平成 24 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

1 a を正の実数とし，$a \neq \dfrac{1}{2}$ とする．曲線 $C : y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ をとる．点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし，点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする．l と m の交点が C 上にあるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 2 直線 l，m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ．

2 関数 $f(x)$ を $f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \dfrac{5}{4} \right|$ と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ とおく．$f(x)$ を t の関数として表せ．

(2) x が $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) x が $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ．また，$f(x)$ が最大値をとる x は $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ．

3 袋 A，袋 B のそれぞれに，1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている．これらのカードをよくかきまぜて取り出していく．以下の問いに答えよ．

(1) $N = 4$ とする．袋 A，B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す．ただし，取り出したカードは元には戻さないものとする．4 回のカードの取り出し操作が終わった後，数字が一致していた回数を X とする．$X = 1$，$X = 2$，$X = 3$，$X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ．また，X の期待値を求めよ．

(2) $N = 3$ とし，n は自然数とする．袋 A，B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，それらのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す．カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする．p_n と q_n を求めよ．

4 平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\dfrac{1}{2}$ を満たすとする．ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 実数 p，q に対して，$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく．このとき，次の条件

$$|\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0, \quad p > 0$$

を満たす実数 p，q を求めよ．

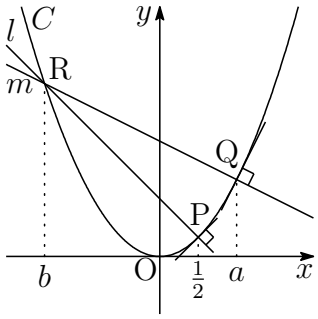
(2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leqq \vec{a}\cdot\vec{x} \leqq 1, \quad 1 \leqq \vec{b}\cdot\vec{x} \leqq 2$$

を満たすとき，$|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

解答例

1 (1) 2 直線 $l,\ m$ の交点が $C : y = x^2$ 上にあるから，この交点を $\mathrm{R}(b,\ b^2)$ とする．2 点 $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$，$\mathrm{R}(b,\ b^2)$ を通る直線の方程式は



$$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a)$$

すなわち　　$y = (a + b)x - ab \quad \cdots (*)$

$y = x^2$ より，$y' = 2x$ であるから，点 Q における接線の傾きは　$2a$

C の $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ における接線と直線 QR は垂直であるから

$$2a(a + b) = -1 \quad \cdots ①$$

同様に，C の $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ における接線と直線 PR は垂直であるから

$$2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + b\right) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -\frac{3}{2}$$

これを ① に代入すると

$$2a\left(a - \frac{3}{2}\right) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (a - 1)(2a - 1) = 0$$

$a \neq \frac{1}{2}$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a = 1}$

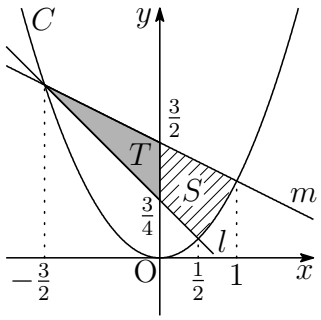
(2) 直線 l の方程式は，$(*)$ に $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{3}{2}$ を代入して

$$y=-x+\frac{3}{4}$$

直線 m の方程式は，$(*)$ に $a=1$，$b=-\dfrac{3}{2}$ を代入して

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

C と l で囲まれた図形の面積を S_1 とすると



$$\begin{aligned}S_1&=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(-x+\frac{3}{4}-x^2\right)dx\\&=-\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^3=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

C と m で囲まれた図形の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned}S_2&=\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-x^2\right)dx\\&=-\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)\,dx\\&=\frac{1}{6}\left(1+\frac{3}{2}\right)^3=\frac{125}{48}\end{aligned}$$

2 直線 l，m と曲線 C で囲まれた図形のうちで，y 軸の右側の部分の面積を S，左側の部分の面積を T とすると

$$S+T=S_2-S_1,\quad T=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$$

よって　　$S=S_2-S_1-T=\dfrac{125}{48}-\dfrac{4}{3}-\dfrac{9}{16}=\boldsymbol{\dfrac{17}{24}}$ ■

2 (1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ より

$$t^2 = \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x$$

ゆえに　$t^2 - 1 = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x$

したがって

$$f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right|$$
$$= \left| (t^2 - 1) + t - \frac{5}{4} \right| = \left| \boldsymbol{t^2 + t - \frac{9}{4}} \right|$$

(2) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x + 120^\circ)$，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より

$$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{3}}$$

(3) $g(t) = t^2 + t - \dfrac{9}{4} = \left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{2}$ とおくと $(-1 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) \leqq g(t) \leqq g(\sqrt{3}) \quad \text{すなわち} \quad -\frac{5}{2} \leqq g(t) \leqq \frac{3}{4} + \sqrt{3}$$

$\dfrac{5}{2} - \left(\dfrac{3}{4} + \sqrt{3}\right) = \dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{49} - \sqrt{48}}{4} > 0$ であるから

$$0 \leqq |g(t)| \leqq \frac{5}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0 \leqq f(x) \leqq \frac{5}{2}}$$

次に，$0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ のとき　$120^\circ \leqq x + 120^\circ \leqq 210^\circ$

$t = 2\sin(x + 120^\circ) = -\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\sin(x + 120^\circ) = -\dfrac{1}{4}$ を満たす x は

$(\sqrt{3} - 1)^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{49} - \sqrt{48}}{2} > 0$ より

$$\sqrt{3} - 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad 0 > -\frac{1}{4} > -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

したがって　$\sin 180^\circ > \sin(x + 120^\circ) > \sin 195^\circ$

ゆえに　$180^\circ < x + 120 < 195^\circ$　よって　$60^\circ < x < 75^\circ$ ■

3 (1) A から取り出されたカードを順に，α, β, γ, δ とし，これを用いた B からの取り出し方は 4! 通りある．

α だけが一致する場合，B の取り出し方は，次の 2 通り．

$$\alpha\gamma\delta\beta, \quad \alpha\delta\beta\gamma$$

一致する組が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りあるから　$P(X=1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times 2}{4!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

α, β だけが一致する場合，B の取り出し方は，$\alpha\beta\delta\gamma$ の 1 通り．

一致する組が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあるから　$P(X=2)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times 1}{4!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

3 つが一致する場合はないので　$P(X=3)=\mathbf{0}$

4 つとも一致する場合は 1 通りであるから　$P(X=4)=\dfrac{1}{4!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{24}}$

また，期待値は　$E(X)=1\cdot\dfrac{1}{3}+2\cdot\dfrac{1}{4}+4\cdot\dfrac{1}{24}=\mathbf{1}$

(2) 袋 A，B にカードが 3 枚ずつ残っているとき，取り出したカードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{3}$ である．n 回目で初めてカードの数字が一致する確率であるから

$$p_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

袋 A，B にカードが 2 枚ずつ残っているとき，取り出したカードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{2}$ である．このとき，m 回目で初めてカードの数字が一致する確率を r_m とすると

$$r_m=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{m}$$

$\boldsymbol{q_1=q_2=0}$，q_n は $(n\geqq 3)$

$$\begin{aligned}
q_n&=\sum_{k=1}^{n-2}p_k r_{n-k-1}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}\\
&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1}{\frac{4}{3}-1}=\boldsymbol{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}
\end{aligned}$$

■

4 (1) $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ より

$$|\vec{c}|^2=p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2,\qquad \vec{a}\cdot\vec{c}=p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ により

$$p^2-pq+q^2=1,\qquad p-\frac{1}{2}q=0$$

上の第 2 式から，$q=2p\cdots$①．これを第 1 式に代入すると

$$p^2-p\cdot 2p+(2p)^2=1\quad \text{ゆえに}\quad 3p^2=1$$

$p>0$ に注意して　$\boldsymbol{p=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　① より　$\boldsymbol{q=\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(2) (1) の結果から　$\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}$　ゆえに　$\vec{b}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{c}$

$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq 2$ より

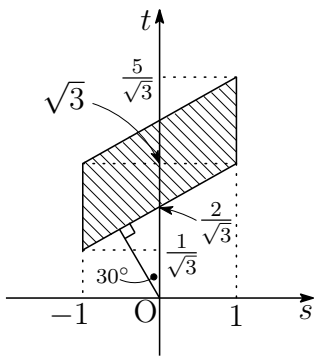
$$1\leqq-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{c}\cdot\vec{x}\leqq 2\quad \text{ゆえに}\quad 2\leqq-\vec{x}\cdot\vec{a}+\sqrt{3}\vec{x}\cdot\vec{c}\leqq 4$$

$|\vec{a}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ より　$\vec{x}=(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{x}\cdot\vec{c})\vec{c}$

$s=\vec{x}\cdot\vec{a}$，$t=\vec{x}\cdot\vec{c}$ とおくと　$(*)\begin{cases}-1\leqq s\leqq 1\\ 2\leqq -s+\sqrt{3}t\leqq 4\end{cases}$

$$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{c}\quad \text{ゆえに}\quad |\vec{x}|^2=s^2+t^2$$

$(*)$ より，点 $(s,\ t)$ の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．したがって，$|\vec{x}|$ のとり得る値の範囲は



$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 30^\circ\leqq|\vec{x}|\leqq\sqrt{1^2+\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

よって　$\boldsymbol{1\leqq|\vec{x}|\leqq\dfrac{2\sqrt{21}}{3}}$