

平成23年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護]))

問題 1 2 3 4

1 以下の問いに答えよ.

(1) 実数 x に関する連立不等式

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2 \cdot 3^x + a3^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ.

(2) $x \geq -1$ を満たすすべての実数 x に対し不等式

$$3^x + a3^{-x} \geq a$$

が成り立つような実数 a の範囲を求めよ.

2 三角形 OAB の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を C とする. 動点 D は $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$ ($x \geq 1$) を満たすとし, 直線 CD と直線 OB の交点を E とする.

(1) 実数 y を $\overrightarrow{OE} = y\overrightarrow{OB}$ で定めるとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

(2) 三角形 OAB の面積を S , 三角形 ODE の面積を T とするとき, $\frac{S}{T}$ の最大値と, そのときの x を求めよ.

3 先生と3人の生徒 A, B, C がおり, 玉の入った箱がある. 箱の中には最初, 赤玉3個, 白玉7個, 全部で10個の玉が入っている. 先生がサイコロをふって, 1の目が出たら A が, 2または3の目が出たら B が, その他の目が出たら C が箱の中から1つだけ玉を取り出す操作を行う. 取り出した玉は箱の中に戻さず, 取り出した生徒のものとする. この操作を2回続けて行うものとして, 以下の問いに答えよ. ただし, サイコロの1から6の目が出る確率は等しいものとし, また, 箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする.

(1) A が2個の赤玉を手に入れる確率を求めよ.

(2) B が少なくとも1個の赤玉を手に入れる確率を求めよ.

4 放物線 $y = x^2$ の2本の接線 l, m は垂直であるとする.

- (1) l の接点の座標が (a, a^2) で与えられるとき, l, m の交点の座標を a を用いて表せ.
- (2) l, m が y 軸に関して対称のとき, l, m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad (*) \begin{cases} x \geq -1 \\ 2 \cdot 3^x + a3^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

(*) の第1式から, $t = 3^x$ とおくと $t \geq \frac{1}{3}$

(*) の第2式を t を用いて表すと

$$2t + \frac{a}{t} \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq -2t^2 + t$$

$$f(t) = -2t^2 + t \text{ おくと} \quad f(t) = -2 \left(t - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{8}$$

$$t \geq \frac{1}{3} \text{ における } f(t) \text{ の最大値は} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

よって, $a \leq f(t)$ が解をもつとき $a \leq \frac{1}{9}$

(2) (1) と同様に, $t = 3^x$ とおくと ($x \geq -1$) $t \geq \frac{1}{3}$

不等式 $3^x + a3^{-x} \geq a$ を t を用いて表すと

$$t + \frac{a}{t} \geq a \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - at + a \geq 0$$

$$g(t) = t^2 - at + a \text{ とおくと} \quad g(t) = \left(t - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} + a \quad \dots (**)$$

$t \geq \frac{1}{3}$ における $g(t)$ の最小値を m とすると, (**) が成立する条件は $m \geq 0$

$$(i) \quad \frac{a}{2} \leq \frac{1}{3}, \text{ すなわち, } a \leq \frac{2}{3} \text{ のとき} \quad m = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} \geq 0$$

$$(ii) \quad \frac{1}{3} \leq \frac{a}{2}, \text{ すなわち, } \frac{2}{3} \leq a \text{ のとき} \quad m = g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + a \geq 0$$

したがって (i) のとき $-\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{2}{3}$, (ii) のとき $\frac{2}{3} \leq a \leq 4$

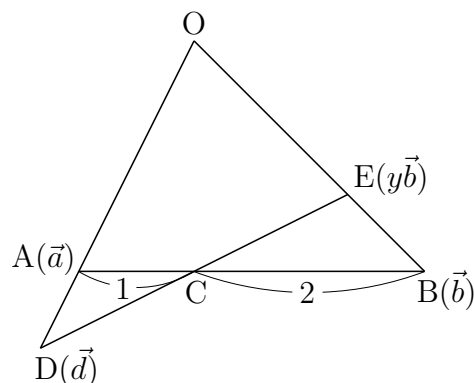
よって, 求める a の値の範囲は $-\frac{1}{6} \leq a \leq 4$ ■

2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とすると

$$\overrightarrow{OD} = x\vec{a}, \quad \overrightarrow{OE} = y\vec{b}$$

点 C は DE を $s : 1 - s$ に内分する点
とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= (1-s)\overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{OE} \\ &= (1-s)x\vec{a} + sy\vec{b} \end{aligned}$$



点 C は AB を 1 : 2 に内分する点であるから $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$$\text{したがって } (1-s)x = \frac{2}{3}, \quad sy = \frac{1}{3}$$

$$\text{上の 2 式から } 1-s = \frac{2}{3x}, \quad s = \frac{1}{3y} \quad \text{ゆえに } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

別解 $\triangle OAB$ および直線 DE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{OD}{DA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BE}{EO} = 1 \quad \text{ゆえに } \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-y}{y} = 1$$

$$\text{したがって } \frac{1-y}{y} = \frac{2(x-1)}{x} \quad \text{よって } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

(2) $a = OA$, $b = OB$, $\theta = \angle AOB$ とすると $OD = xa$, $OE = yb$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta, \quad T = \frac{1}{2}xa \cdot yb \sin \theta \quad \text{ゆえに } \frac{S}{T} = \frac{1}{xy}$$

2 正数 $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{y}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$3 = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y}} \quad \text{ゆえに } \frac{1}{xy} \leq \frac{9}{8}$$

上式で等号が成立するとき $\frac{2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$ すなわち $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$

よって、 $x = \frac{4}{3}$ のとき、最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。 ■

- 3** (1) サイコロは2回とも1の目が出て、Aが2回とも赤玉を取り出す確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{540}$$

- (2) 1回目の操作でBが赤玉を取り出す確率を $P(X)$ とすると

$$P(X) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

2回目の操作でBが赤玉を取り出す確率を $P(Y)$ とすると

$$P(Y) = \frac{2}{6} \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \right) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

2回の操作でBが2回とも赤玉を取り出す確率を $P(X \cap Y)$ とすると

$$P(X \cap Y) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{135}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(X \cup Y) &= P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{135} = \frac{26}{135} \end{aligned}$$

注意 非復元試行でも、1回目、2回目の操作で赤玉を取り出す確率はともに $\frac{3}{10}$

解説 箱の中に赤玉が r 個、白玉が w 個あるとき、赤玉を取り出す確率 p は

$$p = \frac{r}{r+w}$$

取り出した玉を戻さない(非復元試行)とき、箱の中に残る赤玉の個数が $r-1$ 個になる確率が p で、赤玉の個数が r 個になる確率は $1-p$ である。したがって、次の試行で赤玉を取り出す確率は

$$\begin{aligned} p \times \frac{r-1}{r+w-1} + (1-p) \times \frac{r}{r+w-1} &= \frac{r-p}{r+w-1} \\ &= \frac{(r+w)p-p}{r+w-1} = p \end{aligned}$$

よって、赤玉が取り出される確率は、何回目であっても不変である。 ■

4 (1) $C: y = x^2$ より $y' = 2x$

C 上の点 (a, a^2) における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

m は C 上の点 (b, b^2) における接線とすると, m の方程式は

$$y = 2bx - b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$a \neq b$ に注意して, ①, ② を解くと $x = \frac{a+b}{2}, y = ab \quad \dots (*)$

l と m は垂直であるから $2a \cdot 2b = -1$ ゆえに $b = -\frac{1}{4a}$

これを (*) に代入して $x = \frac{4a^2 - 1}{8a}, y = -\frac{1}{4}$

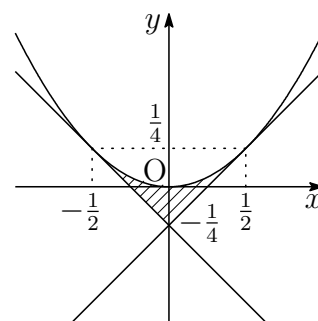
よって, 求める交点の座標は $\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}, -\frac{1}{4}\right)$

(2) 2直線 l, m は y 軸に関して対称であるから,
その交点は y 軸上にあるから

$$4a^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm \frac{1}{2}$$

したがって, 2接線 l, m の方程式は

$$y = \pm x - \frac{1}{4}$$



求める面積は, 右の図の斜線部分であるから, その面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ x^2 - \left(x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

よって $S = \frac{1}{12}$

