平成 15 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

1 実数 a に対して，集合 A，B を

$$A = \{x \mid x^2 + (1-a^2)x + a^3 - 2a^2 + a \leqq 0,\ x \text{ は実数}\}$$
$$B = \{x \mid x^2 + (2a-7)x + a^2 - 7a + 10 < 0,\ x \text{ は実数}\}$$

と定める．共通部分 $A \cap B$ が空集合でないための a の範囲を求めよ．

2 三角形 ABC において，

$$\mathrm{AB} = 1, \quad \mathrm{AC} = 2, \quad \angle \mathrm{A} = 60^\circ$$

とする．正の数 m，n に対し，辺 BC，CA，AB を $m : n$ の比に内分する点を順に D，E，F とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が垂直であるときの比 $m : n$ を求めよ．

(2) どのような正の整数 m，n に対しても，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は垂直ではないことを示せ．

3 ある人がバス停 A で A 発 B 行きのバスに乗り，バス停 B で B 発 C 行きのバスに乗りかえてバス停 C へ向かうものとする．バスの発車時刻，バス停での待ち時間，バスの乗車時間は次の 5 つの条件を満たすものとする．

1. A 発 B 行きおよび B 発 C 行きのバスは同時刻に 3 分おきで発車している．
2. バス停 A での待ち時間は 0 分または 1 分または 2 分で，それぞれの起こる確率は $\dfrac{1}{3}$ である．
3. バス停 B に到着後，最初に発車する C 行きのバスに乗りかえる．
4. A 発 B 行きのバスの乗車時間は 8 分または 10 分で，それぞれの起こる確率は $\dfrac{1}{2}$ である．
5. B 発 C 行きのバスの乗車時間は 6 分または 7 分で，それぞれの起こる確率は $\dfrac{1}{2}$ である．

ただし，条件 2，4，5 において，待ち時間，乗車時間の起こり方は独立であるとする．この人がバス停 A に到着後バス停 C へ到着するまでにかかる時間が n 分である確率 $P(n)$ を求めよ．

4 2 つの関数を

$$t = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$$
$$y = -4\cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする．

(1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ．

(2) y を t の関数で表せ．

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，y の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ．

解答例

1 集合 $A = \{x \,|\, x^2 + (1-a^2)x + a^3 - 2a^2 + a \leqq 0,\ x \text{ は実数}\}$ について

$$x^2 + (1-a^2)x + (a-a^2)(1-a) \leqq 0$$
$$(x+1-a)(x+a-a^2) \leqq 0$$

ここで，$(a^2-a)-(a-1) = (a-1)^2 \geqq 0$ であるから

$$A = \{x \,|\, a-1 \leqq x \leqq a^2-a,\ x \text{ は実数}\}$$

集合 $B = \{x \,|\, x^2 + (2a-7)x + a^2 - 7a + 10 < 0,\ x \text{ は実数}\}$ について

$$x^2 + (2a-7)x + (a-2)(a-5) < 0$$
$$(x+a-2)(x+a-5) < 0$$
$$B = \{x \,|\, 2-a < x < 5-a,\ x \text{ は実数}\}$$

$A \cap B = \phi$ となるのは，次の場合である

$$5-a \leqq a-1 \quad \text{または} \quad a^2-a \leqq 2-a$$

すなわち　$-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$　または　$3 \leqq a$

よって，$A \cap B \neq \phi$ となる a の範囲は

$$\boldsymbol{a < -\sqrt{2},\quad \sqrt{2} < a < 3}$$

■

2 (1) $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ とおくと，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}|=1$

m，n は正の整数であるから，$t=\dfrac{m}{m+n}$ とおくと　$0<t<1$

条件から　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=t\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(1-t)\vec{c}+t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(1-t)\vec{a}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}}&=\overrightarrow{\mathrm{BE}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(1-t)\vec{c}+t\vec{a}-t\vec{c}\\&=(1-2t)\vec{c}+t\vec{a}\\\overrightarrow{\mathrm{EF}}&=\overrightarrow{\mathrm{BF}}-\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(1-t)\vec{a}-\{(1-t)\vec{c}+t\vec{a}\}\\&=(t-1)\vec{c}+(1-2t)\vec{a}\quad\cdots①\end{aligned}$$

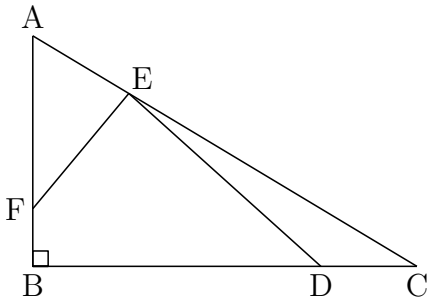
条件より，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}&=\{(1-2t)\vec{c}+t\vec{a}\}\cdot\{(t-1)\vec{c}+(1-2t)\vec{a}\}\\&=(1-2t)(t-1)|\vec{c}|^2+t(1-2t)|\vec{a}|^2\\&=3(1-2t)(t-1)+t(1-2t)=(1-2t)(4t-3)=0\end{aligned}$$

$0<t<1$ に注意して　$t=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}$

$t=\dfrac{m}{m+n}$ より　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\boldsymbol{m:n=1:1}$

$t=\dfrac{3}{4}$ のとき　$\boldsymbol{m:n=3:1}$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=t\vec{c}-\vec{a}$，　①より　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(t-1)\vec{c}+(1-2t)\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}&=(t\vec{c}-\vec{a})\cdot\{(t-1)\vec{c}+(1-2t)\vec{a}\}\\&=t(t-1)|\vec{c}|^2+(2t-1)|\vec{a}|^2\\&=3t(t-1)+(2t-1)=3t^2-t-1=0\end{aligned}$$

$0<t<1$ に注意してこれを解くと　$t=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$

t (m, n は正の整数) が有理数であることに反し，題意を満たす．　■

3 条件 1 により，AB 間をそれぞれ 8 分，10 分かかるバスに乗ると，バス停 B では 1 分，2 分待つことになる．所要時間は次のようになる．

A での待ち時間	AB 間 +B での待ち時間	BC 間	所要時間
0	$8+1$	6	15
		7	16
	$10+2$	6	18
		7	19
1	$8+1$	6	16
		7	17
	$10+2$	6	19
		7	20
2	$8+1$	6	17
		7	18
	$10+2$	6	20
		7	21

それぞれの所要時間は同様に確からしいので

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n=15,\ 21} \text{ のとき} && \boldsymbol{P(n)=\frac{1}{12}} \\ &\boldsymbol{n=16,17,18,19,20} \text{ のとき} && \boldsymbol{P(n)=\frac{1}{6}} \\ &\text{この以外の } \boldsymbol{n} \text{ のとき} && \boldsymbol{P(n)=0} \end{aligned}$$

■

4 (1) $t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\cos 3\theta=-\cos 3\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\alpha=\theta-\dfrac{\pi}{3}$ とおくと　$\cos\alpha=\dfrac{t}{2}$,　$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=-\cos 3\alpha=-4\cos^3\alpha+3\cos\alpha\\&=-4\left(\frac{t}{2}\right)^3+3\cdot\frac{t}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t}\end{aligned}$$

(2) $\alpha=\theta-\dfrac{\pi}{3}$ より

$$\begin{aligned}\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta&=-2\left(\cos 2\theta\cos\frac{2\pi}{3}+\sin 2\theta\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\&=-2\cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=-2\cos 2\alpha\\&=-2(2\cos^2\alpha-1)=-2\left(\frac{t^2}{2}-1\right)\\&=-t^2+2\end{aligned}$$

$y=-4\cos 3\theta+(\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta)+2(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned}y&=-4\left(-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t\right)+(-t^2+2)+2t\\&=\boldsymbol{2t^3-t^2-4t+2}\end{aligned}$$

別解 $\alpha=\theta-\dfrac{\pi}{3}$ より，$\theta=\alpha+\dfrac{\pi}{3}$，$t=2\cos\alpha$ より

$$\begin{aligned}y&=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\\&=-4\cos 3\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin 2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\\&\qquad+2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\\&=4\cos 3\alpha-2\cos 2\alpha+4\cos\alpha\\&=4(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)-2(2\cos^2\alpha-1)+4\cos\alpha\\&=16\cos^3\alpha-4\cos^2\alpha-8\cos\alpha+2\\&=16\left(\frac{t}{2}\right)^3-4\left(\frac{t}{2}\right)^2-8\cdot\frac{t}{2}+2\\&=2t^3-t^2-4t+2\end{aligned}$$

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$，$t = 2\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$，$f(t) = 2t^3 - t^2 - 4t + 2$ とおく

$$-1 \leqq t \leqq 2, \quad f'(t) = 6t^2 - 2t - 4 = 2(t-1)(3t+2)$$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	↗	$\frac{98}{27}$	↘	-1	↗	6

よって　$t = 2$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ のとき　　最大値 $\mathbf{6}$

$t = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0,\ \dfrac{2\pi}{3}}$ のとき　最小値 $\mathbf{-1}$

■