

平成24年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護]))

1 a を正の実数とし, $a \neq \frac{1}{2}$ とする. 曲線 $C: y = x^2$ 上の2点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ と $Q(a, a^2)$ をとる. 点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし, 点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする. l と m の交点が C 上にあるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 2直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ.

2 関数 $f(x)$ を $f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right|$ と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ とおく. $f(x)$ を t の関数として表せ.
- (2) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき, $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ. また, $f(x)$ が最大値をとる x は $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ.

3 袋A, 袋Bのそれぞれに, 1から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている. これらのカードをよくかきまぜて取り出していく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $N = 4$ とする. 袋A, Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す. ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする. 4回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする. $X = 1, X = 2, X = 3, X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ. また, X の期待値を求めよ.
- (2) $N = 3$ とし, n は自然数とする. 袋A, Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, それらのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す. カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする. p_n と q_n を求めよ.

4 平面上のベクトル \vec{a} , \vec{b} が $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ を満たすとする. ただし, 記号 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル \vec{a} と \vec{b} の内積を表す. 以下の問いに答えよ.

(1) 実数 p , q に対して, $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく. このとき, 次の条件

$$|\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \quad p > 0$$

を満たす実数 p , q を求めよ.

(2) 平面上のベクトル \vec{x} が

$$-1 \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq 1, \quad 1 \leq \vec{b} \cdot \vec{x} \leq 2$$

を満たすとき, $|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ.

解答例

- 1 (1) 2直線 l , m の交点が $C: y = x^2$ 上にあるから、この交点を $R(b, b^2)$ とする. 2点 $Q(a, a^2)$, $R(b, b^2)$ を通る直線の方程式は

$$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a)$$

すなわち $y = (a + b)x - ab \quad \dots (*)$

$y = x^2$ より, $y' = 2x$ であるから, 点 Q における接線の傾きは $2a$
 C の $Q(a, a^2)$ における接線と直線 QR は垂直であるから

$$2a(a + b) = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

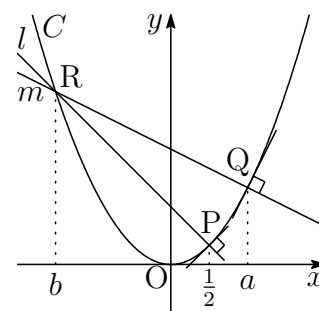
同様に, C の $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ における接線と直線 PR は垂直であるから

$$2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + b \right) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -\frac{3}{2}$$

これを ① に代入すると

$$2a \left(a - \frac{3}{2} \right) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (a - 1)(2a - 1) = 0$$

$a \neq \frac{1}{2}$ に注意して, これを解くと $a = 1$



(2) 直線 l の方程式は, (*) に $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ を代入して

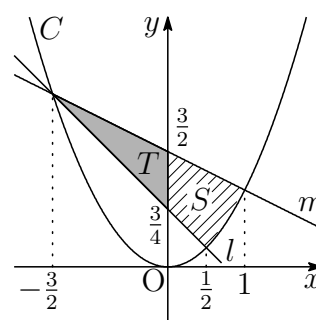
$$y = -x + \frac{3}{4}$$

直線 m の方程式は, (*) に $a = 1$, $b = -\frac{3}{2}$ を代入して

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

C と l で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-x + \frac{3}{4} - x^2 \right) dx \\ &= - \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right)^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



C と m で囲まれた図形の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - x^2 \right) dx \\ &= - \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left(x + \frac{3}{2} \right) (x - 1) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{3}{2} \right)^3 = \frac{125}{48} \end{aligned}$$

2直線 l , m と曲線 C で囲まれた図形のうちで, y 軸の右側の部分の面積を S , 左側の部分の面積を T とすると

$$S + T = S_2 - S_1, \quad T = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) = \frac{9}{16}$$

よって
$$S = S_2 - S_1 - T = \frac{125}{48} - \frac{4}{3} - \frac{9}{16} = \frac{17}{24}$$

■

2 (1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ より

$$t^2 = \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 3\cos^2 x$$

ゆえに $t^2 - 1 = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right| \\ &= \left| (t^2 - 1) + t - \frac{5}{4} \right| = \left| t^2 + t - \frac{9}{4} \right| \end{aligned}$$

(2) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x + 120^\circ)$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より

$$-1 \leq t \leq \sqrt{3}$$

(3) $g(t) = t^2 + t - \frac{9}{4} = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$ とおくと $(-1 \leq t \leq \sqrt{3})$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) \leq g(t) \leq g(\sqrt{3}) \quad \text{すなわち} \quad -\frac{5}{2} \leq g(t) \leq \frac{3}{4} + \sqrt{3}$$

$$\frac{5}{2} - \left(\frac{3}{4} + \sqrt{3}\right) = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{48}}{4} > 0 \text{ であるから}$$

$$0 \leq |g(t)| \leq \frac{5}{2} \quad \text{よって} \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$$

次に, $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ のとき $120^\circ \leq x + 120^\circ \leq 210^\circ$

$t = 2\sin(x + 120^\circ) = -\frac{1}{2}$, すなわち, $\sin(x + 120^\circ) = -\frac{1}{4}$ を満たす x は

$$(\sqrt{3} - 1)^2 - \frac{1}{2} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{48}}{2} > 0 \text{ より}$$

$$\sqrt{3} - 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad 0 > -\frac{1}{4} > -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

したがって $\sin 180^\circ > \sin(x + 120^\circ) > \sin 195^\circ$

ゆえに $180^\circ < x + 120^\circ < 195^\circ$ よって $60^\circ < x < 75^\circ$ ■

- 3** (1) Aから取り出されたカードを順に、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とし、これを用いたBからの取り出し方は4!通りある。

α だけが一致する場合、Bの取り出し方は、次の2通り。

$$\alpha\gamma\delta\beta, \quad \alpha\delta\beta\gamma$$

一致する組が ${}_4C_1$ 通りあるから $P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \times 2}{4!} = \frac{1}{3}$

α, β だけが一致する場合、Bの取り出し方は、 $\alpha\beta\delta\gamma$ の1通り。

一致する組が ${}_4C_2$ 通りあるから $P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \times 1}{4!} = \frac{1}{4}$

3つが一致する場合はないので $P(X=3) = 0$

4つとも一致する場合は1通りであるから $P(X=4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

また、期待値は $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{24} = 1$

- (2) 袋A, Bにカードが3枚ずつ残っているとき、取り出したカードの数字が一致する確率は $\frac{1}{3}$ である。 n 回目で初めてカードの数字が一致する確率であるから

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

袋A, Bにカードが2枚ずつ残っているとき、取り出したカードの数字が一致する確率は $\frac{1}{2}$ である。このとき、 m 回目で初めてカードの数字が一致する確率を r_m とすると

$$r_m = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$q_1 = q_2 = 0$, q_n は($n \geq 3$)

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^{n-2} p_k r_{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1}{\frac{4}{3} - 1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$



4 (1) $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ より

$$|\vec{c}|^2 = p^2|\vec{a}|^2 + 2pq\vec{a}\cdot\vec{b} + q^2|\vec{b}|^2, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = p|\vec{a}|^2 + q\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \text{ より}$$

$$p^2 - pq + q^2 = 1, \quad p - \frac{1}{2}q = 0$$

上の第2式から, $q = 2p \cdots \textcircled{1}$. これを第1式に代入すると

$$p^2 - p \cdot 2p + (2p)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3p^2 = 1$$

$$p > 0 \text{ に注意して} \quad p = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \textcircled{1} \text{ より} \quad q = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2) (1)の結果から $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}$ ゆえに $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{c}$

$1 \leq \vec{b}\cdot\vec{x} \leq 2$ より

$$1 \leq -\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{c}\cdot\vec{x} \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad 2 \leq -\vec{x}\cdot\vec{a} + \sqrt{3}\vec{x}\cdot\vec{c} \leq 4$$

$$|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \text{ より} \quad \vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} + (\vec{x}\cdot\vec{c})\vec{c}$$

$$s = \vec{x}\cdot\vec{a}, \quad t = \vec{x}\cdot\vec{c} \text{ とおくと} \quad (*) \begin{cases} -1 \leq s \leq 1 \\ 2 \leq -s + \sqrt{3}t \leq 4 \end{cases}$$

$$\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{c} \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{x}|^2 = s^2 + t^2$$

(*) より, 点 (s, t) の表す領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含む. したがって, $|\vec{x}|$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cos 30^\circ \leq |\vec{x}| \leq \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\text{よって} \quad 1 \leq |\vec{x}| \leq \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

