平成17年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護]))

問題 [1] [2] [3] [4]

1 $0 < t < \dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i) $(1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e}$

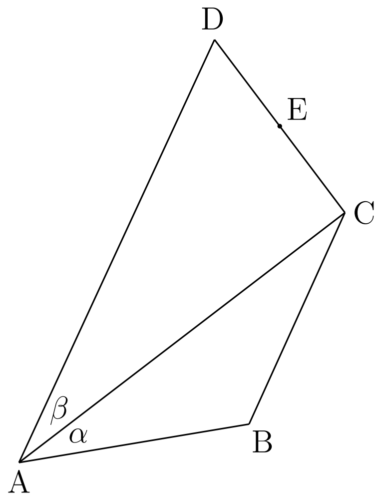
(ii) $(1-t)(\vec{a}+\vec{e}) = t(\vec{b}+\vec{e})$

を満たすとする．さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x}-\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直で長さの比が $t : 1-t$ となるとする．このとき，内積 $\vec{x}\cdot\vec{e}$ を t で表せ．

2 すべての内角が 180° より小さい四角形ABCDがある．辺の長さが $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = r$，$\mathrm{AD} = 2r$ とする．さらに，辺CD上の点Eがあり，3つの三角形 $\triangle$ABC，$\triangle$ACE，$\triangle$ADE の面積はすべて等しいとする．$\alpha = \angle\mathrm{BAC}$，$\beta = \angle\mathrm{CAD}$ とおく．

(1) $\alpha = \beta$ を示せ．

(2) $\cos\angle\mathrm{DAB} = \dfrac{3}{5}$ であるとするとき，$\sin\angle\mathrm{CAE}$ の値を求めよ．



$\boxed{3}$ 1から6の番号のつけられた6個の箱に，それぞれ3枚ずつの皿が重ねて置かれている．白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ1個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする．2つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない．2つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの数と同じ番号の箱から皿1枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す．

(1) サイコロを3回振るとき，皿が4枚の箱と2枚の箱がそれぞれ3個ずつとなる確率を求めよ．

(2) サイコロを3回振るとき，皿が3枚の箱が2個，5枚の箱，4枚の箱，2枚の箱，1枚の箱がそれぞれ1個ずつとなる確率を求めよ．

$\boxed{4}$ 2つの曲線 $C : y = -x^2$ と $D : y = (x-a)^2 + b$ が1点で接している．曲線 D と曲線 $E : y = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 1$ によって囲まれる部分の面積 S が最小となるように実数 a，b を定め，そのときの S を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $0 < t < \dfrac{1}{2}$，(i)，(ii) より，$\vec{a} = \dfrac{t}{1-t}\vec{e}$，$\vec{b} = \dfrac{1-t}{t}\vec{e}$ $\cdots(*)$

$$(1-t)^2\vec{a} = t^2\vec{b}, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 1 \quad \cdots(**)$$

$|\vec{x}-\vec{a}| : |\vec{x}-\vec{b}| = t : 1-t$ より $(1-t)|\vec{x}-\vec{a}| = t|\vec{x}-\vec{b}|$

$$(1-t)^2(|\vec{x}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{x} + |\vec{a}|^2) = t^2(|\vec{x}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{x} + |\vec{b}|^2)$$

$(*)$，$(**)$ より $(1-t)^2|\vec{x}|^2 + t^2 = t^2|\vec{x}|^2 + (1-t)^2$

$$(1-2t)|\vec{x}|^2 = 1-2t \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{x}| = 1 \quad \cdots①$$

$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b}) = 0$ より $|\vec{x}|^2 - (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{x} + \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$(*)$，$(**)$ および ① から

$$2 - \left(\frac{t}{1-t} + \frac{1-t}{t}\right)\vec{e}\cdot\vec{x} = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\vec{x}\cdot\vec{e} = \frac{2t(1-t)}{2t^2-2t+1}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ACE}=\triangle\mathrm{ADE}$ より　$\triangle\mathrm{ACD}=2\triangle\mathrm{ABC}$

$$\frac{1}{2}\mathrm{AC}{\cdot}\mathrm{AD}\sin\beta=2{\cdot}\frac{1}{2}\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AC}\sin\alpha$$

したがって　$\frac{1}{2}\mathrm{AC}{\cdot}2r\sin\beta=2{\cdot}\frac{1}{2}r{\cdot}\mathrm{AC}\sin\alpha$　ゆえに　$\sin\alpha=\sin\beta$

$\alpha+\beta<180^\circ$ であるから，$\beta\neq180^\circ-\alpha$ に注意すると　$\alpha=\beta$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ は二等辺三角形であるから　$\mathrm{AC}=2r\cos\alpha$

$\beta=\alpha$ より，余弦定理を $\triangle\mathrm{ACD}$ に適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{CD}^2&=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AC}{\cdot}\mathrm{AD}\cos\alpha\\&=(2r\cos\alpha)^2+(2r)^2-2(2r\cos\alpha){\cdot}2r\cos\alpha\\&=4r^2(1-\cos^2\alpha)=4r^2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

ゆえに　$\mathrm{CD}=2r\sin\alpha$　したがって　$\triangle\mathrm{ACE}$ は直角三角形

条件から　$\cos2\alpha=\frac{3}{5}$　ゆえに　$2\cos^2\alpha-1=\frac{3}{5}$

これを解いて　$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$,　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$,　$\tan\alpha=\frac{1}{2}$

ゆえに　$\mathrm{AC}=2r\cos\alpha$, $\mathrm{CE}=\frac{1}{2}\mathrm{CD}=\frac{1}{2}{\cdot}2r\sin\alpha=r\sin\alpha$

$\theta=\angle\mathrm{CAE}$ とすると

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AC}}=\frac{r\sin\alpha}{2r\cos\alpha}=\frac{1}{2}\tan\alpha=\frac{1}{2}{\cdot}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ より

$$1+4^2=\frac{1}{\sin^2\theta}\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{17}}}$$

別解 B から AC に垂線 AH を引くと　$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\cos\alpha=\dfrac{2r}{\sqrt{5}}$

$\mathrm{AC}=2\mathrm{AH}=\dfrac{4r}{\sqrt{5}}$ であるから，△ACD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{CD}^2&=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AC}{\cdot}\mathrm{AD}\cos\beta\\&=\left(\frac{4r}{\sqrt{5}}\right)^2+(2r)^2-2{\cdot}\frac{4r}{\sqrt{5}}{\cdot}2r{\cdot}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}r^2\end{aligned}$$

$\mathrm{AC}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}r$，$\mathrm{CD}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}r$，$\mathrm{AD}=2r$ について，$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{CD}^2$ であるから，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$．$\mathrm{CE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CD}=\dfrac{r}{\sqrt{5}}$ より

$$\tan\angle\mathrm{CAE}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AC}}=\frac{1}{4}\quad\text{よって}\quad\sin\angle\mathrm{CAE}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{17}}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A〜D は 1〜6 への全単射

	A	B	C	D	E	F
1 回目	□			■		
2 回目		□			■	
3 回目			□			■

求める確率は　$6!\left(\dfrac{1}{6}\right)^6=\boldsymbol{\dfrac{5}{324}}$

(2) A〜D は 1〜6 への全単射．

a，b，c は 1〜3 への全単射，i，j，k は 1〜3 への全単射．

	A	B
a 回目	□	
b 回目	□	
c 回目		□

	C	D
i 回目	■	
j 回目	■	
k 回目		■

	E	F
1 回目		
2 回目		
3 回目		

A，B，C，D は 1〜6 の互いに異なる 4 つの場合の数　${}_6\mathrm{P}_4$

求める確率は

$$\frac{3!}{2!1!}{\cdot}\frac{3!}{2!1!}{\cdot}{}_6\mathrm{P}_4\left(\frac{1}{6}\right)^6=\boldsymbol{\frac{5}{72}}$$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ $C: y=-x^2$ と $D: y=(x-a)^2+b$ が 1 点で接するから，2 次方程式

$$-x^2=(x-a)^2+b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2-2ax+a^2+b=0$$

は重解をもつから，係数について

$$(-a)^2-2(a^2+b)=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=-\frac{1}{2}a^2$$

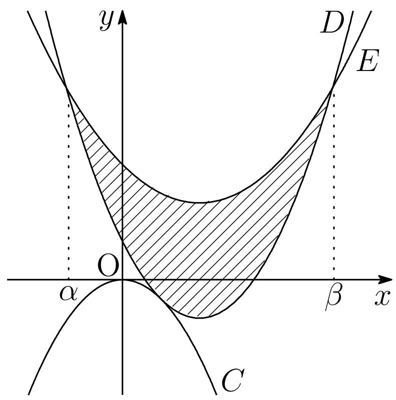
したがって　$D: y=(x-a)^2-\dfrac{1}{2}a^2$

D と $E: y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+1$ の 2 式から y を消去して，整理すると

$$x^2-2(2a-1)x+a^2-3=0$$

この方程式を解を α, β とすると

$$\begin{aligned}\beta-\alpha &= 2\sqrt{(2a-1)^2-(a^2-3)}=2\sqrt{3a^2-4a+4}\\ &= 2\sqrt{3\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}}\end{aligned}$$



したがって

$$\begin{aligned}S &= \int_\alpha^\beta \left\{\frac{1}{2}(x-1)^2+1-(x-a)^2+\frac{1}{2}a^2\right\}\\ &= -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{2}{3}}$，$\boldsymbol{b=-\dfrac{2}{9}}$ のとき，S は最小値

$$\frac{1}{12}\left(2\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^3=\boldsymbol{\frac{32}{27}\sqrt{6}}$$