平成16年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護]))

問題 1 2 3 4

1 曲線 $C : y = x^2 - 2$ と直線 $L : y = x$ があり，曲線 $D : y = -(x-a)^2 + b$ が L と接している．C と L の2つの交点を結ぶ線分上に D と L の接点があるとき，以下の問いに答えよ．

(1) b を a で表し，a の取り得る値の範囲を求めよ．

(2) 2つの曲線 C と D によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3) a が動くとき，(2)の面積 $S(a)$ の最大値と最小値を求めよ．

2 四角形OABCは辺OAを下底，辺CBを上底とし，$\angle$AOCと$\angle$OABが等しい等脚台形である．$a = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$c = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$，$m = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

(1) $m < \dfrac{a^2}{2}$ がなりたつことを示せ．

(2) 等脚台形OABCの面積 S を a，c，m を用いて表せ．

(3) 対角線OBとACの交点をDとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

3 複素数 z，w が条件

$$\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} = \frac{1}{w}$$

を満たしている．ただし，$z \neq \pm i$，$w \neq 0$ である．z の実部，虚部をそれぞれ x，y とし，w の実部，虚部をそれぞれ u，v とする．

(1) $(z-w)^2$ を u と v で表せ．

(2) $u = 0$ ならば，$x = 0$ であることを示せ．

(3) $u > 0$，$v > 0$，かつ w^2 の実部が1となるような x を求め，u を用いて表せ．

4 A，B，Cの3人でじゃんけんをする．一度じゃんけんで負けたものは，以後のじゃんけんから抜ける．残りが1人になるまでじゃんけんを繰り返し，最後に残ったものを勝者とする．ただし，あいこの場合も1回のじゃんけんを行ったと数える．

(1) 1回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ．

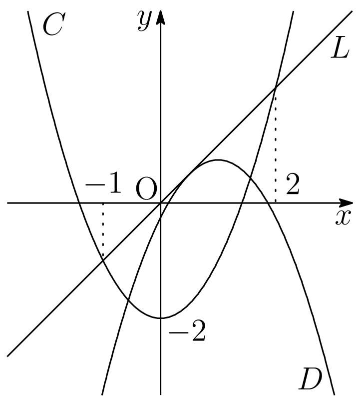
(2) 2回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ．

(3) 3回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ．

(4) $n \geqq 4$ とする．n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ．

解答例

1 (1) $C: y=x^2-2$ と $D: y=x$ の交点の x 座標は



$$x^2-2=x \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2)=0$$

これを解いて　$x=-1,\ 2$

$D: y=-(x-a)^2+b$ と $L: y=x$ から y を消去して整理すると

$$x^2+(1-2a)x+a^2-b=0 \quad \cdots ①$$

D と L は接するから，係数について

$$(1-2a)^2-4(a^2-b)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b=a-\frac{1}{4}}$$

D と L の接点の x 座標は ① から　$x=\dfrac{2a-1}{2}$

このときの接点の x 座標は $-1 \leqq x \leqq 2$ であるから

$$-1 \leqq \frac{2a-1}{2} \leqq 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{2}}$$

(2) $C: y=x^2-2$ と $D: y=-(x-a)^2+a-\dfrac{1}{4}$ の方程式から y を消去すると

$$2x^2-2ax+a^2-a-\frac{7}{4}=0$$

これを解いて　$x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2+2a+\frac{7}{2}}}{2}$

この解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると　$\beta-\alpha=\sqrt{-a^2+2a+\frac{7}{2}}$

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_\alpha^\beta\left\{-(x-a)^2+a-\frac{1}{4}-(x^2-2)\right\}dx\\&=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(-a^2+2a+\frac{7}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$S(a)=\dfrac{1}{3}\left\{-(a-1)^2+\dfrac{9}{2}\right\}^{\frac{3}{2}}$

よって　$a=1$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}\sqrt{2}}$，$a=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{8}}$ ■

2 (1) C から直線 OA に垂線 CH を引き，$\angle\mathrm{AOC} = \theta$ とする．

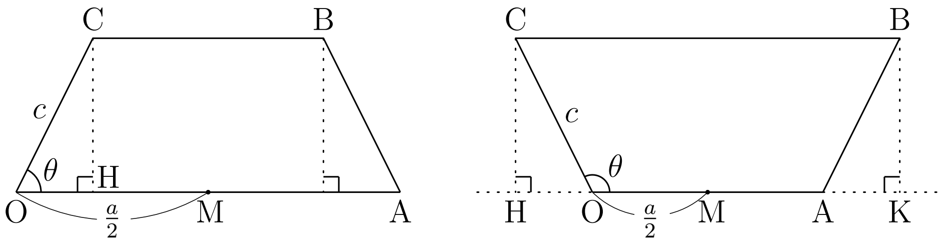
(i) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき

$$m = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}| < a\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

(ii) $90^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ のとき

$$m = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} \leqq 0 < \frac{a^2}{2}$$

(i)，(ii) より　$m < \dfrac{a^2}{2}$



(2) $0^\circ < \theta < 90^\circ$，$90^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ のいずれの場合においても

$$\mathrm{BC} = 2\mathrm{HM} = 2\left(\frac{a}{2} - c\cos\theta\right) = a - 2c\cos\theta$$

$m = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta = ac\cos\theta$ より　$\cos\theta = \dfrac{m}{ac}$

上の 2 式から　　$\mathrm{BC} = a - \dfrac{2m}{a}$

$$\mathrm{CH} = c\sin\theta = c\sqrt{1-\cos^2\theta} = c\sqrt{1-\left(\frac{m}{ac}\right)^2} = \sqrt{c^2 - \frac{m^2}{a^2}}$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{OA})\cdot\mathrm{CH} = \frac{1}{2}\left(a - \frac{2m}{a} + a\right)\sqrt{c^2 - \frac{m^2}{a^2}}$$
$$= \left(a - \frac{m}{a}\right)\sqrt{c^2 - \frac{m^2}{a^2}} = \boldsymbol{\frac{(a^2-m)\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a^2}}$$

(3) CB//OA より　$\mathrm{CD} : \mathrm{DA} = \mathrm{CB} : \mathrm{OA} = a - \dfrac{2m}{a} : a = a^2 - 2m : a^2$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{(a^2-2m)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + a^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2a^2-2m}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{z+i}=\dfrac{1}{w}$ より

$$\frac{2z}{z^2+1}=\frac{1}{w}\quad \text{ゆえに}\quad w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\quad \cdots①$$

上式より，$z-w=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}(z-w)^2&=\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-1=w^2-1\\&=(u+vi)^2-1=\boldsymbol{u^2-v^2-1+2uvi}\end{aligned}$$

(2) ① より

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(w)&=\frac{w+\overline{w}}{2}=\frac{1}{4}\left(z+\overline{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)\\&=\frac{1}{4}(z+\overline{z})\left(1+\frac{1}{|z|^2}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(z)\left(1+\frac{1}{|z|^2}\right)\end{aligned}$$

$u=0$，すなわち，$\mathrm{Re}(w)=0$ のとき，$\mathrm{Re}(z)=0$　よって　$x=0$

(3) $w^2=u^2-v^2+2uvi$ の実部が 1 であるから　$u^2-v^2=1$　$\cdots①$

これを (1) に代入すると，$(z-w)^2=2uvi$ であるから

$$\{(x-u)+(y-v)i\}^2=2uvi$$

これを展開して整理すると

$$(x-u)^2-(u-v)^2+2(x-u)(y-v)i=2uvi$$

$x,\ y,\ u,\ v$ は実数であるから

$$(x-u)^2-(y-v)^2=0,\quad (x-u)(y-v)=uv \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から　$y-v=\pm(x-u)$　これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$\pm(x-u)^2=uv$$

$u>0,\ v>0$ であるから　$(x-u)^2=uv$　また　① より　$v=\sqrt{u^2-1}$

よって　　$x=u\pm\sqrt{uv}=\boldsymbol{u\pm\sqrt{u\sqrt{u^2-1}}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 3 人の誰かが 3 とおりの手を出して勝つ確率であるから

$$\frac{3\cdot3}{3^3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) 1 回のじゃんけんで a 人から b になる確率を $a\to b$ と表す.

(1) で求めた確率は　$3\to1=\dfrac{1}{3}$

同様に，$3\to3$，$3\to2$，$2\to2$，$2\to1$ の確率は

$$3\to3=\frac{3+3!}{3^3}=\frac{1}{3},\quad 3\to2=\frac{3\cdot3}{3^3}=\frac{1}{3},$$
$$2\to2=\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3},\quad 2\to1=\frac{2\cdot3}{3^2}=\frac{2}{3}$$

求める確率は，$(3\to3\to1)+(3\to2\to1)$ であるから

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(3) 求める確率は

$$(3\to3\to3\to1)+(3\to3\to2\to1)+(3\to2\to2\to1)$$

であるから

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{5}{27}}$$

(4) $n-1$ 回目のじゃんけんで 3 人残っている確率は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

k 回目 $(1\leqq k\leqq n-1)$ のじゃんけんで 2 人残り，$n-1$ 回目まで 2 人残る確率は，$(3\to3)=(3\to2)=(2\to2)$ に注意して

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3\to1)+(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2\to1)=\boldsymbol{\frac{2n-1}{3^n}}$$

■