平成14年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護]))

問題 1 2 3 4

1 a，b は実数であり，方程式

$$x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$$

が解 $x=1+i$ をもつとする．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．このとき，a，b を求めよ．また，このときの方程式の他の解も求めよ．

2 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ として，x の関数 $f(x)$ を

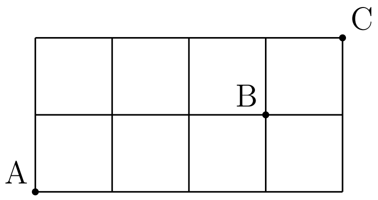
$$f(x)=x^2+\frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x-2\sin\theta$$

と定める．x が整数を動くときの $f(x)$ の最小値を $m(\theta)$ とおく．

(1) θ が $\cos\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす場合に，$m(\theta)$ が最小となる θ の値を求めよ．

(2) $m(\theta)$ が最小となる θ の値と，そのときの最小値を求めよ．

3



上の図のような格子状の道路がある．左下のA地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする．1の目が出たら右に2区画，2の目が出たら右に1区画，3の目が出たら上に1区画進み，その他の場合はそのまま動かない．ただし，右端で1または2の目が出たとき，あるいは上端で3の目が出たときは，動かない．また，右端の1区画手前で1の目が出たときは，右端まで進んで止まる．

n を7以上の自然数とする．A地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど6回目に，B地点に止まらずにB地点を通り過ぎ，n 回目までにC地点に到達する確率を求めよ．ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする．

4 $t \geqq 1$ において，関数 $f(t)=\displaystyle\int_{-1}^{1}|(x-t+2)(x+t)|\,dx$ を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数を係数とする方程式が $x=1+i$ を解にもつから

$$P(x)=x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3$$

とおくと，$P(x)$ は

$$\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}\quad \text{すなわち}\quad x^2-2x+2$$

を因数にもつ．

$$P(x)=(x^2-2x+2)\{x^2+(a+4)x+4\}+(b-2a+1)x+a^3-8$$

したがって　$b-2a+1=0$，$a^3-8=0$　これを解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=3}$

$P(x)=(x^2-2x+2)(x^2+6x+4)$ より，$P(x)=0$ を解くと

$$x=1\pm i,\ -3\pm\sqrt{5}$$

よって，求める他の解は　$\boldsymbol{1-i,\ -3\pm\sqrt{5}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=\left(x+\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)^2-\dfrac{\cos^2\theta}{3}-2\sin\theta$

$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\leqq-\dfrac{1}{2}$ のとき $(0^\circ\leqq\theta\leqq30^\circ)$

$$\begin{aligned}m(\theta)&=f(-1)=1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta-2\sin\theta\\&=1-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\theta+30^\circ)\end{aligned}$$

よって　最小値 $\boldsymbol{m(30^\circ)=-1}$

(2) (i) $-\dfrac{1}{2}\leqq-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき $(30^\circ\leqq\theta\leqq150^\circ)$

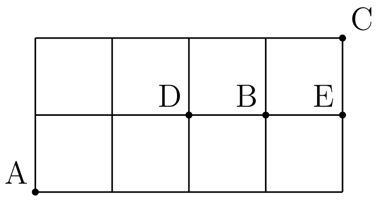
$$m(\theta)=f(0)=-2\sin\theta\geqq-2\quad(\text{等号は}\theta=90^\circ\text{のとき})$$

(ii) $\dfrac{1}{2}\leqq-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $(150^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$

$$\begin{aligned}m(\theta)&=f(1)=1-\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)\\&=1-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\theta-30^\circ)\geqq-1\quad(\text{等号は}\theta=150^\circ\text{のとき})\end{aligned}$$

(1) および (i)，(ii) から　最小値 $\boldsymbol{m(90^\circ)=-2}$ ■

3 条件より，6 回目に 1 の目が出て，D から E に進む.



5 回目終了時点で地点 D にあるとき，1 が 1 回，3 が 1 回，不動が 3 回の場合と 2 が 2 回，3 が 1 回，不動が 2 回の場合の確率であるから

$$\frac{5!}{1!1!3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{5!}{2!1!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{20}{288}+\frac{30}{864}=\frac{30}{288}$$

6 回目に D から E に進む確率は $\dfrac{1}{6}$

残りの $n-6$ 回で 3 が一回も出ない確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-6}$

よって，求める確率は

$$\frac{30}{288}\times\frac{1}{6}\times\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}\right\}=\boldsymbol{\frac{5}{288}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}\right\}}$$

■

$\boxed{4}$ $f(t)=\displaystyle\int_{-1}^{1}|(x-t+2)(x+t)|\,dx\quad(t\geqq 1)$ より　$-t\leqq -1\leqq t-2$

(i) $1\leqq t\leqq 3$ のとき $(-t\leqq -1\leqq t-2\leqq 1)$

$$\begin{aligned} f(t)&=-\int_{-1}^{t-2}(x-t+2)(x+t)\,dx+\int_{t-2}^{1}(x-t+2)(x+t)\,dx\\ &=-\left[\,\frac{x^3}{3}+x^2-t(t-2)x\,\right]_{-1}^{t-2}+\left[\,\frac{x^3}{3}+x^2-t(t-2)x\,\right]_{t-2}^{1}\\ &=\frac{2}{3}(2t^3-9t^2+12t-1)\\ f'(t)&=\frac{2}{3}(6t^2-18t+12)\\ &=4(t-1)(t-2) \end{aligned}$$

(ii) $3\leqq t$ のとき $(-t\leqq -3,\ 1\leqq t-2)$

$$\begin{aligned} f(t)&=-\int_{-1}^{1}(x-t+2)(x+t)\,dx=-\int_{-1}^{1}(x^2+2x-t^2+2t)\,dx\\ &=-2\int_{0}^{1}(x^2-t^2+2t)\,dx=-2\left[\,\frac{x^3}{3}-(t^2-2t)x\,\right]_{0}^{1}\\ &=2t^2-4t-\frac{2}{3}\\ f'(t)&=4t-4=4(t-1)>0 \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，$f(t)$ の増減表は

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

よって　最小値 $\boldsymbol{f(2)=2}$

補足 (i) において，$G(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-(a+2)ax$ とおくと $(a=t-2)$

$$f(t)=G(1)+G(-1)-2G(a)$$

$G(1)=-a^2-2a+\dfrac{4}{3}$，$G(-1)=a^2+2a+\dfrac{2}{3}$，$G(a)=-\dfrac{2}{3}a^3-a^2$ より

$$f(t)=\frac{4}{3}a^3+2a^2+2=\frac{4}{3}(t-2)^3+2(t-2)^2+2$$

ゆえに　$f'(t)=4(t-2)^2+4(t-2)=4(t-2)(t-1)$

別解 1 (i) の最初の積分で $a=t-2$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f(t) &= -\int_{-1}^{a}(x-a)(x+a+2)\,dx+\int_{a}^{1}(x-a)(x+a+2)\,dx \\
&= -\int_{-1}^{a}\{x^2+2x-a(a+2)\}\,dx+\int_{a}^{1}\{x^2+2x-a(a+2)\}dx \\
&= -\left[\,\frac{x^3}{3}+x^2-a(a+2)x\,\right]_{-1}^{a}+\left[\,\frac{x^3}{3}+x^2-a(a+2)x\,\right]_{a}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{3}+1-a^2-2a\right)+\left(-\frac{1}{3}+1+a^2+2a\right)-2\left(\frac{a^3}{3}+a^2-a^3-2a^2\right) \\
&= \frac{4}{3}a^3+2a^2+2=\frac{4}{3}(t-2)^3+2(t-2)^2+2
\end{aligned}
$$

別解 2 積分公式を利用する.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= -\int_{-1}^{a}(x-a)(x+a+2)\,dx+\int_{a}^{1}(x-a)(x+a+2)\,dx \\
&= -\int_{-1}^{a}(x-a)\{(x+1)+(a+1)\}\,dx+\int_{a}^{1}(x-a)\{(x-1)+(a+3)\}\,dx \\
&= -\int_{-1}^{a}(x-a)(x+1)\,dx-(a+1)\int_{-1}^{a}(x-a)\,dx \\
&\qquad\qquad +\int_{a}^{1}(x-a)(x-1)\,dx+(a+3)\int_{a}^{1}(x-a)\,dx \\
&= \frac{1}{6}(a+1)^3-(a+1)\left[\,\frac{1}{2}(x-a)^2\,\right]_{-1}^{a}-\frac{1}{6}(1-a)^3+(a+3)\left[\,\frac{1}{2}(x-a)^2\,\right]_{a}^{1} \\
&= \frac{1}{6}(a+1)^3+\frac{1}{2}(a+1)^3+\frac{1}{6}(a-1)^3+\frac{1}{2}(a+3)(a-1)^2 \\
&= \frac{2}{3}(a+1)^3+\frac{2}{3}(a-1)^2(a+2) \\
&= \frac{2}{3}\{(a+1)^3+(a-1)^2(a+2)\} \\
&= \frac{2}{3}\{(t-1)^3+(t-3)^2t\} \\
&= \frac{2}{3}(2t^3-9t^2+12t-1)
\end{aligned}
$$

■