平成13年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護]))

問題 1 2 3 4

1 2つの放物線 $C : y = -(x+1)^2$ と $D : y = (x-1)^2 + 1$ の2本の共通接線を求めよ．また，C，D の2本の共通接線と C の囲む部分の面積を求めよ．

2 放物線 $y = (x-p)^2 - 2$ が3点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする三角形と交わるような実数 p の範囲を求めよ．

3 袋の中に赤の玉と白の玉が合計4個入っている．1回の試行では袋から1個の玉を無作為に取り出し，それが白であれば袋に戻し，赤の玉の場合は戻さずに別に用意した白の玉1個を袋に入れる．

(1) 最初は赤の玉と白の玉が2個ずつであるとして，3回以下の試行で袋の中が白の玉4個となる確率を求めよ．

(2) 最初は赤の玉が3個，白の玉が1個であるとして，5回以下の試行で袋の中が白の玉4個となる確率を求めよ．

4 四面体OABCにおいて，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．線分OA，OB，OC，BC，CA，ABの中点をそれぞれ，L，M，N，P，Q，Rとし，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく．

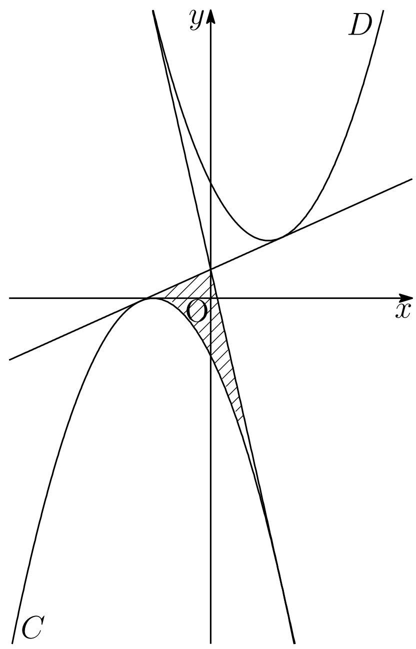
(1) 線分LP，MQ，NRは1点で交わることを示せ．

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ．

(3) 直線LP，MQ，NRが互いに直交するとする．Xを $\overrightarrow{\mathrm{AX}} = \overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体XABCの体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ $C: y=-(x+1)^2$ より



$$y'=-2(x+1)$$

C 上の点 $(t, -(t+1)^2)$ における接線は

$$y+(t+1)^2=-2(t+1)(x-t)$$

すなわち　$(*)$ $y=-2(t+1)x+t^2-1$

これと $D: y=(x-1)^2+1$ から y を消去して整理すると

$$x^2+2tx-t^2+3=0$$

このとき，係数について

$$D/4=t^2-(-t^2+3)=0$$

これを解いて　$t=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$　$(*)$ より，接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=(-2\pm\sqrt{6})x+\frac{1}{2}}$$

$(*)$ および C の方程式から

$$-2(t+1)x+t^2-1-\{-(x+1)^2\}=(x-t)^2$$

$\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ とおくと，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\alpha}^{0}(x+\alpha)^2\,dt+\int_{0}^{\alpha}(x-\alpha)^2\,dx\\&=\left[\,\frac{1}{3}(x+\alpha)^3\,\right]_{-\alpha}^{0}+\left[\,\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\,\right]_{0}^{\alpha}=\frac{2}{3}\alpha^3\\&=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ A$(1,\ 2)$，B$(0,\ 2)$，$C: y=(x-p)^2-2$ とする．線分 AB が放物線 C と共有点もつとき，C は線分 OA または OB と共有点をもつ．条件を満たすとき，C が線分 OA または OB と共有点を持てばよい．$f(x,\ y)=(x-p)^2-2-y$ とおく．

(i) 放物線が線分 OA と共有点をもつとき，$f(0,\ 0)f(1,\ 2) \leqq 0$ より

$$(p^2-2)\{(1-p)^2-4\} \leqq 0$$
$$(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})(p+1)(p-3) \leqq 0$$

したがって　$-\sqrt{2} \leqq p \leqq -1,\ \sqrt{2} \leqq p \leqq 3$

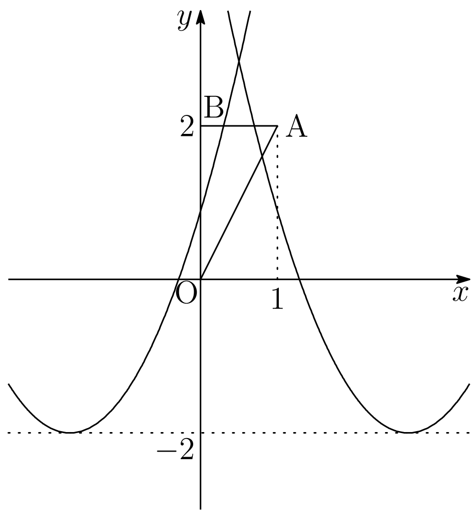
(ii) 放物線が線分 OB と共有点をもつとき，$f(0,\ 0)f(0,\ 2) \leqq 0$ より

$$(p^2-2)(p^2-4) \leqq 0$$
$$(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})(p+2)(p-2) \leqq 0$$

したがって　$-2 \leqq p \leqq -\sqrt{2},\ \sqrt{2} \leqq p \leqq 2$

(i) または (ii) の範囲であるから，求める p の値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 \leqq p \leqq -1,\ \sqrt{2} \leqq p \leqq 3}$$



■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 1回の試行で袋の中にある白の玉 j 個が k 個になる確率を $\binom{j}{k}$ と表すと

$$\binom{2}{2}=\frac{1}{2},\quad \binom{2}{3}=\frac{1}{2},\quad \binom{3}{3}=\frac{3}{4},\quad \binom{3}{4}=\frac{1}{4}$$

よって，3回以下で袋の中の白の玉が4個になる確率は

$$\left\{\binom{2}{3}+\binom{2}{2}\binom{2}{3}+\binom{2}{3}\binom{3}{3}\right\}\binom{3}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{9}{32}}$$

(2) $\binom{1}{1}=\frac{1}{4}$, $\binom{1}{2}=\frac{3}{4}$

3回で袋の中の白の玉が4個になる確率は

$$\binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\binom{3}{4}=\frac{3}{8}\binom{3}{4}$$

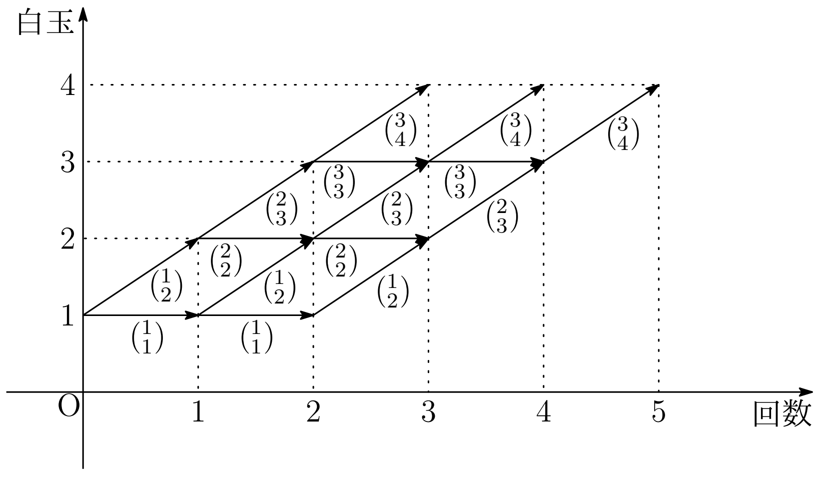
4回で袋の中の白の玉が4個になる確率は

$$\begin{aligned}&\left\{\binom{1}{1}\binom{1}{2}\binom{2}{3}+\binom{1}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{3}+\binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{3}\right\}\binom{3}{4}\\&=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\binom{3}{4}=\frac{9}{16}\binom{3}{4}\end{aligned}$$

5回で袋の中の白の玉が4個になる確率は

$$\begin{aligned}&\left\{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{2}\binom{2}{3}+\binom{1}{1}\binom{1}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{3}+\binom{1}{1}\binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{3}\right.\\&\qquad\left.+\binom{1}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{3}+\binom{1}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{3}+\binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{3}\binom{3}{3}\right\}\binom{3}{4}\\&=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right.\\&\qquad\left.+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)\binom{3}{4}=\frac{75}{128}\binom{3}{4}\end{aligned}$$

よって，求める確率は $\left(\frac{3}{8}+\frac{9}{16}+\frac{75}{128}\right)\binom{3}{4}=\frac{195}{128}\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{195}{512}}$ ■



4 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから，条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}\vec{a},\qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{b},\qquad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}),\qquad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

LP，MQ，NR の中点の位置ベクトルは

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

よって，線分 LP，MQ，NR はそれぞれの中点で交わる．

(2) $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{r}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$$

よって　$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{q}+\vec{r},\quad \vec{b}=\vec{r}+\vec{p},\quad \vec{c}=\vec{p}+\vec{q}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{XA}}=-\overrightarrow{\mathrm{LP}}=-\vec{p}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\vec{p}+\vec{b}-\vec{a}=-\vec{p}+(\vec{r}+\vec{p})-(\vec{q}+\vec{r})=-\vec{q}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{XC}}=\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\vec{p}+\vec{c}-\vec{a}=-\vec{p}+(\vec{p}+\vec{q})-(\vec{q}+\vec{r})=-\vec{r}$$

$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は互いに直交するから，四面体 XABC の体積は　$\boldsymbol{\frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|}$