平成 23 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

1 以下の問いに答えよ．

(1) 実数 x に関する連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq 1 \\ 2{\cdot}3^x + a3^{-x} \leqq 1 \end{cases}$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ．

(2) $x \geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対し不等式

$$3^x + a3^{-x} \geqq a$$

が成り立つような実数 a の範囲を求めよ．

2 三角形 OAB の辺 AB を 1 ： 2 に内分する点を C とする．動点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(x \geqq 1)$ を満たすとし，直線 CD と直線 OB の交点を E とする．

(1) 実数 y を $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定めるとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

(2) 三角形 OAB の面積を S，三角形 ODE の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の最大値と，そのときの x を求めよ．

3 先生と 3 人の生徒 A，B，C がおり，玉の入った箱がある．箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている．先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う．取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする．この操作を 2 回続けて行うものとして，以下の問いに答えよ．ただし，サイコロの 1 から 6 の目が出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする．

(1) A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ．

(2) B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ．

4 放物線 $y = x^2$ の 2 本の接線 l，m は垂直であるとする．

(1) l の接点の座標が $(a,\ a^2)$ で与えられるとき，l，m の交点の座標を a で表せ．

(2) l，m が y 軸に関して対称のとき，l，m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $(*)\begin{cases} x \geqq 1 \\ 2{\cdot}3^x + a3^{-x} \leqq 1 \end{cases}$

$(*)$ の第 1 式から，$t = 3^x$ とおくと　$t \geqq \dfrac{1}{3}$

$(*)$ の第 2 式を t を用いて表すと

$$2t + \frac{a}{t} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq -2t^2 + t$$

$f(t) = -2t^2 + t$ おくと　$f(t) = -2\left(t - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{8}$

$t \geqq \dfrac{1}{3}$ における $f(t)$ の最大値は　$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{9}$

よって，$a \leqq f(t)$ が解をもつとき　$\boldsymbol{a \leqq \dfrac{1}{9}}$

(2) (1) と同様に，$t = 3^x$ とおくと $(x \geqq -1)$　$t \geqq -1$

不等式 $3^x + a3^{-x} \geqq a$ を t を用いて表すと

$$t + \frac{a}{t} \geqq a \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - at + a \geqq 0$$

$g(t) = t^2 - at + a$ とおくと　$g(t) = \left(t - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + a \quad \cdots (**)$

$t \geqq \dfrac{1}{3}$ における $g(t)$ の最小値を m とすると，$(**)$ が成立する条件は　$m \geqq 0$

(i) $\dfrac{a}{2} \leqq \dfrac{1}{3}$，すなわち，$a \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき　$m = g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{9} \geqq 0$

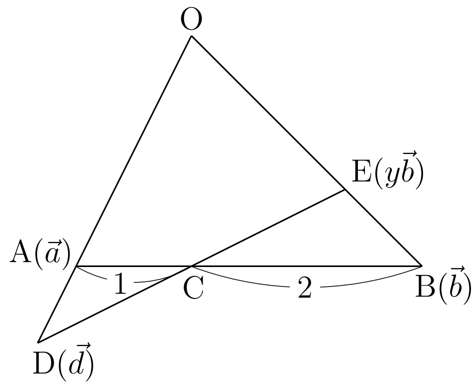
(ii) $\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{a}{2}$，すなわち，$\dfrac{2}{3} \leqq a$ のとき　$m = g\left(\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4} + a \geqq 0$

したがって　(i) のとき　$-\dfrac{1}{6} \leqq a \leqq \dfrac{2}{3}$，　(ii) のとき　$\dfrac{2}{3} \leqq a \leqq 4$

よって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{6} \leqq a \leqq 4}$　■

2 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\vec{b}$$



点 C は DE を $s:1-s$ に内分する点とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$=(1-s)x\vec{a}+sy\vec{b}$$

点 C は AB を 1 : 2 に内分する点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

したがって　$(1-s)x=\dfrac{2}{3}$,　$sy=\dfrac{1}{3}$

上の 2 式から　$1-s=\dfrac{2}{3x}$,　$s=\dfrac{1}{3y}$　ゆえに　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3$

別解　△OAB および直線 DE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EO}}=1\quad\text{ゆえに}\quad\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-y}{y}=1$$

したがって　$\dfrac{1-y}{y}=\dfrac{2(x-1)}{x}$　よって　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3$

(2) $a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とすると　$\mathrm{OD}=xa$，$\mathrm{OE}=yb$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta,\quad T=\frac{1}{2}xa\cdot yb\sin\theta\quad\text{ゆえに}\quad\frac{S}{T}=\frac{1}{xy}$$

2 正数 $\dfrac{2}{x}$，$\dfrac{1}{y}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$3=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqq 2\sqrt{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y}}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{xy}\leqq\frac{9}{8}$$

上式で等号が成立するとき　$\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}$　すなわち　$x=\dfrac{4}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{4}{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{8}}$ をとる．　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) サイコロは2回とも1の目が出て，Aが2回とも赤玉を取り出す確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{540}}$$

(2) 1回目の操作でBが赤玉を取り出す確率を $P(X)$ とすると

$$P(X) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

2回目の操作でBが赤玉を取り出す確率を (Y) とすると

$$P(X \cap Y) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{135}$$

2回の操作でBが2回とも赤玉を取り出す確率を $P(X \cap Y)$ とすると

$$P(X \cap Y) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{135}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{135} = \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{135}} \end{aligned}$$

注意 非復元試行でも，1回目，2回目の操作で赤玉を取り出す確率はともに $\dfrac{3}{10}$

解説 箱の中に赤玉が r 個，白玉が w 個あるとき，赤玉を取り出す確率 p は

$$p = \frac{r}{r+w}$$

取り出した玉を戻さない (非復元試行) とき，箱の中に残る赤玉の個数が $r-1$ 個になる確率が p で，赤玉の個数が r 個になる確率は $1-p$ である．したがって，次の試行で赤玉を取り出す確率は

$$\begin{aligned} p \times \frac{r-1}{r+w-1} + (1-p) \times \frac{r}{r+w-1} &= \frac{r-p}{r+w-1} \\ &= \frac{(r+w)p-p}{r+w-1} = p \end{aligned}$$

よって，赤玉が取り出される確率は，何回目であっても不変である． ■

4 (1) $C: y=x^2$ より　$y'=2x$

C 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=2ax-a^2\quad \cdots ①$$

m は C 上の点 $(b,\ b^2)$ における接線とすると，m の方程式は

$$y=2bx-b^2\quad \cdots ②$$

$a\neq b$ に注意して，①，② を解くと　$x=\dfrac{a+b}{2}$，$y=ab$　$\cdots(*)$

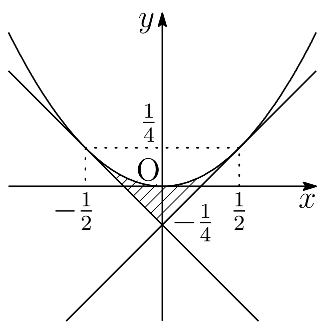
l と m は垂直であるから　$2a\cdot 2b=-1$　ゆえに　$b=-\dfrac{1}{4a}$

これを $(*)$ に代入して　$x=\dfrac{4a^2-1}{8a}$，　$y=-\dfrac{1}{4}$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{4a^2-1}{8a},-\dfrac{1}{4}\right)}$

(2) 2 直線 l，m は y 軸に関して対称であるから，その交点は y 軸上にあるから

$$4a^2-1=0\quad \text{ゆえに}\quad a=\pm\frac{1}{2}$$



したがって，2 接線 $l,\ m$ の方程式は

$$y=\pm x-\frac{1}{4}$$

求める面積は，右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{x^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{24}$$

よって　$\boldsymbol{S=\dfrac{1}{12}}$