBが勝ちとなる確率を求めよ．

(3) Bがちょうど2回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ．

4 t は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とする．放物線 $y=x^2$，直線 $x=1$，および x 軸とで囲まれた図形を A，放物線 $y=4(x-t)^2$ と直線 $y=1$ とで囲まれた図形を B とする．A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする．

(1) $S(t)$ を求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=x^2-2(a+1)x+3a$ とおくと

$$f(x)=(x-a-1)^2-a^2+a-1,$$
$$-a^2+a-1=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0 \qquad \cdots(*)$$

したがって，$f(x)=0$ は，異なる 2 つの実数解をもつ．
この解が $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にある条件は

$$-1<a+1<3,\quad f(-1)\geqq 0,\quad f(3)\geqq 0$$

したがって　$-2<a<2,\quad 5a+3\geqq 0,\quad -3a+3\geqq 0$

これを解いて　$\boldsymbol{-\frac{3}{5}\leqq a\leqq 1}$

(2) $(*)$ より，放物線の頂点の y 座標を $g(a)$ とすると

$$g(a)=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

$-\frac{3}{5}\leqq a\leqq 1$ のとき，$g(a)$ は

$$\text{最大値}\ g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4},\quad \text{最小値}\ g\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{49}{25}$$

よって，求める y 座標のとり得る値の範囲は　$\boldsymbol{-\frac{49}{25}\leqq y\leqq -\frac{3}{4}}$ ■

2 (1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot 1\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$ は平面 OAB 上のベクトルで $\vec{a}$ に垂直．
これと平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}},$$
$$\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{\vec{c}(\vec{a}-2\vec{b})}{\sqrt{3}}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b}) - \vec{c}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b}) - \vec{c}\right|^2 = \frac{2}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}) - \frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{c}) + |\vec{c}|^2$$

$$= \frac{2}{9}\cdot 3 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{3}$$　よって　$\mathrm{CH} = |\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

(3) $\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$　■

3 (1) A は 6 以外の目が出て，B が 6 の目が出る確率であるから

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

(2) 一方の 1 回目，2 回目に出た目をそれぞれ j，k とする．A が 2 回投げて A が勝っていないとき，A の 2 回の目の出方は，表の×印の示す 10 通り．このとき，B がちょうど 2 回投げて B が勝つ目の出方は，表の○印の示す 20 通り．よって，求める確率は

$j \backslash k$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	×	×	×	×	○	○
2	×	×	×	○	○	○
3	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○	○
6						

$$\frac{10}{6^2} \times \frac{20}{6^2} = \boldsymbol{\frac{25}{162}}$$

(3) A，B ともに 2 回の目の出方は，表の×印の示す 10 通り．よって，求める確率は

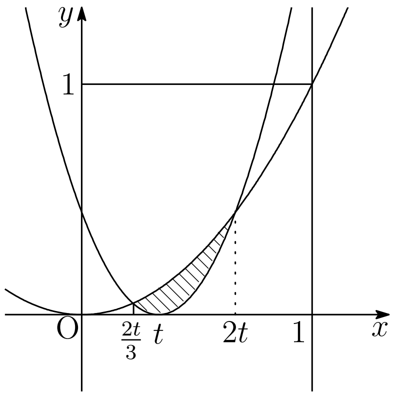
$$\left(\frac{10}{36}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{25}{324}}$$

■

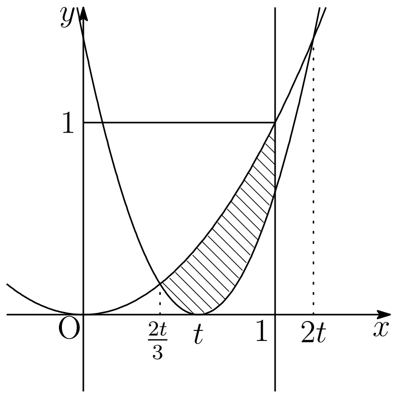
$\boxed{4}$ (1) 2つの放物線 $y = x^2$，$y = 4(x-t)^2$ の共有点の x 座標は

$$x^2 = 4(x-t)^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{2t}{3},\ 2t$$

$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ のとき



$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき



(i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\frac{2t}{3}}^{2t} \{x^2 - 4(x-t)^2\}\,dt \\ &= -3\int_{\frac{2t}{3}}^{2t} \left(x - \frac{2t}{3}\right)(x-2t)\,dt \\ &= -3\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2t - \frac{2t}{3}\right)^3 = \frac{32}{27}t^3 \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\frac{3t}{2}}^{1} \{x^2 - 4(x-t)^2\}\,dt \\ &= \int_{\frac{3t}{2}}^{1} (-3x^2 + 8tx - 4t^2)\,dt \\ &= \Big[-x^3 + 4tx^2 - 4t^2x\Big]_{\frac{2t}{3}}^{1} \\ &= \frac{32}{27}t^3 - 4t^2 + 4t - 1 \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{S(t) = \begin{cases} \dfrac{32}{27}t^3 & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{32}{27}t^3 - 4t^2 + 4t - 1 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}}$

(2) $0 < t < \dfrac{1}{2}$ のとき　$S'(t) = \dfrac{32}{9}t^2 > 0$

$\dfrac{1}{2} < t < 1$ のとき　$S'(t) = \dfrac{32}{9}t^2 - 8t + 4 = \dfrac{4}{9}(4t-3)(2t-3)$

したがって，$S(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{5}{27}$

よって，求める最大値は　$S\left(\dfrac{3}{4}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$　■