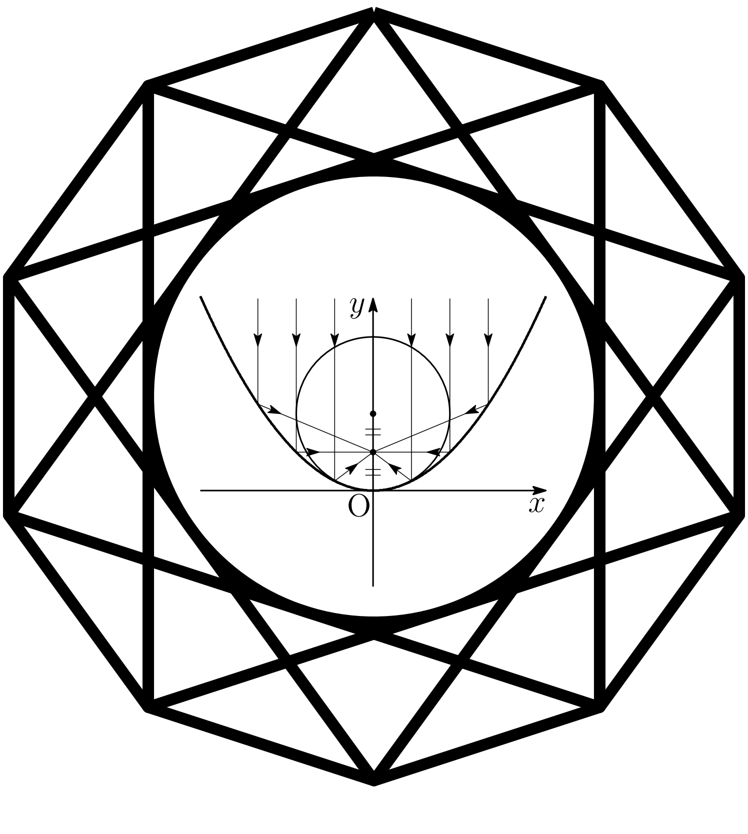
入試の軌跡

難関大学　理系

2015 － 2025

数　学



2025 年 8 月 30 日

Typed by LaTeX 2_ε

序

本書には，次の主な難関国立大学 (理系) が実施した平成 27 年 (2015 年) 度から令和 7 年 (2025 年) 度までの一般前期試験問題 (数学)・解答例をすべて掲載しました．

北海道大学	東北大学	東京大学	東科大 (理工系)	名古屋大学
京都大学	大阪大学	神戸大学	広島大学	九州大学

出　題　分　野	
数学 I	**2 次関数**　図形と計量　データの分析
数学 II	式と証明　複素数と方程式　図形と方程式 三角関数　指数関数と対数関数　微分法と積分法
数学 III	極限　微分法とその応用　積分法　積分法の応用
数学 A	場合の数と確率　整数の性質　図形の性質
数学 B	数列
数学 C	平面上のベクトル　空間のベクトル　複素数平面　式と曲線

本書は，パソコン・スマートフォン・電子黒板での使用を想定した ICT 教材です．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮しました．

2. 電子黒板を利用される場合は，電子黒板の PDF ブラウザをご使用ください．ファイルサイズに優れ，ハイパーリンク・拡縮・スワイプ・書き込みもスムーズに機能します．

3. パソコン (Adobe Reader) で読み込む際には，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなります．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できます．なお，全画面表示を解除するには $\boxed{\text{ESC}}$．

4. スマートフォンでの使用も想定し，問題および解答には相互リンクを施しています．各問の解答の終わりにある ■ をクリックすると，各年度のトップページに戻ります．

上の 3，4 の機能をサポートする PDF ブラウザとして，Adobe Reader をご使用ください (フリーソフト)．スマートフォンには，同アプリがインストールされていない場合が多いので，同アプリをインストールされてからご使用ください．

令和 7 年 5 月　西村　信一

目 次

序 i

第 0 章　出題分野 1
0.1　数学 I . . . 1
0.1.1　2 次関数 (数学 I) . . . 1
0.1.2　図形と計量 (数学 I) . . . 2
0.1.3　データの分析 (数学 I) . . . 2
0.2　数学 II . . . 3
0.2.1　式と証明 (数学 II) . . . 3
0.2.2　複素数と方程式 (数学 II) . . . 3
0.2.3　図形と方程式 (数学 II) . . . 4
0.2.4　三角関数 (数学 II) . . . 4
0.2.5　指数関数と対数関数 (数学 II) . . . 5
0.2.6　微分法と積分法 (数学 II) . . . 5
0.3　数学 III . . . 6
0.3.1　極限 (数学 III) . . . 6
0.3.2　微分法とその応用 (数学 III) . . . 6
0.3.3　積分法 (数学 III) . . . 7
0.3.4　積分法の応用 (数学 III) . . . 7
0.4　数学 A . . . 8
0.4.1　場合の数と確率 (数学 A) . . . 8
0.4.2　整数の性質 (数学 A) . . . 8
0.4.3　図形の性質 (数学 A) . . . 9
0.5　数学 B . . . 9
0.5.1　数列 (数学 B) . . . 9
0.6　数学 C . . . 10
0.6.1　平面上のベクトル (数学 C) . . . 10
0.6.2　空間のベクトル (数学 C) . . . 10
0.6.3　複素数平面 (数学 C) . . . 11
0.6.4　式と曲線 (数学 C) . . . 11

第 1 章　北海道大学 13
出題分野 . . . 13
1.1　2015 年 (120 分) . . . 14
1.2　2016 年 (120 分) . . . 22

1.3 2017 年 (120 分) . . . 32
1.4 2018 年 (120 分) . . . 39
1.5 2019 年 (120 分) . . . 47
1.6 2020 年 (120 分) . . . 55
1.7 2021 年 (120 分) . . . 63
1.8 2022 年 (120 分) . . . 72
1.9 2023 年 (120 分) . . . 81
1.10 2024 年 (120 分) . . . 90
1.11 2025 年 (120 分) . . . 98

第 2 章 東北大学 **109**

出題分野 . . . 109
2.1 2015 年 (150 分) . . . 110
2.2 2016 年 (150 分) . . . 128
2.3 2017 年 (150 分) . . . 135
2.4 2018 年 (150 分) . . . 145
2.5 2019 年 (150 分) . . . 155
2.6 2020 年 (150 分) . . . 164
2.7 2021 年 (150 分) . . . 173
2.8 2022 年 (150 分) . . . 185
2.9 2023 年 (150 分) . . . 195
2.10 2024 年 (150 分) . . . 205
2.11 2025 年 (150 分) . . . 219

第 3 章 東京大学 **233**

出題分野 . . . 233
3.1 2015 年 (150 分) . . . 234
3.2 2016 年 (150 分) . . . 243
3.3 2017 年 (150 分) . . . 253
3.4 2018 年 (150 分) . . . 264
3.5 2019 年 (150 分) . . . 277
3.6 2020 年 (150 分) . . . 289
3.7 2021 年 (150 分) . . . 305
3.8 2022 年 (150 分) . . . 318
3.9 2023 年 (150 分) . . . 334
3.10 2024 年 (150 分) . . . 346
3.11 2025 年 (150 分) . . . 361

第 4 章　東京科学大学 (理工系) **377**
出題分野 . . . 377
4.1　2015 年 (180 分) . . . 378
4.2　2016 年 (180 分) . . . 387
4.3　2017 年 (180 分) . . . 395
4.4　2018 年 (180 分) . . . 405
4.5　2019 年 (180 分) . . . 413
4.6　2020 年 (180 分) . . . 428
4.7　2021 年 (180 分) . . . 443
4.8　2022 年 (180 分) . . . 453
4.9　2023 年 (180 分) . . . 464
4.10　2024 年 (180 分) . . . 473
4.11　2025 年 (180 分) . . . 485

第 5 章　名古屋大学 **499**
出題分野 . . . 499
5.1　2015 年 (150 分) . . . 500
5.2　2016 年 (150 分) . . . 511
5.3　2017 年 (150 分) . . . 521
5.4　2018 年 (150 分) . . . 532
5.5　2019 年 (150 分) . . . 538
5.6　2020 年 (150 分) . . . 546
5.7　2021 年 (150 分) . . . 556
5.8　2022 年 (150 分) . . . 565
5.9　2023 年 (150 分) . . . 573
5.10　2024 年 (150 分) . . . 586
5.11　2025 年 (150 分) . . . 597

第 6 章　京都大学 **605**
出題分野 . . . 605
6.1　2015 年 (150 分) . . . 606
6.2　2016 年 (150 分) . . . 614
6.3　2017 年 (150 分) . . . 621
6.4　2018 年 (150 分) . . . 628
6.5　2019 年 (150 分) . . . 638
6.6　2020 年 (150 分) . . . 644
6.7　2021 年 (150 分) . . . 653
6.8　2022 年 (150 分) . . . 660
6.9　2023 年 (150 分) . . . 667

6.10 2024 年 (150 分) 676
6.11 2025 年 (150 分) 686

第 7 章　大阪大学 **699**
出題分野 699
7.1 2015 年 (150 分) 700
7.2 2016 年 (150 分) 707
7.3 2017 年 (150 分) 717
7.4 2018 年 (150 分) 724
7.5 2019 年 (150 分) 735
7.6 2020 年 (150 分) 746
7.7 2021 年 (150 分) 754
7.8 2022 年 (150 分) 763
7.9 2023 年 (150 分) 774
7.10 2024 年 (150 分) 784
7.11 2025 年 (150 分) 792

第 8 章　神戸大学 **807**
出題分野 807
8.1 2015 年 (120 分) 808
8.2 2016 年 (120 分) 819
8.3 2017 年 (120 分) 831
8.4 2018 年 (120 分) 839
8.5 2019 年 (120 分) 850
8.6 2020 年 (120 分) 858
8.7 2021 年 (120 分) 866
8.8 2022 年 (120 分) 874
8.9 2023 年 (120 分) 882
8.10 2024 年 (120 分) 893
8.11 2025 年 (120 分) 901

第 9 章　広島大学 **911**
出題分野 911
9.1 2015 年 (150 分) 912
9.2 2016 年 (150 分) 924
9.3 2017 年 (150 分) 935
9.4 2018 年 (150 分) 945
9.5 2019 年 (150 分) 954
9.6 2020 年 (150 分) 964

9.7　2021 年 (150 分) 973
9.8　2022 年 (150 分) 987
9.9　2023 年 (150 分) 1001
9.10　2024 年 (150 分) 1011
9.11　2025 年 (150 分) 1021

第 10 章 九州大学 **1033**
出題分野 1033
10.1　2015 年 (150 分) 1034
10.2　2016 年 (150 分) 1043
10.3　2017 年 (150 分) 1054
10.4　2018 年 (150 分) 1065
10.5　2019 年 (150 分) 1079
10.6　2020 年 (150 分) 1089
10.7　2021 年 (150 分) 1097
10.8　2022 年 (150 分) 1107
10.9　2023 年 (150 分) 1121
10.10　2024 年 (150 分) 1134
10.11　2025 年 (150 分) 1143

第 0 章　出題分野

◀	出　題　分　野
数学 I	2 次関数　図形と計量　データの分析
数学 II	式と証明　複素数と方程式　図形と方程式 三角関数　指数関数と対数関数　微分法と積分法
数学 III	極限　微分法とその応用　積分法　積分法とその応用
数学 A	場合の数と確率　整数の性質　図形の性質
数学 B	数列
数学 C	平面上のベクトル　空間のベクトル　複素数平面　式と曲線

0.1　数学 I

0.1.1　2 次関数 (数学 I)

◀ 分野 I	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学								1			
東北大学											
東京大学											
東京科学大学											
名古屋大学		1									
京都大学											
大阪大学											
神戸大学											
広島大学											
九州大学											

0.1.2　図形と計量 (数学 I)

◀ 分野 I	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学											
東北大学											
東京大学											
東京科学大学											
名古屋大学											
京都大学											
大阪大学											
神戸大学											
広島大学											
九州大学											

0.1.3　データの分析 (数学 I)

◀ 分野 I	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学											
東北大学											
東京大学											
東京科学大学											
名古屋大学											
京都大学											
大阪大学											
神戸大学											
広島大学										1	
九州大学											

0.2 数学 II

0.2.1 式と証明 (数学 II)

◀ 分野 II	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学											
東北大学											
東京大学						1	6				
東京科学大学					1						
名古屋大学											
京都大学	5				5						
大阪大学	2	2									
神戸大学											
広島大学											
九州大学					2		5				

0.2.2 複素数と方程式 (数学 II)

◀ 分野 II	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学											
東北大学											
東京大学									5		
東京科学大学											
名古屋大学	2										
京都大学		6			6				1		
大阪大学				2							
神戸大学							1				
広島大学							4				
九州大学						2					

0.2.3 図形と方程式 (数学 II)

◀ 分野 II	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学			5	4							
東北大学	5			1		2	1				
東京大学	1						1				
東京科学大学											
名古屋大学											
京都大学				1							
大阪大学								3			
神戸大学		2					4		2	2	
広島大学					5			2			
九州大学											4

0.2.4 三角関数 (数学 II)

◀ 分野 II	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学											
東北大学				4	4						6
東京大学			1			6					3
東京科学大学								3			
名古屋大学											
京都大学	2		3·4	3	1				6		
大阪大学								2			
神戸大学											
広島大学						1					
九州大学											

0.2.5 指数関数と対数関数 (数学 II)

◀ 分野 II	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学							3				
東北大学					2					2	
東京大学											
東京科学大学											
名古屋大学							2				
京都大学								1			
大阪大学											
神戸大学											
広島大学											
九州大学											

0.2.6 微分法と積分法 (数学 II)

◀ 分野 II	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学							2				
東北大学	2		1							1	
東京大学					2			3			
東京科学大学											
名古屋大学							1	1			
京都大学											
大阪大学			4				4				2
神戸大学						1					1
広島大学			2	1			1	1			
九州大学	1										

0.3 数学 III

0.3.1 極限 (数学 III)

◀ 分野 III	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学						4					3
東北大学					3			3·4	2		
東京大学											
東京科学大学	1									3·4	3·4
名古屋大学									2		
京都大学						2				1·6	
大阪大学		5				4		4	1	1	
神戸大学	4		3·5	2				1·2			
広島大学	2		1					5			3
九州大学		1			1·4			2	2		

0.3.2 微分法とその応用 (数学 III)

◀ 分野 III	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学	1				3			3	3·5		
東北大学	1				1			2		5	3
東京大学		1		1·4	5		5		3	4	
東京科学大学	4	1	3	3	5						5
名古屋大学	1	2		2		1			3	1	1
京都大学	3·4	1					2·6		4		3
大阪大学				1		1	1·5		3		3
神戸大学	2·3		1		1	4					5
広島大学	3			5	5						
九州大学			1			1	3				

0.3.3 積分法 (数学 III)

◀ 分野 III	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学	5	2	2		5						
東北大学	4	6	6		5	6	6				
東京大学	6				1			1	1	2	2
東京科学大学			2		2	5			1		1
名古屋大学				1		3		4		4	
京都大学					1				1		1
大阪大学	1				1		3				4
神戸大学			2				2				
広島大学				3					5		
九州大学	2							4	4	5	2

0.3.4 積分法の応用 (数学 III)

◀ 分野 III	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学				5		5	5			5	
東北大学				6			4	6	6	6	4
東京大学	3	6	6	6		3·5	3	4·5	6	5	1
東京科学大学	3	5		4		4	5	5	4	2	
名古屋大学	3		1		1·4						3
京都大学	1	4	5	5	3	6	4	5	5	5	
大阪大学	4	3	5	3	3	5		5		4	
神戸大学	1	3·5		5	5	2	5	3	5	4·5	3
広島大学	1	2	4		3	3·4	5			5	1
九州大学	3	1	1	2		5	3	5	5		

0.4 数学 A

0.4.1 場合の数と確率 (数学 A)

◀ 分野 A	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学	4	3	4	3	4	3		4	4	2	5
東北大学	3	3	2	2	6	4	3	1	1		1
東京大学	2	2	2					6	2		
東京科学大学		2	4						3		
名古屋大学					4	4	3	2			4
京都大学	6				4	5	1	2	3		
大阪大学	5				2	2			5		
神戸大学	5		4	3	3	3			3	3	
広島大学	5	4	3		2	5	3	4	1		4
九州大学	4	3	4	3	3	4				4	5

0.4.2 整数の性質 (数学 A)

◀ 分野 A	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学			1		2	2	4				
東北大学	6	2	3	3			2				
東京大学	5	5	4		4		4	2		6	4
東京科学大学	5	4	1	2		1		2	2		
名古屋大学		4		3	3	2					2
京都大学		2		2	2	4		3			2
大阪大学	3	4	3		4		4			5	
神戸大学		4			4		1	5			
広島大学		5	5				4	3			
九州大学	5	4	3	4		2		3		3	3

0.4.3　図形の性質 (数学 A)

◀	分野	**A**	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学													
東北大学				1									
東京大学								2					
東京科学大学				3									
名古屋大学													
京都大学				3		6							
大阪大学													
神戸大学													
広島大学							5						
九州大学				2									

0.5　数学 B

0.5.1　数列 (数学 B)

◀	分野	**B**	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学			2	4					4	2		3	1
東北大学								3			3	3	2
東京大学			4			2		4				3	5
東京科学大学						5	4·5		1·3				
名古屋大学			4	3	2	4			4		4		
京都大学				5	6	4				6		4	6
大阪大学				1		5		3					5
神戸大学								5			1	1	2
広島大学						4	1				4	3	2
九州大学					3								

0.6 数学 C

0.6.1 平面上のベクトル (数学 C)

◀ 分野 C	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学						1	1			4	
東北大学			4			1				4	
東京大学				3							
東京科学大学											
名古屋大学											
京都大学							5				
大阪大学			1						2		1
神戸大学					2		3				
広島大学							2		2		
九州大学									3		

0.6.2 空間のベクトル (数学 C)

◀ 分野 C	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学	3	5		1	1				2		
東北大学		5						5	5	4	5
東京大学		3			3				4	1	
東京科学大学	2					3	4		5		2
名古屋大学			3		2					3	
京都大学			2			3	1	4	2	3	4
大阪大学				4	5		2		4	3	
神戸大学		1		1					4		4
広島大学	3	1							3	2	
九州大学			2			3	1	1		1	1

0.6.3 複素数平面 (数学 C)

◀ 分野 C	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学		1	3	2				5	1		4
東北大学		4	5	5		5	5		4		
東京大学		4	3	5	6		2				6
東京科学大学			5	1	3	2		1·4		5	
名古屋大学			4					3	1	2	
京都大学			1			1	3			2	1
大阪大学			2		2			1		2	
神戸大学				4							
広島大学		3		2	4	2				4	5
九州大学		5	5	5	3·5		2·4		1	2	

0.6.4 式と曲線 (数学 C)

◀ 分野 C	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
北海道大学		5								1	2
東北大学											
東京大学											
東京科学大学							2			1	
名古屋大学						1					
京都大学											5
大阪大学											
神戸大学								4			
広島大学											
九州大学				1							

第 1 章　北海道大学

出題分野 (2015-2025) 120 分

◀	北海道大学	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	数と式											
I	2 次関数								1			
	図形と計量											
	データの分析											
	式と証明											
	複素数と方程式											
II	図形と方程式			5	4							
	三角関数											
	指数関数と対数関数							3				
	微分法と積分法							2				
	関数											
	極限						4					3
III	微分法とその応用	1				3			3	3·5		
	積分法	5	2	2		5						
	積分法の応用				5		5	5			5	
	場合の数と確率	4	3	4	3	4	3		4	4	2	5
A	整数の性質			1		2	2	4				
	図形の性質											
B	数列	2	4					4	2		3	1
	確率分布と統計											
	平面上のベクトル						1	1			4	
C	空間のベクトル	3	5		1	1				2		
	複素数平面		1	3	2				5	1		4
	式と曲線		5								1	2

1.1　2015 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 a は実数とし，2 つの曲線

$$C_1 : y = (x-1)e^x, \quad C_2 : y = \frac{1}{2e}x^2 + a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

(1) a を t で表せ．

(2) t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

2 $p,\ q$ は正の実数とし，$a_1 = 0$，$a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ とする．数列 $\{b_n\}$ の一般項を $p,\ q,\ n$ で表せ．

(2) $q = 1$ とする．すべての自然数 n について $a_{n+1} \geqq a_n$ となるような p の値の範囲を求めよ．

3 空間の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 1)，B(−1, 1, 1) の定める平面を α とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．α 上の点 C があり，その x 座標が正であるとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．

(1) C の座標を求めよ．

(2) $\vec{b} = s\vec{a} + t\vec{c}$ をみたす実数 $s,\ t$ を求めよ．

(3) α 上にない点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から α に垂線を下ろし，α との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\vec{a} + l\vec{c}$ をみたす実数 $k,\ l$ を $x,\ y,\ z$ で表せ．

4 初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある．その袋に対して以下の試行を繰り返す．

(i) まず同時に 2 個の玉を取り出す．

(ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる．

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える．n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする．

(1) $X_1 = 3$ となる確率を求めよ．

(2) $X_2 = 3$ となる確率を求めよ．

(3) $X_2 = 3$ であったとき，$X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ．

5 n は自然数，a は $a > \dfrac{3}{2}$ をみたす実数とし，実数 x の関数

$$f(x) = \int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$$

を考える．ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta = 1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\, d\theta = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\, d\theta$ を示せ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ をみたす n と a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $C_1 : y=(x-1)e^x$ より　$y'=xe^x$

C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線を l_1 とすると，その方程式は

$$y-(t-1)e^t = te^t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y = te^t x + (-t^2+t-1)e^t$$

$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ より　$y'=\dfrac{x}{e}$

C_2 上の点 $\left(s,\ \dfrac{1}{2e}s^2+a\right)$ における接線を l_2 とすると，その方程式は

$$y-\left(\frac{1}{2e}s^2+a\right)=\frac{s}{e}(x-s) \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{s}{e}x-\frac{s^2}{2e}+a$$

l_1 と l_2 の方程式は一致するから

$$te^t=\frac{s}{e}, \quad (-t^2+t-1)e^t=-\frac{s^2}{2e}+a$$

第1式から，$s=te^{t+1}$．これを第2式に代入すると

$$(-t^2+t-1)e^t=-\frac{(te^{t+1})^2}{2e}+a$$

よって　　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1}+(-t^2+t-1)e^t}$

(2) $f(t)=a$ とおくと　　$f'(t)=(t^2+t)e^{2t+1}-(t^2+t)e^t$
$=t(t+1)e^t(e^{t+1}-1)$

$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$

よって，a は，$\boldsymbol{t=0}$ のとき，極小値 $\boldsymbol{-1}$ をとる．■

2 (1) $a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1}$ より $(p \neq 0)$　$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \dfrac{a_n}{p^n} + \left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$

$b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ より $(a_1 = 0)$　$b_1 = \dfrac{a_1}{p} = 0,\quad b_{n+1} = b_n + \left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$

$n \geqq 2$ のとき，$p,\ q > 0$ より，$-\dfrac{q}{p} \neq 1$ に注意して

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{q}{p}\right)^{k+1}$$

$$b_n - b_1 = \frac{(-\frac{q}{p})^2\left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)}$$

$$b_n = \frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{b_n = \frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}$$

(2) $a_n = p^n b_n$ であるから，(1) の結果から

$$a_n = p^n b_n = p^n \cdot \frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\} = \frac{q^2}{p+q}\left\{p^{n-1} - (-q)^{n-1}\right\}$$

これに $q = 1$ を代入して　$a_n = \dfrac{1}{p+1}\left\{p^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{p+1}\left\{p^n - (-1)^n\right\} - \frac{1}{p+1}\left\{p^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{p+1}\left\{p^{n-1}(p-1) - 2(-1)^n\right\} \end{aligned}$$

すべての自然数 n について，$a_{n+1} \geqq a_n$ が成立する条件は $(p + 1 > 0)$

$$p^{n-1}(p-1) - 2(-1)^n \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad p^{n-1}(p-1) \geqq 2(-1)^n \quad \cdots(*)$$

$n = 1$ のとき　$p - 1 \geqq -2$ より，$(*)$ は成立する．

$n = 2$ のとき　$(*)$ は　$p(p-1) \geqq 2$　ゆえに　$(p+1)(p-2) \geqq 0$

$p > 0$ に注意してこれを解くと　$p \geqq 2$

逆に，$p \geqq 2$ であるとき，$n \geqq 2$ について

$$p^{n-1}(p-1) \geqq 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1} \geqq 2 \geqq 2(-1)^n$$

よって，求める p の値の範囲は　$\boldsymbol{p \geqq 2}$　■

$\boxed{3}$ (1) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 1)$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$|\vec{a}|^2=3$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}$ は α に平行なベクトルで $\vec{a}$ に垂直である．

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)-3(-1,\ 1,\ 1)=2(2,-1,-1)$$

$\vec{d}=(2,-1,-1)$ とすると，$\vec{c}$ は $\vec{d}$ と平行な単位ベクトルであるから，x 成分の符号に注意して

$$\vec{c}=\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\quad \text{よって}\quad \mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{6}}},-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}},-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\right)$$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は α に平行で，$\vec{a}\perp\vec{c}$ であるから，$\vec{b}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$ より [1]

$$s=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\qquad t=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=-\frac{4}{\sqrt{6}}=-\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{3}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ について，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{c}$$

(2) と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ より

$$k=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\boldsymbol{x+y+z}}{\mathbf{3}}$$
$$l=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=\frac{\boldsymbol{2x-y-z}}{\sqrt{\mathbf{6}}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/HKdai/HKdai_ri_2016.pdf $\boxed{5}$ の補足を参照．

4 (1) $X_1=3$ となる事象を A とすると，A は赤玉 2 個，白玉 2 個の 4 個から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す事象であるから，求める確率は

$$P(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2\cdot2}{6}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(2) $X_2=3$ となる事象を B とする．

(i) 事象 A が起きたとき，袋の中は赤玉 3 個と白玉 2 個となる．$X_2=3$ となるのは，2 回目の試行で色違いの玉を取り出さない場合であるから

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P(B)\\&=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\right)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3\cdot2}{10}\right)=\frac{4}{15}\end{aligned}$$

(ii) 事象 $\overline{A}$ が起きたとき，袋の中は赤玉 2 個と白玉 3 個となる．$X_2=3$ となるのは，2 回目の試行で色違いの玉を取り出す場合であるから

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap B)&=P(\overline{A})P(B)=(1-P(A))P(B)\\&=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{2\cdot3}{10}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{7}{15}}$$

(3) 求める条件付き確率は，(2) の結果から

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{4}{15}\div\frac{7}{15}=\boldsymbol{\frac{4}{7}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta$ とおくと [2]

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta(\cos\theta)'\,d\theta \\
&= -\Big[\sin^n\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin^{n-1}\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= n(I_{n-1} - I_{n+1})
\end{aligned}$$

ゆえに　$I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\,d\theta = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\,d\theta$

(2) $f(x) = \displaystyle\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$ より

$$f(x) = x\int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta - \int_0^x \theta(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$$

これを微分して $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入すると，(1) の結果より

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta + x(a\sin^{n+1}x - \sin^{n-1}x) \\
&\qquad - x(a\sin^{n+1}x - \sin^{n-1}x) \\
&= \int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta,
\end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = aI_{n+1} - I_{n-1} = a\cdot\frac{n}{n+1}I_{n-1} - I_{n-1} = \frac{(a-1)n-1}{n+1}I_{n-1}$$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ より　$(a-1)n-1=0$　ゆえに　$a = 1+\dfrac{1}{n}$　$\cdots$①

$a > \dfrac{3}{2}$ であるから　$1+\dfrac{1}{n} > \dfrac{3}{2}$　ゆえに　$\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2}$

n は自然数であるから　$\boldsymbol{n=1}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{a=2}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2018_kouki.pdf $\boxed{1}$ を参照.

(3)　(2) の結果により

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(2\sin^2\theta-1)d\theta \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos 2\theta\, d\theta \\ &= \left[-\frac{\pi}{4}\sin 2\theta + \frac{\theta}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

別解　$\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ とおくと　$\dfrac{d\theta}{d\varphi} = -1$

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
φ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos 2\theta\, d\theta \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \varphi\cos(\pi-2\varphi)\cdot(-d\varphi) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos 2\varphi\, d\varphi \\ &= \left[\frac{\varphi}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{4}\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

1.2　2016 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある．a を実数の定数とし，

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく．

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ．

(2) 点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ．

2 $a > 0$ に対し，関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t)\sin t \right\} dt$$

をみたすとする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $0 < a \leqq 2\pi$ において，

$$g(a) = \int_{-a}^{a} f(t)\sin t\, dt$$

の最小値とそのときの a の値を求めよ．

3 机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている．ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである．

(1) ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ．

(2) ひきだし A，B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ．

(3) ひきだし A，B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ．

4 (1) 次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ．

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

(2) 方程式 ① の 3 つの実数解を $s,\ t,\ u$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(3) (2) の a_n がすべて整数であることを示せ．

5 空間の 2 点 A(0,　0,　2)，B(0,　1,　3) を通る直線を ℓ とし，2 点 C(1,　0,　0)，D(1,　0,　1) を通る直線を m とする．a を定数として，ℓ 上にも m 上にもない点 P$(s,\ t,\ a)$ を考える．

(1) P から ℓ に下ろした垂線と ℓ の交点を Q とし，P から m に下ろした垂線と m の交点を R とする．Q，R の座標をそれぞれ $s,\ t,\ a$ を用いて表せ．

(2) P を中心とし，ℓ と m がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ．

(3) $s,\ t$ と定数 a が (2) の条件をみたすとき，平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し，その焦点と準線を a を用いて表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $w = z^2 - 2az + 1$ (a は実数，$|z| = 2$) より

$$\begin{aligned}|w|^2 &= w\overline{w} = (z^2 - 2az + 1)(\overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1)\\ &= \{(z^2 - 2az) + 1\}\{(\overline{z}^2 - 2a\overline{z}) + 1\}\\ &= (z^2 - 2az)(\overline{z}^2 - 2a\overline{z}) + (z^2 - 2az) + (\overline{z}^2 - 2a\overline{z}) + 1\\ &= z\overline{z}(z - 2a)(\overline{z} - 2a) + z^2 + \overline{z}^2 - 2a(z + \overline{z}) + 1\\ &= z\overline{z}\{z\overline{z} - 2a(z + \overline{z}) + 4a^2\} + (z + \overline{z})^2 - 2z\overline{z} - 2a(z + \overline{z}) + 1\end{aligned}$$

$z\overline{z} = |z|^2 = 4$，$z + \overline{z} = 2x$ であるから

$$\begin{aligned}|w|^2 &= 4\{4 - 2a\cdot 2x + 4a^2\} + (2x)^2 - 2\cdot 4 - 2a\cdot 2x + 1\\ &= \boldsymbol{4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$f(x) = 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9$ とおくと

$$f(x) = 4\left(x - \frac{5a}{2}\right)^2 + 9 - 9a^2$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を m とする．

(i) $\dfrac{5a}{2} \leqq -2$，すなわち，$a \leqq -\dfrac{4}{5}$ のとき

$$m = f(-2) = 16a^2 + 40a + 25 = (4a + 5)^2$$

(ii) $-2 \leqq \dfrac{5a}{2} \leqq 2$，すなわち，$-\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq \dfrac{4}{5}$ のとき

$$m = f\left(\frac{5a}{2}\right) = 9 - 9a^2$$

(iii) $2 \leqq \dfrac{5a}{2}$，すなわち，$\dfrac{4}{5} \leqq a$ のとき

$$m = f(2) = 16a^2 - 40a + 25 = (4a - 5)^2$$

(i)〜(iii) より，$|w|$ の最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -\dfrac{4}{5}} & \text{のとき}\quad \boldsymbol{|4a + 5|}\\ \boldsymbol{-\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq \dfrac{4}{5}} & \text{のとき}\quad \boldsymbol{3\sqrt{1 - a^2}}\\ \boldsymbol{\dfrac{4}{5} \leqq a} & \text{のとき}\quad \boldsymbol{|4a - 5|}\end{cases}$$

■

2 (1) 与えられた関数 $f(x)$ から $(a>0)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt \\
&= \frac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a}dt+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt = e^{-x}+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt
\end{aligned}
$$

$k=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，$f(x)=e^{-x}+k$ より

$$
\begin{aligned}
k &= \int_{-a}^{a}(e^{-t}+k)\sin t\,dt = \int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt + k\int_{-a}^{a}\sin t\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\,e^{-t}(\sin t+\cos t)\Big]_{-a}^{a} + k\Big[-\cos t\Big]_{-a}^{a} \\
&= -\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a
\end{aligned}
$$

よって $\quad \boldsymbol{f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a}$

(2) $k=g(a)$ であるから

$$
\begin{aligned}
g(a) &= -\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a \\
g'(a) &= -(e^{a}-e^{-a})\sin a
\end{aligned}
$$

したがって，$0 \leqq a \leqq 2\pi$ における $g(a)$ の増減は，次のようになる．

a	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，求める最小値は $\quad g(\pi)=\boldsymbol{\dfrac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}}$ ■

3 (1) ひきだし A のメダルの色が 1 種類または 3 種類である確率は

$$\frac{3}{3^3}+\frac{3!}{3^3}=\frac{1}{3}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

(2) 2 種類のメダルの色が金，銀である確率は　$\frac{2^5-2}{3^3\cdot 2^2}=\frac{30}{108}$

2 種類のメダルの色が金，銅である確率は　$\frac{(2^3-1)\times 1}{3^3\cdot 2^2}=\frac{7}{108}$

2 種類のメダルの色が銀，銅である確率は　$\frac{(2^3-1)\times 1}{3^3\cdot 2^2}=\frac{7}{108}$

よって，求める確率は　$\frac{30}{108}+\frac{7}{108}+\frac{7}{108}=\mathbf{\frac{11}{27}}$

(3) (i) A に 3 枚の金メダルが入る場合は　$1\times 1=1$ (通り)

(ii) A に 2 枚の金メダルが入る場合は　${}_3\mathrm{C}_2\cdot 2\times {}_2\mathrm{C}_1\cdot 1=12$ (通り)

(iii) A に 1 枚の金メダルが入る場合は　${}_3\mathrm{C}_1\cdot 2^2\times {}_2\mathrm{C}_2=12$ (通り)

ひきだし A のメダルの色が 2 種類であるのは，(ii) の場合と，(iii) において 1 枚の金メダル以外の残りの 2 枚のメダルが同色である場合であるから，その総数は

$$12+{}_3\mathrm{C}_1\cdot 2\times {}_2\mathrm{C}_2=18\ (\text{通り})$$

よって，求める条件付き確率は　$\frac{18}{1+12+12}=\mathbf{\frac{18}{25}}$　■

4 (1) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$

2 次方程式 $f'(x) = 0$ の係数について

$$D/4 = 1^2 - 3\cdot(-2) = 7 > 0$$

したがって，$f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それらを $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$，$f(x)$ は極大値 $f(\alpha)$，極小値 $f(\beta)$ をもつ．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(x) = x^3\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$ より　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

また，$f'(x) = 0$ の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{3},\quad \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

$f(x) = f'(x)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}\right) - \dfrac{7}{9}(2x+1)$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= \frac{49}{81}(2\alpha+1)(2\beta+1) = \frac{49}{81}\{4\alpha\beta + 2(\alpha+\beta) + 1\} \\ &= \frac{49}{81}\left\{4\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 1\right\} = -\frac{49}{27} < 0 \end{aligned}$$

上の結果と増減表により　$f(\alpha) > 0$，$f(\beta) < 0$

$f(0) = -1 \neq 0$ より，$f(x) = 0$，すなわち，$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ は，異なる 3 つの 0 でない実数解をもつ．

別解　$f(-2) = -1 < 0$，$f(-1) = 1 > 0$，$f(0) = -1 < 0$，

$f(1) = -1 < 0$，$f(2) = 7 > 0$

$f(x)$ の増減表から，3 区間 $-2 < x < -1$，$-1 < x < 0$，$1 < x < 2$ において，それぞれ 1 つずつ $f(x) = 0$ の実数解が存在する．

(2) $s,\ t,\ u$ は $f(x)=0$ の解であるから　$f(s)=f(t)=f(u)=0$

$$\frac{s^{n-1}f(s)}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}f(t)}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}f(u)}{(u-s)(u-t)}=0$$

$$\frac{s^{n-1}(s^3+s^2-2s-1)}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}(t^3+t^2-2t-1)}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}(u^3+u^2-2u-1)}{(u-s)(u-t)}=0$$

$$\begin{aligned}&\frac{s^{n+2}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n+2}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n+2}}{(u-s)(u-t)}\\&+\frac{s^{n+1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n+1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n+1}}{(u-s)(u-t)}\\&-2\left\{\frac{s^{n}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n}}{(u-s)(u-t)}\right\}\\&-\left\{\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}\right\}=0\end{aligned}$$

よって　　　$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$

(3) a_n の定義式から

$$\begin{aligned}a_1&=\frac{1}{(s-t)(s-u)}+\frac{1}{(t-u)(t-s)}+\frac{1}{(u-s)(u-t)}\\&=\frac{-(t-u)-(u-s)-(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0,\\a_2&=\frac{s}{(s-t)(s-u)}+\frac{t}{(t-u)(t-s)}+\frac{u}{(u-s)(u-t)}\\&=\frac{-s(t-u)-t(u-s)-u(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0,\\a_3&=\frac{s^2}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^2}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^2}{(u-s)(u-t)}\\&=\frac{-s^2(t-u)-t^2(u-s)-u^2(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}\\&=\frac{(s-t)(t-u)(u-s)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=1\end{aligned}$$

上式および (2) の結果より $a_{n+3}=-a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n$ であるから，すべての自然数 n について，a_n は整数である．

補足 n 次式 $F_n(s,\ t,\ u) = -(t-u)s^{n-1} - (u-s)t^{n-1} - (s-t)u^{n-1}$ は，$s,\ t,\ u$ に関する対称式である．$s=t$ とおくと $F(s,\ t,\ u)=0$ となるから，$F_n(s,\ t,\ u)$ は $s-t$ を因数にもつ．また，対称性により，$t-u$，$u-s$ も因数にもつ．すなわち，$F_n(s,\ t,\ u)$ は $(s-t)(t-u)(u-s)$ を因数にもつから

$$F_n(s,\ t,\ u) = (s-t)(t-u)(u-s)G_{n-3}(s,\ t,\ u) \quad \cdots(*)$$

とおける．このとき，$G_{n-3}(s,\ t,\ u)$ は基本対称式 $s+t+u$，$st+tu+us$，stu からなる $n-3$ 次式である．次数 n について次が成立する．

(i) $n=1,\ 2$ のとき，$(*)$ の両辺の次数に着目すると

$$G_{n-3}(s,\ t,\ u) = 0 \quad (n=1,2)$$

(ii) $n=3$ のとき，$G_0(s,\ t,\ u)$ は定数となるので，s^2 の係数を比較して

$$G_0(s,\ t,\ u) = 1$$

(iii) $n=4$ のとき，$G_1(s,\ t,\ u)$ は 1 次式であるから

$$G_1(s,\ t,\ u) = k(s+t+u) \quad (k \text{ は定数})$$

とおいて，s^3 の係数を比較すると，$k=1$ より

$$G_1(s,\ t,\ u) = s+t+u$$

(iv) $n=5$ のとき，$G_2(s,\ t,\ u)$ は 2 次式であるから，定数 $a,\ b$ を用いて

$$G_2(s,\ t,\ u) = a(s+t+u)^2 + b(st+tu+us)$$

とおいて，s^4 の係数を比較すると，$a=1$ であるから

$$\begin{aligned}&-(t-u)s^4 - (u-s)t^4 - (s-t)u^4 \\ &\qquad = (s-t)(t-u)(u-s)\{(s+t+u)^2 + b(st+tu+us)\}\end{aligned}$$

$s=1$，$t=0$，$u=-1$ を上式に代入すると，$b=-1$ より

$$G_2(s,\ t,\ u) = (s+t+u)^2 - (st+tu+us)$$

$a_n = \dfrac{F_n(s,\ t,\ u)}{(s-t)(t-u)(u-s)} = G_{n-3}(s,\ t,\ u)$ であるから

$$\begin{aligned}&a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1, \\ &a_4 = s+t+u, \quad a_5 = (s+t+u)^2 - (st+tu+us)\end{aligned}$$

$f(x)=0$ の解と係数の関係により　$s+t+u=-1,\ \ st+tu+us=-2$

ゆえに，$a_4=-1$，$a_5=3$．これらは漸化式から得られる結果と一致する．■

5 (1) A(0, 0, 2)，B(0, 1, 3)，C(1, 0, 0)，D(1, 0, 1)，P$(s,\ t,\ a)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(s,\ t,\ a-2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{t+a-2}{2}(0,\ 1,\ 1),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(0,\ 0,\ 2)+\frac{t+a-2}{2}(0,\ 1,\ 1)$$

$$=\left(0,\ \frac{t+a-2}{2},\ \frac{t+a+2}{2}\right)$$

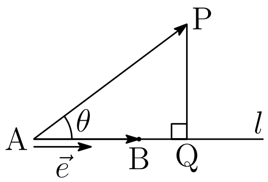
$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(s-1,\ t,\ a)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}=a(0,\ 0,\ 1),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}=(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ 0,\ 1)=(1,\ 0,\ a)$$

よって　$\mathbf{Q}\left(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{t+a-2}{2}},\ \boldsymbol{\frac{t+a+2}{2}}\right)$，$\mathbf{R}(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \boldsymbol{a})$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ方向の単位ベクトルを $\vec{e}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{e}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta)\vec{e}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{e})\vec{e}$

これに $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$ を代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(-2s, -t+a-2,\ t-a+2),\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-s, -t,\ 0)$$

条件を満たすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$ であるから

$$\frac{1}{4}\{(-2s)^2+(-t+a-2)^2+(t-a+2)^2\}=(1-s)^2+(-t)^2$$

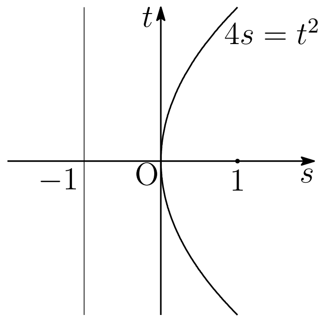
$$2s^2+(t-a+2)^2=2\{(1-s)^2+t^2\}$$

整理すると　　$\boldsymbol{4s=t^2+2(a-2)t-a^2+4a-2}$

(3) (2) の結果から

$$4\left(s+\frac{a^2-4a+3}{2}\right)=(t+a-2)^2 \quad \cdots (*)$$

st 平面上の放物線 $4s=t^2$ は，焦点 $(1,\ 0)$，準線 $s=-1$ である．



放物線 $(*)$ は放物線 $4s=t^2$ を s 軸方向に $-\dfrac{a^2-4a+3}{2}$，t 軸方向に $-a+2$ だけ平行移動したものである．$(*)$ の焦点は

$$\left(1-\frac{a^2-4a+3}{2}, -a+2\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(\frac{-a^2+4a-1}{2}, -a+2\right)}$$

また，$(*)$ の準線の方程式は

$$s=-1-\frac{a^2-4a+3}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{s=\frac{-a^2+4a-5}{2}}$$

■

1.3　2017年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 自然数の2乗となる数を平方数という．

(1) 自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

2 関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(3) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

3 複素数平面上に3点O，A，Bを頂点とする△OABがある．ただし，Oは原点とする．△OABの外心をPとする．3点A，B，Pが表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，

$$\alpha\beta=z$$

が成り立つとする．

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 A(α) が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) 点 P(z) の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

4 さいころを続けて投げて，数直線上の点Pを移動させるゲームを行う．初め点Pは原点0にいる．さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点Pを現在の位置から正の向きに移動させる．この試行を続けて行い，点Pが10に達するか越えた時点でゲームを終了する．n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする．

(1) $p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ．

(2) p_9 の値を求めよ．

(3) p_3 の値を求めよ．

5 座標平面上の 3 点 A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2) を頂点とする △ABC の内部および境界を T とおく．実数 a に対して，条件

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 \leqq a$$

を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする．ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す．

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ．

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ．

(3) (1) のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $n(n+1)+a=(n+k)^2 \quad \cdots(*)$ より

$$\begin{aligned} a &= (n+k)^2 - n(n+1) \\ &= k^2 + n(2k-1) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

n，k は自然数であるから，$n \geqq 1$，$2k-1>0$ より

$$a \geqq k^2 + 1(2k-1) \quad \text{ゆえに} \quad a \geqq k^2+2k-1 \quad \cdots(**)$$

(2) $(*)$ において，$a=14$ であるから，このとき，$(**)$ により

$$14 \geqq k^2+2k-1 \quad \text{ゆえに} \quad (k+5)(k-3) \leqq 0$$

これを満たす自然数 k は　1，2，3

① より，$n=\dfrac{14-k^2}{2k-1}$ であるから

k	1	2	3
n	13	$\frac{10}{3}$	1

よって，求める自然数 n は　**1，13** ■

2　(1) $f(x) = 1 + \sin x - x\cos x$ を微分すると　$f'(x) = x\sin x$

したがって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は次にようになる．

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\pi$	$\searrow$	$1-2\pi$

よって，最大値 $f(\pi) = \boldsymbol{1+\pi}$，最小値 $f(2\pi) = \boldsymbol{1-2\pi}$

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \boldsymbol{x - 2\cos x - x\sin x + C}$　**(C は積分定数)**

(3) $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ であるから，(1) の増減表により

$$0 \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}\text{で } f(x) \geqq 0,\quad \frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi\text{で } f(x) \leqq 0$$

(2) の結果から $F(x) = x - 2\cos x - x\sin x$ とおくと，

$$F(0) = -2,\quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi,\quad F(2\pi) = 2\pi - 2$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\,dx \\ &= \Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} - \Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(0) - F(2\pi) \\ &= 2\cdot 3\pi - (-2) - (2\pi - 2) = \boldsymbol{4\pi + 4}\end{aligned}$$

■

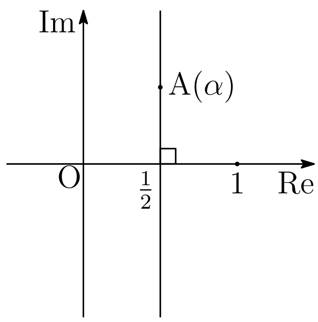
3 (1) O(0)，A(α)，B(β)，P($\alpha\beta$) について，P は △OAB の外心であるから

$$|\mathrm{OP}| = |\mathrm{AP}| = |\mathrm{BP}| \quad ゆえに \quad |\alpha\beta| = |\alpha\beta - \alpha| = |\alpha\beta - \beta|$$

したがって　$|\alpha||\beta| = |\alpha||\beta - 1| = |\beta||\alpha - 1|$

すなわち　$|\alpha| = |\alpha - 1|$，$|\beta| = |\beta - 1|$

よって，A(α) が描く描く図形は，右の図のように 2 点 0, 1 を結ぶ垂直二等分線である．



(2) (1) で示したように，B(β) も 2 点 0, 1 を結ぶ垂直二等分線上にあるから

$$\alpha = \frac{1}{2} + si, \quad \beta = \frac{1}{2} + ti, \quad z = x + yi$$

とおくと (s, t, x, y は実数)，$z = \alpha\beta$ より

$$x + yi = \left(\frac{1}{2} + si\right)\left(\frac{1}{2} + ti\right) = \frac{1}{4} - st + \frac{1}{2}(s + t)i$$

したがって　$x = \frac{1}{4} - st$, $y = \frac{1}{2}(s + t)$　ゆえに　$s + t = 2y$, $st = \frac{1}{4} - x$

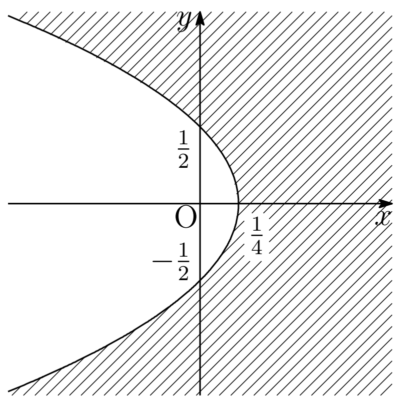
このとき，s，t を解とする 2 次方程式は

$$\lambda^2 - (s + t)\lambda + st = 0 \quad すなわち \quad \lambda^2 - 2y\lambda + \frac{1}{4} - x = 0 \quad \cdots (*)$$

2 次方程式 (∗) は，異なる 2 つの実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-y)^2 - 1\left(\frac{1}{4} - x\right) > 0 \quad ゆえに \quad x > -y^2 + \frac{1}{4}$$

よって，P(z) の描く図形は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



■

$\boxed{4}$ (1) 9回目までに少なくとも1回2以上の目が出ると，9回目でPの座標は10以上となり，9回目以内でゲームが終了する．1回目から9回目まで1の目が出る確率であるから (10回目は任意の目)

$$p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$$

(2) 9回目でPの座標が10以上になるのは，次の場合である．

(i) 8回目まですべての1の目が出て，9回目で2以上出る確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^8 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6^9}$$

(ii) 1回目から8回目までに1回だけ2の目が出てそれ以外は1の目が出る確率は (9回目は任意の目)

$$_8\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^8 = \frac{8}{6^8}$$

(i)，(ii) より，求める確率は　$\dfrac{5}{6^9} + \dfrac{8}{6^8} = \boldsymbol{\dfrac{53}{6^9}}$

(3) 1, 2, 3回目に出た目を順に i, j, k とすると，$4 \leqq i + j \leqq 9$ であるから，このときの (i, j) の組の数および k の場合の数は，次のようになる

$i+j$	4	5	6	7	8	9
(i, j) の個数	3	4	5	6	5	4
k の個数	1	2	3	4	5	6

よって，求める確率は

$$p_3 = \frac{3\cdot1 + 4\cdot2 + 5\cdot3 + 6\cdot4 + 5\cdot5 + 4\cdot6}{6^3} = \frac{99}{216} = \boldsymbol{\frac{11}{24}}$$

■

5 (1) A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2)

P$(x,\ y)$ とおくと，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq a$ より

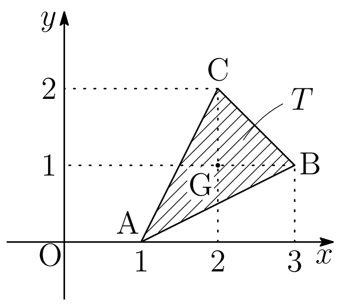
$$(x-1)^2+y^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2 \leqq a$$

したがって，D の表す領域は $\quad (x-2)^2+(y-1)^2 \leqq \dfrac{a-4}{3} \quad \cdots(*)$

よって，D が少なくとも 1 点 P を含む a の値の範囲は

$$\frac{a-4}{3} \geqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a \geqq 4}$$

(2) $(*)$ より，D は点 $(2,\ 1)$ を中心とする半径



$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}$$

の円の内部であるから，G$(2,\ 1)$ とすると

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geqq \mathrm{GA}$$

を満たせばよい．$\mathrm{GA}=\sqrt{(1-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geqq \sqrt{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a \geqq 10}$$

(3) 点 G$(2,\ 1)$ から 3 直線

$$\mathrm{AB} : x-2y-1=0, \quad \mathrm{AC} : 2x-y-2=0, \quad \mathrm{BC} : x+y-4=0$$

までの距離は，それぞれ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，$(*)$ により

$$0 \leqq \sqrt{\frac{a-4}{3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{4 \leqq a \leqq \frac{23}{5}}$$

■

1.4　2018 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 座標空間の 4 点 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$，$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ に対し，

$$\vec{p} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \vec{q} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とおく．ただし，O は原点，s と t は実数とする．

(1) $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を s，t で表せ．

(2) $t = \frac{1}{2}$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ．

(3) s と t が実数を動くとき，$|\vec{p} - \vec{q}|$ の最小値を求めよ．

2 $z + \frac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする．

(1) D を複素数平面上に図示せよ．

(2) k を実数とする．D に属する z で方程式

$$k\left(z + \frac{4}{z} + 8\right) = i\left(z - \frac{4}{z}\right)$$

を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ．ただし，i は虚数単位を表す．

3 数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0，1，8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある．これらから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする．ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える．例えば，左から順に 0，0，1，1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である．

(1) a，b，c，d は整数とする．$1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数になることと $a + b + c + d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ．

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ．

(3) n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ．

4 座標平面上に 3 点 O(0, 0)，$\mathrm{A}\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$，B(11, 11) がある．条件

$$\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$$

を満たす点 Q$(x,\ y)$ 全体を D とする．

(1) D を座標平面上に図示せよ．また，$\mathrm{BQ} = \mathrm{OQ} = 2\mathrm{AQ}$ となるすべての点 Q の座標を求めよ．

(2) $0 < p \leqq 11$ とし，P を点 $(p,\ 11)$ とする．条件 $\mathrm{OQ} \geqq \mathrm{PQ}$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ．

5 2 つの関数

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

がある．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $g(x) \leqq f(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積を求めよ．

解答例

1 (1) 4 点 A$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，B$(0,\ 0,\ 1)$，C$\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$，D$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$

に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\quad |\vec{c}|=|\vec{d}|=\sqrt{2},\\
&\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{d}=0,\\
&\vec{b}\cdot\vec{c}=-1,\quad \vec{b}\cdot\vec{d}=-1,\quad \vec{c}\cdot\vec{d}=0
\end{aligned}$$

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{q}=(1-s)\vec{c}+s\vec{d}$ より，上の結果に注意して

$$\begin{aligned}
|\vec{p}|^2&=|(1-t)\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1-t)^2|\vec{a}|^2+2(1-t)t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\
&=(1-t)^2+t^2=2t^2-2t+1,\\
|\vec{q}|^2&=|(1-s)\vec{c}+s\vec{d}|^2=(1-s)^2|\vec{c}|^2+2(1-s)s\vec{c}\cdot\vec{d}+s^2|\vec{d}|^2\\
&=2(1-s)^2+2s^2=2(2s^2-2s+1)
\end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{|\vec{p}|=\sqrt{2t^2-2t+1}}$，$\boldsymbol{|\vec{q}|=\sqrt{2(2s^2-2s+1)}}$

また　$$\begin{aligned}
\vec{p}\cdot\vec{q}&=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot\{(1-s)\vec{c}+s\vec{d}\}\\
&=(1-s)(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c}+s(1-t)\vec{a}\cdot\vec{d}+(1-s)t\vec{b}\cdot\vec{c}+st\vec{b}\cdot\vec{d}\\
&=(1-s)t\cdot(-1)+st\cdot(-1)=\boldsymbol{-t}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$|\vec{p}|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=-\dfrac{1}{2}$

このとき，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$$\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}\quad ゆえに\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{q}|}\quad すなわち\quad |\vec{q}|=1$$

これを (1) の結果に代入すると　$\sqrt{2(2s^2-2s+1)}=1$

したがって　$(2s-1)^2=0$　これを解いて　$\boldsymbol{s=\dfrac{1}{2}}$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
|\vec{p}-\vec{q}|^2&=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2\\
&=(2t^2-2t+1)-2(-t)+2(2s^2-2s+1)\\
&=(2s-1)^2+2t^2+2\geqq 2
\end{aligned}$$

よって，$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値は　$\boldsymbol{\sqrt{2}}$　■

2 (1) $z+\dfrac{4}{z}$ が，実数であるから　$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z+\dfrac{4}{z}}$

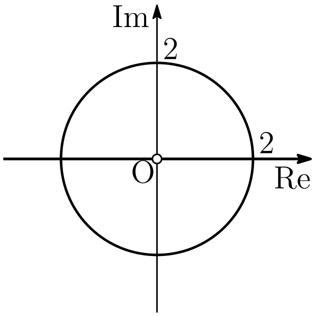
したがって　　$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$

ゆえに　　$(z-\overline{z})\left(1-\dfrac{4}{|z|^2}\right)=0$

すなわち　　$z=\overline{z}$　または　$|z|=2$

よって，D の表す図形は，実軸上 (原点を除く)

または　原点を中心とする半径 2 の円



(2) 与えれた方程式から

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)+i\left(\frac{4}{z}-z\right)=0 \quad \cdots(*)$$

(i) z が実軸上にあるとき，$k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)$，$\dfrac{4}{z}-z$ は実数であるから

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)=0,\quad \frac{4}{z}-z=0$$

上の第 2 式から，$z=\pm 2$．これを第 1 式に代入することにより

$$k=0$$

(ii) z が $|z|=2$ を満たす円周上で -2 を除く点であるとき

$$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

とおいて，$(*)$ に代入すると

$$k(4\cos\theta+8)+i(-4i\sin\theta)=0\quad \text{ゆえに}\quad k(\cos\theta+2)+\sin\theta=0$$

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}(-\infty<t<\infty)$，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ とすると

$$k\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)+\frac{2t}{1+t^2}=0\quad \text{ゆえに}\quad kt^2+2t+3k=0\quad \cdots(**)$$

$k\neq 0$ のとき，上の t に関する 2 次方程式 $(**)$ は実数解をもつから

$$D/4=1-3k^2\geqq 0\quad \text{ゆえに}\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

特に，$k=0$ のときも方程式 $(**)$ は実数解をもつ．

(i)，(ii) より，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ ■

3 (1)
$$1000a + 100b + 10c + d = 9(111a + 11b + c) + a + b + c + d$$
上式より，$1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数であることと $a + b + c + d$ が 9 の倍数であることは同値である．

別解 $10 \equiv 1 \pmod 9$ より，$10^2 \equiv 1,\ 10^3 \equiv 1 \pmod 9$ であるから
$$\begin{aligned}1000a + 100b + 10c + d &= 10^3a + 10^2b + 10c + d\\ &\equiv a + b + c + d \pmod 9\end{aligned}$$

(2) 8 枚のカードをすべて区別する．異なる 8 枚のカードから 4 枚を取り出し，一列に並べる方法は
$${}_8\mathrm{P}_4 \text{ (通り)}$$
このとき，取り出した 4 枚の数字の和が 9 の倍数となる組合せは
$$\text{(a) } \{0,\ 0,\ 1,\ 8\} \qquad \text{(b) } \{0,\ 2,\ 8,\ 8\} \qquad \text{(c) } \{1,\ 1,\ 8,\ 8\}$$
(a) の 1，8 の選び方は 2^2 通り，(b) の 0，2 の選び方は 2^2 通り．(a)〜(c) の並べ方は，それぞれ 4! 通りあるから，n が 9 の倍数となる事象を A とすると，その総数は
$$2^2{\cdot}4! + 2^2{\cdot}4! + 4! = 9{\cdot}4! \text{ (通り)}$$
よって，求める確率は　$P(A) = \dfrac{9{\cdot}4!}{{}_8\mathrm{P}_4} = \dfrac{9 \times 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1}{8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5} = \boldsymbol{\dfrac{9}{70}}$

(3) n が奇数であるのは，一位の数が 1 であるから，その場合の数は
$$2 \times {}_7\mathrm{P}_3 \text{ (通り)}$$
n が偶数となる事象を B とすると，その確率は
$$P(B) = 1 - \frac{2 \times {}_7\mathrm{P}_3}{{}_8\mathrm{P}_4} = \frac{8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5 - 2 \times 7{\cdot}6{\cdot}5}{{}_8\mathrm{P}_4} = \frac{6{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5}{{}_8\mathrm{P}_4}$$
n が 9 の倍数で奇数 $A \cap \overline{B}$ となるのは，一位の数が 1 であるから，その場合の数は (a) のときの $2^2{\cdot}3!$ 通りと (c) のときの $2{\cdot}3!$ 通り．n が 9 の倍数で偶数となる，すなわち，$A \cap B$ となる確率は
$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A) - P(A \cap \overline{B})\\ &= \frac{9{\cdot}4!}{{}_8\mathrm{P}_4} - \frac{2^2{\cdot}3! + 2{\cdot}3!}{{}_8\mathrm{P}_4} = \frac{30{\cdot}3!}{{}_8\mathrm{P}_4}\end{aligned}$$
よって，求める条件付き確率は
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{30{\cdot}3!}{{}_8\mathrm{P}_4}{\cdot}\frac{{}_8\mathrm{P}_4}{6{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5} = \boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

■

4 (1) O$(0,\ 0)$，A$\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$．B$(11,\ 11)$，Q$(x,\ y)$

BQ $\geqq$ OQ $\geqq$ 2AQ より，BQ$^2 \geqq$ OQ$^2 \geqq$ 4AQ^2 であるから

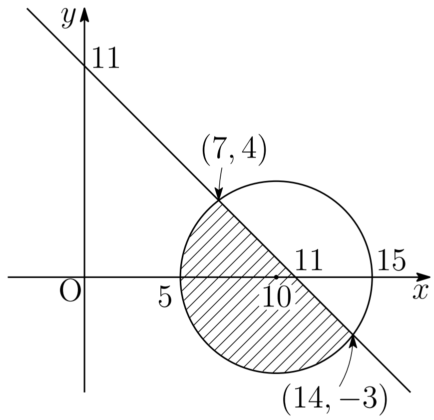
$$(x-11)^2+(y-11)^2 \geqq x^2+y^2 \geqq (2x-15)^2+4y^2$$

整理すると　$x+y \leqq 11,\quad (x-10)^2+y^2 \leqq 25$

よって，求める領域 D は下の図の斜線部分で，境界線を含む．

BQ $=$ OQ $=$ 2AQ が成立するとき

$$(*)\begin{cases} x+y=11 \\ (x-10)^2+y^2=25 \end{cases}$$



第1式から　$x-10=1-y$

これを第2式に代入して

$$(1-y)^2+y^2=25$$

ゆえに　$(y-4)(y+3)=0$

これを解いて　$y=4,-3$　$(*)$ の第1式により　**(7，4)，(14，−3)**

(2) $0<p \leqq 11$，P$(p,\ 11)$，OQ $\geqq$ PQ より，OQ$^2 \geqq$ PQ^2 であるから

$$x^2+y^2 \geqq (x-p)^2+(y-11)^2 \quad \text{ゆえに} \quad y \geqq -\frac{p}{11}x+\frac{p^2}{22}+\frac{11}{2} \qquad \cdots(**)$$

領域 $(**)$ は傾き $-\dfrac{p}{11}$ $\left(-1 \leqq -\dfrac{p}{11}<0\right)$ の直線の上側である．$(**)$ で D を満たす点が存在するとき，点 $(7,\ 4)$ が $(**)$ を満たせばよいから

$$4 \geqq -\frac{p}{11}\cdot 7+\frac{p^2}{22}+\frac{11}{2} \quad \text{整理すると} \quad (p-3)(p-11) \leqq 0$$

よって，p の値の範囲に注意して　$\boldsymbol{3 \leqq p \leqq 11}$　■

$\boxed{5}$ (1) $h(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ とすると　$h'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}$

$h'(x)$ は，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，単調減少．

$$h'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0,\quad h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$$

ゆえに，$h'(c) = 0$ を満たす c $\left(0 < c < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が唯一存在する．

したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $h(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において　$h(x) \geqq 0$　すなわち　$\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$

解説 $\alpha < x < \beta$ において，$f''(x) < 0$ とする．

$$h(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) - f(\alpha)$$

とおくと　　$h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

$h'(x)$ は単調減少，$h(\alpha) = 0$，$h(\beta) = 0$ であるから，ロルの定理により，$h'(c) = 0$ を満たす c $(\alpha < x < \beta)$ が唯一存在する．

x	α	$\cdots$	c	$\cdots$	β
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

したがって　　$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において　$h(x) \geqq 0$

よって　　$f(x) \geqq \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + f(\alpha)$　　$(\alpha \leqq x \leqq \beta)$

直線 $y = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$ は，曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線．曲線 $y = f(x)$ は，$\alpha < x < \beta$ において上に凸であるから，曲線 $y = f(x)$ は直線 AB の上側にある．

また，$\alpha < x < \beta$ において，$f''(x) > 0$ のとき

$$f(x) \leqq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + f(\alpha) \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta)$$

(2) $\lambda(x)=f(x)-g(x)=\cos x-\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}+\dfrac{\pi}{2}$ とおくと

$$\lambda'(x)=-\sin x+\frac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において　$\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}}\leqq\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2}}=\dfrac{2}{\pi}x$

上の2式から，(1) の結果に注意して

$$\lambda'(x)\leqq-\sin x+\frac{2}{\pi}x=-\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)\leqq 0$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\lambda(x)$ は単調減少で，$\lambda\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ であるから

$$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\text{において}\quad\lambda(x)\geqq 0\quad\text{すなわち}\quad g(x)\leqq f(x)$$

(3) (2) の結果から，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lambda(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\,dx\quad\cdots(*)$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\Big[\sin x+\frac{\pi}{2}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1+\frac{\pi^2}{4}\quad\cdots①$

次式において，$x=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\theta$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\,dx&=\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\&=\frac{\pi^2}{4}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② を $(*)$ に代入すると

$$S=1+\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{1+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^3}{16}}$$

■

1.5　2019 年 (120 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5]

[1] p を負の実数とする．座標空間に原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2, -2,\ 1)$，$\mathrm{P}(p, -1,\ 2)$ があり，3 点 O，A，B が定める平面を α とする．また，点 P から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする．

(1) 点 Q の座標を p を用いて表せ．

(2) 点 Q が $\triangle\mathrm{OAB}$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ．

[2] n を自然数とし，$a_n = n(n+1)$ とする．さらに，a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする．

(1) d_n は偶数であることを示せ．

(2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ．

(3) p を 5 以上の素数とするとき，d_n は p で割り切れないことを示せ．

(4) $d_n \leqq 12$ を示せ．また，$d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ．

[3] t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．0，$\dfrac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える．

(1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ．

(2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α，極小値を与える x の値を β とし，座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ をとる．t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ．

[4] n を 3 以上の自然数とする．2 つの箱 X と Y があり，どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている．

A と B の 2 人のうち，A は箱 X から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を得点とする．B は箱 Y から札を 1 枚取り出し，もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし，もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば，その札を箱 Y に戻し，再び箱 Y から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を B の得点とする．

(1) m を n 以下の自然数とする．B の得点が m になる確率を求めよ．

(2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ．

5 $f(x)$ を区間 $[0,\ \pi]$ で連続な関数とする．関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$
$$f_{n+1}(x) = 2\cos x + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(x-t)\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．さらに，自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin t\,dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt$$

とおく．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $c_n = a_n - 1$ とおく．このとき，$c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し，一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ．

(3) a_n，b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 2,\ 0)$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,-2,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(2,\ 1,-2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\vec{n}$ とすると ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は実数)

$$\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

したがって $\begin{cases} -\alpha+2\beta+2\gamma=p \\ 2\alpha-2\beta+\gamma=-1 \\ \beta-2\gamma=2 \end{cases}$

これを解いて $\alpha=\dfrac{p+2}{3},\quad \beta=\dfrac{4(p+2)}{9},\quad \gamma=\dfrac{2p-5}{9}\quad\cdots(*)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{p+2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{4(p+2)}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{p+2}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

よって $\mathbf{Q}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}(\boldsymbol{p}+\mathbf{2}),\,-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}(\boldsymbol{p}+\mathbf{2}),\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}(\boldsymbol{p}+\mathbf{2})\right)$

(2) $(*)$ より $\alpha+\beta=\dfrac{7(p+2)}{9}$

条件を満たすとき，$\alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta\leqq 1$ であるから

$$\frac{p+2}{3}\geqq 0,\quad \frac{4(p+2)}{9}\geqq 0,\quad \frac{7(p+2)}{9}\leqq 1$$

これを解いて $\mathbf{-2}\leqq\boldsymbol{p}\leqq-\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$

補足 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}$ で表す[3]．■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_n = n(n+1)$，$a_{n+3} = (n+3)(n+4)$ はともに連続する2数の積であるから，ともに2で割り切れる．よって，d_n は偶数である．

(2) 2つの整数 a と b の最大公約数を $\gcd(a,\ b)$ と表すことにする．
a_n と a_{n+3} の最大公約数 d_n は，ユークリッドの互除法により

$$\begin{aligned} d_n = \gcd(a_n,\ a_{n+3}) &= \gcd(n^2+n,\ n^2+7n+12) \\ &= \gcd(n(n+1),\ 2{\cdot}3(n+2)) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

d_n が8で割り切れると仮定すると，$n+2$ は4で割り切れるから

$$n+2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -2,\ n+1 \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ 4)$$

$n(n+1) \equiv 2 \pmod 4$ であるから，$(*)$ より，d_n は8で割り切れない．

(3) d_n が5以上の素数 p で割り切れると仮定すると，同様にして

$$n+2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -2,\ n+1 \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$n(n+1) \equiv 2 \pmod p$ であるから，$(*)$ より，d_n は p で割り切れない．

(4) d_n が9で割り切れると仮定すると，$n+2$ は3で割り切れるから

$$n+2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -2,\ n+1 \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ 3)$$

$n(n+1) \equiv 2 \pmod 3$ であるから，$(*)$ より，d_n は9で割り切れない．
これと (2)，(3) の結果から　$d_n \leqq 3{\cdot}4$　よって　$n \leqq 12$

$d_n = 12$ となるとき，$(*)$ より，$n+2$ が偶数，すなわち，n は偶数であるから，$n = 12$ のとき，$n(n+1)$ は12で割り切れる．
よって，$d_n = 12$ を満たす n の一つは　$\boldsymbol{n = 12}$

補足 n は偶数であるから，$n+1$ は奇数である．$n(n+1)$ が12で割り切れるとき，n は4の倍数であるから，$n = 4k$ とおくと (k は自然数)

$$n(n+1) = 4k(4k+1)$$

このとき　$4k \equiv 0$　または　$4k+1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 3)$
すなわち　$k \equiv 0$　または　$k+1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 3)$
一般に　$n = 4k \quad (k \equiv 0, 2 \mod 3)$ ■

$\boxed{3}$ (1) $f(x) = \dfrac{x+t}{x(1-tx)}$ より

$$f'(x) = \frac{1\cdot x(1-tx) - (x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2} = \frac{t(x^2+2tx-1)}{x^2(1-tx)^2}$$

$g(x) = x^2 + 2tx - 1$ とおくと

$$g(0) = -1 < 0, \quad g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} + 1 > 0$$

2 次方程式 $g(x) = 0$ は，0, $\dfrac{1}{t}$ でない異なる 2 つの実数解をもつ．
これらの解を x_1, x_2 とすると $(x_1 < x_2)$

$$f'(x) = \frac{t(x-x_1)(x-x_2)}{x^2(1-tx)^2} \qquad \left(x_1 < 0 < x_2 < \frac{1}{t}\right)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	x_2	$\cdots$	$(\frac{1}{t})$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

よって，$f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつ．

(2) (1) の結果から，$\alpha = x_1$，$\beta = x_2$ である．
$g(\alpha) = \alpha^2 + 2t\alpha - 1 = 0$ であるから，$1 - t\alpha = \alpha(\alpha + t)$ より

$$f(\alpha) = \frac{\alpha+t}{\alpha(1-t\alpha)} = \frac{\alpha+t}{\alpha\cdot\alpha(\alpha+t)} = \frac{1}{\alpha^2} \quad 同様に \quad f(\beta) = \frac{1}{\beta^2}$$

2 次方程式 $g(x) = 0$ の解が α, β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2t, \quad \alpha\beta = -1 \quad \cdots(*)$$

$\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ の中点 M の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(*)$ により

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{-2t}{2} = -t,$$
$$y = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{2(\alpha\beta)^2} = 2t^2 + 1$$

$0 < t < 1$ に注意して，上の 2 式から t を消去すると

放物線　$\boldsymbol{y = 2x^2 + 1 \quad (-1 < x < 0)}$

■

$\boxed{4}$ (1) 求めるBの得点が m である確率を q_m とする．

(i) $m \leqq 2$ のとき，Bは1回目に1または2の番号札，2回目に m の番号札を取り出すから，その確率は

$$q_m = \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}$$

(ii) $m > 2$ のとき，Bは1回目に m の番号札を取り出すか，1回目に1または2の番号札，2回目に m の番号札を取り出す確率であるから

$$q_m = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n+2}{n^2}$$

(i),(ii) より，求める確率は $\boldsymbol{q_m = \begin{cases} \dfrac{2}{n^2} & (m=1,\ 2) \\ \dfrac{n+2}{n^2} & (m=3, 4, \cdots, n) \end{cases}}$

(2) Aの得点が m より小さい確率は $\dfrac{m-1}{n}$

したがって，求める確率 p_n は

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{m=2}^{n} \frac{m-1}{n} q_m = \frac{2-1}{n} q_2 + \sum_{m=3}^{n} \frac{m-1}{n} q_m \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n^2} + \sum_{m=3}^{n} \frac{m-1}{n} \times \frac{n+2}{n^2} \\ &= \frac{2}{n^3} + \frac{n+2}{n^3} \sum_{m=3}^{n} (m-1) \\ &= \frac{2}{n^3} + \frac{n+2}{n^3} \times \frac{1}{2}(n-2)\{2+(n-1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{n^2+n-4}{2n^2}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $f_{n+1}(x) = 2\cos x + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\sin(x-t)\,dt$ および

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin t\,dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\cos t\,dt$$

により

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= 2\cos x + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin(x-t)\,dt \\
&= 2\cos x + \frac{2\sin x}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\cos t\,dt - \frac{2\cos x}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin t\,dt \\
&= b_n\sin x + (2-a_n)\cos x \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

ここで，次の 3 式を計算する．

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\
&\int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\
&\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt = \int_0^\pi \sin t(\sin t)'\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_{n+1}(t)\sin t\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \{b_n\sin t + (2-a_n)\cos t\}\sin t\,dt \\
&= \frac{2b_n}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t\,dt + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt \\
&= \frac{2b_n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\cdot 0 = \boldsymbol{b_n}, \\
b_{n+1} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_{n+1}(t)\cos t\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \{b_n\sin t + (2-a_n)\cos t\}\cos t\,dt \\
&= \frac{2b_n}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{2b_n}{\pi}\cdot 0 + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{2-a_n}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$a_{n+2} = b_{n+1},\quad b_{n+1} = 2 - a_n$

上の2式から　$a_{n+2} = 2 - a_n$　ゆえに　$a_{n+2} - 1 = -(a_n - 1)$

$c_n = a_n - 1$ より　$c_{n+2} = -c_n$

$c_1 = a_1 - 1,\ c_2 = a_2 - 1 = b_1 - 1$ であるから

n が奇数のとき　$c_n = c_1 \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} = (a_1 - 1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}$

n が偶数のとき　$c_n = c_2 \cdot (-1)^{\frac{n-2}{2}} = (b_1 - 1) \cdot (-1)^{\frac{n-2}{2}}$

よって　$$\boldsymbol{c_n = \begin{cases} (a_1 - 1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ が奇数}) \\ (b_1 - 1) \cdot (-1)^{\frac{n-2}{2}} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}}$$

(3) a_n，b_n が n によらない定数となるとき，(2) の結果から

$$a_1 = b_1 = 1 \quad \text{すなわち} \quad a_n = b_n = 1$$

このとき，$(*)$ より，$f_{n+1}(x) = \sin x + \cos x$ は n に因らないから

$$\boldsymbol{f(x) = \sin x + \cos x}$$

別解 $f(x) = px + q$ とし，$\displaystyle\int_0^\pi f(t) \sin t\, dt = \int_0^\pi f(t) \cos t\, dt = \frac{\pi}{2}$ を満たす p，q を求める．

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (pt+q) \sin t\, dt &= \Big[-(pt+q) \cos t + p \sin t \Big]_0^\pi \\ &= p\pi + 2q = \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^\pi (pt+q) \cos t\, dt &= \Big[(pt+q) \sin + p \cos t \Big]_0^\pi \\ &= -2p = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

上の2式から　$p = -\dfrac{\pi}{4},\ q = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi^2}{8}$　よって　$f(x) = -\dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi^2}{8}$

■

1.6　2020 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 三角形 ABC について

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{6}$$

が成立しているとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とし，直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つような実数 s，t を求めよ．

(3) 直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ．

2 座標平面上 2 点 $\left(\dfrac{1}{16},\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{1}{9}\right)$ を通る直線 ℓ を考える．

(1) ℓ 上にある格子点の座標をすべて求めよ．ただし，格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである．

(2) ℓ 上の格子点のうち，原点との距離が最小となる点を A とする．また，ℓ 上の A 以外の格子点のうち，原点との距離が最小となる点を B とする．さらに，A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする．三角形 ABC の内部および周上にある格子点の個数を求めよ．

3 n を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ．

(2) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ．

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ．

4 α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし，$f(x) = \sin \dfrac{\pi x}{2}$ とする．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定義されるとき，次の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して，$0 < a_n < 1$ かつ $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくとき，すべての自然数 n に対して，$b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

5 a を正の整数とする．微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする．

$$0 < f(x) < 1, \quad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1 - f(t)\}f(t)}\,dt = ax$$

さらに，$f(0) = \dfrac{1}{3}$ であるとする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．さらに，$\displaystyle\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ．

解答例

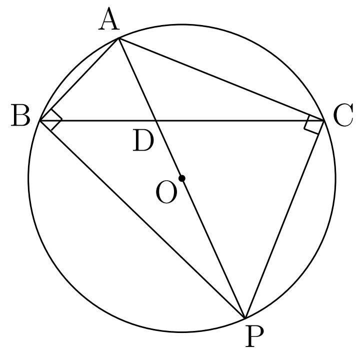
1 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ の両辺を平方すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{6}$ より

$$4-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+1=6 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

AP は △ABC の外接円の直径であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\{(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}=(s-1)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(s-1)\cdot1+t\left(-\frac{1}{2}\right)=s-\frac{1}{2}t-1=0 \quad \cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\{s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(t-1)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\\&=s\left(-\frac{1}{2}\right)+(t-1)\cdot4=-\frac{1}{2}s+4t-4=0 \quad \cdots②\end{aligned}$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{s=\frac{8}{5},\ t=\frac{6}{5}}$

別解 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．$|\vec{b}|^2\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}$ は，$\vec{b}$ と垂直である．

$$|\vec{b}|^2\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}=\vec{c}-\left(-\frac{1}{2}\right)\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{b}+2\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=k(\vec{b}+2\vec{c})$ とおけるから (k は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(k+1)\vec{b}+2k\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(k+1)\vec{b}+(2k-1)\vec{c}$ は，$\vec{c}$ と垂直であるから

$$(k+1)\vec{b}\cdot\vec{c}+(2k-1)|\vec{c}|^2=-\frac{1}{2}(k+1)+4(2k-1)=0$$

これを解いて　$k=\frac{3}{5}$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) (2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{14}{5}\cdot\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$$

D は直線 BC 上の点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$

$$\begin{aligned}|4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 &= 16|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 24\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 9|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\ &= 16\cdot 1 + 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 9\cdot 4 = 40\end{aligned}$$

ゆえに　$|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2\sqrt{10}$　よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \dfrac{|4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}{7} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{10}}{7}}$ ■

2 (1) 直線 ℓ の方程式は　$16x + 9y = 1$　ゆえに　$16(x-4) = -9(y+7)$

16 と 9 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$\begin{cases} x - 4 = 9k \\ y + 7 = -16k \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 9k + 4} \\ \boldsymbol{y = -16k - 7} \end{cases} \quad \textbf{(}\boldsymbol{k}\ \textbf{は整数)}$$

別解 $16 \equiv 7,\ 9 \equiv 0 \pmod 9$ であるから，$16x + 9y = 1$ について

$$7x \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4\cdot 7x \equiv 4\cdot 1 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv 4 \pmod 9$$

$x = 9k + 4$ とおけるから (k は整数)

$$16(9k+4) + 9y = 1 \quad \text{よって} \quad y = -16k - 7$$

(2) (1) の結果から，ℓ 上の格子点を $\mathrm{P}(9k+4, -16k-7)$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (9k+4)^2 + (-16k-7)^2 \\ &= 337k^2 + 296k + 65 \\ &= 337\left(k + \frac{148}{337}\right)^2 - \frac{148^2}{337} + 65\end{aligned}$$

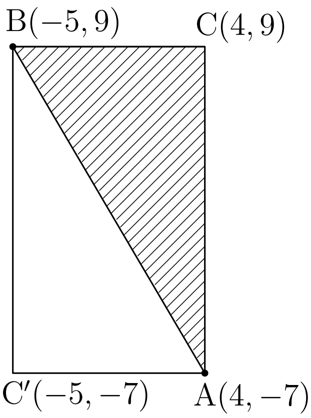
$-\dfrac{1}{2} < -\dfrac{148}{337} < 0$ であるから，原点 O との距離より，$k=0$，$k=-1$ にそれぞれ対応する点が A，B である．

$$\mathrm{A}(4,-7),\quad \mathrm{B}(-5,\ 9)$$

これから　　$\mathrm{C}(4,\ 9)$

ここで，点 $\mathrm{C}'(-5,-7)$ をとると，四角形 ACBC' の内部と周上にある格子点の個数は

$$\{4-(-5)+1\}\{9-(-7)+1\} = 170\ (\text{個})$$



$\triangle\mathrm{ABC}$ の内部と周上ある格子点の個数を n とすると，$\triangle\mathrm{ABC}'$ の内部と周上ある格子点の個数も n である．2 点 A，B はこれら 2 つの領域で共有する点であるから

$$2(n-2)+2 = 170 \quad \text{これを解いて} \quad n = \mathbf{86}\ (\text{個})$$

定理　m と n は互いに素である正の整数とするとき，次式が成り立つ[4]．

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数とする．

別解　求める個数は，$\triangle\mathrm{ABC}'$ の内部と周上ある格子点の個数と等しいから，

$-5 \leqq x \leqq 4$，$\ell : y = \dfrac{-16x+1}{9}$ および直線 $y=-7$ により

$$\begin{aligned}\sum_{x=-5}^{4}\left(\left[\frac{-16x+1}{9}\right]-(-7)+1\right) &= \sum_{x=-5}^{4}\left[\frac{16(4-x)}{9}\right]+10 \\ &= \sum_{k=0}^{9}\left[\frac{16k}{9}\right]+10 = \sum_{k=1}^{8}\left[\frac{16k}{9}\right]+26 \\ &= \frac{1}{2}(16-1)(9-1)+26 = 86\end{aligned}$$

■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.16-17)

3 (1) 出る目が $\{3,\ 6\}$ である確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \dfrac{2^n}{6^n}$

出る目が $\{6\}$ である確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{1}{6^n}$

3 または 6 である確率からすべて 6 である確率を引けばよいから

$$\frac{2^n}{6^n} - \frac{1}{6^n} = \boldsymbol{\frac{2^n - 1}{6^n}}$$

(2) 最大公約数が偶数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^n = \dfrac{3^n}{6^n}$

最大公約数が 3 である確率は $\dfrac{2^n - 1}{6^n}$

最大公約数が 5 である確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{1}{6^n}$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n - 1}{6^n} + \frac{1}{6^n}\right) = \boldsymbol{\frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n}}$$

(3) 出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ である事象を W，出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ で少なくとも 1 回 4 の目が出る事象を A，出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ で少なくとも 1 回 5 の目が出る事象を B とすると，求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(W) - P(\overline{A \cap B}) = P(W) - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= P(W) - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\} \\ &= P(W) - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

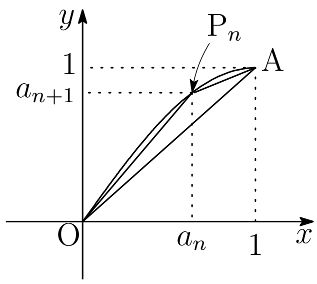
$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A} \cap \overline{B}$ は，それぞれ，出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ のうち，4 が出ない，5 が出ない，4 と 5 が出ない事象であるから

$$P(W) = \left(\frac{4}{6}\right)^n, \quad P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{2}{6}\right)^n$$

よって　$P(A \cap B) = \left(\dfrac{4}{6}\right)^n - \left(\dfrac{3}{6}\right)^n - \left(\dfrac{3}{6}\right)^n + \left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \boldsymbol{\dfrac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}}$

■

$\boxed{4}$ (1) 上に凸である曲線 $y = f(x)$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_n(a_n,\ a_{n+1})$ をとると $(0 < a_n < 1)$，直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ の傾きは正で直線 OA の傾き 1 よりも小さいから



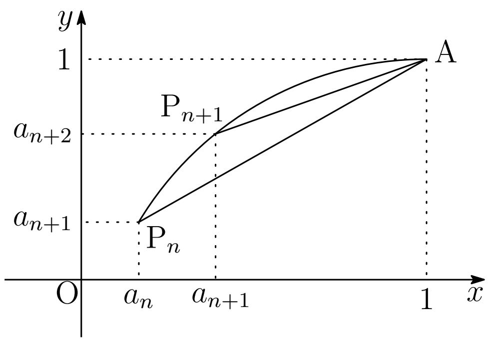
$$0 < \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} < 1$$

したがって　　$a_n < a_{n+1} < 1$

$\{a_n\}$ は単調増加列で，$a_1 = \alpha > 0$ であるから，すべての自然数 n ついて

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1$$

(2) (1) の結果より直線 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{A}$ の傾きは直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ の傾きより小さいから



$$\frac{1 - a_{n+2}}{1 - a_{n+1}} < \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$$

よって　　$b_{n+1} < b_n$

(3) (2) の結果から　$b_n < b_{n-1} < \cdots < b_2 < b_1 < 1 \quad (n > 2)$

$$\prod_{k=1}^{n-1} b_k < \prod_{k=1}^{n-1} b_1 \quad \text{ゆえに} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - a_{k+1}}{1 - a_k} < \prod_{k=1}^{n-1} b_1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1 - a_n}{1 - a_1} < {b_1}^{n-1}$$

$0 < \dfrac{1 - a_n}{1 - a_1} < {b_1}^{n-1}$ において，$0 < b_1 < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} {b_1}^{n-1} = 0$$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1 - a_n) = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{1}$

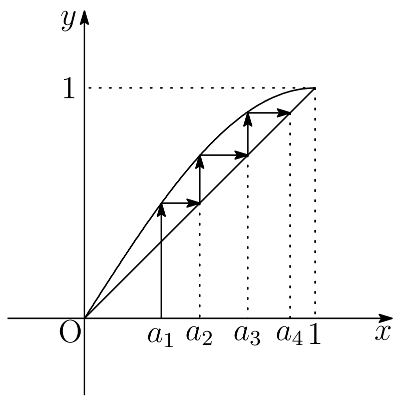
$f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ より，$f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}$　ゆえに　$f'(1) = 0$

$b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} = \dfrac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}$ および上の諸式から

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \mathbf{0}$$

解説　上に凸である曲線 $y=f(x)$ および直線 $y=x$ により，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列であることが分かる．また，その極限は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$



5　(1) $0<f(x)<1$，$f(0)=\dfrac{1}{3}$，$\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt = ax$ より

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt &= \int_0^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)} - \frac{f'(t)}{f(t)-1}\right)dt = \left[\ \log\frac{f(t)}{1-f(t)}\ \right]_0^x \\ &= \log\frac{f(x)}{1-f(x)} - \log\frac{f(0)}{1-f(0)} = \log\frac{2f(x)}{1-f(x)}\end{aligned}$$

したがって　$\log\dfrac{2(x)}{1-f(x)} = ax$　ゆえに　$\dfrac{2f(x)}{1-f(x)} = e^{ax}$

よって　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{e^{ax}}{e^{ax}+2}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2} \\ &= \left[\ \frac{1}{a}\log(e^{ax}+2)\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{a}\log\frac{e^a+2}{3}}\end{aligned}$$

$g(a)=\log\dfrac{e^a+2}{3}$ とおくと，$g'(a)=\dfrac{e^a}{e^a+2}$，$g(0)=0$，$g'(0)=\dfrac{1}{3}$ により

$$\lim_{a\to 0} S(a) = \lim_{a\to 0}\frac{g(a)-g(0)}{a} = g'(0) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

1.7　2021 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 三角形 OAB において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を D とし，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする．

(1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 三角形 BDE の面積が $\dfrac{5}{9}$ になるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ．

2 a を $a\neq -3$ を満たす定数とする．放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1，点 $\mathrm{B}\left(a+2,\ \dfrac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 の交点を C とおく．

(1) C の座標を a を用いて表せ．

(2) a が $a>0$ を満たしながら動くとき，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最小となるときの a の値を求めよ．ただし，$|\mathrm{AB}|$ および $|\mathrm{BC}|$ はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す．

3 正の実数 x，y が，方程式

$$\frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}\quad\cdots(\bigstar)$$

を満たすとする．

(1) y^2 を x を用いて表せ．

(2) 正の実数 x，y が $(\bigstar)$ および $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき，

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$$

の最大値を求めよ．

$\boxed{4}$ $a_1 = 2$，$b_1 = 1$ および

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．$c_n = a_n b_n$ とおく．

(1) c_2 を求めよ．

(2) c_n は偶数であることを示せ．

(3) n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れることを示せ．

$\boxed{5}$ 座標平面上で，媒介変数 θ を用いて

$$x = (1 + \cos\theta)\cos\theta, \quad y = \sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

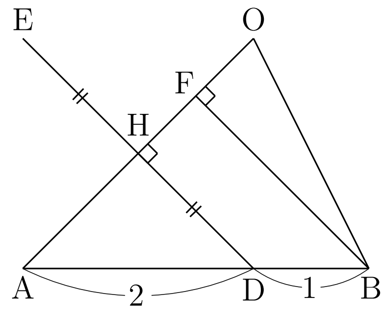
と表される曲線 C がある．C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし，A の x 座標の値を a とおく．B を点 $(a,\ 0)$，O を原点 $(0,\ 0)$ とする．

(1) a を求めよ．

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \dfrac{6}{4^2}\vec{a} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}\vec{a}}$



(2) 点 D は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$$

点 D から直線 OA に垂線 DH を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}}{3|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2\cdot 6}{4^2}\right)\vec{a} = \frac{7}{12}\vec{a}$$

H は線分 DE の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\cdot\frac{7}{12}\vec{a} - \frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b}) = \boldsymbol{\frac{5\vec{a}-4\vec{b}}{6}}$$

(3) $\triangle\mathrm{BDE} = \triangle\mathrm{DEF} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DE}}||\overrightarrow{\mathrm{FH}}| = \dfrac{5}{9} \cdots ①$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{5\vec{a}-4\vec{b}}{6} - \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{FH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{7}{12}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{a} = \frac{5}{24}\vec{a}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 = \left|\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 4^2 - \frac{4}{3}\cdot 6 + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2 = \frac{16}{9}|\vec{b}|^2 - 4 \quad \cdots ②$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{FH}}| = \frac{5}{24}|\vec{a}| = \frac{5}{24}\cdot 4 = \frac{5}{6} \quad \cdots ③$$

①, ③ より　$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|\cdot\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{9}$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| = \dfrac{4}{3}$

これを ② に代入すると　$\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}|\vec{b}|^2 - 4$

したがって　$|\vec{b}|^2 = \dfrac{13}{4}$　よって　$\boldsymbol{|\vec{b}| = \dfrac{\sqrt{13}}{2}}$ ■

2 (1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ とおくと　$f'(x)=x$

放物線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ f(-1))$，$\mathrm{B}(a+2,\ f(a+2))$ における接線が，それぞれ ℓ_1，ℓ_2 であるから

$$\ell_1 : y-\frac{1}{2}=-(x+1)$$
$$\ell_2 : y-\frac{1}{2}(a+2)^2=(a+2)(x-a-2)$$

すなわち　$\ell_1 : y=-x-\dfrac{1}{2}$　$\ell_2 : y=(a+2)x-\dfrac{1}{2}(a+2)^2$

l_1，ℓ_2 の方程式から y を消去すると　$(a+3)x=\dfrac{1}{2}(a+1)(a+3)$

$a+3\neq 0$ であるから　　$x=\dfrac{1}{2}(a+1)$

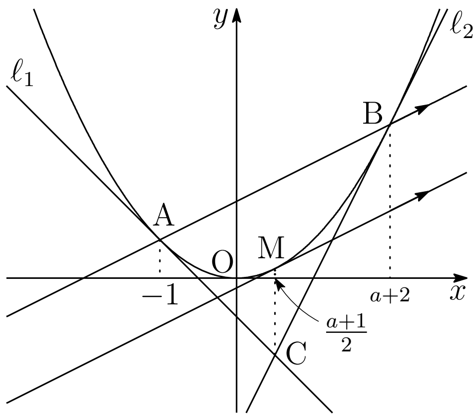
これを ℓ_1 の方程式に代入すると　$\boldsymbol{\mathrm{C}\left(\dfrac{a+1}{2},-\dfrac{a+2}{2}\right)}$

(2) 直線 AB の傾きは

$$\frac{f(a+2)-f(-1)}{(a+2)-(-1)}=\frac{a+1}{2}$$

直線 BC の傾きは

$$f'(a+2)=a+2$$



C の x 座標は A と B の x 座標の中央であるから，$2d=(a+2)-(-1)$ とおくと

$$|\mathrm{AB}|=2d\sqrt{1+\left(\frac{a+1}{2}\right)^2}=d\sqrt{4+(a+1)^2},\quad |\mathrm{BC}|=d\sqrt{1+(a+2)^2}$$

したがって　$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{\dfrac{4+(a+1)^2}{1+(a+2)^2}}=\sqrt{1-\dfrac{2a}{a^2+4a+5}}$

$a>0$ より　$\dfrac{2a}{a^2+4a+5}=\dfrac{2}{4+a+\frac{5}{a}}\leqq\dfrac{2}{4+2\sqrt{a\cdot\frac{5}{a}}}=\sqrt{5}-2$

$$\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}\geqq\sqrt{1-(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

上式で等号が成立するとき　$a=\dfrac{5}{a}$　すなわち　$\boldsymbol{a=\sqrt{5}}$

補足 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について，p を極として展開すると [5]

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+a(x-p)^2$$

$f'(p)=0$ を満たす p をとると

$$f(x)=a(x-p)^2+f(p)$$

このとき，点 $(p,\ f(p))$ は放物線 $y=f(x)$ の頂点である．
また，異なる 2 つの実数 $\alpha,\ \beta$ を極として $f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+a(x-\alpha)^2$$
$$f(x)=f(\beta)+f'(\beta)(x-\beta)+a(x-\beta)^2$$

ここで，2 つの 1 次関数

$$g(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha),\quad h(x)=f(\beta)+f'(\beta)(x-\beta)$$

を考えると

$$f(x)=g(x)+a(x-\alpha)^2,\quad f(x)=h(x)+a(x-\beta)^2 \qquad (*)$$

2 式の辺々の差をとることにより

$$g(x)-h(x)+a(\beta-\alpha)(2x-\alpha-\beta)=0$$

このとき，$y=g(x)$，$y=h(x)$ は，それぞれ $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ における接線で，これらの交点の x 座標は $(\alpha\neq\beta)$

$$a(\beta-\alpha)(2x-\alpha-\beta)=0 \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$m=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ より

$$f'(m)=a(\alpha+\beta)+b$$

また，直線 AB の傾きは

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=a(\alpha+\beta)+b$$

直線 AB の傾きは，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{M}(m,\ f(m))$ における接線の傾きと等しい．

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

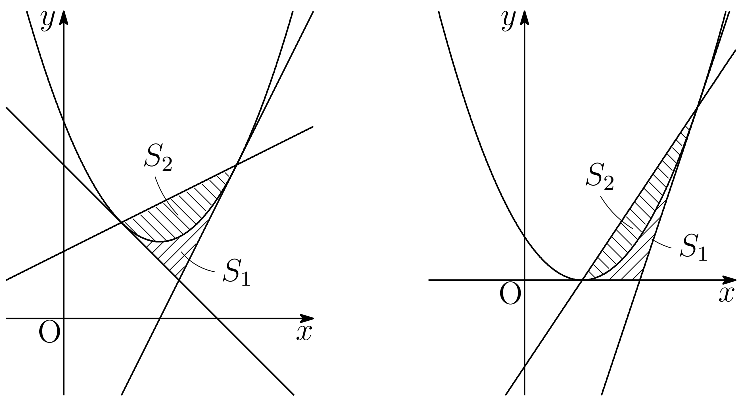
$a > 0$ のとき，放物線 $y = f(x)$ とその2接線 $y = g(x)$，$y = h(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，$(*)$ より

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{f(x) - h(x)\}\,dx \\ &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} a(x-\alpha)^2\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} a(x-\beta)^2\,dx \\ &= \left[\,\frac{a}{3}(x-\alpha)^3\,\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left[\,\frac{a}{3}(x-\beta)^3\,\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\ &= \frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

また直線 AB と放物線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，これらの共有点の x 座標が α，β であるから

$$S_2 = -\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

よって　　$S_2 = 2S_1$



3 (1) (★) より $(3^{4x})^2 - 2\cdot 3^{4x}\cdot 3^{y^2+1} + (3^{y^2+1})^2 = 0$

$$(3^{4x} - 3^{y^2+1})^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3^{4x} = 3^{y^2+1}$$

したがって $4x = y^2 + 1$ よって $\boldsymbol{y^2 = 4x - 1}$

(2) $$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4} = \log_4\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \log_4\left(1 - \frac{x}{y}\right) = \log_4\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)$$

(1) の結果から，$x = \dfrac{y^2+1}{4} \cdots①$ であるから

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{y^2} &= 1 - \frac{1}{16y^2}(y^2+1)^2 = \frac{1}{16}\left(14 - y^2 - \frac{1}{y^2}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left\{12 - \left(y - \frac{1}{y}\right)^2\right\} \leqq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

上式で等号が成立するとき，$y > 0$ および ① から $y = 1,\ x = \dfrac{1}{2}$

このとき $1 - \dfrac{x}{y} > 0$ を満たすから，求める最大値は $\boldsymbol{\log_4 \dfrac{3}{4}}$ ■

4　(1) $a_1 = 2$，$b_1 = 1$ および

$$(*) \quad a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$c_n = a_nb_n$ であるから

$$a_2 = 2a_1 + 3b_1 = 2{\cdot}2 + 3{\cdot}1 = 7, \quad b_2 = a_1 + 2b_1 = 2 + 2{\cdot}1 = 4$$

したがって　$c_2 = a_2b_2 = 7{\cdot}4 = \mathbf{28}$

(2) a_1，b_1 は整数，漸化式 $(*)$ より，a_n，b_n は整数であるから

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \equiv b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \equiv a_n \pmod{2}$$

したがって　$c_{n+1} = a_{n+1}b_{n+1} \equiv b_na_n = c_n \pmod{2}$

$c_1 = a_1b_1 = 2{\cdot}1 = 2$ であるから，上式より　$c_n \equiv 0 \pmod{2}$

(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} + 3b_{n+1} \\ &= 2(2a_n + 3b_n) + 3(a_n + 2b_n) \\ &= 7a_n + 12b_n, \\ b_{n+2} &= a_{n+1} + 2b_{n+1} \\ &= 2a_n + 3b_n + 2(a_n + 2b_n) \\ &= 4a_n + 7b_n \end{aligned}$$

法4について　$a_{n+2} \equiv -a_n, \quad b_{n+2} \equiv -b_n \pmod{4}$
したがって　$c_{n+2} = a_{n+2}b_{n+2} \equiv a_nb_n = c_n \pmod{4}$

法7について　$a_{n+2} \equiv 5b_n, \quad b_{n+2} \equiv 4a_n \pmod{7}$
したがって　$c_{n+2} = a_{n+2}b_{n+2} \equiv 20a_nb_n \equiv -a_nb_n = -c_n \pmod{7}$

$c_2 = 28$ より　$c_2 \equiv 0 \pmod{4}$，$c_2 \equiv 0 \pmod{7}$

よって，n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れる．　■

5 (1) $x=(1+\cos\theta)\cos\theta$ より　$x=\left(\cos\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

したがって，x の最小値は $-\dfrac{1}{4}$　よって　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{4}}$

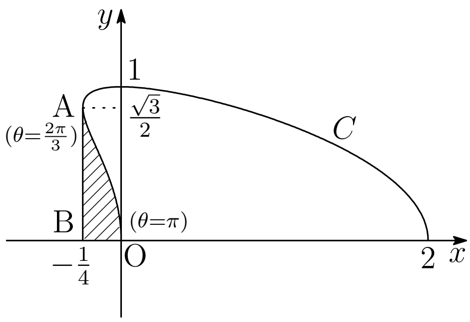
(2) (1) の結果から　$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$　ゆえに　$\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y=\sin\theta$ より $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta), & \frac{dy}{d\theta}=\cos\theta\\ &=-\sin\theta\,(2\cos\theta+1)\end{aligned}$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta}\right)$		$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	
(x,y)	$(2,0)$	$\cdots$	$(0,1)$	$\cdots$	$\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cdots$	$(0,0)$

求める面積は，下の図の斜線部分である．



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}y\,dx=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}y\frac{dx}{d\theta}d\theta\\ &=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\sin\theta(-\sin\theta)\,(2\cos\theta+1)\,d\theta\\ &=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(-2\sin^2\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\right)d\theta\\ &=\left[-\frac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta-\frac{\theta}{2}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

■

1.8　2022 年 (120 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5]

1 $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたす $a,\ b$ に対し，関数

$$f(x) = |x(x-1)| + |(x-a)(x-b)|$$

を考える．x が実数の範囲を動くとき，$f(x)$ は最小値 m をもつとする．

(1) $x < 0$ および $x > 1$ では $f(x) > m$ となることを示せ．

(2) $m = f(0)$ または $m = f(1)$ であることを示せ．

(3) $a,\ b$ が $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたして動くとき，m の最大値を求めよ．

2 a は $a \neq 1$ をみたす正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n, \cdots$ および $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_n, \cdots$ が，すべての自然数 n について

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}} = \left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする．また，P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．

(1) x_{n+2} を $a,\ x_n,\ x_{n+1}$ で表せ．

(2) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $y_1 = \dfrac{a}{(1-a)^2},\ y_2 - y_1 = 1$ のとき，数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ．

3 以下の問いに答えよ．

(1) 連立不等式 $x \geqq 2,\ 2^x \leqq x^y \leqq x^2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ．ただし，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい．

(2) $a > 0$ に対して，連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6,\ (x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ の表す xy 平面上の領域の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ アルファベットの A と書かれた玉が 1 個，D と書かれた玉が 1 個，H と書かれた玉が 1 個，I と書かれた玉が 1 個，K と書かれた玉が 2 個，O と書かれた玉が 2 個ある．これら 8 個の玉を円形に並べる．

(1) 時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率を求めよ．

(2) 隣り合う子音が存在する確率を求めよ．ここで子音とは，D，H，K の 3 文字 (玉は 4 個) のことである．

(3) 隣り合う子音が存在するとき，それが KK だけである条件つき確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 複素数 z に関する次の 2 つの方程式を考える．ただし，$\overline{z}$ を z と共役な複素数とし，i を虚数単位とする．

$$z\overline{z} = 4 \quad \cdots ① \qquad\qquad |z| = |z - \sqrt{3} + i| \quad \cdots ②$$

(1) ①，② のそれぞれの方程式について，その解 z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) ①，② の共通解となる複素数をすべて求めよ．

(3) (2) で求めたすべての複素数の積を w とおく．このとき，w^n が負の実数となるための整数 n の必要十分条件を求めよ．

解答例

1 (1) $x<0,\ 1<x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1)+(x-a)(x-b) = 2x^2-(a+b+1)x+ab \\ &= 2\left(x-\frac{a+b+1}{4}\right)^2 + f\left(\frac{a+b+1}{4}\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ より $\dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{a+b+1}{4} \leqq \dfrac{3}{4}$ であるから

$$\begin{aligned} &x<0 \text{ では } && f(x) > f(0) \geqq m, \\ &1<x \text{ では } && f(x) > f(1) \geqq m \end{aligned}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2-(a+b+1)x+ab & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ (1-a-b)x+ab & (0 \leqq x \leqq a,\ b \leqq x \leqq 1) \\ -2x^2+(a+b+1)x-ab & (a \leqq x \leqq b) \end{cases}$$

(1) の結果から，最小値は $0 \leqq x \leqq 1$ の区間でとる．関数の増減から

$$m = \min\{f(0),\ f(a),\ f(b),\ f(1)\}$$

である．これらの値は

$$\begin{aligned} &f(0) = ab, && f(a) = a(1-a), \\ &f(b) = b(1-b), && f(1) = (1-a)(1-b) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} &f(a)-f(0) = a(1-a-b), && f(b)-f(0) = b(1-a-b), \\ &f(a)-f(1) = (1-a)(a+b-1), && f(b)-f(1) = (1-b)(a+b-1) \end{aligned}$$

(i) $a+b-1 \geqq 0$ のとき

$$f(0) \geqq f(a) \geqq f(1), \quad f(0) \geqq f(b) \geqq f(1) \quad \text{ゆえに} \quad m = f(1)$$

(ii) $a+b-1 \leqq 0$ のとき

$$f(1) \geqq f(a) \geqq f(0), \quad f(1) \geqq f(b) \geqq f(0) \quad \text{ゆえに} \quad m = f(0)$$

(i)，(ii) より　　$m = f(0)$ または $m = f(1)$

(3) (2) の結果から

(i) $a+b-1 \geqq 0$ のとき $(1-b \leqq a)$

$$m = f(1) = (1-a)(1-b) \leqq (1-a)a = -\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

したがって，$m \leqq \dfrac{1}{4}$ が成立し，等号が成立するとき

$$1-b = a,\ a = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad a = b = \frac{1}{2}$$

(ii) $a+b-1 \leqq 0$ のとき $(a \leqq 1-b)$

$$m = f(0) = ab \leqq (1-b)b = -\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

したがって，$m \leqq \dfrac{1}{4}$ が成立し，等号が成立するとき

$$a = 1-b,\ b = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad a = b = \frac{1}{2}$$

(i)，(ii) より　$a = b = \dfrac{1}{2}$ のとき，m は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる． ■

2 (1) $\vec{p}_n = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$，$\vec{q}_n = \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ とおくと，与えられた漸化式から

$$\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_n = (1-a)(\vec{q}_n - \vec{p}_n), \qquad \vec{q}_{n+1} - \vec{q}_n = \left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right) \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から

$$\vec{p}_{n+1} - a\vec{p}_n = (1-a)\vec{q}_n, \quad \vec{p}_{n+2} - a\vec{p}_{n+1} = (1-a)\vec{q}_{n+1}$$

上の第 2 式から第 1 式の辺々の差をとると

$$\vec{p}_{n+2} - (a+1)\vec{p}_{n+1} + a\vec{p}_n = (1-a)(\vec{q}_{n+1} - \vec{q}_n) = (0,\ a^{-n})$$

$\vec{p}_n = (x_n,\ y_n)$ であるから

$$(x_{n+2},\ y_{n+2}) - (a+1)(x_{n+1},\ y_{n+1}) + a(x_n,\ y_n) = (0,\ a^{-n}) \qquad (**)$$

$(**)$ の x 成分から

$$x_{n+2} - (a+1)x_{n+1} + ax_n = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x_{n+2} = (a+1)x_{n+1} - ax_n}$$

(2) (1) の結果から

$$x_{n+2}-x_{n+1}=a(x_{n+1}-x_n),\quad x_{n+2}-ax_{n+1}=x_{n+1}-ax_n$$

それぞれの式から $(x_1=0,\ x_2=1)$

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n&=(x_2-x_1)a^{n-1}=a^{n-1},\\ x_{n+1}-ax_n&=x_2-ax_1=1 \end{aligned}$$

$a\neq 1$ であるから，上の2式から　$\boldsymbol{x_n=\dfrac{a^{n-1}-1}{a-1}}$

(3) (∗∗) の y 成分から

$$y_{n+2}-(a+1)y_{n+1}+ay_n=a^{-n}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\{(y_{k+2}-ay_{k+1})-(y_{k+1}-ay_k)\}&=\sum_{k=1}^{n-1}a^{-k}=\frac{a^{-1}(1-a^{-n+1})}{1-a^{-1}}\\ y_{n+1}-ay_n-y_2+ay_1&=\frac{1}{a-1}+\frac{a^{-n+1}}{1-a} \end{aligned}$$

このとき　$-y_2+ay_1=-(y_2-y_1)+(a-1)y_1$

$$=-1+(a-1)\cdot\frac{a}{(1-a)^2}=\frac{1}{a-1}\quad\cdots①$$

したがって　$y_{n+1}-ay_n=\dfrac{a^{1-n}}{1-a}\quad\cdots(\mathrm{A})$

① より，$n=1$ のときも (A) は成立する．これから　$\dfrac{y_{n+1}}{a^{n+1}}-\dfrac{y_n}{a^n}=\dfrac{a^{-2n}}{1-a}$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y_{k+1}}{a^{k+1}}-\frac{y_k}{a^k}\right)&=\frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^{n-1}a^{-2k}\\ \frac{y_n}{a^n}-\frac{1}{(1-a)^2}&=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{a^{-2}(1-a^{-2n+2})}{1-a^{-2}}\\ \frac{y_n}{a^n}&=\frac{a+a^{-2n+2}}{(1-a)^2(1+a)} \end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{y_n=\dfrac{a^{n+1}+a^{-n+2}}{(1-a)^2(1+a)}}$ ■

3　(1) $x \geqq 2$,　$2^x \leqq x^y \leqq x^2$ より

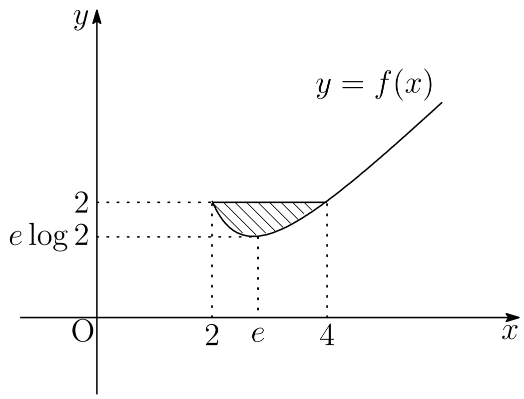
$$x\log 2 \leqq y\log x \leqq 2\log x \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x\log 2}{\log x} \leqq y \leqq 2 \quad (x \geqq 2)$$

$f(x) = \dfrac{x\log 2}{\log x}$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{(\log x - 1)\log 2}{(\log x)^2}$

$x \geqq 2$, $y \leqq 2$，$f(2) = f(4) = 2$ であるから．(x) の増減表は

x	2	$\cdots$	e	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$e\log 2$	$\nearrow$	2

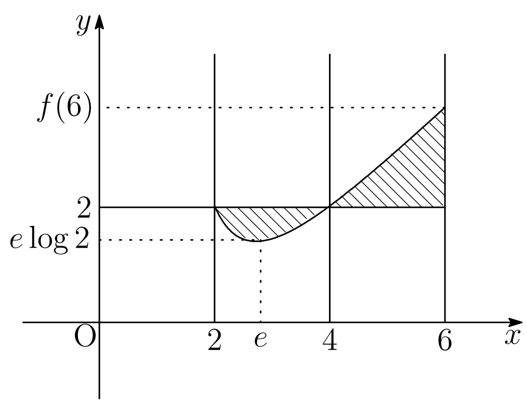
よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) 連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6$，$(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ より

$$\begin{cases} 2 \leqq x \leqq 6 \\ y \geqq f(x) \\ y \leqq a \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 2 \leqq x \leqq 6 \\ y \leqq f(x) \\ y \geqq a \end{cases}$$

右の図の斜線部分の面積が $a = 2$ のときの面積 $S(2)$ である．



下の図から分かるように

$$\begin{aligned} &a > f(6) \text{ のとき} \quad & S(a) > S(f(6)), \\ &0 < a < f(e) \text{ のとき} \quad & S(a) > S(f(e)) \end{aligned}$$

したがって，$S(a)$ の最小値は，$f(e) \leqq a \leqq f(6)$ の値の範囲でとる．
$f(e) \leqq a < 2$ のとき，$a \leqq y \leqq 2$ の部分の面積の大小関係により

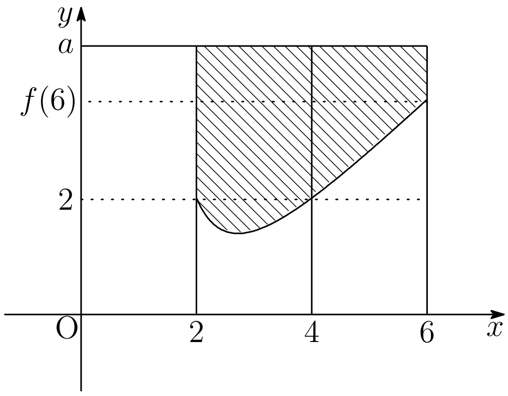
$$S(2) < S(a)$$

$2 \leqq a < f(6)$ のとき，$2 \leqq y \leqq a$ の部分の面積の大小関係により

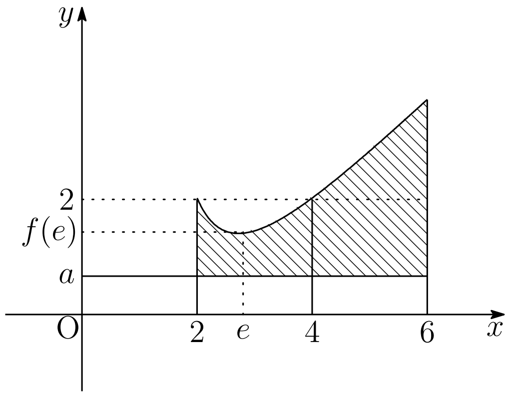
$$S(2) < S(a)$$

よって，$S(a)$ を最小にする a の値は　$\boldsymbol{a = 2}$

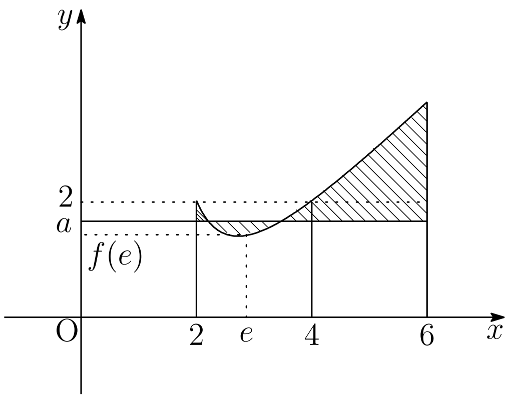
$a > f(6)$



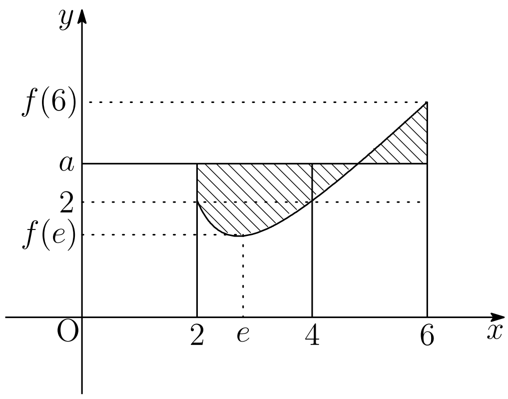
$0 < a < f(e)$



$f(e) \leqq a < 2$



$2 < a \leqq f(6)$



4　(1) H を基準に他の 7 個を円形に並べる場合の総数は

$$\frac{7!}{2!2!} = 1260 \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{1260}}$

(2) 隣り合う子音が存在しない確率を求める．母音と子音がそれぞれ 4 個あり，交互に配置する場合の総数は，H を基準に子音 3 個の並び方 $\dfrac{3!}{2!} = 3$ 通り，母音 4 個の並び方 $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通りあるから，その確率は

$$\frac{3\cdot 12}{1260} = \frac{1}{35}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{35} = \boldsymbol{\frac{34}{35}}$$

(3) KK を基準に母音 4 個の並び方は　$\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通り

残りの子音 2 個の並び方は，下の図の○の 3 カ所の 2 カ所に並べる

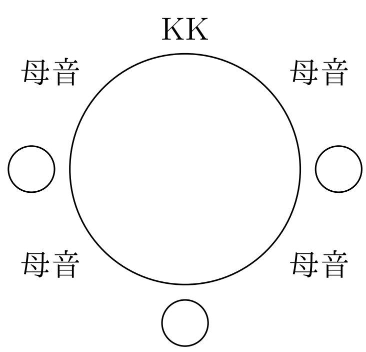
$${}_3\mathrm{P}_2 = 6 \text{ 通り}$$

したがって，隣り合う子音が KK だけである確率は

$$\frac{12\cdot 6}{1260} = \frac{2}{35}$$

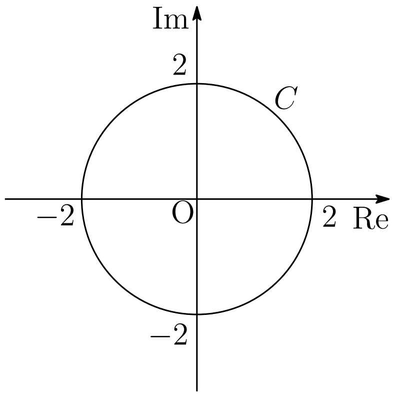
よって，求める条件つき確率は

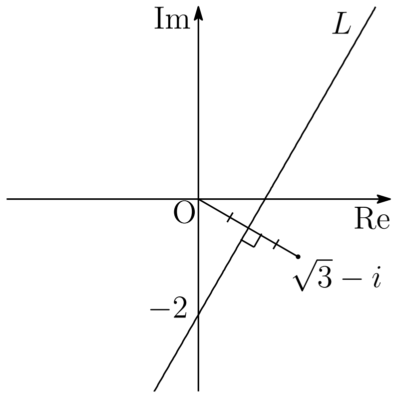
$$\frac{2}{35}\Bigg/\frac{34}{35} = \boldsymbol{\frac{1}{17}}$$



■

5　(1) ① は原点 O を中心とする半径 2 の円を表す．② は原点 O と点 $\sqrt{3}-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す．①，② の図形をそれぞれ C，L とすると次のようになる．





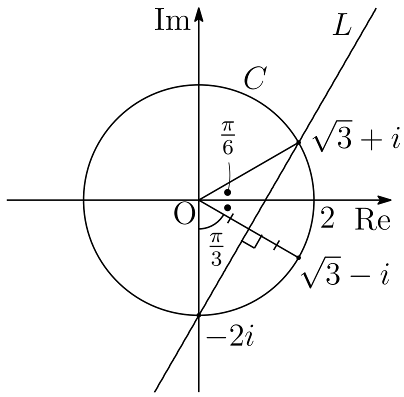
(2) (1) の結果から，C と L の 1 つの交点は

$$-2i$$

点 $\sqrt{3}-i$ の偏角は $-\dfrac{\pi}{6}$ であるから，
もう 1 つの交点は

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$$

よって　　$\boldsymbol{-2i,\ \sqrt{3}+i}$



(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} w &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= 4\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} \end{aligned}$$

ゆえに　$\arg w^n = n\arg w = n\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{n\pi}{3}$

w^n が負の実数となるとき

$$-\frac{n\pi}{3}=(2k-1)\pi \quad (k \text{ は整数})$$

をみたせばよい．ゆえに　$n=3-6k$　よって　$\boldsymbol{n\equiv 3 \pmod 6}$　■

1.9　2023 年 (120 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5]

1 複素数平面上における図形 C_1，C_2，$\cdots$，C_n，$\cdots$ は次の条件 (A) と (B) をみたすとする．ただし，i は虚数単位とする．

(A) C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である．

(B) 自然数 n に対して，z が C_n 上を動くとき $2w = z + 1 + i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である．

(1) すべての自然数 n に対して，C_n は円であることを示し，その中心を表す複素数 α_n と半径 r_n を求めよ．

(2) C_n 上の点と O との距離の最小値を d_n とする．このとき，d_n を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n$ を求めよ．

2 O を原点とする座標空間において，3 点 A(4, 2, 1)，B(1, −4, 1)，C(2, 2, −1) を通る平面を α とおく．また，球面 S は半径が 9 で，S と α の交わりは A を中心とし B を通る円であるとする．ただし，S の中心 P の z 座標は正とする．

(1) 線分 AP の長さを求めよ．

(2) P の座標を求めよ．

(3) S と直線 OC は 2 点で交わる．その 2 点間の距離を求めよ．

3 以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底を表す．

(1) k を実数の定数とし，$f(x) = xe^{-x}$ とおく．方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を用いてもよい．

(2) $xye^{-(x+y)} = c$ をみたす正の実数 x，y の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ．

(3) $xye^{-(x+y)} = \dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x，y を考えるとき，y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1，a_2，$\cdots$，a_n とし，

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく．また，K_n のとりうる値の最小値を q_n とする．

(1) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ．

(2) q_n を求めよ．また，$K_n = q_n$ となるための a_1，a_2，$\cdots$，a_n に関する必要十分条件を求めよ．

(3) n を 4 以上の自然数とする．$L_n = K_n + |a_4 - 4|$ とおき，L_n のとりうる値の最小値を r_n とする．$L_n = r_n$ となる確率 p_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ a，b を $a^2 + b^2 < 1$ をみたす正の実数とする．また，座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を C とし，C の内部にある 2 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$ を考える．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を考え，P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく．

(1) $f(\theta) = ab\cos 2\theta + a\sin\theta - b\cos\theta$ とおく．方程式 $f(\theta) = 0$ の解が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ．

(2) D の座標を b，θ を用いて表せ．

(3) θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，3 点 A，P，D が同一直線上にあるような θ は少なくとも 1 つ存在することを示せ．また，このような θ はただ 1 つであることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $2w = z + 1 + i$ より　$w - 1 - i = \dfrac{1}{2}(z - 1 - i)$

C_n の点 z_n は上の変換によって，C_{n+1} の点 z_{n+1} は次式で導かれる．

$$z_{n+1} - 1 - i = \frac{1}{2}(z_n - 1 - i)$$

したがって　$z_n - 1 - i = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(z_1 - 1 - i)$

$$z_n - (1 - 2^{1-n})(1 + i) = 2^{1-n}z_1$$

$|z_1| = 2$ であるから　$|z_n - (1 - 2^{1-n})(1 + i)| = 2^{2-n}$

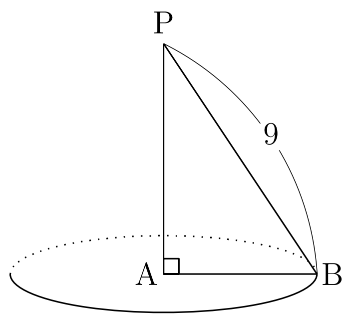
よって　$\boldsymbol{\alpha_n = (1 - 2^{1-n})(1 + i)}$，$\boldsymbol{r_n = 2^{2-n}}$

(2) $|\alpha_n| = (1 - 2^{1-n})|1 + i| = (1 - 2^{1-n})\sqrt{2}$，$r_n = 2^{2-n}$ より

$$\begin{aligned} d_n &= \big||\alpha_n| - r_n\big| = |(1 - 2^{1-n})\sqrt{2} - 2^{2-n}| \\ &= |\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}\,)2^{1-n}| \\ &= \begin{cases} \boldsymbol{(2 + \sqrt{2}\,)2^{1-n} - \sqrt{2}} & \boldsymbol{(n = 1, 2)} \\ \boldsymbol{\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}\,)2^{1-n}} & \boldsymbol{(n \geqq 3)} \end{cases} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} d_n = \sqrt{2}}$　■

2 (1) A(4, 2, 1)，B(1, −4, 1) より



$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (1-4)^2+(-4-2)^2+(1-1)^2\\ &= 45\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{PB}^2-\mathrm{AB}^2}=\sqrt{81-45}=\mathbf{6}$$

(2) A(4, 2, 1)，B(1, −4, 1)，C(2, 2, −1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,-6,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 0,-2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

とすると，AP が平面 α に垂直で，AP = 6 であるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\pm 6\vec{n}&=(4,\ 2,\ 1)\pm 6\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\\ &=(4\pm 4,\ 2\mp 2,\ 1\mp 4)\end{aligned}$$

P の z 座標が正であるから　　**P(0, 4, 5)**

(3) 点 P から直線 OC に垂線 PH を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{9}(2,\ 2,-1)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

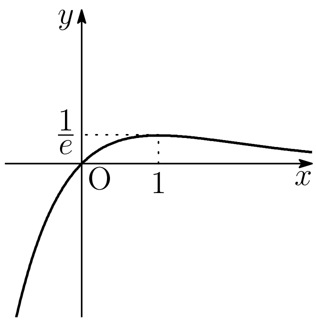
$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(0,\ 4,\ 5)-\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}(-1,\ 5,\ 8)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|=\frac{2}{3}\sqrt{(-1)^2+5^2+8^2}=2\sqrt{10}$$

よって，求める 2 点間の距離は　$2\sqrt{9^2-|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|^2}=\mathbf{2\sqrt{41}}$ ■

3 (1) $f(x) = xe^{-x}$ より　$f'(x) = (1-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e}$	$\searrow$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$f(x) = k$ の異なる実数解の個数は，曲線 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の個数である．

$$\text{よって} \quad \begin{cases} \boldsymbol{k \leqq 0,\ k = \dfrac{1}{e}}\textbf{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{0 < k < \dfrac{1}{e}}\textbf{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k > \dfrac{1}{e}}\textbf{のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

(2) $(*)$　$xye^{-(x+y)} = c$ をみたす正の実数 x，y の組が $(x,\ y) = (a,\ b)$ とすると $(a \neq b)$，$(x,\ y) = (b,\ a)$ も $(*)$ を満たすので，条件に反する．したがって，$(*)$ をみたす x，y がただ 1 つであるとき，$x = y$ であるから

$$x^2e^{-2x} = f(x)^2 = c \quad (c > 0)$$

このとき，$x > 0$ であるから，$f(x) > 0$ より　$f(x) = \sqrt{c}$

(1) の結果から　$\sqrt{c} = \dfrac{1}{e}$　よって　$\boldsymbol{c = \dfrac{1}{e^2}}$

(3) $xye^{-(x+y)} = \dfrac{3}{e^4}$ より

$$f(x)f(y) = f(1)f(3) \quad \text{ゆえに} \quad f(y) = \frac{f(1)f(3)}{f(x)}$$

(1) で求めたグラフから y が最大となるとき，$f(y)$ は最小値をとる．上式から，$f(y)$ が最小となるとき，$f(x)$ は最大値をとるから

$$\boldsymbol{x = 1} \quad \text{ゆえに} \quad f(y) = f(3) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = 3}$$

■

$\boxed{4}$ $K_n = |1-a_1| + |a_1-a_2| + \cdots + |a_{n-1}-a_n| + |a_n-6|$ より

$$\begin{aligned} K_n &= |a_1-1| + |a_2-a_1| + \cdots + |a_n-a_{n-1}| + |6-a_n| \\ &\geqq |(a_1-1)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+(6-a_n)| = 5 \qquad (*) \end{aligned}$$

したがって　$q_n = 5 \cdots ①$

$a_1-1 \geqq 0,\ 6-a_n \geqq 0$ より，$(*)$ において等号が成立するとき，

$$a_2-a_1 \geqq 0,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1} \geqq 0$$

すなわち　$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6$ 　(A)

$a_1-1,\ a_2-a_1,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1},\ 6-a_n$ の $n+1$ 個から5個取る重複組合せは

$$_{n+1}\mathrm{H}_5 = {}_{(n+1)+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_{n+5}\mathrm{C}_5$$

$K_n=5$ となる確率 $P(K_n=5)$ は

$$P(K_n=5) = \frac{_6\mathrm{H}_n}{6^n} = \frac{_{6+n-1}\mathrm{H}_n}{6^n} = \frac{_{n+5}\mathrm{C}_5}{6^n} \qquad (**)$$

(1) $(**)$ に $n=3$ を代入して

$$P(K_3=5) = \frac{_8\mathrm{C}_5}{6^3} = \mathbf{\frac{7}{27}}$$

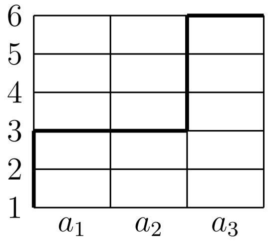
補足 $a_1-1,\ a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ 6-a_3$ の4個から5個取る重複組合せは[6]

$$_4\mathrm{H}_5 = {}_{4+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = 56$$

例えば，a_1-1 を2個，a_3-a_2 を3個取るとき

$$a_1-1=2,\quad a_2-a_1=0,\quad a_3-a_2=3,\quad 6-a_3=0$$

このとき　$a_1=a_2=3,\ a_3=6$



[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Kdai/Kdai_ri_2022.pdf $\boxed{2}$ は関連問題．

(2) ① より　$\boldsymbol{q_n = 5}$

(A) より，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6}$$

(3) $a_4 = 4$ および (A) を満たす確率を求めればよい．

$a_1 - 1$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $4 - a_3$ の 4 個から 3 個とる重複組合せは

$${}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3$$

$n > 4$ のとき，$a_5 - 4$, $a_6 - a_5$, $\cdots$, $a_n - a_{n-1}$, $6 - a_n$ の $n-3$ 個から 2 個とる重複組合せは

$${}_{n-3}\mathrm{H}_2 = {}_{n-2}\mathrm{C}_2$$

このとき

$$p_n = \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_2}{6^n}$$

上式は，$n = 4$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{p_n = \frac{10(n-2)(n-3)}{6^n}}$$

■

5　(1)　$a,\ b$ は，$a^2+b^2<1$ をみたす正の実数であるから

$$0<a<1,\quad 0<b<1$$

これから　$f(0)=b(a-1)<0$，　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a(1-b)>0$

したがって，中間値の定理により，$f(\theta)=0$ の解が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する．

(2)　$C: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線の方程式は

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1\quad\cdots①$$

点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ を通り，直線 ① に垂直な直線の方程式は

$$x\sin\theta-y\cos\theta=-b\cos\theta\quad\cdots②$$

2 直線 ①，② の交点を M とすると，その座標は

$$\mathrm{M}(-b\sin\theta\cos\theta+\cos\theta,\ b\cos^2\theta+\sin\theta)$$

(3)　M は 2 点 B，D の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=2(-b\sin\theta\cos\theta+\cos\theta,\ b\cos^2\theta+\sin\theta)-(0,\ b)\\&=(-b\sin 2\theta+2\cos\theta,\ b\cos 2\theta+2\sin\theta)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{D}(-b\sin 2\theta+2\cos\theta,\ b\cos 2\theta+2\sin\theta)}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos\theta-a,\ \sin\theta)/\!/\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-b\sin 2\theta+2\cos\theta-a,\ b\cos 2\theta+2\sin\theta)$ より

$$-(\cos\theta-a)(b\cos 2\theta+2\sin\theta)+\sin\theta(-b\sin 2\theta+2\cos\theta-a)=0$$

整理すると　　$ab\cos 2\theta+a\sin\theta-b(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)=0$

また，$\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta=\cos\theta$ であるから

$$ab\cos 2\theta+a\sin\theta-b\cos\theta=0\quad\text{すなわち}\quad f(\theta)=0$$

(1) の結果から，上式をみたす $\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が少なくとも 1 つ存在する．

$f(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -2ab\sin 2\theta + a\cos\theta + b\sin\theta \\ &= -4ab\sin\theta\cos\theta + a\cos\theta + b\sin\theta \end{aligned}$$

$x = a\cos\theta$，$y = b\sin\theta$ とおくと $\left(a > 0,\ b > 0,\ a^2 + b^2 < 1,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$xy = ab\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}ab\sin 2\theta = \frac{1}{4}\{a^2 + b^2 - (a-b)^2\}\sin 2\theta < \frac{1}{4}$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -4xy + x + y = -4xy + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy} \\ &= 2\sqrt{xy}(1 - 2\sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0 \end{aligned}$$

$f(\theta)$ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，単調増加であるから，

$$f(\theta) = 0$$

をみたす θ はただ 1 つである． ■

1.10　2024 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 t を実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ および $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ を考える．

(1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ．

(2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ．ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ．

2 各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある．「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている．このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える．最初の持ち点は 0 点とし，この試行を繰り返す．例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は 5 となる．なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ．また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする．

(1) この試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下である確率を求めよ．ただし，n は 2 以上の自然数とする．

(2) この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 点以上である条件付き確率を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) α を実数とする．次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\cdots$ を次の関係式で定める．

$$f_1(x) = 3x$$
$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ．

$\boxed{4}$ 三角形 OAB が，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 10$ をみたしているとする．三角形 OAB の内接円の中心を I とし，この内接円と辺 OA の接点を H とする．

(1) 辺 OB の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

$\boxed{5}$ 関数

$$f(x) = x\log(x+2) + 1 \qquad (x > -2)$$

を考える．$y = f(x)$ で表される曲線を C とする．C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを ℓ とする．ただし，$\log t$ は t の自然対数である．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ．

(3) C と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ と点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ が一致するとき

$$\begin{cases} \cos 2t = \sin t \\ \cos t = \sin 2t \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} (\sin t + 1)(2\sin t - 1) = 0 \\ \cos t(2\sin t - 1) = 0 \end{cases}$$

$\sin t + 1 = 0 \implies \cos t = 0$ に注意して $\sin t = \dfrac{1}{2}, -1$

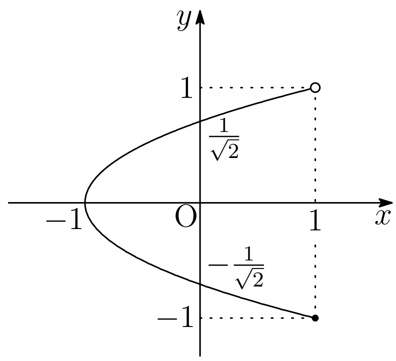
よって $\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \ \dfrac{5}{6}\pi + 2n\pi,\ \ \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi}$

(2) $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ について，$0 < t < 2\pi$ のとき

$$-1 \leqq \cos t < 1, \quad \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

よって，求める軌跡の方程式は $x = 2y^2 - 1 \quad (-1 \leqq y < 1)$

したがって，点 P の描く軌跡は，下の図の実線部分で $\circ$ は含まない．



■

2 (1) $p=\dfrac{1}{8},\ q=\dfrac{5}{8}$ とおく．

持ち点が 0，すなわち,「0」が n 回出る確率は　q^n

持ち点が 1，すなわち,「1」が 1 回,「0」が $n-1$ 回出る確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_1pq^{n-1}=npq^{n-1} $$

持ち点が 2，すなわち,「2」が 1 回,「0」が $n-1$ 回，または,「1」が 2 回,「0」が $n-2$ 回出る確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_1pq^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2p^2q^{n-2}=npq^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2} $$

よって，求める確率は

$$ \begin{aligned} &q^n+npq^{n-1}+\left\{npq^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}\right\} \\ &=\left\{q^2+2npq+\frac{n(n-1)}{2}p^2\right\}q^{n-2} \\ &=\left(\frac{25}{8^2}+\frac{10n}{8^2}+\frac{n^2-n}{2{\cdot}8^2}\right){\cdot}\frac{5^{n-2}}{8^{n-2}}=\boldsymbol{\frac{(n^2+19n+50){\cdot}5^{n-2}}{2{\cdot}8^n}} \end{aligned} $$

(2) 持ち点が 10，すなわち,「1」が 1 回,「3」が 3 回，または,「2」が 2 回,「3」が 2 回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1p{\cdot}p^3+{}_4\mathrm{C}_2p^2{\cdot}p^2=10p^4 $$

持ち点が 11，すなわち,「2」が 1 回,「3」が 3 回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1p{\cdot}p^3=4p^4 $$

持ち点が 12，すなわち,「3」が 4 回出る確率は　p^4

以上から，試行を 4 回行って得点が 10 以上になる確率は

$$ 10p^4+4p^4+p^4=15p^4 $$

試行を 4 回行って持ち点が 10 以上で，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上となるのは，次の場合である．

(i) 4 回行って持ち点が 11 で，さらに「3」が 2 回出る確率は

$$ 4p^4\times p^2=4p^6 $$

(ii) 4 回行って持ち点が 12 で，さらに「2」が 1 回,「3」が 1 回，または「3」が 2 回出る確率は

$$ p^4\times({}_2\mathrm{C}_1p{\cdot}p+p^2)=3p^6 $$

求める条件付き確率は　$\dfrac{4p^6+3p^6}{15p^4}=\dfrac{7}{15}p^2=\dfrac{7}{15}\left(\dfrac{1}{8}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{7}{960}}$ ■

$\boxed{3}$ (1) $a_1=\alpha$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ より　　$a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$

$\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=\alpha-2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n-2=(\alpha-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad よって\quad \boldsymbol{a_n=2+\frac{\alpha-2}{2^{n-1}}}$$

(2) $a_n=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと，$f_1(x)=3x$ より

$$a_1=\int_0^1 3t\,dt=\left[\,\frac{3}{2}t^2\,\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

$$f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x \text{ より } (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt&=\int_0^1(n+2)t^{n+1}\,dt+a_n\int_0^1 t\,dt\\ a_{n+1}&=\left[\,t^{n+2}\,\right]_0^1+\frac{1}{2}a_n\left[\,t^2\,\right]_0^1\\ &=\frac{1}{2}a_n+1\end{aligned}$$

したがって，(1) の結果に $\alpha=\dfrac{3}{2}$ を代入すると

$$a_n=2-\frac{1}{2^n}$$

$n\geqq 1$ のとき　$f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)x$

上式に $n=0$ を代入すると $f_1(x)=3x$ となるから，次式が成立する．

$$\boldsymbol{f_n(x)=(n+1)x^n+\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)x\quad (n=1,2,3,\cdots)}$$

■

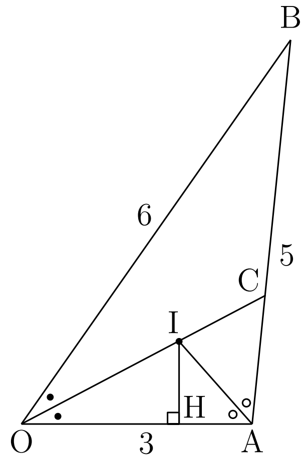
4 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ より　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=10$ を上式に代入すると

$$5^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\cdot10+3^2 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{OB}|^2=36$$

$|\overrightarrow{OB}|>0$ であるから　$\boldsymbol{|\overrightarrow{OB}|=6}$

(2) $\angle$O の二等分線 OI と AB の交点を C とすると



$$\text{AC}:\text{CB}=\text{OA}:\text{OB}=3:6=1:2$$

ゆえに　$\text{AC}=\text{AB}\times\dfrac{1}{1+2}=5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

AI は $\angle$A の二等分線であるから

$$\text{OI}:\text{IC}=\text{OA}:\text{AC}=3:\frac{5}{3}=9:5$$

したがって

$$\overrightarrow{OI}=\frac{9}{9+5}\overrightarrow{OC}=\frac{9}{14}\cdot\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{6\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{14}}$$

(3) (2) の結果から

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{6|\overrightarrow{OA}|^2+3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{14}=\frac{6\cdot3^2+3\cdot10}{14}=6$$
$$\overrightarrow{OH}=\frac{(\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OA})}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}=\frac{6}{3^2}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$

したがって

$$\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OH}=\frac{6\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{14}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-10\overrightarrow{OA}+9\overrightarrow{OB}}{42}}$$

補足　$\triangle$OAB の内接円の辺 AB との接点を J とし，$x=\text{OH}$ とすると

$$\text{HA}=\text{AJ}=3-x,\quad \text{JB}=5-(3-x)=x+2$$

したがって　$\text{OB}=x+(x+2)=2x+2$

$\text{OB}=6$ より　$2x+2=6$　ゆえに　$\text{OH}=2$　■

5 (1) $f(x)=x\log(x+2)+1$ を微分すると $f'(x)=\log(x+2)+\dfrac{x}{x+2}$

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t) \quad \text{ゆえに} \quad y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$$

この直線が原点を通るとき，$f(t)-tf'(t)=0$ より

$$t\log(t+2)+1-t\left\{\log(t+2)+\frac{t}{t+2}\right\}=0$$

整理すると $t^2-t-2=0$ ゆえに $(t+1)(t-2)=0$

これを解いて $t=-1,\ 2$

このとき $f'(-1)=-1<0,\quad f'(2)=2\log 2+\dfrac{1}{2}>0$

よって，求める接線の方程式は $\boldsymbol{y=\left(2\log 2+\dfrac{1}{2}\right)x}$

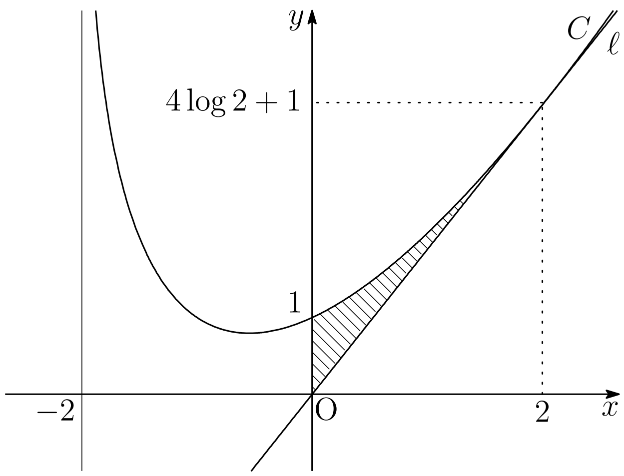
(2) $f'(x)=\log(x+2)+1-\dfrac{2}{x+2}$ を微分すると $(x>-2)$

$$f''(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}>0$$

したがって，C は下に凸である．

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^2\{x\log(x+2)+1\}\,dx-\frac{1}{2}\cdot2\cdot(4\log2+1)\\&=\frac{1}{2}\int_0^2(x^2-4)'\log(x+2)\,dx+\Big[\,x\,\Big]_0^2-(4\log2+1)\\&=\frac{1}{2}\Big[\,(x^2-4)\log(x+2)\,\Big]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2(x-2)\,dx+1-4\log2\\&=2\log2-\frac{1}{4}\Big[\,(x-2)^2\,\Big]_0^2+1-4\log2=\boldsymbol{2-2\log2}\end{aligned}$$



別解 (ガウス・グリーンの定理の系)

$$xf'(x) - f(x) = x\left\{\log(x+2) + \frac{x}{x+2}\right\} - \{x\log(x+2) + 1\}$$
$$= \frac{x^2}{x+2} - 1 = x - 3 + \frac{4}{x+2}$$

求める面積 S は (積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_2^0 (xy' - y)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_2^0 \left(x - 3 + \frac{4}{x+2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\log(x+2)\,\right]_2^0 \\ &= \mathbf{2 - 2\log 2} \end{aligned}$$

補足 別解の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\}\,dt$$

の変数 t を x に変更したものである． ■

1.11　2025 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 $\alpha,\ r$ を $\alpha > 1,\ r > 1$ を満たす実数とする．数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \alpha$ で公比が r の等比数列とする．数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \log_{a_n}(a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．

(1) b_n を n と $\log_\alpha r$ を用いて表せ．

(2) 等式
$$b_n = \frac{n+2}{n+1}$$
がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ．

(3) (2) の条件が成り立つとき，積 $a_1a_2,\ a_1a_2a_3,\ a_1a_2a_3a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁，3 桁，4 桁になるような α の範囲を求めよ．

2 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ を考える．実数 $p,\ q$ が $p^2 + q^2 > 1$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C_1 に引いた 2 本の接線 $\ell_1,\ \ell_2$ の接点をそれぞれ $\mathrm{Q}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}_2(x_2,\ y_2)$ とする．また，座標平面上の原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする．

(1) 直線 $\ell_1,\ \ell_2$，線分 OQ_1，OQ_2 で囲まれた四角形の面積 S を $p,\ q$ を用いて表せ．

(2) 点 P が楕円
$$C_2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$
の上を動くとき，(1) の四角形の面積 S の最大値と最小値を求めよ．

3 実数 a および自然数 n に対して，定積分

$$I(a,\ n) = \int_0^{2\pi} e^{ax} \sin(nx)\, dx$$

を考える．ここで e は自然対数の底である．

(1) $I(a,\ n)$ を求めよ．

(2) $a_n = \dfrac{\log n}{2\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(a_n,\ n)$ を求めよ．ただし，$\log n$ は n の自然対数である．また，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ であることを用いてもよい．

4 a を正の実数とする．

(1) a が 1 でないとき，複素数 z についての方程式

$$a|z-1| = |(a-2)z + a|$$

を考える．この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ．

(2) 方程式

$$|z|^2 = 6 - a, \quad a|z-1| = |(a-2)z + a|$$

をともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ．

5 n を 3 以上の整数とする．

(1) k を整数とする．$k < a < b < c \leqq k + n$ を満たす整数 $a,\ b,\ c$ の選び方の総数を n の式で表せ．

(2) $1 \leqq a < b < c \leqq 2n$ を満たす整数 $a,\ b,\ c$ のうち，$a + b > c$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方の総数を L とする．このとき，$L > {}_n\mathrm{C}_3$ であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 α，公比 r の等比数列であるから $(\alpha > 1,\ r > 1)$

$$a_n = \alpha{\cdot}r^{n-1} \qquad (*)$$

$b_n = \log_{a_n}(a_{n+1})$ より

$$b_n = \frac{\log_\alpha a_{n+1}}{\log_\alpha a_n} = \frac{\log_\alpha(\alpha{\cdot}r^n)}{\log_\alpha(\alpha{\cdot}r^{n-1})} = \boldsymbol{\frac{1+n\log_\alpha r}{1+(n-1)\log_\alpha r}}$$

(2) $b_n = \dfrac{n+2}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ であり，また (1) の結果より

$$b_n = 1 + \frac{\log_\alpha r}{1+(n-1)\log_\alpha r} = 1 + \frac{1}{n + \frac{1}{\log_\alpha r} - 1}$$

上の 2 式は n に関する恒等式であるから　$\dfrac{1}{\log_\alpha r} - 1 = 1$

$$\frac{1}{\log_\alpha r} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_\alpha r = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha = r^2}$$

(3) (2) の結果を $(*)$ に代入すると　$a_n = r^{n+1}$

$$\begin{aligned}
&a_1a_2 = r^2{\cdot}r^3 = r^5,\\
&a_1a_2a_3 = (a_1a_2)a_3 = r^5{\cdot}r^4 = r^9,\\
&a_1a_2a_3a_4 = (a_1a_2a_3)a_4 = r^9{\cdot}r^5 = r^{14}
\end{aligned}$$

条件から　$10 \leqq r^5 < 10^2 \leqq r^9 < 10^3 \leqq r^{14} < 10^4$

$$10^{\frac{1}{5}} \leqq r < 10^{\frac{2}{5}} \quad \text{かつ} \quad 10^{\frac{2}{9}} \leqq r < 10^{\frac{1}{3}} \quad \text{かつ} \quad 10^{\frac{3}{14}} \leqq r < 10^{\frac{2}{7}}$$

$\max\left\{\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{3}{14}\right\} = \dfrac{2}{9}$，$\min\left\{\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{7}\right\} = \dfrac{2}{7}$ であるから

$$10^{\frac{2}{9}} \leqq r < 10^{\frac{2}{7}} \quad \text{ゆえに} \quad 10^{\frac{4}{9}} \leqq r^2 < 10^{\frac{4}{7}}$$

(2) の結果から　$\boldsymbol{10^{\frac{4}{9}} \leqq \alpha < 10^{\frac{4}{7}}}$ ■

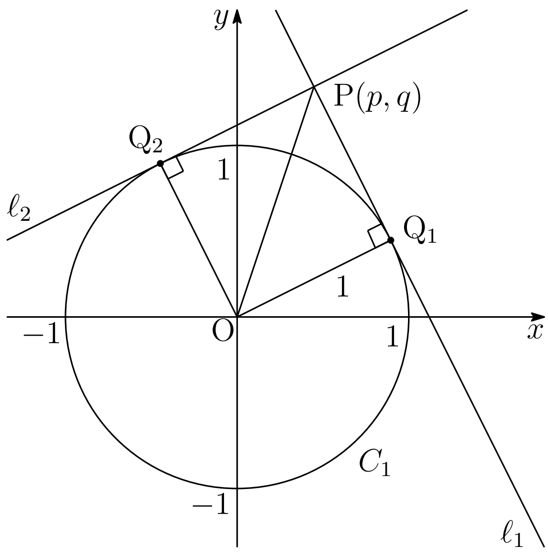
2 (1) $\mathrm{PQ_1} = \sqrt{\mathrm{OP}^2 - \mathrm{OQ_1}^2}$
$= \sqrt{p^2 + q^2 - 1}$

$\triangle\mathrm{OPQ_1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{PQ_1}\cdot\mathrm{OQ_1}$ より

$$\triangle\mathrm{OPQ_1} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2 - 1}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2\triangle\mathrm{OPQ_1} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{p^2 + q^2 - 1}} \end{aligned}$$



別解 点 P$(p,\ q)$ を極とする円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ の極線 $\mathrm{Q_1Q_2} : px + qy = 1$ に原点 O から引いた垂線の長さを d とすると

$$d = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Q_1Q_2} = 2\sqrt{1 - d^2}$$

$\mathrm{OP}\perp\mathrm{Q_1Q_2}$ より，求める面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{Q_1Q_2}\cdot\mathrm{OP} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1 - d^2}\sqrt{p^2 + q^2} = \boldsymbol{\sqrt{p^2 + q^2 - 1}}$$

(2) 点 P$(p,\ q)$ は楕円 $C_2 : \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 上の点であるから

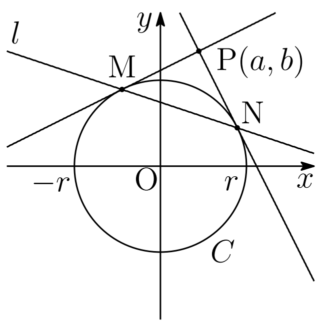
$$\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{3} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad q^2 = 3 - \frac{3}{2}p^2 \quad (0 \leqq p^2 \leqq 2)$$

これを (1) の結果に代入すると

$$S = \sqrt{2 - \frac{1}{2}p^2} \quad (0 \leqq p^2 \leqq 2) \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq S \leqq \sqrt{2}$$

よって　　**最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$，最小値 1**　■

円の極線



円 $C\ :\ x^2+y^2\ =\ r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線

$$x_1x+y_1y=r^2,\quad x_2x+y_2y=r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1+by_1=r^2,\quad ax_2+by_2=r^2$$

上の 2 式から直線 $l:\boldsymbol{ax+by=r^2}$ は 2 点 M，N を通る．

このとき，l を P を極とする C の**極線**という．

極線の方程式

2 次曲線に対して，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ から 2 本の接線を引けるとし，その接点を A，B とおく．直線 AB を極 P に対する**極線**という．

- 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1}$
- 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1}$
- 放物線 $x^2=4py$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{x_1x=2p(y+y_1)}$
- 放物線 $y^2=4px$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{y_1y=2p(x+x_1)}$

注意　2 次曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式と一致している．

3　(1) $e^{ax}\sin nx$，$e^{ax}\cos nx$ をそれぞれ微分すると

$$(e^{ax}\sin nx)' = e^{ax}(n\cos nx + a\sin nx) \quad \cdots ①$$
$$(e^{ax}\cos nx)' = e^{ax}(a\cos nx - n\sin nx) \quad \cdots ②$$

① $\times a -$ ② $\times n$ から

$$\{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)\}' = (a^2+n^2)e^{ax}\sin nx$$

n は自然数であるから

$$\begin{aligned} I(a,\ n) &= \int_0^{2\pi} e^{ax}\sin nx \\ &= \frac{1}{a^2+n^2}\Big[\ e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)\ \Big]_0^{2\pi} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(1-e^{2\pi a})}{a^2+n^2}} \end{aligned}$$

(2) $a_n = \dfrac{\log n}{2\pi}$ より　$2\pi a_n = \log n$　ゆえに　$e^{2\pi a_n} = n$

(1) の結果から　$I(a_n,\ n) = \dfrac{n(1-e^{2\pi a_n})}{{a_n}^2+n^2} = \dfrac{n(1-n)}{\left(\dfrac{\log n}{2\pi}\right)^2 + n^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} I(a_n,\ n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}-1}{\dfrac{1}{4\pi^2}\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^2+1} = \frac{0-1}{0+1} = \mathbf{-1}$$

解説 $f(x)=\cos x+i\sin x$ とおくと (i は虚数単位)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x + i\cos x \\ &= i(\cos x + i\sin x) = if(x) \end{aligned}$$

$f(0)=1$，$f'(x)-if(x)=0$ を解くと，$f'(x)e^{-ix}-if(x)e^{-ix}=0$ より

$$f'(x)e^{-ix}+f(x)(e^{-ix})'=0 \quad \text{ゆえに} \quad \{f(x)e^{-ix}\}'=0$$

上の第2式を積分すると　$f(x)e^{-ix}=C$ (C は積分定数)

$f(0)=1$ より，$C=1$ であるから　$f(x)=e^{ix}$

したがって，次を得る．

オイラーの公式

$$\boldsymbol{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$$

$e^{i\pi}=-1$ であるから，n が整数のとき，$e^{2ni\pi}=(e^{i\pi})^{2n}=1$ より

$$\int_0^{2\pi} e^{(a+in)x}\,dx=\frac{1}{a+in}\left[\,e^{(a+in)x}\,\right]_0^{2\pi}=\frac{a-in}{a^2+n^2}(a^{2\pi a}-1)$$

$e^{(a+in)x}=e^{ax}(\cos nx+i\sin nx)$ であるから，複素数の相等により

$$\int_0^{2\pi} e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{a}{a^2+n^2}(e^{2\pi a}-1),$$
$$\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{-n}{a^2+n^2}(e^{2\pi a}-1)$$

補足 $g(x)=2\sqrt{x}-\log x$ とすると　$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

$g(1)=2$，$x>1$ において $g'(x)>0$ であるから

$$x>1 \text{ において} \quad g(x)>g(1)=2>0 \quad \text{ゆえに} \quad 2\sqrt{x}>\log x$$

$x>1$ のとき　$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{2\sqrt{x}}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ であるから，はさうみちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

■

4 (1) (∗)　$a|z-1| = |(a-2)z+a|$ について，$a>0$ より

$$|z-1| = \left|\left(1-\frac{2}{a}\right)z+1\right|$$

$t = 1-\dfrac{2}{a}$ とおくと　$|z-1| = |tz+1|$

$$(z-1)(\overline{z}-1) = (tz+1)(t\overline{z}+1)$$

$$|z|^2-(z+\overline{z}) = t^2|z|^2+t(z+\overline{z})$$

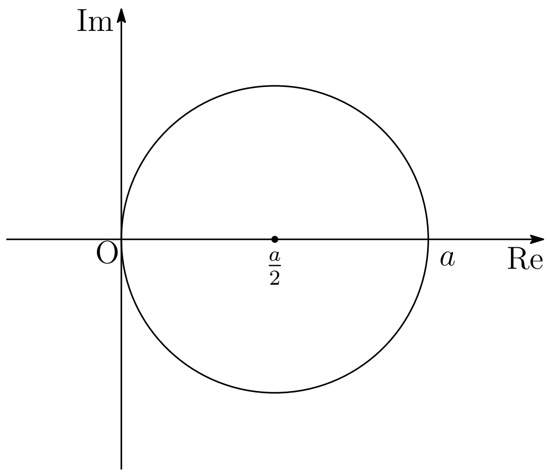
整理すると　　$(t+1)\{(t-1)|z|^2+(z+\overline{z})\} = 0$

$a \neq 1$ であるから　$t+1 = \dfrac{2(a-1)}{a} \neq 0$，$t-1 = -\dfrac{2}{a}$ より

$$-\frac{2}{a}|z|^2+(z+\overline{z}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |z|^2-\frac{a}{2}(z+\overline{z}) = 0$$

上の第 2 式から　$\left|z-\dfrac{a}{2}\right|^2 = \dfrac{a^2}{4}$　すなわち　$\left|z-\dfrac{a}{2}\right| = \dfrac{a}{2}$

よって，点 z の表す図形は，**点 $\boldsymbol{\dfrac{a}{2}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\dfrac{a}{2}}$ の円**



(2)　(i)　$a=1$ のとき，$(*)$ の両辺は等しい．このとき，z は複素数平面上のすべての点を表す．このとき

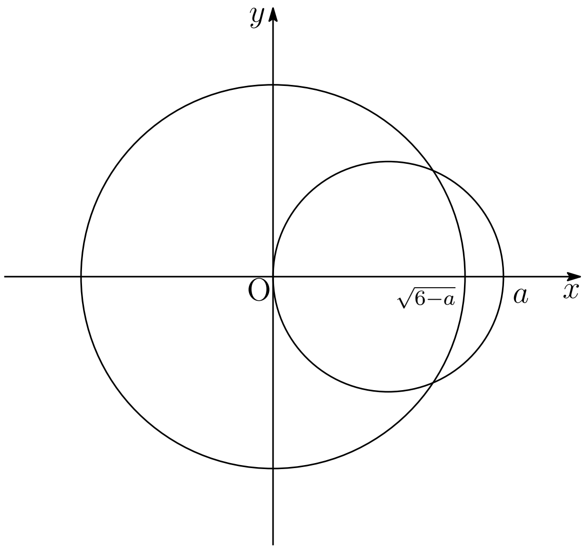
$$|z|^2 = 6-a, \quad a|z-1| = |(a-2)z+a| \qquad (**)$$

の2式を同時満たす z は，$|z|=\sqrt{5}$ である．

(ii)　$a \neq 1$ のとき，$(**)$ の2式をともに満たす z が存在するのは

$$\sqrt{6-a} \leqq a \quad \text{ゆえに} \quad 6-a \geqq 0, \ \ (a+3)(a-2) \geqq 0$$

$a>0,\ a \neq 1$ に注意してこれを解くと　$2 \leqq a \leqq 6$



(i)，(ii) から　　$\boldsymbol{a=1,\ \ 2 \leqq a \leqq 6}$

別解　$a \neq 1$ のとき，2円の中心間の距離 $\dfrac{a}{2}$ および2円の半径 $\dfrac{a}{2}$，$\sqrt{6-a}$ より

$$\left|\frac{a}{2}-\sqrt{6-a}\right| \leqq \frac{a}{2} \leqq \frac{a}{2}+\sqrt{6-a}$$

を解いてもよい．

(a)　$\dfrac{a}{2} \geqq \sqrt{6-a}$，すなわち，$a \geqq 2\sqrt{7}-2$ のとき

$$2\sqrt{7}-2 \leqq a \leqq 6$$

(b)　$\dfrac{a}{2} \leqq \sqrt{6-a}$，すなわち，$0<a \leqq 2\sqrt{7}-2$ のとき $(a \neq 1)$

$$2 \leqq a \leqq 2\sqrt{7}-2$$

よって，(a)，(b) および $a=1$ のときであるから

$$\boldsymbol{a=1,\ \ 2 \leqq a \leqq 6}$$

■

5 (1) $k<a<b<c \leqq k+n$ より，n 個の整数 $k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+n$ から異なる 3 個を選び，小さい順に $a,\ b,\ c$ とすればよいから，選び方の総数は

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_3}\quad\textbf{(個)}$$

(2) (1) の結論で，$k=n$ とすると

$$(*)\quad n<a<b<c \leqq 2n$$

このとき，$a+b>(n+1)+(n+2)>2n \geqq c$ であるから，
$(*)$ を満たす $a,\ b,\ c$ の組の総数は ${}_n\mathrm{C}_3$ 個ある．
$a=n,\ b=n+2,\ c=2n$ とすると，$a+b>c$ および $(**)$ を満たす．

$$(**)\quad 1 \leqq a<b<c \leqq 2n$$

よって，$(**)$ を満たす $a,\ b\ c$ の組の総数 L について

$$L>{}_n\mathrm{C}_3$$

が成立する．

別解 $1 \leqq a<b<c \leqq 2n$ について，$b=a+j,\ c=b+k$ とおくと

$$c=a+j+k \qquad (j,\ k\ は自然数)$$

$a+b>c$ および $c<2n$ であるから

$$a+(a+j)>a+j+k, \quad a+j+k \leqq 2n$$

すなわち，次を満たす自然数 $a,\ j,\ k$ の組の総数が L である．

$$k<a,\ a+j+k \leqq 2n$$

ここで

$$\begin{aligned} X&=\{(a,\ j,\ k) \mid k<a,\ a+j+k \leqq 2n\}, \\ Y&=\{(a,\ j,\ k) \mid k=a,\ a+j+k \leqq 2n\}, \\ Z&=\{(a,\ j,\ k) \mid k>a,\ a+j+k \leqq 2n\} \end{aligned}$$

とおくと，$L=n(X)=n(Z)$，$n(X)+n(Y)+n(Z)={}_{2n}\mathrm{C}_3$

$n(Y)$ は，$j \leqq 2(n-k)$ を満たす自然数の組の個数であるから

$$n(Y) = \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k) = 2\sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)$$

したがって　　$2L + n(n-1) = {}_{2n}\mathrm{C}_3$

$$\begin{aligned} 2L + n(n-1) &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} \\ L &= \frac{1}{6}n(n-1)(4n-5) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)\{(n-2)+3(n-1)\} \\ &= {}_n\mathrm{C}_3 + \frac{1}{2}n(n-1)^2 > {}_n\mathrm{C}_3 \end{aligned}$$

補足　$n(X)+n(Y)+n(Z)$ の個数は，$2n$ 個の○を $2n$ 個の仕切り（｜）から3個選んで区切られた○の個数を左から順に a，j，k と考える．

$$\bigcirc \mid \bigcirc \mid \bigcirc \mid \bigcirc \mid \cdots \bigcirc \mid$$

本題で求めた L は，例えば，$n=3$ のとき　$L=7$

$$\begin{aligned} (a,b,c) =&(2,3,4),(2,4,5),(2,5,6),(3,4,5), \\ &(3,4,6),(3,5,6),(4,5,6) \end{aligned}$$

■

第 2 章　東北大学

出題分野 (2015-2025) 150 分

◀	東北大学	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
I	数と式											
	2 次関数											
	図形と計量											
	データの分析											
II	式と証明											
	複素数と方程式											
	図形と方程式	5			1		2	1				
	三角関数				4	4						6
	指数関数と対数関数					2					2	
	微分法と積分法	2		1							1	
III	関数											
	極限					3			3·4	2		
	微分法とその応用	1				1		5	2		5	3
	積分法	4	6	6		5	6	6				
	積分法の応用				6			4	6	6	6	4
A	場合の数と確率	3	3	2	2	6	4	3	1	1	3	1
	整数の性質	6	2	3	3			2				
	図形の性質		1									
B	数列						3			3	3	2
	確率分布と統計											
C	平面上のベクトル			4			1					
	空間のベクトル		5						5	5	4	5
	複素数平面		4	5	5		5	5		4		
	式と曲線											

2.1　2015 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\quad x>0,\quad y>0$$

P を C 上の点とする．P で C に接する直線を l とし，P を通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．P が C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときの P の座標を求めよ．

2 xy 平面において，3 次関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とし，不等式

$$x^3-x>y>-x$$

の表す領域を D とする．また，P を D の点とする．

(1) P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ．

(2) P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ．

3 サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の 2 次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0 \qquad \cdots(*)$$

を考える．

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ．

(3) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ．

4 $a>0$ を実数とする．$n=1,2,3,\ldots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\quad \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^{a}}\right),\quad ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}\,dx,\quad C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx$$

とおく．

(1) $n=1,2,3,\ldots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ．

5 $t>0$ を実数とする．座標平面において，3 点 A$(-2,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，P$(t,\ \sqrt{3}\,t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える．

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ．

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ．

(3) 辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく．t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

6 $k \geqq 2$ と n を自然数とする．n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，

$$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和と呼ぶことにする．ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである．

(1) n が k-連続和であることは，次の条件 (A)，(B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ．

(A)　$\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ は整数である．

(B)　$2n > k^2$ が成り立つ．

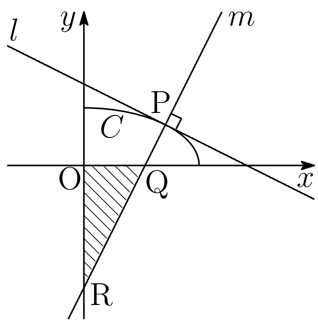
(2) f を自然数とする．$n = 2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ．

(3) f を自然数とし，p を 2 でない素数とする．$n = p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ．

解答例

1 曲線 $C : x^2 + 4y^2 = 1\ (x > 0,\ y > 0)$ を x について微分すると

$$2x + 8yy' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y' = -\frac{x}{4y'}$$



C の点 $\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ における法線 m の傾きは

$$-\frac{1}{y'} = \frac{4y'}{x} = \frac{2\sin\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta$$

したがって，m の方程式は

$$y - \frac{1}{2}\sin\theta = 2\tan\theta\cdot(x - \cos\theta) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x\tan\theta - \frac{3}{2}\sin\theta$$

m の x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q，R とすると

$$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{4}\cos\theta,\ 0\right), \quad \mathrm{R}\left(0, -\frac{3}{2}\sin\theta\right)$$

$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}$ であるから，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta\cdot\frac{3}{2}\sin\theta = \frac{9}{16}\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{32}\sin 2\theta$$

したがって，$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{32}}$ をとる．

このとき，点 P は $\left(\cos\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ すなわち $\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)}$ ■

2　(1) $C: y = x^3 - x$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 1$　$\cdots$ ①
C 上の点 $(t,\ t^3 - t)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

これを t について整理すると　$2t^3 - 3xt^2 + x + y = 0$　$\cdots(*)$
点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，上の t に関する 3 次方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつ P の領域を求める．$f(t) = 2t^3 - 3xt^2 + x + y$ とおくと

$$f'(t) = 6t^2 - 6xt = 6t(t - x) \quad f'(t) = 0 \text{ とすると } \quad t = 0,\ x$$

$(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，$x \neq 0$，$f(0)f(x) < 0$ であるから

$$x \neq 0, \quad (x + y)(-x^3 + x + y) < 0,$$

すなわち　$\begin{cases} x + y > 0 \\ -x^3 + x + y < 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x + y < 0 \\ -x^3 + x + y > 0 \end{cases}$

上の 1 番目の関係式により，$x^3 - x > y > -x$ の表す領域 D の点 P から C に接する直線は 3 本存在する．

(2) P から C に引いた 3 本の接線の接点の x 座標を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると，3 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$(**) \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}x, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{x + y}{2}$$

① より，3 本の接線の傾き $3\alpha^2 - 1,\ 3\beta^2 - 1,\ 3\gamma^2 - 1$ について，条件から

$$(3\alpha^2 - 1) + (3\beta^2 - 1) + (3\gamma^2 - 1) = 0$$
$$(3\alpha^2 - 1)(3\beta^2 - 1)(3\gamma^2 - 1) = 0$$

上の第 1 式から　$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$　$\cdots$ ②
上の第 2 式から，一般性を失うことなく

$$3\gamma^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$(**)$ の第 1，第 2 式および ② を

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

に代入すると

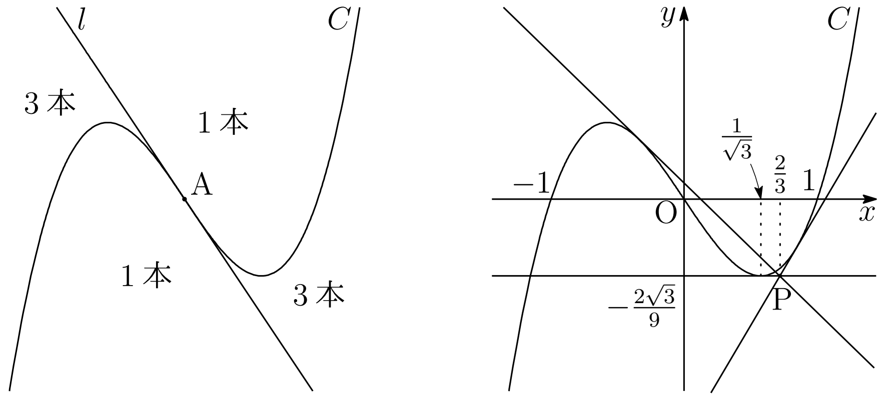
$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 1 + 2\cdot 0 \quad x > 0 \text{ に注意して} \quad x = \frac{2}{3}$$

$f(t) = 2t^3 - 2t^2 + \dfrac{2}{3} + y$ となり，γ は $f(t) = 0$ の解であるから

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9} + y = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = \mp\frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (\text{複号同順})$$

このとき，D に含まる点 P は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}\right)$

解説　3 次関数のグラフを C とし，C の変曲点 A における接線を l とすると，座標平面上の点から曲線 C に引ける接線の本数は，C と l を境界とする領域によって左下の図のようになる．なお，境界線 C と l 上の点からは 2 本，ただし変曲点からは 1 本である．本題の $C : y = x^3 - x$ の変曲点 $(0,\ 0)$ における接線が $y = -x$ である．また，右下の図でわかるように，$y = x^3 - x$ の極小値 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ を求めて，これを P の y 座標とすればよい．



3　(1) 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0\cdots(*)$ が実数解をもつとき，

$$p_2{}^2-4\cdot 2p_1\cdot 2p_3=p_2{}^2-16p_1p_3 \geqq 0$$

p_1，p_2，p_3 はそれぞれ 6 以下の自然数であるから，上式を満たすとき

$p_2=4,\ 5$ のとき　$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

$p_2=6$ のとき　$(p_1,\ p_2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{2\times 1+3}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{216}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解 α，β と係数の関係により

$$\alpha\beta=\frac{2p_3}{2p_1}=\frac{p_3}{p_1}=1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3=p_1$$

このとき，2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_1=0$ が複素数解をもつとき

$$p_2{}^2-4\cdot 2p_1\cdot 2p_1<0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2<4p_1$$

上式を満たすとき

$p_1=p_3=1$ のとき　$p_2=1,\ 2,\ 3$

$p_1=p_3=2,3,4,5,6$ のとき　$p_2=1,2,3,4,5,6$

よって，求める確率は　$\dfrac{3+5\cdot 6}{6^3}=\mathbf{\dfrac{11}{72}}$

(3) 2 次方程式 $(*)$ の解 α，β と係数の関係により

$$\alpha\beta=\frac{2p_3}{2p_1}=\frac{p_3}{p_1}<1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3<p_1$$

2 次方程式 $(*)$ が複素数解をもつ確率は，(1) の結果から

$$1-\frac{5}{216}=\frac{211}{216} \quad \cdots①$$

2 次方程式が複素数の解をもち，かつ，$p_3<p_1$ である確率と 2 次方程式が複素数の解をもち，かつ，$p_3>p_1$ である確率は等しい．

よって，(2) の結果および ① から，求める確率は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{211}{216}-\frac{11}{72}\right)=\mathbf{\frac{89}{216}}$$

■

4 (1) $2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において (n は自然数)

$$\sin x \geqq 0, \quad \frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{1}{x^a} \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}$$

したがって

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}\,dx$$

よって　$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq B_n \leqq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{(2n\pi)^a}{2} \leqq \dfrac{1}{B_n} \leqq \dfrac{\{(2n+1)\pi\}^a}{2}$

$A_n = \dfrac{\pi}{2\{(2n+\frac{1}{2})\}^a} \cdots$ ① であるから　$\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a \leqq \dfrac{A_n}{B_n} \leqq \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{4n}} = 1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{2n}}{2+\frac{1}{4n}} = 1$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(3) (1) と同様に，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において (n は自然数)

$$\sin^2 x \geqq 0, \quad \frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{1}{x^a} \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}$$

したがって

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{(2n\pi)^a}\,dx$$

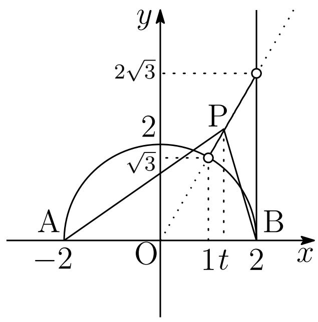
このとき，$\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}$　より　$\dfrac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq C_n \leqq \dfrac{\pi}{2(2n\pi)^a}$

上式より，$\dfrac{2(2n\pi)^a}{\pi} \leqq \dfrac{1}{C_n} \leqq \dfrac{2\{(2n+1)\pi\}^a}{\pi}$ であるから，① より

$$\left(\frac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a \leqq \frac{A_n}{C_n} \leqq \left(\frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$$

(2) の計算と同様に，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n} = \mathbf{1}$　■

5 (1) $t>0$ より，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ は直線 $y=\sqrt{3}x$ の第1象限の点である．右の図のように $\angle\mathrm{PAB}$ は鋭角．$\angle\mathrm{APB}$ が鋭角となるとき P は原点を中心とする半径2の円の外部にあるから



$$\mathrm{OP}>2 \quad ゆえに \quad \sqrt{t^2+(\sqrt{3}\,t)^2}>2$$

これを解いて $(t>0)$ 　　$t>1 \quad \cdots ①$

$\angle\mathrm{PBA}$ が鋭角となるのは，P の x 座標に注目して　　$t<2 \quad \cdots ②$

①, ② より，△ABP が鋭角三角形となる t の範囲は　　$\boldsymbol{1<t<2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t+2,\ \sqrt{3}\,t)$ に垂直で点 B(2, 0) を通る直線の方程式は

$$(t+2)(x-2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}\,t)$ に垂直で点 A(−2, 0) を通る直線の方程式は

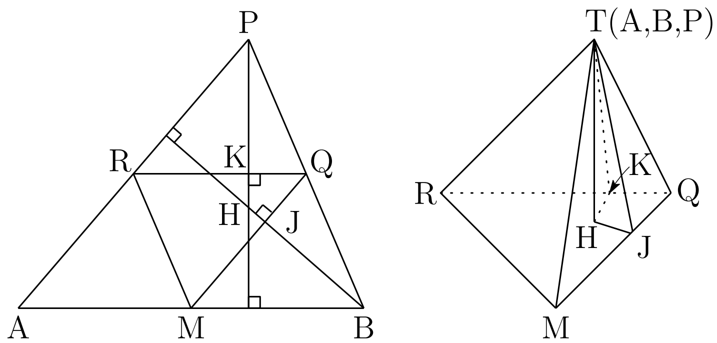
$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

△ABP の垂心は上の2本の直線の交点であるから　$\boldsymbol{\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right)}$

(3) (2) で求めた △PAB の垂心を H，直線 BH と直線 QM の交点を J，直線 PH と直線 QR の交点を K とおく．M，Q，R はそれぞれ辺 AB，BP，PA の中点であるから，中点連結定理により

$$\mathrm{MQ}/\!/\mathrm{PA}, \quad \mathrm{QR}/\!/\mathrm{AB} \quad ゆえに \quad \mathrm{HJ}\perp\mathrm{MQ}, \quad \mathrm{HK}\perp\mathrm{QR}$$

A，B，P が重なる四面体の頂点を T とすると，平面 THJ は直線 MQ と垂直，平面 THK は直線 QR と垂直である．これら2平面の交線 TH は，直線 MQ および直線 QR に垂直であるから，TH は平面 MQR と垂直である．



A$(-2,\ 0)$，P$(t,\ \sqrt{3}\,t)$ の中点 R の座標は　$\left(\dfrac{-2+t}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$

K の x 座標は P の x 座標と等しく，y 座標は R の y 座標と等しいから

$$\mathrm{K}\left(t,\ \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{TK}=\mathrm{PK}=\frac{\sqrt{3}\,t}{2}$$

$1<t<2$ に注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{HK}&=\left|\frac{\sqrt{3}\,t}{2}-\frac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right|=\frac{|5t^2-8|}{2\sqrt{3}\,t},\\ \mathrm{TH}&=\sqrt{\mathrm{TK}^2-\mathrm{HK}^2}\\ &=\sqrt{\frac{3t^2}{4}-\frac{(5t^2-8)^2}{12t^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot\sqrt{3}\,t=2\sqrt{3}\,t$　ゆえに　$\triangle\mathrm{MQR}=\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}$

四面体 TMQR の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{MQR}\cdot\mathrm{TH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\ &=\frac{1}{3}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\ &=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}\end{aligned}$$

よって，$t^2=\dfrac{5}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$ のとき，V は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

発展 四面体OABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とし，行列$M$を$M=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$とすると，四面体OABCの体積$V$は

$$V=\frac{1}{6}|\det M|$$

$a=|\vec{a}|$，$b=|\vec{b}|$，$c=|\vec{c}|$とし，$\alpha=\angle\mathrm{BOC}$，$\beta=\angle\mathrm{COA}$，$\gamma=\angle\mathrm{AOB}$とすると

$$\begin{aligned}
{}^tMM&=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta\\ ba\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha\\ ca\cos\beta & cb\cos\alpha & c^2\end{pmatrix}\\
&=a^2b^2c^2\begin{pmatrix}1 & \cos\gamma & \cos\beta\\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha\\ \cos\beta & \cos\alpha & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\det M=\det{}^tM$より，$\det({}^tMM)=\det{}^tM\det M=(\det M)^2$に注意して

$$\begin{aligned}
(\det M)^2&=a^2b^2c^2\det\begin{pmatrix}1 & \cos\gamma & \cos\beta\\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha\\ \cos\beta & \cos\alpha & 1\end{pmatrix}\\
&=a^2b^2c^2(1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma)
\end{aligned}$$

よって　$V=\dfrac{1}{6}abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}$　$\cdots$(A)

とくに，等面四面体のとき，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$より

$$\begin{aligned}
&1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\\
&\quad=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\frac{1}{2}(2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\beta-1)-\cos^2\gamma\\
&\quad=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)-\cos^2\gamma\\
&\quad=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\gamma\\
&\quad=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma\\
&\quad=\{2\cos\alpha\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}\cos\gamma\\
&\quad=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma
\end{aligned}$$

よって　$V=\dfrac{1}{3}abc\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$　$\cdots$(B1)

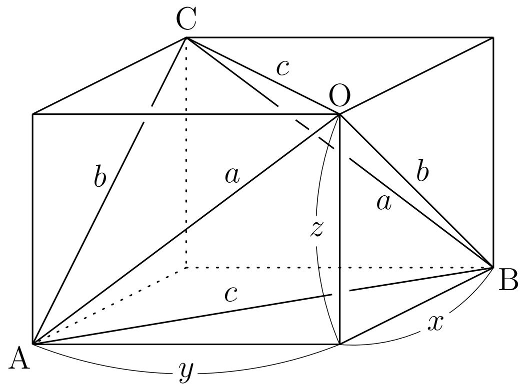
等面四面体において，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ であるから，余弦定理により

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これらを (B1) に代入すると

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\quad\cdots\text{(B2)}$$

また，等面四面体は直方体に埋め込まれるから，(B2) の結果を次のように求めることもできる．
右の図において



$$\begin{aligned}y^2+z^2&=a^2\\ z^2+x^2&=b^2\\ x^2+y^2&=c^2\end{aligned}$$

したがって

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

V は直方体の体積から 4 つの直角四面体を引いたものであるから

$$\begin{aligned}V&=xyz-4\cdot\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz\\ &=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\\ &=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\end{aligned}$$

本題において，$\mathrm{TM}=2$，$\mathrm{TQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(t-2)^2+3t^2}$，$\mathrm{TR}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(t+2)^2+3t^2}$
$a=\mathrm{TM}$，$b=\mathrm{TQ}$，$c=\mathrm{TR}$ とおくと

$$a^2=4,\quad b^2=t^2-t+1,\quad c^2=t^2+t+1$$

これらを (B2) に代入すると

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(2t^2-2)(4+2t)(4-2t)}=\frac{1}{3}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}$$

東北大理系 2013 年

四面体 OABC において，OA $=$ OB $=$ OC $=1$ とする．$\angle$AOB $=60^\circ$，$\angle$BOC $=45^\circ$，$\angle$COA $=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) CH の長さを求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

解答 (1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$ は平面 OAB 上のベクトルで $\vec{a}$ に垂直．

これと平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{\vec{c}(\vec{a}-2\vec{b})}{\sqrt{3}}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$$

(2) (1) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right|^2=\frac{2}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})-\frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{2}{9}\cdot3-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}+1=\frac{1}{3}\quad \text{よって}\quad \mathrm{CH}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

四面体 OABC の体積は $\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

別解 (A) により $V=\dfrac{1}{6}\sqrt{1+2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$ ■

6 (1)
$$\begin{aligned} n &= m + (m+1) + \cdots + (m+k-1) \\ &= \frac{1}{2}k\{m + (m+k-1)\} = \frac{k}{2}(2m+k-1) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

(十分性) n が k-連続和，すなわち，自然数 n が $(*)$ を満たす自然数 m，k をもつとき $(k \geqq 2)$

$$\frac{n}{k} = m + \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad m = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$$

m は自然数であるから，(A) は成立する．さらに m は自然数であるから

$$\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{k} \geqq \frac{k+1}{2} > \frac{k}{2}$$

k は自然数であるから $(k \geqq 2)$　$2n > k^2$　よって，(B) は成立する．

(必要性) 条件 (A)，(B) をみたすとき

$$\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2n-k^2}{2k} + \frac{1}{2} > 0$$

は自然数であるから，これを m' とおくと

$$m' = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad n = \frac{1}{2}k(2m'+k-1)$$

したがって　　$n = m' + (m'+1) + \cdots + (m'+k-1)$

よって，n は k-連続和である．

(2) 2^f が k-連続和と仮定すると，(A) より次式を満たす整数 m が存在する．

$$m = \frac{2^f}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad k(2m+k-1) = 2^{f+1}$$

k と $2m+k-1$ は偶奇が異なるから $(k \neq 1)$

$$k = 2^{f+1}, \quad 2n + k - 1 = 1$$

また，(B) より　$2 \cdot 2^f > k^2$　ゆえに　$2^{f+1} > k^2$

このとき　$k > k^2$　ゆえに　$k(k-1) < 0$

これは，$k \geqq 2$ に反するから，不適．

よって，$n = 2^f$ のとき (f は自然数)，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しない

(3) p^f が k-連続和であるとき (p は奇素数)，(A) より次式を満たす整数 m が存在する．

$$m = \frac{p^f}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad k(2m+k-1) = 2p^f \quad \cdots (**)$$

また，(B) より　$2p^f > k^2$　ゆえに　$k < \sqrt{2}\,p^{\frac{f}{2}}$　$\cdots$①

$(**)$ より，k と $2m+k-1$ は偶奇が異なる．

(i) k が奇数のとき　$k = p^i$　$(i = 1, 2, \cdots, \left[\frac{f}{2}\right])$

(ii) k が偶数のとき　$k = 2p^j$　$(j = 0, 1, \cdots, \left[\frac{f-1}{2}\right])$

ここで，$[x]$ は，x を超えない最大の整数とする．

したがって　(i) の場合が $\left[\frac{f}{2}\right]$ 個

(ii) の場合が $\left[\frac{f-1}{2}\right] + 1 = \left[\frac{f+1}{2}\right]$ 個．

よって，求める個数は　$\left[\frac{f}{2}\right] + \left[\frac{f+1}{2}\right] = \boldsymbol{f}$　(個)

注意 上の f を偶奇に分けて処理してもよい．

補足 n を自然数，a を整数とすると　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a+k}{n} \right] = a$

証明 $a \equiv 0 \pmod{n}$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a+k}{n} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} = a$$

整数 j $(1 \leqq j \leqq n-1)$ について $a + j \equiv 0 \pmod{n}$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a+k}{n} \right] &= \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{a+j}{n} - 1 \right) + \sum_{k=j}^{n-1} \frac{a+j}{n} \\
&= j\left(\frac{a+j}{n} - 1 \right) + (n-j)\frac{a+j}{n} \\
&= a
\end{aligned}$$

発展

m と n は互いに素である正の整数とするとき，次式が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\,\frac{km}{n}\,\right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数とする．

証明 m を n で割った商を q，余りを r とすると

$$m=nq+r \tag{2.1}$$

が成り立つ $(1\leqq r<n)$．k を正の整数とすると

$$\frac{km}{n}=kq+\frac{kr}{n}\quad\text{すなわち}\quad\left[\,\frac{km}{n}\,\right]=kq+\left[\,\frac{kr}{n}\,\right]$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kq=\frac{1}{2}qn(n-1)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\,\frac{km}{n}\,\right]=\frac{1}{2}qn(n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\,\frac{kr}{n}\,\right] \tag{2.2}$$

(2.1) において m と n は互いに素であるから，ユークリッドの互除法により，n と r は互いに素である．

$1\leqq k, k'\leqq n-1$ のとき，kr と $k'r$ を n で割った余りが等しいとき

$$kr-k'r=(k-k')r$$

は n の倍数で，r と n が互いに素であることから　$k=k'$

すなわち，r, $2r$, $3r$, $\cdots$, $(n-1)r$ を n で割った余りは，順序を無視して 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$ である．

kr を n で割った余りを d_k とすると $(1 \leq d_k < n)$

$$\frac{kr}{n} = \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] + \frac{d_k}{n}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} d_k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{kr}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} d_k$$
$$\frac{1}{2}r(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] + \frac{1}{2}(n-1)$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] = \frac{1}{2}(r-1)(n-1) \tag{2.3}$$

(2.3) を (2.2) に代入すると，(2.1) により

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{km}{n}\ \right] &= \frac{1}{2}qn(n-1) + \frac{1}{2}(r-1)(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(nq+r-1)(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(m-1)(n-1)\end{aligned}$$

証終

ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m \mid n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記すると

$$(x, y) \mid x, \quad (x, y) \mid y$$

が成り立つ．

ユークリッドの互除法

2 整数 a，b について ($a > b > 0$)，a を b で割ったときの商を q，余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = (b, c)$$

$$c = 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = b$$

証明 $\underline{c \neq 0 \text{ のとき}}$，$a = bq + c$ より　$(b, c) \mid a$　また，$(b, c) \mid b$ であるから，(b, c) は a と b の公約数，したがって

$$(b, c) \mid (a, b) \quad \cdots ①$$

同様に，$c = a - bq$ より　$(a, b) \mid c$　また，$(a, b) \mid b$ であるから，(a, b) は b と c の公約数，したがって

$$(a, b) \mid (b, c) \quad \cdots ②$$

①，② より　　$(a, b) = (b, c)$

$\underline{c = 0 \text{ のとき}}$，自明．　証終

補足 さらに，b を c で割った余りが d であるとき　$(b, c) = (c, d)$

すなわち　　$(a, b) = (b, c) = (c, d)$

2 つの整数 a_1，a_2 について ($a_1 > a_2 > 0$)，a_1 を a_2 で割った余りを a_3，さらに，a_2 を a_3 で割った余りを a_4，順次，a_k を a_{k+1} で割った余りを a_{k+2} とすると

$$(a_1, a_2) = (a_2, a_3) = (a_3, a_4) = \cdots = (a_k, a_{k+1}) = (a_{k+1}, a_{k+2}) = \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから，互除法を繰り返すことにより，a_1 と a_2 の最小公倍数を求めることができる． ■

2.2　2016年(150分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 鋭角三角形△ABCにおいて，頂点A，B，Cから各対辺に垂線AD，BE，CFを下ろす．これらの垂線は垂心Hで交わる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 四角形BCEFとAFHEが円に内接することを示せ．

(2) $\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ADF}$であることを示せ．

2 以下の問いに答えよ．

(1) 6以上の整数nに対して不等式

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ．

(2) 等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組$(p,\ q)$をすべて求めよ．

3 サイコロを3回振って出た目の数をそれぞれ順に$a,\ b,\ c$とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b,\ c$がある直角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ．

(2) $a,\ b,\ c$がある鈍角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ．

4 多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき，係数 $a_0, \ldots, a_7$ をすべて求めよ．

(2) $0 < \theta < \pi$ に対して，

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1) で求めた a_1，a_3，a_5，a_7 を用いて，多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える．$\theta = \dfrac{\pi}{7}$ として，$k = 1, 2, 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく．このとき，$Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し，$x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ．

5 空間内に，直線 l で交わる 2 平面 α，β と交線 l 上の 1 点 O がある．さらに，平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を，どちらも点 O を通り l に垂直にとる．m，n 上にそれぞれ点 P，Q があり，

$$\mathrm{OP} = \sqrt{3}, \quad \mathrm{OQ} = 2, \quad \mathrm{PQ} = 1$$

であるとする．線分 PQ 上の動点 T について，$\mathrm{PT} = t$ とおく．点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ．

(2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく．T が線分 PQ 上を動くとき，$f(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

6 関数

$$f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t-x) - \sin 2t|\, dt$$

の区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ．

解答例

1 (1) $\angle\mathrm{BEC} = \angle\mathrm{BFC}$ より，四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する．
$\angle\mathrm{AEH} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{AFH}\ 90^\circ$ であるから，$\angle\mathrm{AEH} + \angle\mathrm{AFH} = 180$ より，四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する．

(2) $\triangle\mathrm{HCE}$ と $\triangle\mathrm{HBF}$ において

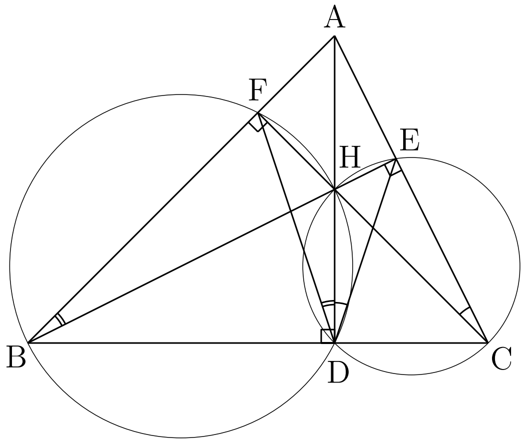
$$\angle\mathrm{CHE} = \angle\mathrm{BHF} \quad (\text{対頂角}),$$
$$\angle\mathrm{HEC} = \angle\mathrm{HFB} \quad (\mathrm{H}\ \text{は}\ \triangle\mathrm{ABC}\ \text{の垂心})$$

したがって　$\triangle\mathrm{HCE} \backsim \triangle\mathrm{HBF}$　ゆえに　$\angle\mathrm{HCE} = \angle\mathrm{HBF}$　$\cdots$①

四角形 ECDH の対角の和が 180° であるから四角形 ECDH は円に内接し，円周角の定理により　$\angle\mathrm{HCE} = \angle\mathrm{HDE}$　$\cdots$②

四角形 FBDH の対角の和が 180° であるから四角形 FBDH は円に内接し，円周角の定理により　$\angle\mathrm{HBF} = \angle\mathrm{HDF}$　$\cdots$③

①，②，③ より　$\angle\mathrm{HDE} = \angle\mathrm{HDF}$　よって　$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ADF}$



2 (1) $$2^n > n^2 + 7 \quad \cdots (\mathrm{A})$$

［1］$n = 6$ のとき，左辺 $= 2^6 = 64$，右辺 $= 6^2 + 7 = 43$
このとき，(A) は成立する．

［2］$n = k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$2^k > k^2 + 7$ であるから

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &> 2(k^2+7) = (k+1)^2 + 7 + (k-1)^2 + 5 \\ &> (k+1)^2 + 7 \end{aligned}$$

したがって，$n = k + 1$ のとき，(A) は成立する．
［1］，［2］より，6 以上の整数 n に対して，不等式 (A) は成立する．

(2) $p^q = q^p + 7$ より　$p^q - q^p = 7 \quad \cdots (*)$
$(*)$ を満たす素数 p，q の偶奇は異なるから (p，q の一方は 2)

$$f(n) = 2^n - n^2$$

とおいて，$f(n) = \pm 7$ を満たす素数 n を求めればよい．
(1) の結果から，6 以上の整数 n に対して，$f(n) > 7$ であるから

$$n = 3,\ 5$$

の場合を調べればよい．

$$f(3) = 2^3 - 3^2 = -1, \quad f(5) = 2^5 - 5^2 = 7$$

上の結果から，求める素数の組は　$\boldsymbol{(p,\ q) = (2,\ 5)}$ ■

3 (1) 直角三角形となる 3 辺の長さは，3，4，5 であるから，求める確率は

$$\frac{3!}{6^3} = \boldsymbol{\frac{1}{36}}$$

(2) a を最大辺とする鈍角三角形の条件は　$b + c > a, \quad b^2 + c^2 < a^2$
上式を満たすのは，次の 13 組．

$a = 3$ のとき　$(b,\ c) = (2,\ 2)$
$a = 4$ のとき　$(b,\ c) = (2,\ 3),\ (3,\ 2)$
$a = 5$ のとき　$(b,\ c) = (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$
$a = 6$ のとき　$(b,\ c) = (2,\ 5),\ (5,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),$
$(3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (4,\ 4)$

b，c が最大辺であるときも，それぞれ 13 組．
よって，求める確率は　$\dfrac{13 \times 3}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{13}{72}}$ ■

$\boxed{4}$ (1)
$$(x+i)^7-(x-i)^7=\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}i^k-\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}(-i)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{7}\{i^k-(-i)^k\}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}$$

ここで
$$i^k=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}$$
$$(-i)^k=\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k=\cos\frac{k\pi}{2}-i\sin\frac{k\pi}{2}$$

上の 2 式より，$i^k-(-i)^k=2i\sin\dfrac{k\pi}{2}$ であるから
$$(x+i)^7-(x-i)^7=2i\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}\sin\frac{k\pi}{2}$$
$$P(x)=\frac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}=\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$P(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{7}a_k x^{7-k}$ であるから　$a_k={}_7\mathrm{C}_k\sin\dfrac{k\pi}{2}$　$(k=0,1,2,\ldots,7)$

よって　$\boldsymbol{a_0=0,\ a_1=7,\ a_2=0,\ a_3=-35,}$
$\boldsymbol{a_4=0,\ a_5=21,\ a_6=0,\ a_7=-1}$

(2) $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$ より
$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\right)^7\right\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7\right\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\left\{(\cos 7\theta+i\sin 7\theta)-(\cos 7\theta-i\sin 7\theta)\right\}=\frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

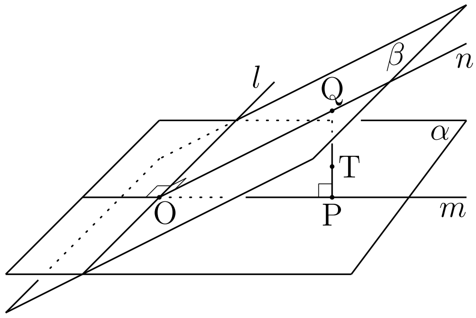
(3) $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，(2) の結果から　$P\left(\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right)=0$　$(k=1,2,3)$

$P(x)=Q(x^2)$ であるから　$Q\left(\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}\right)=0$　$(k=1,2,3)$

$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ $(k=1,2,3)$ は 3 次方程式 $a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7=0$ の解であるから，解と係数の関係により
$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_3}{a_1}=-\frac{-35}{7}=\boldsymbol{5}$$
■

5 (1) $\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$ より，
△OPQ について

$\angle\mathrm{O}=30^\circ,\quad \angle\mathrm{P}=90^\circ,\quad \angle\mathrm{Q}=60^\circ$



右の図から，直線 PT は平面 α と垂直であるから，$\mathrm{PT}=t$ より，T から α までの距離は t

したがって，S と α の切り口は，半径

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2-t^2}=\sqrt{2-t^2}$$

の円である．したがって，その面積は　$\pi(\sqrt{2-t^2})^2=\boldsymbol{\pi(2-t^2)}$

(2) $\mathrm{QT}=\mathrm{PQ}-\mathrm{PT}=1-t$ より，T から平面 β までの距離を d とすると

$$d=\mathrm{QT}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)$$

したがって，S と β の切り口は，半径

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2-d^2}=\sqrt{2-\frac{3}{4}(1-t)^2}$$

の円であり，その面積は　$\pi\left\{2-\frac{3}{4}(1-t)^2\right\}$

これと (1) の結果から

$$\begin{aligned}
f(t)&=\pi(2-t^2)+\pi\left\{2-\frac{3}{4}(1-t)^2\right\}\quad(0\leqq t\leqq 1)\\
&=\pi\left(-\frac{7}{4}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{13}{4}\right)\\
&=\pi\left\{-\frac{7}{4}\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{25}{7}\right\}
\end{aligned}$$

よって，$f(t)$ は $\boldsymbol{t=\frac{3}{7}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{25}{7}\pi}$ をとる．■

6 $g(t)=\sin 2t-\sin(t-x)$ とおくと　$g(t)=2\sin\dfrac{t+x}{2}\cos\dfrac{3t-x}{2}$

$0\leqq t\leqq\pi$，$0\leqq x\leqq\pi$ より，$0\leqq\dfrac{t+x}{2}\leqq\pi$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{3t-x}{2}\leqq\dfrac{3\pi}{2}$ であるから

$\dfrac{3t-x}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi+x}{3}$ のとき　$g(t)\geqq 0$

$\dfrac{3t-x}{2}\geqq\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\dfrac{\pi+x}{3}\leqq t\leqq\pi$ のとき　$g(t)\leqq 0$

ゆえに　$|\sin(t-x)-\sin 2t|=|g(t)|=\begin{cases} g(t) & \left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi+x}{3}\right) \\ -g(t) & \left(\dfrac{\pi+x}{3}\leqq t\leqq\pi\right)\end{cases}$

$g(t)$ の原始関数の 1 つを

$$G(x)=-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos(t-x)\qquad\cdots(*)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_0^{\pi}|\sin(t-x)-\sin 2t|\,dt=\int_0^{\pi}|g(t)|\,dt \\ &=\int_0^{\frac{\pi+x}{3}}g(t)\,dt-\int_{\frac{\pi+x}{3}}^{\pi}g(t)\,dt \\ &=\Big[\,G(t)\,\Big]_0^{\frac{\pi+x}{3}}-\Big[\,G(t)\,\Big]_{\frac{\pi+x}{3}}^{\pi} \\ &=2G\left(\frac{\pi+x}{3}\right)-G(0)-G(\pi)\end{aligned}$$

$(*)$ より

$$G\left(\frac{\pi+x}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos\frac{2(\pi+x)}{3}+\cos\frac{\pi-2x}{3}=\frac{3}{2}\cos\frac{2x-\pi}{3},$$

$$G(0)=-\frac{1}{2}+\cos x,\quad G(\pi)=-\frac{1}{2}+\cos(\pi-x)=-\frac{1}{2}-\cos x$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x)&=2\times\frac{3}{2}\cos\frac{2x-\pi}{3}-\left(-\frac{1}{2}+\cos x\right)-\left(-\frac{1}{2}-\cos x\right) \\ &=3\cos\frac{2x-\pi}{3}+1\end{aligned}$$

よって　$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 **4**，$x=0,\ \pi$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$　■

2.3　2017 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 a，b を実数とする．$y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし，$y = ax + b$ で表される直線を l とする．

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a，b の条件を求めよ．

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ．

2 A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている．2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする．取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残りの 2 枚のカードに書かれた数の合計とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ．

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数でない確率を求めよ．

3 a，b，c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする．

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ．

(2) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が少なくとも一つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ．

4 s を正の実数とする．鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする．線分 CD と線分 AE の交点を F とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ．

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする．FG の長さが最大となるときの s を求めよ．

5　α，β，γ を複素数とし，

$$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \qquad \cdots(*)$$

を満たす複素数 z を考える．以下の問いに答えよ．

(1) z は

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$$

を満たすことを示せ．

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ と仮定し，また γ は負の実数であると仮定する．このとき，$(*)$ を満たす z がちょうど2個あるための必要条件を α，β を用いて表せ．

6　a，b，c を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく．ただし，$a\neq 0$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ．

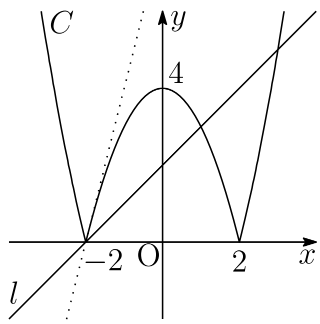
(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ．

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$$

解答例

1 (1) $y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & (x \leqq -2,\ 2 \leqq x) \\ -x^2 + 4 & (-2 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$



$l : y = ax + b$ は点 $(-2,\ 0)$ を通るから

$$0 = -2a + b \quad ゆえに \quad b = 2a$$

$f(x) = -x^2 + 4$ とすると　$f'(x) = -2x$

$f'(-2) = 4$ であるから，l の傾きについて

$$0 < a < 4$$

よって，求める条件は　$\boldsymbol{b = 2a\ (0 < a < 4)}$

(2) 条件を満たすのは，次の (i)〜(iii) の場合である．

(i) 点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつとき，
(1) で得られた結果から　$b = 2a\ (0 < a < 4)$

(ii) 点 $(2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつとき，
$y = |x^2 - 4|$ の y 軸に関する対称性から　$b = -2a\ (-4 < a < 0)$

(iii) l が $y = f(x)\ (-2 < x < 2)$ と接するとき，
$y = f(x)\ (-2 < x < 2)$ 上の点の接線で傾きが a となる x 座標は

$$f'(x) = -2x = a \quad ゆえに \quad x = -\frac{a}{2}$$

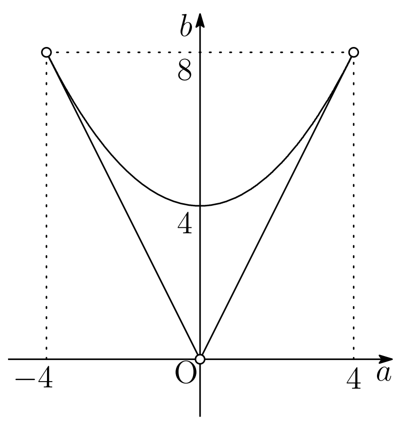
このとき　$-2 < -\dfrac{a}{2} < 2$　すなわち　$-4 < a < 4$

$f\left(-\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4} + 4$ であるから，この接線の方程式は

$$y - \left(-\frac{a^2}{4} + 4\right) = a\left(x + \frac{a}{2}\right) \quad すなわち \quad y = ax + \frac{a^2}{4} + 4$$

これが直線 l の方程式であるから　$b = \dfrac{a^2}{4} + 4 \quad (-4 < a < 4)$

(i)〜(iii) から，点 $(a,\ b)$ が描く軌跡は，次のようになる．■



2 (1) 得点が 3 点となるのは，$\{0,1,2\},\{1,3,5\},\{2,3,4\}$ の 3 通り．

このうち，0 を取り出さないのが 2 通り．

よって，A，B の少なくとも一方が 0 を取り出す確率は

$$\left(\frac{3}{{}_6\mathrm{C}_3}\right)^2-\left(\frac{2}{{}_6\mathrm{C}_3}\right)^2=\left(\frac{3}{20}\right)^2-\left(\frac{2}{20}\right)^2=\frac{9-4}{400}=\boldsymbol{\frac{1}{80}}$$

(2) 0 から 5 の 6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，次の 20 通り．

得点	組合せ	場合の数
2	$\{1,2,3\}$	1
$\frac{7}{3}$	$\{1,2,4\}$	1
$\frac{8}{3}$	$\{1,2,5\}$，$\{1,3,4\}$	2
3	$\{0,1,2\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$	3
$\frac{10}{3}$	$\{1,4,5\}$，$\{2,3,5\}$	2
$\frac{11}{3}$	$\{2,4,5\}$	1
4	$\{0,1,3\}$，$\{3,4,5\}$	2
5	$\{0,1,4\}$，$\{0,2,3\}$	2
6	$\{0,1,5\}$，$\{0,2,4\}$	2
7	$\{0,2,5\}$，$\{0,3,4\}$	2
8	$\{0,3,5\}$	1
9	$\{0,4,5\}$	1

上の表から，A 君，B 君の得点が等しくなる確率は

$$\left(\frac{1}{20}\right)^2\times 5+\left(\frac{2}{20}\right)^2\times 6+\left(\frac{3}{20}\right)^2=\frac{5+24+9}{400}=\frac{19}{200}$$

A 君，B 君それぞれの勝つ確率は等しく　$\frac{1}{2}\left(1-\frac{19}{200}\right)=\frac{181}{400}$

A 君が $\frac{7}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$

A 君が $\frac{8}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{2}{20}\times\frac{1+1}{20}=\frac{4}{400}$

A 君が $\frac{10}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{2}{20}\times\frac{1+1+2+3}{20}=\frac{14}{400}$

A 君が $\frac{11}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{1}{20}\times\frac{1+1+2+3+2}{20}=\frac{9}{400}$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{\frac{1}{400}+\frac{4}{400}+\frac{14}{400}+\frac{9}{400}}{\frac{181}{400}}=\boldsymbol{\frac{28}{181}}$　■

3 (1) $a,\ b\ ,\ c$ が 1 以上 7 以下の互いに異なる整数に対し，2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots(*)$$

の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，2 次方程式 $(*)$ が有理数解をもつとき，D は平方数であることに注意して，次の場合分けを行う．

(i) $b=3$ のとき，$D=9-4ac$ より　$ac=2$　ゆえに次の 2 組

$$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

(ii) $b=4$ のとき，$D=16-4ac$ より　$ac=3$　ゆえに次の 2 組

$$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

(iii) $b=5$ のとき，$D=25-4ac$ より　$ac=4,\ 6$　ゆえに次の 6 組

$$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (4,\ 1),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

(iv) $b=6$ のとき，$D=36-4ac$ より　$ac=5,\ 8,$　ゆえに次の 4 組

$$(a,\ c)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$$

(v) $b=7$ のとき，$D=49-4ac$ より　$ac=6,\ 10,\ 12$　ゆえに次の 10 組

$$\begin{aligned}(a,\ c)=&(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1),\ (2,\ 5),\ (5,\ 2),\\ &(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)\end{aligned}$$

(i)〜(v) より，求める総数は　$2+2+6+4+10=\mathbf{24}$ (組)

(2) (1) で示した場合分けにより，$(b,\ \sqrt{D},\ ac)$ の組合せは次とおりである．

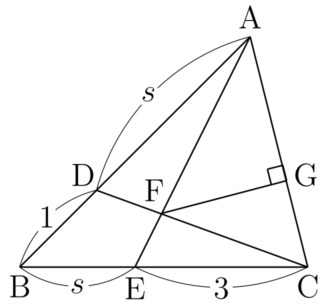
b	3	4	5	5	6	6	7	7	7
$\sqrt{D}$	1	2	3	1	4	2	5	3	1
ac	2	3	4	6	5	8	6	10	12
	○	○	○		○	○	○	○	

2 次方程式 $(*)$ の解の 1 つ $x=-\dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}$ に注目すると，$b+\sqrt{D}$ が $2a$ で割り切れるもの (上に示した○) は，整数解をもつから，残りの場合について整数解を持たない組合せを求める．

- $b=5,\ \sqrt{D}=1,\ ac=6$ のとき，$x=\dfrac{-5\pm1}{2a}$ より，$a=6,\ c=1$
- $b=7,\ \sqrt{D}=1,\ ac=12$ のとき，$x=\dfrac{-5\pm1}{2a}$ より，$a=6,\ c=2$

これと (1) の結果により，求める $(a,\ b,\ c)$ の総数は　$24-2=\mathbf{22}$ (組) ■

4 (1) △ABE と直線 CD について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1$$

したがって　$\mathrm{AF}:\mathrm{FE}=s(s+3):3$

点 E は線分 BC を $s:3$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}}&=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}\\&=\frac{s}{s^2+3s+3}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\frac{3s}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{s^2}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3s}{s^2+3s+3},\quad \beta=\dfrac{s^2}{s^2+3s+3}}$

(2) $\triangle\mathrm{AFC}:\triangle\mathrm{AEC}=\mathrm{AF}:\mathrm{AE}$，$\triangle\mathrm{AEC}:\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{EC}:\mathrm{BC}$ であるから

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}}\triangle\mathrm{AEC}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\triangle\mathrm{AEC},$$
$$\triangle\mathrm{AEC}=\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}$$

上の 2 式から　$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\dfrac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}\triangle\mathrm{ABC}$

$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}$ であるから

$$\mathrm{FG}=\frac{2\triangle\mathrm{AFC}}{\mathrm{AC}}=\frac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$$

$s>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係を用いて

$$\frac{s^2+3s+3}{s}=s+\frac{3}{s}+3\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}+3=2\sqrt{3}+3$$

したがって　$\mathrm{FG}=\dfrac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{3}+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$

FG が最大となる，すなわち，上式において等号が成立するとき

$$s=\frac{3}{s}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{s=\sqrt{3}}$$

■

5 (1) $$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の両辺の共役な複素数は　$z\overline{z}+\overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0 \quad \cdots (\overline{*})$

$(*)-(\overline{*})$ より　$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$

(2) γ は実数であるから，$\gamma=\overline{\gamma}$ を (1) の結果に代入すると

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$$

したがって，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である．これを t とおくと

$$(**) \quad (\alpha-\overline{\beta})z=t \qquad (t \text{ は実数})$$

(i) $\alpha-\overline{\beta}=0$，すなわち，$\alpha=\overline{\beta}$ のとき，$(*)$ から

$$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \quad \text{ゆえに} \quad |z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

$\gamma<0$ であるから，z は点 $-\beta$ を中心と半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の無数の点である．したがって，これは条件に反する．

(ii) $\alpha-\overline{\beta}\neq 0$，すなわち，$\alpha\neq\overline{\beta}$ のとき，$(**)$ より　$z=\dfrac{t}{\alpha-\overline{\beta}} \quad \cdots ①$

これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}+\frac{\alpha t}{\alpha-\overline{\beta}}+\frac{\beta t}{\overline{\alpha}-\beta}+\gamma=0\\ t^2+\alpha(\overline{\alpha}-\beta)t+\beta(\alpha-\overline{\beta})t+|\alpha-\overline{\beta}|^2\gamma=0\\ t^2+(|\alpha|^2-|\beta|^2)t+|\alpha-\overline{\beta}|^2\gamma=0\end{aligned}$$

$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ および $\gamma<0$ であるから，上式を満たす実数 t は

$$t=\pm|\alpha-\overline{\beta}|\sqrt{-\gamma}$$

の 2 個ある．これを ① に代入して

$$z=\pm\frac{|\alpha-\overline{\beta}|\sqrt{-\gamma}}{\alpha-\overline{\beta}}=\pm\frac{\sqrt{-\gamma}}{|\alpha-\overline{\beta}|}(\overline{\alpha}-\beta)$$

このとき，$(*)$ を満たす z はちょうど 2 個ある．

(i)，(ii) より，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{\alpha\neq\overline{\beta}}$

解説　$z=x+yi$，$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とおいて，これらを $(*)$ に代入すると

$$x^2+y^2+(a+bi)(x+yi)+(c+di)(x-yi)+\gamma=0$$
$$x^2+y^2+(a+c)x+(-b+d)y+\frac{\gamma+\overline{\gamma}}{2}$$
$$+\left\{(b+d)x+(a-c)y+\frac{\gamma-\overline{\gamma}}{2i}\right\}i=0$$

したがって，$z=x+yi$ は，次の方程式の解である．

$$\begin{cases} x^2+y^2+(a+c)x+(-b+d)y+\dfrac{\gamma+\overline{\gamma}}{2}=0 \\ (b+d)x+(a-c)y+\dfrac{\gamma-\overline{\gamma}}{2i}=0 \end{cases}$$

とくに γ が負の実数であるとき，上の第1式は原点を内部にもつ円を表す．

$$\left(x+\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(y+\frac{-b+d}{2}\right)^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{-b+d}{2}\right)^2-\gamma$$

第2式は原点を通る直線を表す．したがって，z はこの円と直線の共有点であるから，$(*)$ を満たす z がちょうど2個ある．

ただし，$b+d=a-c=0$ のとき，第2式は複素数平面上のすべての点であるから，z は第1式の円を表し，無数の z が存在する．

$$a=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2},\quad b=\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i},\quad c=\frac{\beta+\overline{\beta}}{2},\quad d=\frac{\beta-\overline{\beta}}{2i}$$

であるから，このとき

$$\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}+\frac{\beta-\overline{\beta}}{2i}=0,\quad \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}-\frac{\beta+\overline{\beta}}{2}=0$$

ゆえに　$\alpha-\overline{\beta}-\overline{\alpha-\overline{\beta}}=0,\quad \alpha-\overline{\beta}+\overline{\alpha-\overline{\beta}}=0$　すなわち　$\alpha=\overline{\beta}$

よって，求める必要十分条件は　　$\alpha\neq\overline{\beta}$　■

6 (1)

$$(e^{ax}\sin bx)' = e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

$$(e^{ax}\cos bx)' = e^{ax}(-b\sin bx + a\cos bx)$$

上の 2 式から，$\{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)\}' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$ より

$$\begin{aligned} I(a,\ b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\Big[\ e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{b}{a^2+b^2}e^{\frac{a\pi}{2}}\sin\frac{b\pi}{2} + \frac{a}{a^2+b^2}\left(e^{\frac{a\pi}{2}}\cos\frac{b\pi}{2} - 1\right)} \end{aligned}$$

(2) $\sin bx\sin cx = \dfrac{1}{2}\{\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\}$ より

$$\begin{aligned} J(a,\ b,\ c) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\{I(a,\ b-c) - I(a,\ b+c)\}} \end{aligned}$$

(3) $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ であるから

$$2\cos 4tx\sin tx = \sin 5tx - \sin 3tx$$

$$2\cos 3tx\sin 2tx = \sin 5tx - \sin tx$$

上の 2 式の辺辺をそれぞれ掛けさらに 2 倍すると

$$\begin{aligned} &8\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx \\ &\quad = 2(\sin 5tx - \sin 3tx)(\sin 5tx - \sin tx) \\ &\quad = 2\sin^2 5tx - 2\sin 5tx\sin tx \\ &\qquad\qquad - 2\sin 5tx\sin 3tx + 2\sin 3tx\sin tx \\ &\quad = 1 - \cos 10tx - (\cos 4tx - \cos 6tx) \\ &\qquad\qquad - (\cos 2tx - \cos 8tx) + (\cos 2tx - \cos 4tx) \\ &\quad = 1 - 2\cos 4tx + \cos 6tx + \cos 8tx - \cos 10tx \end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx\,dx$$
$$= \left[\ e^x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2I(1,\ 4t) + I(1,\ 6t) + I(1,\ 8t) - I(1,\ 10t)$$

(1) の結果より，$\lim_{b\to\infty} I(1,\ b) = 0$ に注意すると

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx\,dx = \left[\ e^t\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}$$

■

2.4　2018 年 (150 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ xy 平面における 2 つの放物線 $C : y = (x-a)^2 + b$，$D : y = -x^2$ を考える．

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ．

(2) 実数 a，b が (1) の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を 2 以上，a を 1 以上の整数とする．箱の中に，1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ，合計 n 枚入っている．この箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行を a 回繰り返す．ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする．

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ．

(2) $p(2)$ を求めよ．

(3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 整数 a，b は等式

$$3^a - 2^b = 1 \quad \cdots ①$$

を満たしているとする．

(1) $a,\ b$ はともに正となることを示せ．

(2) $b > 1$ ならば，a は偶数であることを示せ．

(3) ① を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 三角形 ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とし，$h = \dfrac{r}{R}$ とする．また，$\angle \mathrm{A} = 2\alpha$，$\angle \mathrm{B} = 2\beta$，$\angle \mathrm{C} = 2\gamma$ とおく．

(1) $h = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ となることを示せ．

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leqq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

(3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

5 α を複素数とする．複素数 z の方程式

$$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \quad \cdots ①$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位である．

(1) 方程式 ① が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ．

(2) 方程式 ① が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする．原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ．

6 xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x + y^2 \leqq 2 \\ x + y \geqq 0 \\ x - y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える．図形 S を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする．

(1) S を xy 平面に図示せよ．

(2) V を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) C と D の方程式から y を消去して整理すると　$2x^2 - 2ax + a^2 + b = 0$

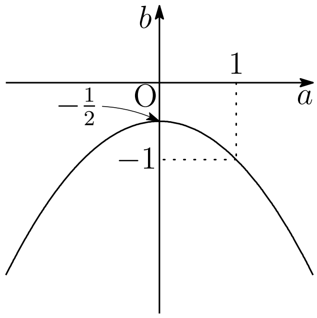
2 交点の x 座標は　$x = \dfrac{a \pm \sqrt{-a^2 - 2b}}{2}$　$\cdots$①

2 交点の x 座標の差が 1 であるから

$$\frac{a + \sqrt{-a^2 - 2b}}{2} - \frac{a - \sqrt{-a^2 - 2b}}{2} = 1$$

ゆえに　$\sqrt{-a^2 - 2b} = 1$　$\cdots$②

よって　$\boldsymbol{b = -\dfrac{1}{2}a^2 - \dfrac{1}{2}}$　(右図)



(2) 2 交点の x 座標を α，β とすると $(\alpha < \beta)$ とすると，①，② より

$$\alpha = \frac{a - 1}{2}, \quad \beta = \frac{a + 1}{2} \quad \cdots (*)$$

2 交点は D 上の点であるから，$\mathrm{A}(\alpha, -\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta, -\beta^2)$ とする．

2 点 A，B を通る直線 l の方程式は　$y + \alpha^2 = \dfrac{-\beta^2 + \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$

ゆえに　$y = -(\alpha + \beta)x + \alpha\beta$　$(*)$ により　$l : y = -ax + \dfrac{a^2 - 1}{4}$

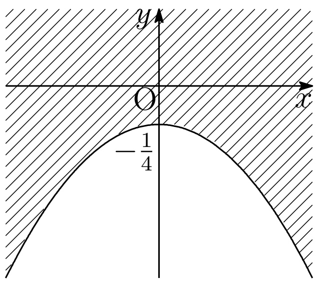
直線 l の方程式を a について整理すると

$$a^2 - 4xa - 4y - 1 = 0 \quad \cdots (**)$$

直線 l が通過する点 $(x,\ y)$ は，a に関する 2 次方程式 $(**)$ が実数解をもつときであるから，$(**)$ の係数について

$$D/4 = (-2x)^2 - 1 \cdot (-4y - 1) \geqq 0$$

したがって　$y \geqq -x^2 - \dfrac{1}{4}$



よって，求める領域は，放物線 $y = -x^2 - \dfrac{1}{4}$ の上側で，境界線を含む (上図).

補足 C，D の交点を通る放物線・直線の方程式は (k は定数)

$$(x - a)^2 - y + b + k(x^2 + y) = 0$$

$k \neq -1$ のとき放物線，$k = -1$ のとき直線となるから，$k = -1$ より

$$(x - a)^2 - y + b - (x^2 + y) = 0 \quad \text{すなわち} \quad y = -ax + \frac{a^2}{2} + \frac{b}{2}$$

これに (1) の結果を代入すると，直線 l の方程式を得る． ■

2 (1) $p(1)$ は，1 回で札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目に n の番号札を取り出す確率であるから

$$p(1) = \boldsymbol{\frac{1}{n}}$$

$p(n)$ は，n 回目で初めて札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目から $n-1$ 回目まで 1 の番号札を取り出す確率であるから (n 回目は任意の札)

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{n^{n-1}}}$$

(2) 1 回目が k の札を取り出すとすると ($k = 1, 2, \cdots, n-1$)，2 回目が $n-k$ 以上の札取り出す $k+1$ 通り．したがって

$$\begin{aligned} p(2) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2n^2}(n-1)(n+2)} \end{aligned}$$

(3) 2 回目の試行の直後，取り出した札の和が k となるのは ($k = 2, 3, \cdots, n-1$)

$$(1\text{ 回目},\ 2\text{ 回目}) = (j,\ k-j) \quad (j = 1, 2, \cdots, k-1)$$

の $k-1$ 通りで，3 回目の札が $n-k$ 以上である $k+1$ 通り．したがって

$$\begin{aligned} p(3) &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)(k+1) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1) \\ &= \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - (n-1)\right\} \\ &= \frac{1}{6n^3}(n-1)\{n(2n-1)-6\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6n^3}(n-1)(n-2)(2n+3)} \end{aligned}$$

■

$\boxed{3}$ (1)　　$3^a - 2^b = 1 \quad \cdots ①$

①より　$3^a = 2^b + 1 > 1$　ゆえに　$a \geqq 1$

さらに　$2^b = 3^a - 1 \geqq 3^1 - 1 = 2$　ゆえに　$b \geqq 1$

よって，a，b はともに正である．

(2) 法 4 について　$3 \equiv -1,\ 4 \equiv 0 \pmod 4$

$b > 1$ のとき $(b \geqq 2)$　$3^a - 4{\cdot}2^{b-2} = 1$　ゆえに　$(-1)^a \equiv 1 \pmod 4$

よって，$b > 1$ ならば，a は偶数である．

(3) $b = 1$ のとき，①より　$3^a - 2 = 1$　ゆえに　$a = 1$

$b > 1$ のとき，(2) の結果から，$a = 2n \cdots ②$ とおくと (n は自然数)

$$3^{2n} - 2^b = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (3^n + 1)(3^n - 1) = 2^b$$

$3^n + 1 = 2^k$，$3^n - 1 = 2^l$ とおくと (k，l は自然数)　$b = k + l \cdots ③$

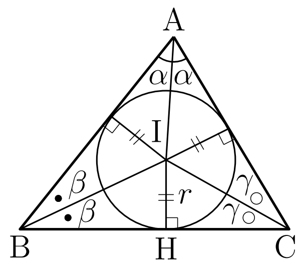
$$2^k - 2^l = (3^n + 1) - (3^n - 1) = 2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^l(2^{k-l} - 1) = 2$$

$2^{k-l} - 1$ は奇数であるから　$2^l = 2,\ 2^{k-l} - 1 = 1$

ゆえに　$k = 2,\ l = 1,\ n = 1$　②，③より　$a = 2,\ b = 3$

よって　　$\boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 1),\ (2,\ 3)}$　■

$\boxed{4}$ (1) △ABC の内心 I から辺 BC に垂線 IH を下ろすと



$$\mathrm{BH} = \frac{r}{\tan\beta}, \quad \mathrm{CH} = \frac{r}{\tan\gamma}$$

$a = \mathrm{BC} = \mathrm{BH} + \mathrm{CH}$ より

$$a = r\left(\frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma}\right) = r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$
$$= \frac{r(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{r\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

このとき，$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin(\beta+\gamma) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

したがって　　$a = \dfrac{r\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} \quad \cdots ①$

また，正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin 2\alpha} = 2R$

したがって　　$a = 2R\sin 2\alpha = 4R\sin\alpha\cos\alpha \quad \cdots ②$

①，②より　$\dfrac{r\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 4R\sin\alpha\cos\alpha$　よって　$h = \dfrac{r}{R} = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

(2) $2\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ とすると，$\gamma = \dfrac{\pi}{4}$，$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$ であるから，(1) の結果から

$$\begin{aligned} h &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta \\ &= \sqrt{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\} \\ &= \sqrt{2}\cos(\alpha-\beta) - 1 \leqq \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

等号が成立するとき　$\cos(\alpha-\beta) = 1$　ゆえに　$\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{8}$

よって，△ABC は**直角二等辺三角形.**

(3) (2) と同様にして

$$\begin{aligned} h &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}\sin\gamma \\ &= 2\{\cos(\alpha-\beta) - \sin\gamma\}\sin\gamma \\ &= -2\left\{\sin\gamma - \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right\}^2 + \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) \leqq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

等号が成り立つとき

$$\sin\gamma - \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) = 0, \quad \cos(\alpha-\beta) = 1$$

α，β，γ は，鋭角であるから，上式より　$\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{6}$

よって，△ABC は**正三角形.**

別解 γ を固定し，$h = f(\alpha)$ とすると，$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \gamma - \alpha$ より

$$\frac{d}{d\alpha}\sin\beta = \cos\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = -\cos\beta$$

であることに注意して

$$f'(\alpha) = 4\{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha(-\cos\beta)\}\sin\gamma = 4\sin(\beta-\alpha)\sin\gamma$$

α	(0)	$\cdots$	β	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2}-\gamma)$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって，$\alpha = \beta$，$\gamma = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta$ のとき極大となる

$$\begin{aligned} f(\beta) &= 4\sin^2\beta\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = 2(1-\cos 2\beta)\cos 2\beta \\ &= -2\left(\cos 2\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

上式において，等号が成立するとき　$\cos 2\beta = \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\beta = \dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{6}$ ■

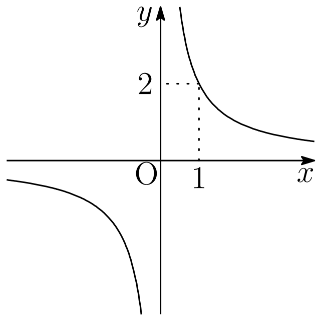
5 (1) $$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \quad \cdots ①$$

方程式 ① がもつ実数解を k とすると，$k \neq 0$ に注意して

$$k^2 - \alpha k + 2i = 0 \quad ゆえに \quad \alpha = k + \frac{2i}{k}$$

$\alpha = x + yi$ とおくと ($x,\ y$ は実数)

$$x = k,\quad y = \frac{2}{k} \quad ゆえに \quad xy = 2$$



よって，α の描く図形は，右の図の双曲線である．

(2) ① の解が絶対値 1 の複素数であるとき，

$$\alpha = z + \frac{2i}{z} = z + 2i\overline{z}$$

その解を $z = s + ti$ とおくと ($s^2 + t^2 = 1$)

$$\alpha = (s + ti) + 2i(s - ti) = (s + 2t) + (2s + t)i$$

α を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点が β であるから

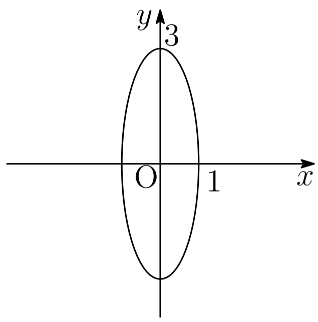
$$\beta = \alpha\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(s + 2t) + (2s + t)i\}(1 + i)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(-s + t) + 3(s + t)i\}$$

$\beta = x + yi$ とおくと　$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-s + t),\quad y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}(s + t)$

したがって　$s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-x + \dfrac{y}{3}\right)$，$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \dfrac{y}{3}\right)$

これらを $s^2 + t^2 = 1$ に代入して整理すると

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$



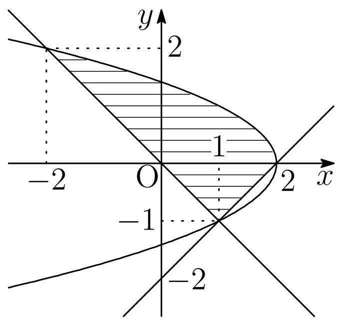
よって，β の描く図形は，右の図の楕円である．

■

6 (1) xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x + y^2 \leqq 2 \\ x + y \geqq 0 \\ x - y \leqq 2 \end{cases}$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) 直線 $x + y = 0$ に平行な単位ベクトルと垂直な単位ベクトル，それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，この向きに X 軸，Y 軸を定め，次の直交変換を行う．

$$\frac{X}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

すなわち　$\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} = x, \quad \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}} = y$

ゆえに　$X = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$

このとき，次の対応をなす．

$(x,\ y) = (-2,\ 2)$ は　$(X,\ Y) = (-2\sqrt{2},\ 0)$，

$(x,\ y) = (2,\ 0)$　は　$(X,\ Y) = (\sqrt{2},\ \sqrt{2})$．

放物線 $x = -y^2 + 2$ $(0 \leqq y \leqq 2)$ は，この直交変換により

$$X = \frac{-y^2 - y + 2}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{-y^2 + y + 2}{\sqrt{2}}$$

y	$2 \longrightarrow 0$
X	$-2\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2}$

求める回転体の体積 V は，$\dfrac{dX}{dy} = \dfrac{-2y-1}{\sqrt{2}}$ により

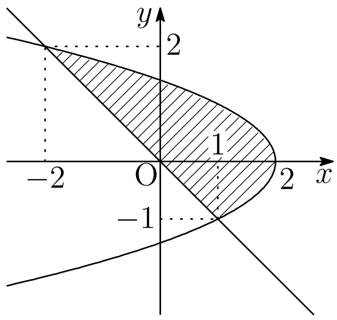
$$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\,dX = \pi\int_2^0 \left(\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{-2y-1}{\sqrt{2}}\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^2 (-y^2+y+2)^2(2y+1)\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^2 (2y^5 - 3y^4 - 8y^3 + 5y^2 + 12y + 4)\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{y^6}{3} - \frac{3y^5}{5} - 2y^4 + \frac{5y^3}{3} + 6y^2 + 4y\right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi}$$

補足 xy 平面おける領域



$$T : \begin{cases} x + y^2 \leqq 2 \\ x + y \geqq 0 \end{cases}$$

の面積を求める．前ページの直交変換により
このとき，次の対応をなす．

$(x,\ y) = (-2,\ 2)$ は　$(X,\ Y) = (-2\sqrt{2},\ 0)$,
$(x,\ y) = (1, -1)$　は　$(X,\ Y) = (\sqrt{2},\ 0)$.

放物線 $x = -y^2 + 2$ $(-1 \leqq y \leqq 2)$ は，この直交変換により

$$X = \frac{-y^2 - y + 2}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{-y^2 + y + 2}{\sqrt{2}}$$

y	$2 \longrightarrow -1$
X	$-2\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2}$

T を直線 $y = -x$ のまわりに一回転して得られる立体の体積を U とすると

$$\begin{aligned} U &= \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\,dX = \pi \int_2^{-1} \left(\frac{-y^2 + y + 2}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{-2y - 1}{\sqrt{2}}\,dy \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{2} (y+1)^2(2-y)^2(2y+1)\,dy \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \int_{-1}^{2} (y+1)^2(2-y)^2\{5(y+1) - (2-y)\}\,dy \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \int_{-1}^{2} \{5(y+1)^3(2-y)^2 - (y+1)^2(2-y)^3\}\,dy \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \left(5 \cdot \frac{3!2!}{6!} \cdot 3^6 - \frac{2!3!}{6!} \cdot 3^6\right) = \frac{81\sqrt{2}}{20}\pi \end{aligned}$$

公式 $\displaystyle \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$ を利用[1].

類題 九州大学工学部 2018 年一般後期工学部 5 番[2]

注意 X は y の関数であるから $X = \varphi(y)$ とおくと，$\varphi(y) = \dfrac{-y^2 - y + 2}{\sqrt{2}}$.

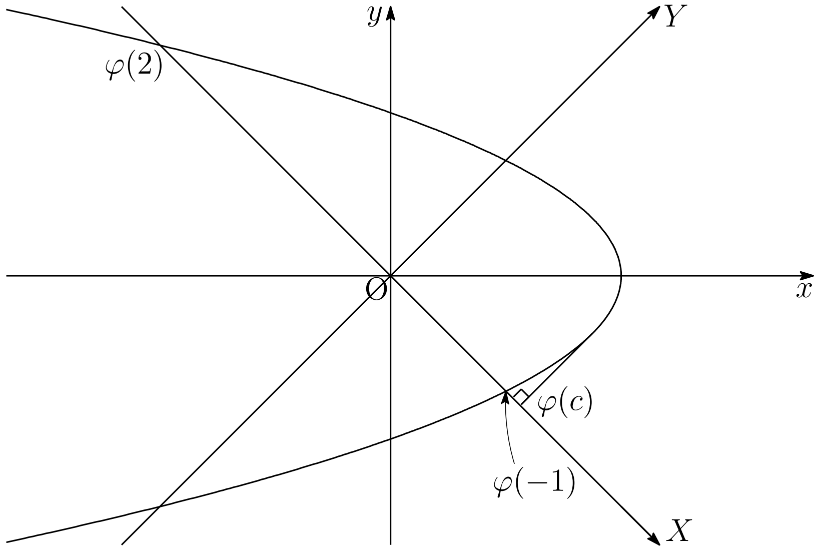
$$V = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\,dX = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(0)} Y^2\,dX,$$

$$U = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\,dX = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(-1)} Y^2\,dX$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2018_kouki.pdf $\boxed{5}$

なお，面積 U は，下の図から分かるように，次の計算過程を省略している．

$$U = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(c)} Y^2\, dX - \pi \int_{\varphi(-1)}^{\varphi(c)} Y^2\, dX = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(-1)} Y^2\, dX$$



上の図の c の値は，$\varphi(y)$ を最大にする y の値であるから　$c = -\dfrac{1}{2}$ ■

2.5 2019 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 xy 平面における曲線 $y=\sin x$ の 2 つの接線が直交するとき，その交点の y 座標の値をすべて求めよ．

2 a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする．次の不等式を考える．

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1) $n=6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ．

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ．

3 a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める．

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=x_n+{x_n}^2\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(1) $a>0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ．

(2) $-1<a<0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1<x_n<0$ が成り立つことを示せ．

(3) $-1<a<0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ．

4 実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す．

(1) $[2x^2+x+3]$，$[x^5-1]$，$[[2x^2+x+3][x^5-1]]$ をそれぞれ求めよ．

(2) 整式 $A(x)$，$B(x)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$[A(x)B(x)]=[[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数 θ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]=x\sin 2\theta+\cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数 a，b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

$$[(ax+b)^4]=-1$$

5　(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1} (e^x - e^t + 1)f(t)\,dt$$

6　10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す．初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする．この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする．2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $p(n+1,\ 2)$ を $p(n,\ 2)$ と $p(n,\ 1)$ を用いて表せ．

(2) $p(n,\ 1)$ を求めよ．

(3) $p(n,\ 2)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $y = \sin x$ より　$y' = \cos x$

曲線 $y = \sin x$ 上の 2 点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \sin\beta)$ とすると，A，B における接線の傾きは，それぞれ $\cos\alpha$，$\cos\beta$ であるから，これらの接線が直交するとき

$$\cos\alpha\cos\beta = -1$$

これから，一般性を失うことなく，$\cos\alpha = 1$，$\cos\beta = -1$ とおくと

$$\alpha = 2k\pi,\ \beta = (2l+1)\pi \qquad (k,\ l\ \text{は整数})$$

曲線 $y = \sin x$ 上の点 A における接線の方程式は

$$y = 1(x - 2k\pi) \quad \text{すなわち} \quad y = x - 2k\pi \quad \cdots ①$$

曲線 $y = \sin x$ 上の点 B における接線の方程式は

$$y = -1\{x - (2l+1)\pi\} \quad \text{すなわち} \quad y = -x + (2l+1)\pi \quad \cdots ②$$

①，② より，x を消去すると

$$2y = (2l - 2k + 1)\pi \quad \text{ゆえに} \quad y = \left(l - k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$n = l - k$ とおくと，n は整数であるから，求める交点の y 座標は

$$\boldsymbol{y = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} \qquad \textbf{(}\boldsymbol{n}\ \textbf{は整数)}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $n=6$ より　$\log_a(x-6) > \dfrac{1}{2}\log_a(12-x)$　$\cdots(*)$

真数は正であるから

$$x-6>0,\ 12-x>0 \quad \text{すなわち} \quad 6<x<12 \quad \cdots ①$$

(i) $a>1$ のとき，$(*)$ より　$(x-6)^2>12-x$

ゆえに　$(x-3)(x-8)>0$　すなわち　$x<3,\ 8<x$　$\cdots ②$

よって，①，② を同時に満たす整数 x は　**9，10，11**

(ii) $0<a<1$ のとき，$(*)$ より　$(x-6)^2<12-x$

ゆえに　$(x-3)(x-8)<0$　すなわち　$3<x<8$　$\cdots ③$

よって，①，③ を同時に満たす整数 x は　**7**

(2)　$\log_a(x-n) > \dfrac{1}{2}\log_a(2n-x)$　$\cdots(**)$

真数は正であるから

$$x-n>0,\ 2n-x>0 \quad \text{すなわち} \quad n<x<2n \quad \cdots ④$$

(i) $a>1$ のとき，$(**)$ より　$(x-n)^2>2n-x$

ゆえに　$x^2+(1-2n)x+n^2-2n>0$

$f(x)=x^2+(1-2n)x+n^2-2n$ とおくと

$$f(x)=\left(x-n+\frac{1}{2}\right)^2-n-\frac{1}{4}$$
$$f(n)=-n<0,\quad f(2n)=n^2>0 \qquad (n \text{ は正の整数})$$

これから，④ と 2 次不等式 $f(x)>0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(2n-1)=n(n-2)>0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(ii) $0<a<1$ のとき，$(**)$ より　$(x-n)^2<2n-x$

ゆえに　$x^2+(1-2n)x+n^2-2n<0$

同様に，④ と 2 次不等式 $f(x)<0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(n+1)=-n+2<0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(i)，(ii) より，求める n についての必要十分条件は　$\boldsymbol{n>2}$　■

3 (1)　　(∗)　$x_{n+1} = x_n + {x_n}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$x_1 = a > 0$．$x_n > 0$ のとき，漸化式より $x_{n+1} > 0$

したがって，すべての自然数 n について　$x_n > 0$

(∗∗)　$x_{n+1} - x_n = {x_n}^2 > 0$ より，$\{x_n\}$ は単調増加列であるから

$$x_{n+1} = (1 + x_n)x_n \geqq (1 + a)x_n \quad \text{したがって} \quad x_n \geqq a(1 + a)^{n-1}$$

$a > 0$，$1 + a > 1$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a(1 + a)^n = \infty$　　よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty}$

(2) $-1 < a < 0$ より，$-1 < x_1 < 0$.

$-1 < x_n < 0$ と仮定すると，$0 < 1 + x_n < 1$ および (∗) より

$$x_{n+1} = x_n(1 + x_n) \quad \text{ゆえに} \quad -1 < x_{n+1} < 0$$

よって，すべての自然数 n に対して　$-1 < x_n < 0$

(3) (∗) および (2) の結果から

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n(1 + x_n)} - \frac{1}{x_n} = -\frac{1}{1 + x_n} < -1$$

$n > 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) < -\sum_{k=1}^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x_n} < \frac{1}{a} - n + 1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a} - n + 1\right) = -\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = -\infty$

よって　　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$　■

4 (1) $2x^2 + x + 3 = 2(x^2 + 1) + x + 1$ より　$[2x^2 + x + 3] = \boldsymbol{x + 1}$

$x^5 - 1 = (x^2 + 1)(x^3 - x) + x - 1$ より　$[x^5 - 1] = \boldsymbol{x - 1}$

したがって　$[2x^2 + x + 3][x^5 - 1] = (x + 1)(x - 1) = (x^2 + 1) - 2$

よって　　$[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]] = \boldsymbol{-2}$

(2) $A(x) = (x^2 + 1)P(x) + [A(x)]$，$B(x) = (x^2 + 1)Q(x) + [B(x)]$ とすると

$$\begin{aligned} A(x)B(x) = (x^2 + 1)\{(x^2 + 1)P(x)Q(x) + [A(x)]Q(x) + [B(x)]P(x)\} \\ + [A(x)][B(x)] \end{aligned}$$

よって　　$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$

(3)
$$\begin{aligned} (x\sin\theta + \cos\theta)^2 &= x^2\sin^2\theta + 2x\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\ &= (x^2 + 1)\sin^2\theta + x\sin 2\theta + \cos 2\theta \end{aligned}$$

よって　　$[(x\sin\theta + \cos\theta)^2] = x\sin 2\theta + \cos 2\theta$

(4) (2) の結果において，$B(x)=A(x)$ とすると　$[A(x)^2]=[[A(x)]^2]$

さらに　$[A(x)^2A(x)^2]=[[A(x)^2][A(x)]^2]$　ゆえに　$[A(x)^4]=[[A(x)]^4]$

$A(x)=x\sin\theta+\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$，$ax+b=rA(x)$ $(r>0)$ とおくと，上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}[(ax+b)^4]&=[\{rA(x)\}^4]=r^4[[A(x)]^4]=r^4[([x\sin\theta+\cos\theta]^2)^2]\\&=r^4[(x\sin2\theta+\cos2\theta)^2]=r^4(x\sin4\theta+\cos4\theta)=-1\end{aligned}$$

したがって　$r^4=1$，$4\theta=(2k-1)\pi$

ゆえに　$r=1$，$\theta=\dfrac{2k-1}{4}\pi$ $(k=1,2,3,4)$，$a=\sin\theta$，$b=\cos\theta$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$　**(複号任意)**　■

5 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$　$\cdots$①

$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$ について，$x=-t$ とすると　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x	$-1\longrightarrow0$
t	$1\longrightarrow0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx&=\int_{1}^{0}\frac{\sin^2(-\pi t)}{1+e^{-t}}(-dt)=\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^{-t}}\,dt\\&=\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^{-x}}\,dx=\int_{0}^{1}\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx\qquad\cdots②\end{aligned}$$

①，② より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx&=\int_{0}^{1}\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx\\&=\int_{0}^{1}\frac{(e^x+1)\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx=\int_{0}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-\cos2\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]_0^1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) 与えられた条件式から

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+(2+e^x)\int_{-1}^{1}f(t)\,dt-\int_{-1}^{1}(1+e^t)f(t)\,dt$$

$A=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$，$B=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+e^t)f(t)\,dt$ とおくと

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+(2+e^x)A-B \qquad \cdots(*)$$

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\frac{2+e^x}{1+e^x}A-\frac{1}{1+e^x}B \qquad \cdots(**)$$

ここで

$$\int_{-1}^{1}\frac{2+e^x}{1+e^x}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(2-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\Big[\,2x-\log(1+e^x)\,\Big]_{-1}^{1}=3$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\Big[\,x-\log(1+e^x)\,\Big]_{-1}^{1}=1$$

上式および (1) の結果を利用すると，$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}B&=\int_{-1}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx+A\int_{-1}^{1}(2+e^x)\,dx-B\int_{-1}^{1}dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\,x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\,\Big]_{-1}^{1}+A\Big[\,2x+e^x\,\Big]_{-1}^{1}-2B\\&=1+(4+e-e^{-1})A-2B,\\A&=\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx+A\int_{-1}^{1}\frac{2+e^x}{1+e^x}\,dx-B\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}\,dx\\&=\frac{1}{2}+3A-B\end{aligned}$$

整理すると　$(4+e-e^{-1})A-3B+1=0$，$2A-B+\dfrac{1}{2}=0$

これを解いて　$A=\dfrac{e}{2(e^2-2e-1)}$，$B=\dfrac{e^2-1}{2(e^2-2e-1)}$

$(**)$ より

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+A+\frac{A-B}{1+e^x}\\&=\boldsymbol{\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\frac{1}{2(e^2-2e-1)}\left(e-\frac{e^2-e-1}{1+e^x}\right)}\end{aligned}$$

■

6 (1) 試行を $n+1$ 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で2個であるのは，次の場合である．

(i) n 回目までに赤玉が全部で2個であり，$n+1$ 回目に袋の中にある赤玉3個と白玉7個が入っている中から白玉を取り出す．

(ii) n 回目までに赤玉が全部で1個であり，$n+1$ 回目に袋の中にある赤玉4個と白玉6個が入っている中から赤玉を取り出す．

よって
$$\begin{aligned}p(n+1,\ 2) &= p(n,\ 2)\times\frac{7}{10}+p(n,\ 1)\times\frac{4}{10}\\ &= \boldsymbol{\frac{7}{10}p(n,\ 2)+\frac{2}{5}p(n,\ 1)}\end{aligned}$$

(2) 赤玉1個を k 回目に取り出す確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-k}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\left(\dfrac{5}{6}\right)^k$

よって，求める確率は
$$\begin{aligned}p(n,\ 1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^k=\left(\frac{3}{5}\right)^n\times\frac{5}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}\\ &= 5\left(\frac{3}{5}\right)^n\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}=\boldsymbol{5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果を (1) の結果に代入すると
$$p(n+1,\ 2)=\frac{7}{10}p(n,\ 2)+\frac{2}{5}\times 5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$p(n+1,2)-\frac{7}{10}p(n,\ 2)=2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$\left(\frac{10}{7}\right)^{n+1}p(n+1,\ 2)-\left(\frac{10}{7}\right)^n p(n,\ 2)=\frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

ここで，$n\geqq 2$ について，$q_n=\left(\dfrac{10}{7}\right)^n p(n,\ 2)$ とおくと
$$\begin{aligned}q_{n+1}-q_n &= \frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}\\ q_2 &= \left(\frac{10}{7}\right)^2 p(2,\ 2)=\frac{100}{49}\times\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{20}{49}\end{aligned}$$

$n>2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1}(q_{k+1}-q_k)&=\frac{20}{7}\sum_{k=2}^{n-1}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^k-\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}\\ q_n-q_2&=\frac{20}{7}\left\{\frac{\left(\frac{6}{7}\right)^2-\left(\frac{6}{7}\right)^n}{1-\frac{6}{7}}-\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{5}{7}\right)^n}{1-\frac{5}{7}}\right\}\end{aligned}$$

上式は，$n=2$ のときも成立するから，$n\geqq 2$ について

$$\begin{aligned}q_n-\frac{20}{49}&=20\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^2-\left(\frac{6}{7}\right)^n\right\}-10\left\{\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}\\ q_n&=10\left\{1-2\left(\frac{6}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\left(\frac{10}{7}\right)^n p(n,\ 2)&=10\left\{1-2\left(\frac{6}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}\\ p(n,\ 2)&=\boldsymbol{10\left\{\left(\frac{7}{10}\right)^n-2\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}\end{aligned}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は　$S=\dfrac{a-rl}{1-r}$

例えば　$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{6}{7}\right)^k=\frac{\left(\frac{6}{7}\right)^2-\frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}}{1-\frac{6}{7}}$$ ■

2.6　2020 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC の交点を H とする．

(1) $\angle\mathrm{BAC}$ を θ と表すとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする．辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ．

2 a を 0 でない実数とする．xy 平面において，円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$，直線 $L: -4x+3y+a=0$，直線 $M: 3x+4y-7a=0$ を考える．

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ．

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) 集合 $\{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と L の共有点 $\} \cup \{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ．

3 n を正の整数，a，b を 0 以上の整数とする．

(1) $n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n+n^2+8<3^n$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $2^n+n^2+8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ．

(3) 等式 $2^n+n^2+8=3^n+an+b$ を満たす $a,\ b,\ n$ の組 $(a,\ b,\ n)$ をすべて求めよ．

4 白玉 3 個，赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある．箱から無作為に玉を 1 個取り出し，硬貨を投げて表が出たら，その玉を手元に残し，裏が出たら箱に戻す試行を行う．試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する．また，最初手元に玉はないものとする．

(1) 2 回の試行の結果，手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ．

(2) 3 回の試行の結果，手元の玉が白玉 1 個，赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ．

(3) n を 5 以上の整数とし，ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ．

(4) (3) の確率 p_n が最大となる n を求めよ．

5 実数 t に対して複素数 $z = \dfrac{-1}{t+i}$ を考える．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ．

(2) 絶対値 $\left|z - \dfrac{i}{2}\right|$ を求めよ．

(3) 実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ．

6 正の整数 $m,\ n$ に対して実数 $A(m,\ n)$ を次の定積分で定める．

$$A(m,\ n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x\, dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$A(m,\ n) = A(n,\ m), \quad A(m+2,\ n) + A(m,\ n+2) = A(m,\ n)$$

(2) $A(m,\ 1)$ を求めよ．

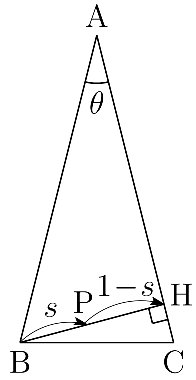
(3) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$A(m,\ n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2,\ n)$$

(4) m または n が奇数ならば，$A(m,\ n)$ は有理数であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1,\ \mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると



$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{1+1-\frac{1}{4}}{2}=\boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{8}}$$

(2) (1) の結果から，$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\cos\theta=\dfrac{7}{8}$，$\mathrm{HB}=\mathrm{AB}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

点 P は辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{HB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BP}}=-s\overrightarrow{\mathrm{HB}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=-\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AH}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{HB}}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{7}{8}$，$|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+(1-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|^2+s^2|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|^2\\&\qquad+\frac{1}{49}|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+(1-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|^2\\&=\frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2+\frac{15}{64}s^2+\frac{1}{49}\cdot\frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2\\&=\frac{15}{64}\{2(1-s)^2+s^2\}+\frac{25}{32}\\&=\frac{45}{64}\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{15}{16}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{s=\dfrac{2}{3}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{15}{16}}$ ■

2　(1) 円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$ より　$(x-a)^2+(y-2)^2=a^2$

円 C は，中心 $(a,\ 2)$，半径 $|a|$ の円である．

$L: -4x+3y+a=0$，$M: 3x+4y-7a=0$ の交点は

これらの 2 式を連立して解くと　$(a,\ a)$

これが円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$ 上にあるから

$$(a-a)^2+(a-2)^2=a^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=1}$$

(2) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $L: -4x+3y+a=0$ の距離を d_1 とすると

$$d_1=\frac{|-4a+6+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{|-3a+6|}{5}$$

C と L が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_1<|a|$ であるから

$$\frac{|-3a+6|}{5}<|a| \quad \text{ゆえに} \quad (3a-6)^2<(5a)^2$$

したがって　$(a+3)(4a-3)>0$　これを解いて　$\boldsymbol{a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a}$

(3) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $M: 3x+4y-7a=0$ の距離を d_2 とすると

$$d_2=\frac{|3a+8-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-4a+8|}{5}$$

C と M が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_2<|a|$ であるから

$$\frac{|-4a+8|}{5}<|a| \quad \text{ゆえに} \quad (4a-8)^2<(5a)^2$$

したがって　$(a+8)(9a-8)>0$　これを解いて　$a<-8,\ \dfrac{8}{9}<a$

(2) の結果および上式の不等号を等号にした，すなわち，$a=-3,\ \dfrac{3}{4},-8,\ \dfrac{8}{9}$ のとき，それぞれ円と直線が 1 点を共有する (1 点で接する)．

(i) C と L が 2 点を共有し，C と M が 1 点を共有するのは　$a=-8,\ \dfrac{8}{9}$

(ii) C と L が 1 点を共有し，C と M が 2 点を共有する a は存在しない．

(iii) (1) の結果から，$a=1$ のとき，C と L は 2 点を共有し，同時に C と M も 2 点を共有する．このとき，その 1 点は C，L，M によって共有されるので，$a=1$ は条件を満たす．

(i)〜(iii) から，求める a の値は　$\boldsymbol{a=-8,\ \dfrac{8}{9},\ 1}$　■

3　(1)　　$2^n + n^2 + 8 < 3^n \quad \cdots (*)$

［1］$n = 3$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = 2^3 + 3^2 + 8 = 25, \quad (*) \text{ の右辺} = 3^3 = 27$$

したがって，このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，すなわち，$2^k + k^2 + 8 < 3^k$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\} &> 3(2^k + k^2 + 8) - 2^{k+1} - (k+1)^2 - 8 \\ &= 2^k + 2k^2 - 2k + 15 \\ &= 2^k + k^2 + (k-1)^2 + 14 > 0 \end{aligned}$$

ゆえに　　$2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3^{k+1}$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，$n \geqq 3$ に対して，$(*)$ が成立する．

(2)　(1) の結果に注意すると

$$2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n \quad \cdots (**)$$

を満たす $n \geqq 3$ の整数は存在しないから，$n = 1,\ 2$ について調べればよい．

- $n = 1$ のとき，$2^1 + 1^2 + 8 \geqq 3^1$ より，$(**)$ は成立する．
- $n = 2$ のとき，$2^2 + 2^2 + 8 \geqq 3^2$ より，$(**)$ は成立する．

よって　　$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$

(3)　(1) の結果から，$n \geqq 3$ のとき　$3^n - (2^n + n^2 + 8) > 0$

また，与えられた等式から　$3^n - (2^n + n^2 + 8) = -an - b$

上の 2 式から　$-an - b > 0$　ゆえに　$an + b < 0 \quad \cdots (\mathrm{A})$

$a,\ b$ は 0 以上の整数であるから，$n \geqq 3$ のとき，(A) を満たす $(a,\ b,\ n)$ は存在しない．したがって，$n = 1,\ 2$ について調べればよい．

(i) $n = 1$ のとき　$2^1 + 1^2 + 8 = 3^1 + a + b$　　ゆえに　$a + b = 8 \quad \cdots ①$

(ii) $n = 2$ のとき　$2^2 + 2^2 + 8 = 3^2 + 2a + b$　ゆえに　$2a + b = 7 \quad \cdots ②$

①，② より　$\boldsymbol{(a,\ b,\ n) = (j,\ 8 - j,\ 1)\ \ (j = 0, 1, 2, \cdots, 8),}$
$\boldsymbol{(a,\ b,\ n) = (k,\ 7 - 2k,\ 2)\ \ (k = 0, 1, 2, 3)}$

■

$\boxed{4}$ (1) 箱から白玉を 2 回連続して取り出し，同時に硬貨は 2 回とも表が出る確率であるから

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{3}{40}}$$

(2) 白玉 1 個と赤玉 1 個が取り出される確率は，取り出される順番に関係なく

$$\frac{3\cdot 2}{5\cdot 4}$$

白玉 1 個，赤玉 1 個が取り出され (ともに硬貨は表)，硬貨が裏である確率であり，それらが起きる場合の総数 3! 通りあるから

$$\frac{3\cdot 2}{5\cdot 4}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 3! = \mathbf{\frac{9}{40}}$$

(3) $n-1$ 回目までに硬貨がちょうど 4 回表が出て，n 回目に表が出る確率であるから

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^n = \boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6\cdot 2^{n+2}}}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6\cdot 2^{n+3}} \times \frac{6\cdot 2^{n+2}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\\ &= \frac{n}{2(n-4)}\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = \dfrac{8-n}{2(n-4)}$

ゆえに　$p_5 < p_6 < p_7 < p_8 = p_9 > p_{10} > \cdots$

よって，p_n が最大となる n は　$\boldsymbol{n = 8,\ 9}$　■

5 (1) $z=\dfrac{-1}{t+i}=-\dfrac{-(t-i)}{(t+i)(t-i)}=-\dfrac{t}{t^2+1}+\dfrac{1}{t^2+1}i$

よって　実部 $\boldsymbol{-\dfrac{t}{t^2+1}}$，虚部 $\boldsymbol{\dfrac{1}{t^2+1}}$

(2) $z-\dfrac{i}{2}=\dfrac{-1}{t+i}-\dfrac{i}{2}=\dfrac{-2-i(t+i)}{2(t+i)}=\dfrac{-1-ti}{2(t+i)}$

よって　$\left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{|-1-ti|}{2|t+i|}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{2\sqrt{t^2+1}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) (1) で求めた実部と虚部をそれぞれ x，y とおくと

$$x=-\frac{t}{1+t^2},\quad y=\frac{1}{1+t^2}$$

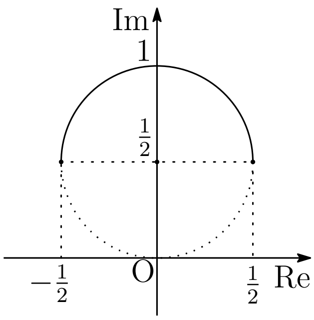
$-1\leqq t\leqq 1$ より，$t=\tan\theta$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\sin 2\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos 2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2}-1$$

したがって　$x=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$，$y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta$

$$\begin{aligned}x+yi&=-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)i=\frac{i}{2}+\frac{i}{2}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\\&=\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\\&=\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\left\{\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より，$0\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{2}\leqq\pi$ であるから，$z=x+yi$ の描く図形は右の図の実線部分である．



補足 $t=\tan\theta$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}z&=\frac{-1}{\tan\theta+i}=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta+i\cos\theta}=\frac{i\cos\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\\&=i\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)=\frac{i}{2}+\frac{i}{2}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\\&=\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\left\{\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\end{aligned}$$

■

6　(1) $A(m,\ n) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x\, dx$ において，$x = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = -1, \qquad \begin{array}{c||c} x & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} A(m,\ n) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^m\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)(-d\theta) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \sin^m\theta\, d\theta = A(n,\ m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(m+2,\ n) + A(m,\ n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \sin^n x\, dx \\ &\qquad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^{n+2} x\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x\,(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x\, dx = A(m,\ n) \end{aligned}$$

(2) $A(m,\ 1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin x\, dx = \left[-\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{m+1}}$

(3) $A(m,\ n)$ の定義により

$$\begin{aligned} A(m,\ n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^{n+2} x\, dx \\ &= -\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(m+1)\cos^m x(-\sin x)\} \sin^{n+1} x\, dx \\ &= -\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos^{m+1} x\}' \sin^{n+1} x\, dx \\ &= -\frac{1}{m+1}\Big[\cos^{m+1} x \sin^{n+1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\qquad + \frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} x\cdot(n+1)\sin^n x \cos x\, dx \\ &= \frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \sin^n x\, dx = \frac{n+1}{m+1} A(m+2,\ n) \end{aligned}$$

(4) m または n が奇数であるから，(1) の $A(m,\ n)=A(n,\ m)$ により，n が奇数の場合について証明する．(2),(3) の結果から

$$\begin{aligned}A(m,\ n)&=\frac{n-1}{m+1}A(m+2,\ n-2)\\&=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}A(m+4,\ n-4)\\&=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdots\frac{2}{m+n-2}A(m+n-1,1)\\&=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdots\frac{2}{m+n-2}\cdot\frac{1}{m+n}\end{aligned}$$

よって，$A(m,\ n)$ は有理数である．

発展 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ を利用する．

$$A(m,\ n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$$

において，$t=\sin^2 x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2\sin x\cos x$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$0\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}A(m,\ n)&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}(\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin x\cos x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^{\frac{m-1}{2}}t^{\frac{n-1}{2}}\,dt=\frac{\frac{m-1}{2}!\frac{n-1}{2}!}{2\cdot\frac{m+n}{2}!}\end{aligned}$$

例えば $\displaystyle A(2,\ 5)=\frac{\frac{1}{2}!2!}{2\cdot\frac{7}{2}!}=\frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}!}=\frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!}=\frac{1}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{8}{105}$

$$A(2,\ 6)=\frac{\frac{1}{2}!\frac{5}{2}!}{2\cdot4!}=\frac{\frac{1}{2}!\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}!}{2\cdot4!}=\frac{5}{64}\left(\frac{1}{2}!\right)^2$$

これに $\dfrac{1}{2}!=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を代入すると[3] $\displaystyle A(2,\ 6)=\frac{5}{256}\pi$ ■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf (p.8 を参照)

2.7　2021 年 (150 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a,\ b$ を実数とする．曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a,\ b$ を $0 < a < 1,\ 0 < b < 1$ を満たす実数とする．平面上の三角形 ABC を考え，辺 AB を $a : 1 - a$ に内分する点を P，辺 BC を $b : 1 - b$ に内分する点を Q，辺 CA の中点を R とし，三角形 ABC の面積を S，三角形 PQR の面積を T とする．

(1) $\dfrac{T}{S}$ を $a,\ b$ で表せ．

(2) $a,\ b$ が $0 < a < \dfrac{1}{2},\ 0 < b < \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $p,\ q$ を 3 以上の整数とし，$a = \dfrac{1}{p},\ b = \dfrac{1}{q}$ とする．$\dfrac{T}{S}$ の逆数 $\dfrac{S}{T}$ が整数となるような $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 正八角形 $\mathrm{A_1A_2} \cdots \mathrm{A_8}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ．

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ．

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 $(*)$ を満たすものの個数を求めよ．

$(*)$　四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面において，次の条件 $(*)$ を満たす直線 ℓ を考える．

$(*)$　ℓ の傾きは 1 で，曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる 3 点で交わる．

その交点を x 座標が小さなものから順に P，Q，R とし，さらに線分 PQ の中点を S とする．

(1) 点 R の座標を $(a,\ a^3 - 2a)$ とするとき，点 S の座標を求めよ．

(2) 直線 ℓ が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，点 S の軌跡を求めよ．

(3) 直線 ℓ が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ z を複素数とする．複素数平面上の 3 点 O(0)，A(z)，B(z^2) について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 O，A，B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ．

(2) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ．

(3) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ．

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ．

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ．必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい．

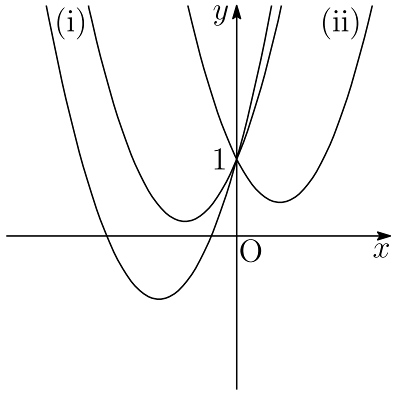
解答例

$\boxed{1}$ $f(x) = ax^2 + bx + 1$ とおくと，曲線 $y = f(x)$ は，点 $(0,\ 1)$ を通る．
$a < 0$ のとき，上に凸の放物線 $y = f(x)$ は x 軸の正の部分と共有点をもつ．
したがって，$a \geqq 0$ であることが必要である．

［1］ $a = 0$ のとき，直線 $y = bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないから

$$b \geqq 0$$

［2］ $a > 0$ のとき，$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + 1 - \dfrac{b^2}{4a}$ より，放物線 $y = f(x)$ の頂点に着目すると，条件を満たすのは，次の (i) または (ii) である．

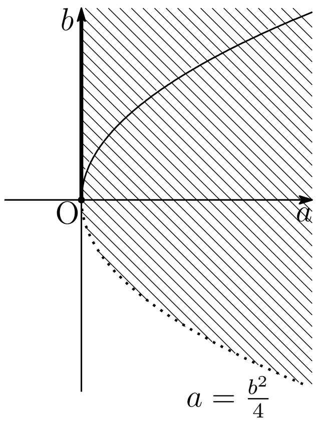


(i) $-\dfrac{b}{2a} \leqq 0$

(ii) $-\dfrac{b}{2a} > 0,\ 1 - \dfrac{b^2}{4a} > 0$

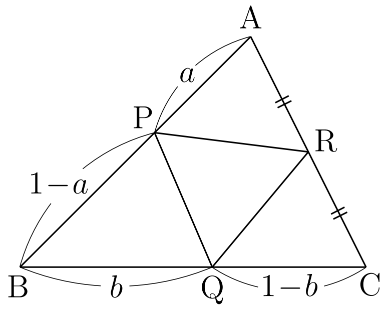
すなわち　(i) $b \geqq 0$　(ii) $b < 0,\ a > \dfrac{b^2}{4}$

［1］，［2］より，求める領域は，下の図の斜線部分で，点線部分は含まない．



■

2　(1) 右の図から



$$\triangle\mathrm{APR} = \frac{1}{2}aS$$
$$\triangle\mathrm{BQP} = (1-a)bS$$
$$\triangle\mathrm{CRQ} = \frac{1}{2}(1-b)S$$

したがって，$\triangle$PQR の面積 T は

$$\begin{aligned} T &= S - \triangle\mathrm{APR} - \triangle\mathrm{BQP} - \triangle\mathrm{CRQ} \\ &= S - \frac{1}{2}aS - (1-a)bS - \frac{1}{2}(1-b)S \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{T}{S} = ab - \dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{T}{S} = \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{2} - a\right)\left(\dfrac{1}{2} - b\right)$

$0 < a < \dfrac{1}{2}$，$0 < b < \dfrac{1}{2}$ より　$0 < \dfrac{1}{2} - a < \dfrac{1}{2}$，$0 < \dfrac{1}{2} - b < \dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{4} < \dfrac{T}{S} < \dfrac{1}{2}}$

(3) (2) の結果から　$2 < \dfrac{S}{T} < 4$　ゆえに　$\dfrac{S}{T}$ が整数となるとき　$\dfrac{S}{T} = 3$

$\dfrac{T}{S} = \dfrac{1}{3}$，$a = \dfrac{1}{p}$，$b = \dfrac{1}{q}$ を (1) の結果に代入すると

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{pq} - \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2}$$

整理すると　$pq - 3p - 3q + 6 = 0$　ゆえに　$(p-3)(q-3) = 3$

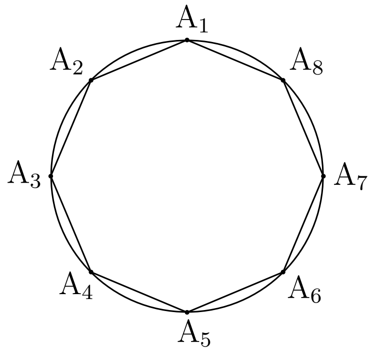
p，q は，3 以上の整数であるから

$$(p-3,\ q-3) = (1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

よって　$\boldsymbol{(p,\ q) = (4,\ 6),\ (6,\ 4)}$　■

3 (1) 直角三角形の斜辺は，A_1A_5，A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 の 4 通りあり，それぞれの斜辺に対する頂点の選び方が 6 通りある．よって，求める個数は

$$4 \times 6 = \mathbf{24}\ (個)$$



(2) A_1 を挟む 2 辺が等しい二等辺三角形で直角三角形でないものが $\triangle A_1A_2A_8$，$\triangle A_1A_4A_6$ の 2 個あるから，二等辺三角形で直角三角形でないものの総数は

$$2 \times 8 = 16\ (個)$$

(1) と上の結果から，直角三角形または二等辺三角形であるものの個数は

$$24 + 16 = 40\ (個)$$

3 個の頂点を結んでできる三角形の総数は　${}_8C_3 = 56$ (個)

よって，求める個数は　　$56 - 40 = \mathbf{16}$ **(個)**

(3) 直角三角形の斜辺となるのは，A_1A_5，A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 であるから，直角三角形とならないのは，A_1 と A_5，A_2 と A_6，A_3 と A_7，A_4 と A_8 をともに含まない場合である．直角三角形とならない 4 点の選び方は

$$\{A_1,\ A_5\},\ \{A_2,\ A_6\},\ \{A_3,\ A_7\},\ \{A_4,\ A_8\}$$

の 4 組からそれぞれ 1 つずつ選ぶ場合の数　2^4 (個)
よって，求める場合の数は

$${}_8C_4 - 2^4 = 70 - 16 = \mathbf{54}\ (個)$$

■

4　(1)　点 $\mathrm{R}(a,\ a^3-2a)$ を通り，傾き 1 の直線 ℓ の方程式は

$$y-(a^3-2a)=x-a \quad \text{すなわち} \quad y=x+a^3-3a \qquad (*)$$

ℓ と曲線 $y=x^3-2x$ の 2 式から y を消去すると

$$x^3-2x=x+a^3-3a \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$$

2 点 P，Q の x 座標は，方程式

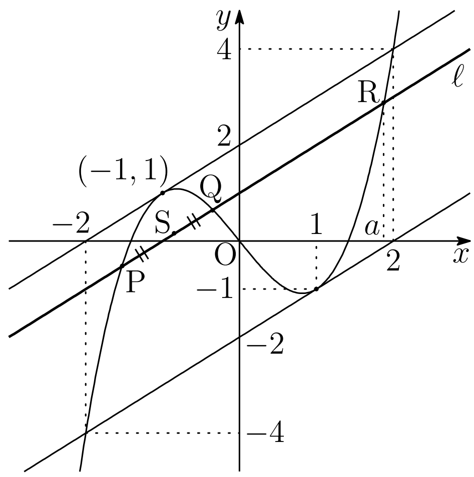
$$x^2+ax+a^2-3=0$$

解であり，これら 2 点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-a$$

2 点 P，Q の中点の x 座標は

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{a}{2}$$



S は ℓ 上の点であるから，その y 座標は　$-\dfrac{a}{2}+a^3-3a=a^3-\dfrac{7}{2}a$

よって，点 S の座標は　$\mathbf{S}\left(-\dfrac{a}{2},\ a^3-\dfrac{7}{2}a\right)$

(2)　$y=x^3-2x$ より　$y'=3x^2-2$

$y'=1$ とすると　$3x^2-2=1$　これを解いて　$x=\pm1$

(1) で示した図から　$1<a<2$

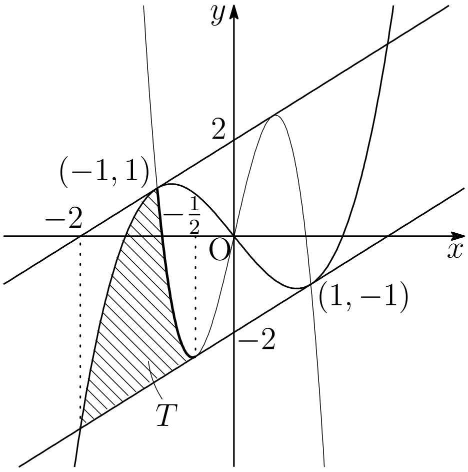
点 $\mathrm{S}(x,\ y)$ の軌跡は，(1) の結果から

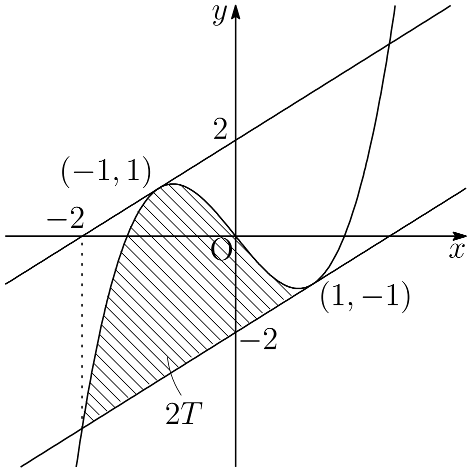
$$x=-\frac{a}{2},\quad y=a^3-\frac{7}{2}a \quad (1<a<2)$$

よって，求める軌跡の方程式は

曲線 $y=-8x^3+7x$ の $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ の部分

(3) 線分 PS が動く領域 (左図) は，線分 PQ が描く領域 (右図) の $\dfrac{1}{2}$ である．





$a=1$ のとき，ℓ の方程式は，$(*)$ より　$y=x-2$
求める領域の面積を T とすると

$$\begin{aligned}2T &= \int_{-2}^{1}\{(x^3-2x)-(x-2)\}dx \\ &= \int_{-2}^{1}(x+2)(1-x)^2\,dx \\ &= \frac{1}{12}(1+2)^4 = \frac{27}{4}\end{aligned}$$

よって，求める面積は　　$T = \boldsymbol{\dfrac{27}{8}}$

補足 積分公式[4]

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用する． ■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

5　(1) 3 点 O(0)，A(z)，B(z^2) が同一直線上にあるための z の必要十分条件は

$$z = 0 \quad \text{または} \quad \frac{z^2-0}{z-0} = z \text{ が実数} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{z} \textbf{ は実数}$$

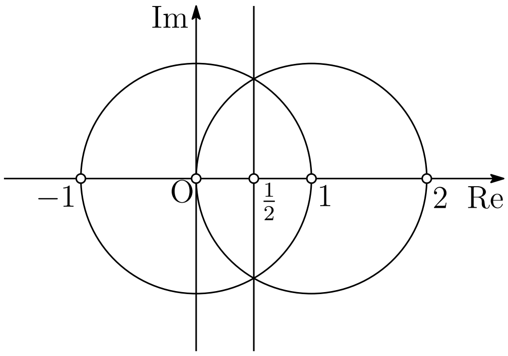
(2) (1) の結果から，3 点 O(0)，A(z)，B(z^2) が同一直線上にないとき，z は虚数であり，OA = OB, OA = AB, OB = AB より

$$|z| = |z^2|, \quad |z| = |z^2 - z|, \quad |z^2| = |z^2 - z|$$

このとき，$|z| \neq 0$ であるから

$$|z| = 1, \quad |z-1| = 1, \quad |z| = |z-1| \qquad (*)$$

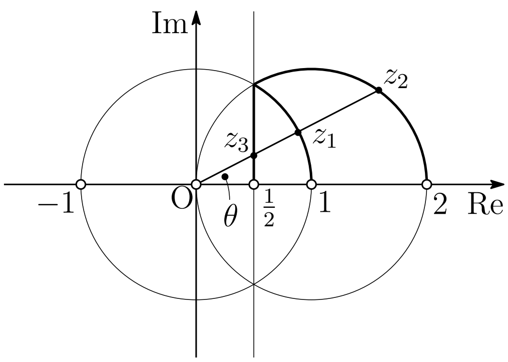
よって，z 全体の集合は，下の図のとおりである．ただし ◦ を除く．



(3) $\angle\mathrm{AOB} = \arg\dfrac{z^2-0}{z-0} = \arg z = \theta$ であるから，△OAB の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|z||z^2|\sin\theta = \frac{1}{2}|z|^3\sin\theta$$

(2) の条件のもと，z の偏角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であるから，(∗) の第 1 式から第 3 式上の点をそれぞれ z_1, z_2, z_3 とすると，これらの点は，下の図のようになる．この θ に対して，$|z_3| \leqq |z_1| \leqq |z_2|$ であるから，S を最大にする $|z|$ を $|z| = |z_2| = 2\cos\theta$ とすればよい．



したがって

$$S = \frac{1}{2}(2\cos\theta)^3 \sin\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta \quad \left(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

これを θ について微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta} &= 4\{3\cos^2\theta(-\sin\theta)\sin\theta + \cos^3\theta\cos\theta\} \\ &= 4\cos^2\theta(-3\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= 4\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3) \\ &= 4\cos^2\theta(2\cos\theta + \sqrt{3})(2\cos\theta - \sqrt{3})\end{aligned}$$

これから S の増減表は，次のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

よって　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$

このとき　$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

補足 4 正数 $\cos^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\cos^2\theta$，$3\sin^2\theta$ の相加・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{4} \geqq \sqrt[4]{\cos^6\theta\cdot 3\sin^2\theta}$$

両辺を平方すると，$0 < \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ により

$$\frac{9}{16} \geqq \sqrt{3}\cos^3\theta\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad S = 4\cos^3\theta\sin\theta \leqq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

上式において，等号が成立するとき

$$\cos^2\theta = 3\sin^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

■

6 (1) $I_k(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!}e^x\,dx$ とすると (k は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned}I_k(a)&=-\int_0^a\left\{\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}\right\}'e^x\,dx\\&=-\left[\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}e^x\right]_0^a+\int_0^a\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}(e^x)'\,dx\\&=\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}+I_{k+1}(a)\end{aligned}$$

$I_k(a)-I_{k+1}(a)=\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}$ より，正の整数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{I_k(a)-I_{k+1}(a)\}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$I_0(a)-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}$$

$I_0(a)=\displaystyle\int_0^a e^x\,dx=e^a-1$ であるから

$$e^a-1-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\quad \text{ゆえに}\quad e^a=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+I_n(a)\qquad (*)$$

よって　$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}+\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$

(2) $0\leqq x\leqq a$ において，$1\leqq e^x\leqq e^a$ であるから

$$\frac{(a-x)^n}{n!}\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^a$$

したがって

$$\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx$$
$$-\left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq -e^a\left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a$$

よって　$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^aa^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq I_n(a) \leqq \dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

$(*)$ から　$I_n(a) = e^a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

上の 2 式に $a = 1$ を代入すると

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqq I_n(1) \leqq \frac{e}{(n+1)!}, \quad I_n(1) = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (**)$$

$(**)$ の第 1 式から，$I_n(1) > 0$

$(**)$ の第 2 式から，$I_n(1)$ は単調減少列である．

$(**)$ の第 1 式に $n = 5,\ 6$ を代入すると

$$10^{-3} < \frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < I_5(1) < \frac{e}{6!},$$
$$\frac{1}{7!} < I_6(1) < \frac{e}{7!} = \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

上の 2 式から　$I_6(1) < 10^{-3} < I_5(1)$

したがって，不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n は　$\boldsymbol{n = 6}$

解説 a を定数，n を自然数とする．$f(x)$ を n 回微分可能な関数とし

$$J_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_k(x) &= -\int_a^x \left\{ \frac{(x-t)^k}{k!} \right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$J_k(x) - J_{k+1}(x) = \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ であるから，$n \geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \{J_k(x) - J_{k+1}(x)\} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \\ J_1(x) - J_n(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \end{aligned}$$

$J_1(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ であるから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_n(x)$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると，$J_n(x)$ は

$$\frac{(x-a)^n}{n!} M \text{ と } \frac{(x-a)^n}{n!} m$$

の間の値をとるから，この積分区間を I とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c), \qquad c \in I$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$n = 1$ のとき，平均値の定理により，上式は成立する．したがって，すべての自然数について上式は成立する． ■

2.8　2022 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数 N を考える．ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす．

(1) $K=99$ のとき，N を求めよ．

(2) $K=99$ のとき，$l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよ．

(3) $N>K$ を満たす最小の K を求めよ．

2 a を実数とし，実数 x の関数 $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ を考える．

(1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $a<2$ のとき，$f(x)$ は 2 つの極小値をもつ．このとき，$f(x)$ が極小となる x の値を $\alpha_1,\ \alpha_2\ (\alpha_1<\alpha_2)$ とする．$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$ を示せ．

(3) $f(x)$ が $x<\beta$ において単調減少し，かつ，$x=\beta$ において最小値をとるとする．このとき，a のとり得る値の範囲を求めよ．

3 正の整数 n に対して，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$$

とする．

(1) 正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

4 xy 平面の第1象限内において，直線 $\ell : y = mx\ (m > 0)$ と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし，円 C の中心を通る直線 $y = tx\ (t > 0)$ を考える．また，直線 ℓ と x 軸，および，円 C のすべてにそれぞれ1点で接する円の半径を b とする．ただし，$b > a$ とする．

(1) m を用いて t を表せ．

(2) t を用いて $\dfrac{b}{a}$ を表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m \to +0} \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a} - 1\right)$ を求めよ．

5 座標空間内において，ベクトル

$$\vec{a} = (1,\ 2,\ 1),\quad \vec{b} = (1,\ 1, -1),\quad \vec{c} = (0,\ 0,\ 1)$$

が定める2直線

$$\ell : s\vec{a},\quad \ell' : t\vec{b} + \vec{c}\quad (s,\ t \text{ は実数})$$

を考える．点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし，点 A_1 から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ とおく．次に，点 $\mathrm{B}_1(t_1\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$ とおく．同様に，点 $\mathrm{A}_k(s_k\vec{a})$ から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$，点 $\mathrm{B}_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_{k+1}$ とする手順を繰り返して，点 $\mathrm{A}_n(s_n\vec{a})$，$\mathrm{B}_n(t_n\vec{b} + \vec{c})$ (n は正の整数) を定める．

(1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ．

(2) 極限値 $S = \displaystyle\lim_{n \to \infty} s_n$，$T = \displaystyle\lim_{n \to \infty} t_n$ を求めよ．

(3) (2) で求めた S，T に対して，点 A，B をそれぞれ $\mathrm{A}(S\vec{a})$，$\mathrm{B}(T\vec{b} + \vec{c})$ とおくと，直線 AB は2直線 ℓ，ℓ' の両方と直交することを示せ．

6 半径1の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える．直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $l,\ m,\ n$ は正の奇数であるから

$$l = 2a+1,\quad m = 2b+1,\quad n = 2c+1 \quad (a,\ b,\ c \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおくと，$l+m+n=99$ のとき

$$2a+1+2b+1+2c+1=99 \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c=48$$

これを満たす組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は

$${}_3\mathrm{H}_{48} = {}_{3+48-1}\mathrm{C}_{48} = {}_{50}\mathrm{C}_2 = \frac{50\cdot 49}{2} = \mathbf{1225} \ (\text{個})$$

(2) $l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つだけ含む組は

$$\text{(i)}\ \ l=m\neq n \qquad \text{(ii)}\ \ m=n\neq l \qquad \text{(iii)}\ \ n=l\neq m$$

の 3 つの場合がある．(i) について

$$2a+1=2b+1\neq 2c+1 \quad \text{ゆえに} \quad a=b\neq c,\ a+b+c=48$$

$b=a$ より，$c=48-2a\neq a$ であるから

$$a \geqq 0,\quad 48-2a \geqq 0,\quad 48-2a \neq a$$

a は 16 を除く 0 以上 24 以下の整数で 24 組ある．

(ii)，(iii) の場合も (i) の場合と同様にそれぞれ 24 組ある．

また，$l=m=n$ が等しい同じ奇数を含む組が 1 組ある．

よって，求める個数は　$24\times 3+1 = \mathbf{73}$ (個)

(3) $K=2k+3$ とおき (k は 1 以上の整数)，N を求める．(1) と同様に

$$2a+1+2b+1+2c+1=2k+3 \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c=k$$

したがって　$N = {}_3\mathrm{H}_k = {}_{3+k-1}\mathrm{C}_k = {}_{k+2}\mathrm{C}_2 = \dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$

$N>K$ より　$\dfrac{(k+2)(k+1)}{2} > 2k+3$　ゆえに　$k(k-1)>4$

これを満たす最小の k が 3 であるから，求める K は　$2\cdot 3+3=\mathbf{9}$　■

2 (1) $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ の最小値が負であるとき，2次方程式

$$x^2+3x+a=0$$

が異なる2つの実数解をもつから，係数について

$$D=3^2-4a>0 \quad よって \quad \boldsymbol{a<\frac{9}{4}}$$

(2) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)(x+1)^2+(x^2+3x+a)\cdot 2(x+1) \\ &= (x+1)\{(2x+3)(x+1)+2(x^2+3x+a)\} \\ &= (x+1)(4x^2+11x+2a+3) \end{aligned}$$

$g(x)=4x^2+11x+2a+3$ とおくと　$g(-1)=2(a-2)<0$

$f'(x)=0$ の実数解 -1，α_1，$\alpha_2(\alpha_1<\alpha_2)$ について　$\alpha_1<-1<\alpha_2$

解と係数の関係から　　$\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{11}{4}$

$f'(x)=4(x+1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ より

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	-1	$\cdots$	α_2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで　$$\begin{aligned} f(x) &= \{(x+1)^2+(x+1)+a-2\}(x+1)^2 \\ &= (x+1)^4+(x+1)^3+(a-2)(x+1)^2 \end{aligned}$$

$-2-\alpha_2<-1$ に注意して ($-2-\alpha_2$ と α_2 の中央が -1)

$$\begin{aligned} f(\alpha_2) &= (\alpha_2+1)^4+(\alpha_2+1)^3+(a-2)(\alpha_2+1)^2 \\ f(-2-\alpha_2) &= (\alpha_2+1)^4-(\alpha_2+1)^3+(a-2)(\alpha_2+1)^2 \end{aligned}$$

$\alpha_2+1>0$ であるから　$f(-2-\alpha_2)<f(\alpha_2)$

また　$(-2-\alpha_2)-\alpha_1=-2-(\alpha_1+\alpha_2)=-2-\left(-\dfrac{11}{4}\right)=\dfrac{3}{4}>0$

$\alpha_1<-2-\alpha_2<-1$ および増減表から　$f(\alpha_1)<f(-2-\alpha_2)$

したがって　$f(\alpha_1)<f(-2-\alpha_2)<f(\alpha_2)$　よって　$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$

別解 (2) の途中の計算から

$$f'(x) = -4(x+1)(x-\alpha_1)(\alpha_2 - x) \qquad (\alpha_1 < \alpha_2)$$

したがって

$$\begin{aligned}
f(\alpha_2) - f(\alpha_1) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f'(x)\,dx \\
&= -4\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x+1)(x-\alpha_1)(\alpha_2 - x)\,dx \\
&= -4\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{(x-\alpha_1)+(\alpha_1+1)\}(x-\alpha_1)(\alpha_2 - x)\,dx \\
&= -4\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x-\alpha_1)^2(\alpha_2 - x)\,dx \\
&\qquad\quad - 4(\alpha_1+1)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x-\alpha_1)(\alpha_2 - x)\,dx \\
&= -4\cdot\frac{1}{12}(\alpha_2-\alpha_1)^4 - 4(\alpha_1+1)\cdot\frac{1}{6}(\alpha_2-\alpha_1)^3 \\
&= -\frac{1}{3}(\alpha_2-\alpha_1)^3\{(\alpha_2-\alpha_1)+2(\alpha_1+1)\} \\
&= -\frac{1}{3}(\alpha_2-\alpha_1)^3(\alpha_1+\alpha_2+2)
\end{aligned}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{11}{4}$ であるから

$$f(\alpha_2) - f(\alpha_1) = \frac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_1)^3 > 0$$

よって　　$f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$

補足 次の積分公式[5]

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用している．

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(3) $f'(x)=(x+1)g(x)$ について

$$g(x)=4\left(x+\frac{11}{8}\right)^2+2\left(a-\frac{73}{32}\right),\quad g(-1)=2(a-2)$$

であることと (1) の結果に注意して，$f(x)$ の増減を調べる．

(i) $a<2$ のとき，(2) の結果から，$\beta=\alpha_1$ とすれば成立する．

(ii) $a=2$ のとき，$g(x)=4x^2+11x+7=(x+1)(4x+7)$ より

$$f'(x)=(x+1)^2(4x+7)$$

x	$\cdots$	$-\frac{7}{4}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	最小	$\nearrow$	0	$\nearrow$

したがって　$\beta=-\dfrac{7}{4}$

(iii) $2<a\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	α_2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

(1) の結果から，$f(\alpha_1)\leqq 0=f(-1)$ であるから，$\beta=\alpha_1$

(iv) $\dfrac{9}{4}<a<\dfrac{73}{32}$ のとき，(iii) の増減表と同じであるが，(1) の結果から $f(\alpha_1)>0=f(-1)$ となり，条件を満たさない．

(v) $a=\dfrac{73}{32}$ のとき，$f'(x)=4(x+1)\left(x+\dfrac{11}{8}\right)^2$

x	$\cdots$	$-\frac{11}{8}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって　$\beta=-1$

(vi) $\dfrac{73}{32}<a$ のとき，$g(x)>0$ であるから

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって　$\beta=-1$

以上から，(iv) 以外の場合であればよいから　$\boldsymbol{a\leqq\dfrac{9}{4},\ \dfrac{73}{32}\leqq a}$ ■

3 (1) $x > 0$，$\sqrt{1+x}-1 = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}$ であるから

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x}-1 \leqq \frac{x}{2} \\ \iff & \frac{x}{2+x} \leqq \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} \leqq \frac{x}{2} \\ \iff & 2+x \geqq \sqrt{1+x}+1 \geqq 2 \\ \iff & 1+x \geqq \sqrt{1+x} \geqq 1 \qquad \cdots (*) \end{aligned}$$

$r = \sqrt{1+x}$ とすると $r > 1$ より　$r^2 \geqq r \geqq 1$

$(*)$ が成立するから，与えられた不等式も成立する．

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ を (1) の不等式に適用すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \leqq S_n \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \frac{n+1}{4n}$$

上式の左辺について

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \geqq \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{n}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)}$$

したがって　$\dfrac{n+1}{2(2n+1)} \leqq S_n \leqq \dfrac{n+1}{4n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{4},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{4}$$

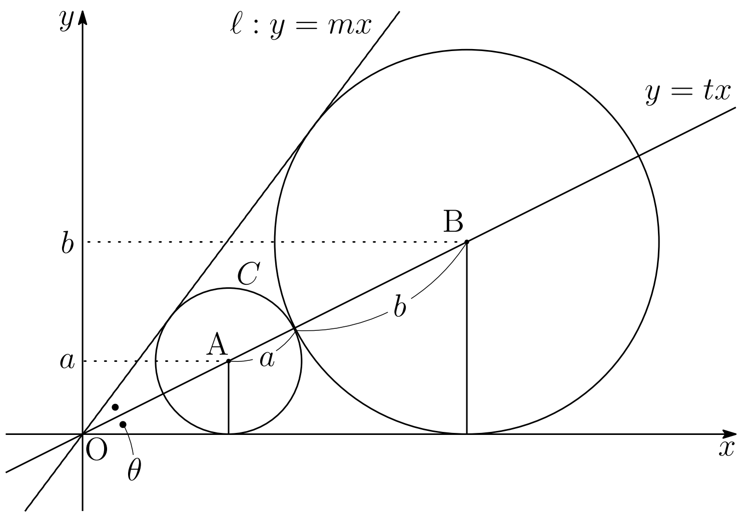
はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$ ■

4 (1) $t=\tan\theta$ とすると

$$m=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2t}{1-t^2}$$

t について整理すると　$mt^2+2t-m=0$

$m,\ t>0$ に注意して，t について解くと　$\boldsymbol{t=\dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}}$



(2) 円の中心を A, B とする．

$\mathrm{OA}=\dfrac{a}{\sin\theta}$，$\mathrm{OB}=\dfrac{b}{\sin\theta}$，$\mathrm{AB}=a+b$，$\mathrm{AB}=\mathrm{OB}-\mathrm{OA}$ であるから

$$a+b=\frac{b}{\sin\theta}-\frac{a}{\sin\theta}\quad ゆえに\quad a\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)=b\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)$$

$\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ であるから

$$a\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}+1\right)=b\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}-1\right)\quad よって\quad \boldsymbol{\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}}$$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{b}{a}-1=\dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}-t}$

$$\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}-t}=(1-t^2)(\sqrt{1+t^2}+t)$$

$m\to+0$ のとき $t\to+0$ であるから

$$\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\lim_{t\to+0}(1-t^2)(\sqrt{1+t^2}+t)=\mathbf{1}$$

■

5 (1) $\mathrm{A}_n(s_n\vec{a})$，$\mathrm{B}_n(t_n\vec{b}+\vec{c})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=(t_n\vec{b}+\vec{c})-s_n\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}}=s_{n+1}\vec{a}-(t_n\vec{b}+\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\perp\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}}\perp\vec{a}$ であるから，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=0$，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}}=0$ より

$$\vec{b}\cdot(t_n\vec{b}+\vec{c}-s_n\vec{a})=0,\quad \vec{a}\cdot(s_{n+1}\vec{a}-t_n\vec{b}-\vec{c})=0$$

$\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 1,-1)$，$\vec{c}=(0,\ 0,\ 1)$ より

$$|\vec{a}|^2=6,\quad |\vec{b}|^2=3,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=2,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=-1,\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=1$$

したがって　$3t_n-1-2s_n=0,\quad 6s_{n+1}-2t_n-1=0$　$(*)$

上の2式から t_n を消去して整理すると　$\boldsymbol{s_{n+1}=\dfrac{2}{9}s_n+\dfrac{5}{18}}$

(2) (1)の結果から　$s_{n+1}-\dfrac{5}{14}=\dfrac{2}{9}\left(s_n-\dfrac{5}{14}\right)$

$s_1=0$ であるから　$s_n=\dfrac{5}{14}\left\{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$S=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5}{14}\left\{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{\dfrac{5}{14}}$

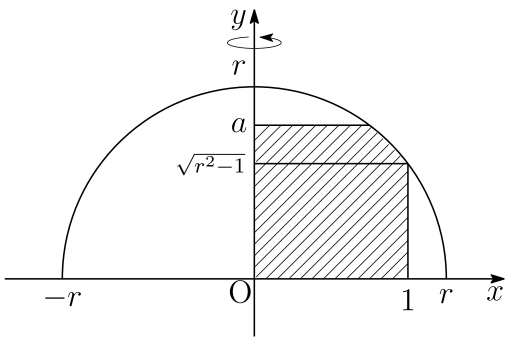
$(*)$ の第1式から　$3T-1-2S=0$ より　ゆえに　$T=\dfrac{1}{3}(2S+1)=\boldsymbol{\dfrac{4}{7}}$

(3) (2)の結果から　$\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{14}\vec{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\right)$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\dfrac{5}{14}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=-\frac{5}{14}|\vec{a}|^2+\frac{4}{7}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-\frac{5}{14}\cdot6+\frac{4}{7}\cdot2+1=0,\\ \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=-\frac{5}{14}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{7}|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{5}{14}\cdot2+\frac{4}{7}\cdot3+(-1)=0\end{aligned}$$

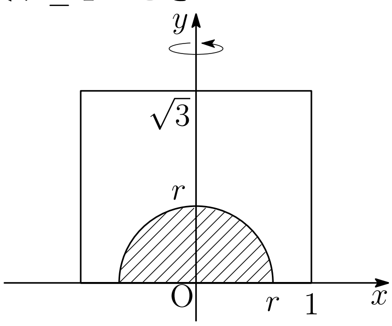
よって，直線ABは2直線 ℓ, ℓ' の両方と直交する．■

6　図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転させた立体の体積を $I(a)$ とすると ($r \geqq 1$, $\sqrt{r^2-1} \leqq a \leqq r$)

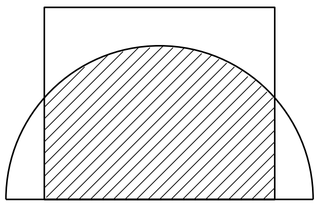


$$\begin{aligned}
\frac{I(a)}{\pi} &= \sqrt{r^2-1} + \int_{\sqrt{r^2-1}}^{a} (r^2 - y^2)\, dy \\
&= \sqrt{r^2-1} + \left[\, r^2 y - \frac{y^3}{3} \,\right]_{\sqrt{r^2-1}}^{a} \\
&= \sqrt{r^2-1} + r^2(a - \sqrt{r^2-1}) \\
&\qquad - \frac{1}{3}\{a^3 - (r^2-1)^{\frac{3}{2}}\} \\
&= a\left(r^2 - \frac{a^2}{3}\right) - \frac{2}{3}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

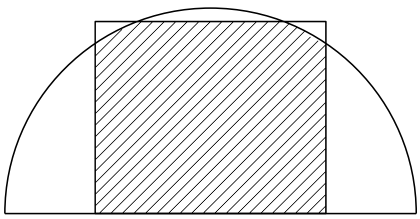
$0 < r \leqq 1$ のとき



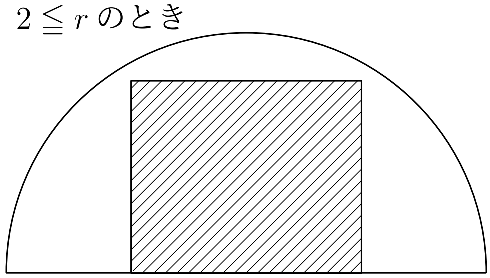
$1 \leqq r \leqq \sqrt{3}$ のとき



$\sqrt{3} \leqq r \leqq 2$ のとき



$2 \leqq r$ のとき



よって

$0 < r \leqq 1$ のとき　$V(r) = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi r^3}$

$1 \leqq r \leqq \sqrt{3}$　のとき $V(r) = I(r) = \boldsymbol{\dfrac{2\pi}{3}\{r^3 - (r^2-1)^{\frac{3}{2}}\}}$

$\sqrt{3} \leqq r \leqq 2$　のとき $V(r) = I(\sqrt{3}) = \boldsymbol{\pi(r^2-1)\left(\sqrt{3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{r^2-1}\right)}$

$2 \leqq r$ のとき　$V(r) = \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}\pi}$ ■

2.9　2023 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある．玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする．A，B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う．ただし取り出した玉は袋の中には戻さない．A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する．B が白玉を取り出したら B の勝ちとし，その時点でゲームを終了する．袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームは終了する．

(1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ．

(2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ．

2 関数 $f(x) = \sin 3x + \sin x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，最小のものを求めよ．

(2) 正の整数 m に対して，$f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，m 以下のものの個数を $p(m)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{p(m)}{m}$ を求めよ．

3 s を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = s, \quad (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) a_n を n と s を用いて表せ．

(2) ある正の整数 m に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ が成り立つとする．s を m を用いて表せ．

4 実数 $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して，整式 $f(x) = x^2 - ax + 1$ を考える．

(1) 整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の虚数解であって虚部が正のものを α とする．α を極形式で表せ．ただし，$r^5 = 1$ を満たす実数 r が $r = 1$ のみであることは，認めて使用してよい．

(3) 設問 (2) の虚数 α に対して，$\alpha^{2023} + \alpha^{-2023}$ の値を求めよ．

5 四面体 OABC において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，次が成り立つとする．

$$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ, \quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |\vec{c}| = \sqrt{6}, \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 3$$

ただし，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ は，2 つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を表す．さらに，線分 OC と線分 AB は垂直であるとする．点 C から 3 点 O，A，B を含む平面に下ろした垂線を CH とし，点 O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線を OK とする．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) ベクトル $\vec{c}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ は平行であることを示せ．

6 関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{6x+1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の接線で，傾きが 1 であり，かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ．

(2) 座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える．x が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形 S の概形を描け．また S の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 赤玉 4 個，白玉 5 個の計 9 個を取り出す場合の総数は (9 個の玉を取り出して一列に並べる場合の総数)

$$\frac{9!}{4!5!} = 126 \quad (\text{通り})$$

ゲームが引き分けとなるのは，次の 1 通り．

白	赤	白	赤	白	赤	白	赤	白

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{126}}$

(2) A が勝つのは，次の場合である．

赤								

白	赤	赤						

白	赤	白	赤	赤				

白	赤	白	赤	白	赤	赤		

これらの総数は

$$\frac{8!}{3!5!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{4!}{1!3!} + \frac{2!}{2!} = 56 + 15 + 4 + 1 = 76$$

よって，求める確率は　$\dfrac{76}{126} = \boldsymbol{\dfrac{38}{63}}$　■

2 (1) $f(x) = \sin 3x + \sin x$ より

$$f(x) = 2\sin 2x\cos x = 4\sin x\cos^2 x$$
$$= -4\sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

したがって，$f(x) = 0$ の解は $x = \dfrac{k\pi}{2}$ (k は整数) (∗)

よって，求める最小の正の実数 x は $\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2}}$

(2) (∗) より，正の整数 m に対して

$$\frac{k\pi}{2} \leqq m < \frac{(k+1)\pi}{2}$$

を満たす $k = p(m)$ がただ 1 つ存在する．

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m} < \frac{k}{m} \leqq \frac{2}{\pi} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{\pi} - \frac{1}{m} < \frac{p(m)}{m} \leqq \frac{2}{\pi}$$

上の第 2 式から，はさみうちの原理により $\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} \dfrac{p(m)}{m} = \dfrac{2}{\pi}}$ ■

3 (1) $(n+2)a_{n+1} = na_n + 2$ より

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} = n(n+1)a_n + 2(n+1)$$

$n > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)(k+2)a_{k+1} - k(k+1)a_k\} = \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1)$

$$n(n+1)a_n - 2a_1 = (n-1)(n+2)$$

したがって $\quad a_n = \dfrac{(n-1)(n+2)+2s}{n(n+1)}$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n = 1 + \frac{2(s-1)}{n(n+1)}}$$

(2) (1) の結果から

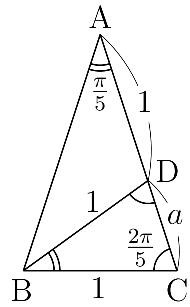
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} a_n &= m + 2(s-1)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= m + 2(s-1)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\\ &= m\left\{1 + \frac{2(s-1)}{m+1}\right\}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ が成り立つとき，$m \neq 0$ であるから

$$1 + \frac{2(s-1)}{m+1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s = \frac{1-m}{2}}$$

■

4 (1) $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$ より　$1 : 1+a = a : 1$



したがって　$a^2+a-1=0$　$\cdots$①

$a>0$ に注意して　$a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$

$w = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくと

$$w^5 = 1, \quad \overline{w}^5 = 1$$

$g(x) = x^4+x^3+x^2+x+1 = \dfrac{x^5-1}{x-1}$ とおくと

$$g(w) = 0, \quad g(\overline{w}) = 0$$

$f(x) = x^2-ax+1 = (x-w)(x-\overline{w})$ より，$g(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．

(2) $\alpha = w$ であるから　　$\boldsymbol{\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}}$

(3) $\alpha+\alpha^{-1} = a,\ \alpha^5 = 1,\ \alpha^{-5} = 1$ であるから，① を利用して

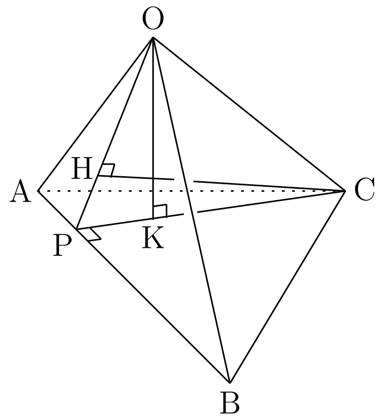
$$\begin{aligned}\alpha^{2023}+\alpha^{-2023} &= \alpha^3+\alpha^{-3} = \alpha^{-2}+\alpha^2 \\ &= (\alpha+\alpha^{-1})^2-2 = a^2-2 \\ &= (1-a)-2 = -(a+1) = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\end{aligned}$$

■

5 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2} = \mathbf{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$　ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}$　$\vec{b}\cdot\vec{c} = 3$ より　$\vec{c}\cdot\vec{a} = \mathbf{3}$

(2) $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{3}$，$\vec{v} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{3}$ とおくと



$$|\vec{u}|^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{4} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{3} + \frac{|\vec{b}|^2}{9} = \frac{4}{4} + \frac{3}{3} + \frac{9}{9} = 3$$
$$|\vec{v}|^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{4} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{3} + \frac{|\vec{b}|^2}{9} = \frac{4}{4} - \frac{3}{3} + \frac{9}{9} = 1$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{|\vec{a}|^2}{4} - \frac{|\vec{b}|^2}{9} = \frac{4}{4} - \frac{9}{9} = 0$$
$$\vec{c}\cdot\vec{u} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{3} = \frac{3}{2} + \frac{3}{3} = \frac{5}{2}$$
$$\vec{c}\cdot\vec{v} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{3} = \frac{3}{2} - \frac{3}{3} = \frac{1}{2}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{(\vec{c}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{c}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{5}{6}\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}}$$

(3) OH と AB の交点を P とすると，OC⊥AB より　OP⊥AB

(2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{6\vec{a}+\vec{b}}{7}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{6\vec{a}+\vec{b}}{7}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \frac{6\vec{a}+\vec{b}}{7} - \vec{c} = \frac{1}{7}(6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c})$$

$\vec{d} = 6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}$ とおくと

$$\begin{aligned}|\vec{d}|^2 &= |6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}|^2 = 36|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 49|\vec{c}|^2 + 12\vec{a}\cdot\vec{b} - 14\vec{b}\cdot\vec{c} - 84\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 36\cdot4 + 9 + 49\cdot6 + 12\cdot3 - 14\cdot3 - 84\cdot3 = 189\end{aligned}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\vec{d} = -\vec{c}\cdot(6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}) = -6\vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{c} + 7|\vec{c}|^2 = -6\cdot3 - 3 + 7\cdot6 = 21$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\vec{d})}{|\vec{d}|^2}\vec{d} = \dfrac{21}{189}(6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}) = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \dfrac{7}{9}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OK}} - \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \dfrac{7}{9}\vec{c}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{HK}} = \dfrac{2}{9}\vec{c}$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{HK}}/\!/\vec{c}$　■

6 (1) $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{6x+1}$ を微分すると $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{24}{(6x+1)^2}$

$f'(x) = 1$ とすると $-\frac{1}{2} + \frac{24}{(6x+1)^2} = 1$

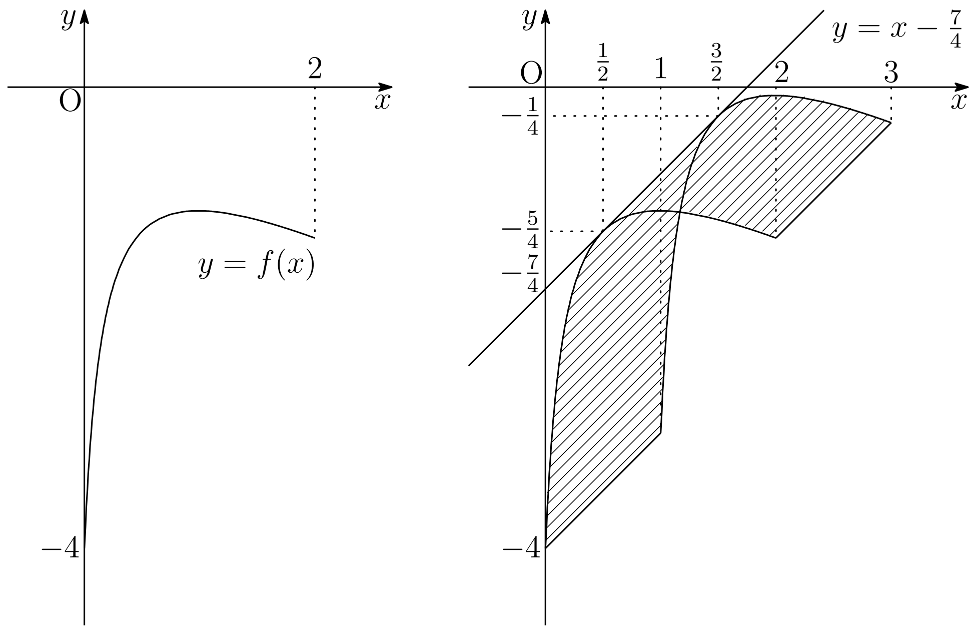
整理すると $(6x+1)^2 = 16$ $x > 0$ より $x = \frac{1}{2}$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$

求める接線は，点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ を通り，傾き 1 であるから

$$y + \frac{5}{4} = x - \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - \frac{7}{4}}$$

(2) $x > 0$ において $f''(x) = -\frac{288}{(6x+1)^3} < 0$ より，$y = f(x)$ は上に凸.

(1) の結果から点 Q の軌跡を表す曲線 $y = f(x-1)+1$ は点 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ で (1) で求めた直線と接する．図形 S は，右下の図の斜線部分で境界線を含む.

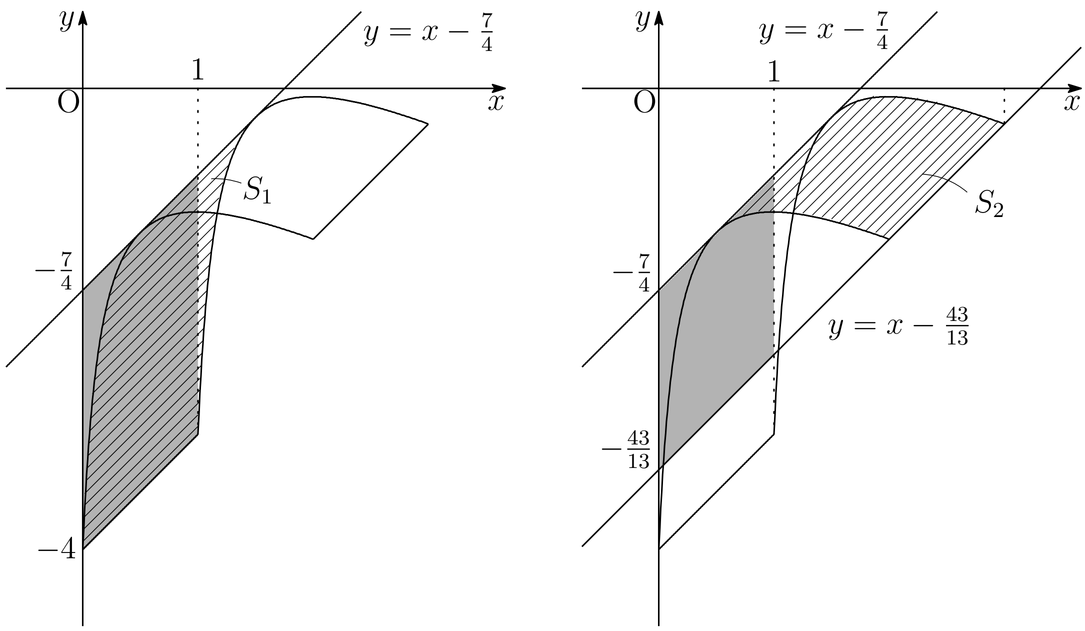


$f(0)=-4$，$f(2)=-\dfrac{17}{13}$ より，点 $(2,\ f(2))$ を通り，傾き 1 の直線は

$$y+\frac{17}{13}=x-2 \quad \text{ゆえに} \quad y=x-\frac{43}{13}$$

カバリエリの原理により，下の図の斜線部分の面積は

$$S_1=\left\{-\frac{7}{4}-(-4)\right\}=\frac{9}{4},\quad S_2=\left\{-\frac{7}{4}-\left(-\frac{43}{13}\right)\right\}=\frac{81}{52}$$



2 曲線 $y=f(x)$ と $y=f(x-1)+1$ の共有点の x 座標は $(1<x<2)$

$$-\frac{x}{2}-\frac{4}{6x+1}=-\frac{x-1}{2}-\frac{4}{6x-5}+1$$

整理すると　$12x^2-8x-7=0$　ゆえに　$(2x+1)(6x-7)=0$

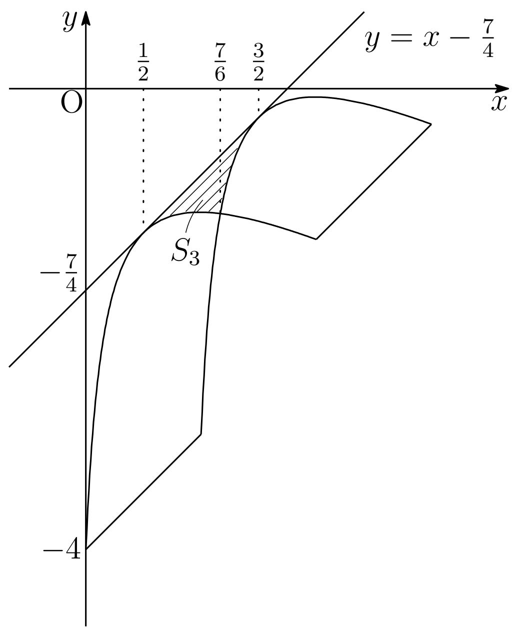
$1<x<2$ に注意して　$x=\dfrac{7}{6}$

$g(x)=x-\dfrac{7}{4}$ とし，下の図の斜線部分の面積を S_3 とすると

$$S_3=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{\frac{7}{6}}^{\frac{3}{2}}[g(x)-\{f(x-1)+1\}]dx$$

$g(x+1)-1=g(x)$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}S_3&=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\{g(x)-f(x)\}dx\\&=\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}}\left(\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}+\frac{4}{6x+1}\right)dx\\&=\left[\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x+\frac{2}{3}\log(6x+1)\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}}=-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\log 2\end{aligned}$$



よって　$S_1+S_2-S_3=\dfrac{9}{4}+\dfrac{81}{52}-\left(-\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{3}\log 2\right)=\boldsymbol{\dfrac{237}{52}-\dfrac{4}{3}\log 2}$ ■

2.10　2024 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 a を正の実数とし，$f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする．O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする．直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする．ただし，$q > 0$ とする．

(1) p，q の値を a を用いて表せ．また，$p > q$ であることを示せ．

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく．S を a を用いて表せ．

(3) (2) の S に対し，$S = \dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ．

2 以下の問いに答えよ．

(1) t を $t > 1$ を満たす実数とする．正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$

(b) $x \geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする．このとき，不等式

$$x + 1 > 2\log_t(x + 1)$$

を示せ．

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ．

3 n を 2 以上の整数とする．それぞれ A，A，B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える．この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字の文字列を作る．作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする．また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする．これらの場合以外は可とする．たとえば $n = 6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で，文字列 BABAAB や BABABA などは可である．作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく．

(1) p_2，q_2，r_2 をそれぞれ求めよ．また，p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いてそれぞれ表せ．

(2) $p_n + 2q_n + 2r_n$ を n を用いて表せ．

(3) $p_n + iq_n - (1+i)r_n$ を n を用いて表せ．ただし，i は虚数単位である．

(4) $p_n = r_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ．

4 xyz 空間において，点 $\mathrm{P}_1(3, -1, 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $\mathrm{P}_2(5, 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える．

(1) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ．

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ．この交わりは円となる．この円を C とし，その中心を P_3 とする．C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ．

(3) (2) の円 C に対し，C を含む平面を H とする．xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ．

(4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ．また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ．

5 $x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく．必要ならば，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t} = 0$ であることと，および，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい．

(1) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)$ $(x \geqq 2)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ $(x \geqq 2)$ の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を調べ，$y = f(x)$ $(x \geqq 2)$ のグラフの概形を xy 平面上に描け．ただし，(2) の α を用いてよい．グラフの凹凸は調べなくてよい．

(4) $2 \leqq m < n$ を満たす整数 $m,\ n$ の組 $(m,\ n)$ に対して，等式

$$(*)\quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする．このような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

6 xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C : x^2+y^2 = 1$ および円板 $D : x^2+y^2 \leqq 1$ を考える．D を底面とし点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を K とする．$\mathrm{A}(0, -1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$ とする．xyz 空間内の平面 $H : z = x$ を考える．すなわち，H は zx 平面上の直線 $z = x$ と線分 AB をともに含む平面である．K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする．$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする．

(1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく．$r(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) 円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分，線分 PA，および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく．θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta + h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく．T を求めよ．必要であれば $\tan\dfrac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C: y = (x)$ について，$f(x) = (x-a)^2 + 3a^2$ より，頂点 A は　$(a,\ 3a^2)$
直線 OA の傾きは $3a$ であるから，その方程式は　$y = 3ax$
これと $C: y = x^2 - 2ax + 4a^2$ から y を消去すると

$$x^2 - 2ax + 4a^2 = 3ax \quad ゆえに \quad (x-a)(x-4a) = 0$$

点 P は点 A と異なるから，点 P の x 座標 p は　$\boldsymbol{p = 4a}$
$f'(x) = 2x - 2a$ より C 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線は

$$y = (2q - 2a)(x - q) + q^2 - 2aq + 4a^2$$

すなわち　$y = 2(q-a)x - q^2 + 4a^2$
これが原点を通るから $(q > 0,\ a > 0)$

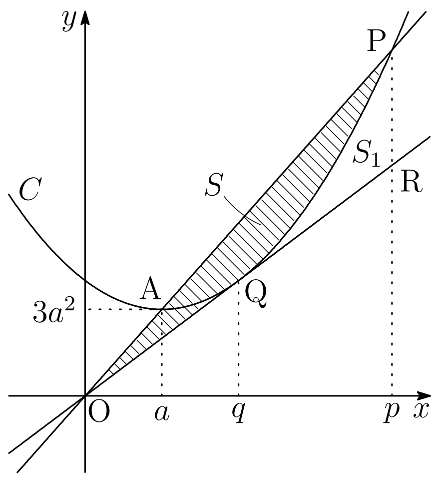
$$-q^2 + 4a^2 = 0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{q = 2a}$$

$p = 4a,\ q = 2a$ であるから $(a > 0)$　　$p > q$

(2) 曲線 $C: y = f(x)$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線 $y = 2ax$ および直線 $x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする．このとき [6]

$$f(x) = f(q) + f'(q)(x-q) + (x-q)^2$$

であるから



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_q^p \{f(x) - f(q) - f'(q)(x-q)\}\,dx \\ &= \int_q^p (x-q)^2\,dx = \frac{1}{3}(p-q)^3 \\ &= \frac{1}{3}(4a-2a)^3 = \frac{8}{3}a^3 \end{aligned}$$

接線 OQ と直線 $x = p$ の交点を R とすると
$\mathrm{P}(4a,\ 12a^2)$，$\mathrm{R}(4a,\ 8a^2)$ より

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{OPR} - S_1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4a(12a^2 - 8a^2) - \frac{8}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3} \end{aligned}$$

(3) $S = \dfrac{2}{3}$ を (2) の結果に代入すると　$\dfrac{16}{3}a^3 = \dfrac{2}{3}$　　これを解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

---

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

別解　直線 $x=2a$ と直線 OP の交点を Q′ とすると　$\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$，$\mathrm{Q}'(2a,\ 6a^2)$

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}p\cdot\mathrm{QQ}'=\frac{1}{2}\cdot4a\cdot2a^2=4a^3$$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は，1/6 公式により

$$\frac{1}{6}(p-q)^3=\frac{1}{6}(4a-2a)^3=\frac{4}{3}a^3$$

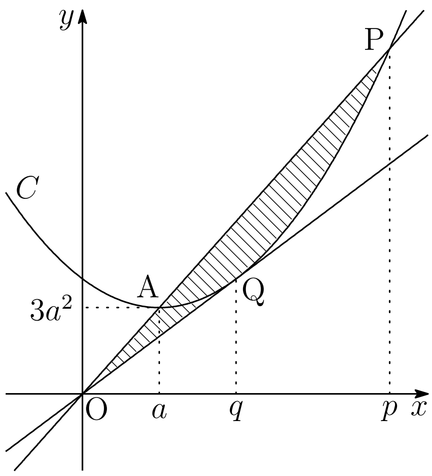
よって，求める面積は　$S=4a^3+\dfrac{4}{3}a^3=\boldsymbol{\dfrac{16}{3}a^3}$

解説

$$\begin{aligned}xy'-y&=x(2x-2a)-(x^2-2ax+4a^2)\\&=(x-2a)^2+4a(x-2a)\end{aligned}$$

求める面積 S は (ガウス・グリーンの定理の系)

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_{2a}^{4a}(xy'-y)\,dx=\frac{1}{2}\int_{2a}^{4a}\{(x-2a)^2+4a(x-2a)\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}(x-2a)^3+2a(x-2a)^2\,\Big]_{2a}^{4a}=\boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}\end{aligned}$$



補足　解説の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}\,dt$$

の変数 t を x に変更したものである．このとき，積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる．例えば，C と線分 OQ，OA で囲まれた部分の面積 S' を求める場合は次のようになる．

$$\begin{aligned}S'&=\frac{1}{2}\int_{2a}^{a}(xy'-y)\,dx=\frac{1}{2}\int_{2a}^{a}\{(x-2a)^2+4a(x-2a)\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}(x-2a)^3+2a(x-2a)^2\,\Big]_{2a}^{a}=\frac{5}{6}a^3\end{aligned}$$

■

2 (1) $x \geqq 2\log_t x$ より　$x+1 \geqq 2\log_t x + 1 = 2\log_t \sqrt{t}x$　$\cdots$①

$x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$ より $(t>1)$，$(\sqrt{t}-1)x > 1$ であるから

$$\sqrt{t}x - (x+1) = (\sqrt{t}-1)x - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{t}x > x+1 \quad \cdots②$$

①，② から　$x+1 > 2\log_t(x+1)$

(2) (1) の結論に $t=2$ を代入すると，$x > \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ のとき

$$x \geqq 2\log_2 x \implies x+1 > 2\log_2(x+1)$$

これから，$x > \sqrt{2}+1$ のとき　$2^x \geqq x^2 \implies 2^{x+1} > (x+1)^2$　$\cdots(*)$

$(*)$ より，$2^N \geqq N^2$ $(N \geqq 3)$ を満たす自然数 N が存在するならば，$n > N$ であるすべての自然数 n について，次が成立する．

$$2^n > n^2$$

$n \leqq 2\log_2 n$ を変形すると　$2^n \leqq n^2$　$\cdots(**)$

したがって，$(**)$ を満たす n は $n \leqq N$ に限られる．

$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ について，2^n と n^2 の値を調べると，下の表から　$N=4$

n	1	2	3	4
2^n	2	4	8	16
n^2	1	4	9	16

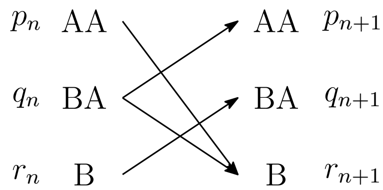
よって，$(**)$ を満たす n は　$\boldsymbol{n = 2,\ 3,\ 4}$

■

3 (1) $p_2 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$，　$q_2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$，　$r_2 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

求める漸化式は，次のようになる．

$$\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n}$$
$$\boldsymbol{q_{n+1} = \frac{2}{3}r_n}$$
$$\boldsymbol{r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n}$$



(2) (1) の結果から

$$p_{n+1} + 2q_{n+1} + 2r_{n+1} = \frac{2}{3}(p_n + 2q_n + 2r_n)$$

数列 $\{p_n + 2q_n + 2r_n\}$ は $p_2 + 2q_2 + 2r_2 = \dfrac{4}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n + 2q_n + 2r_n = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \boldsymbol{2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

(3) (1) の結果から

$$p_{n+1} + iq_{n+1} - (1+i)r_{n+1} = -\frac{1}{3}(1+i)\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\}$$

数列 $\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\}$ は $p_2 + iq_2 - (1+i)r_2 = \dfrac{2}{9}$，公比 $-\dfrac{1+i}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n + iq_n - (1+i)r_n = \boldsymbol{\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}}$$

(4) (3) の結果についてその共役複素数を考えると

$$p_n - iq_n - (1-i)r_n = \frac{2}{9}\left(-\frac{1-i}{3}\right)^{n-2}$$

上式と (3) の結果の辺々を加えると

$$\begin{aligned} 2(p_n - r_n) &= \frac{2}{9}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}\right\} \\ &= \frac{4}{9}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\cos\frac{n-2}{4}\pi \end{aligned}$$

$p_n = q_n$ のとき，整数 k を用いて　$\dfrac{n-2}{4}\pi = \dfrac{2k-1}{2}\pi$　ゆえに　$n = 4k$

よって，求める必要十分条件は　**$\boldsymbol{n}$ は 4 の倍数**　■

4 (1) $\mathrm{P_1}(3,-1,\ 1)$, $\mathrm{P_2}(5,\ 0,-1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(2,\ 1,-2)$

$$\mathrm{P_1P_2}=|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\mathbf{3}$$

(2) $d_1=\mathrm{P_1P_3}$，$d_2=\mathrm{P_2P_3}$ とし，C の半径を r とすると

$$d_1+d_2=3,\quad {d_1}^2+r^2=5,\quad {d_2}^2+r^2=2 \qquad (*)$$

$(*)$ の第 2 式，第 3 式から r^2 を消去し，第 1 式を代入すると

$${d_1}^2-{d_2}^2=(d_1+d_2)(d_1-d_2)=3\quad \text{ゆえに}\quad d_1-d_2=1$$

d_1, d_2 の連立方程式を解いて　$d_1=2$, $d_2=1$　$(*)$ から　$\boldsymbol{r=1}$

$\mathrm{P_3}$ は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ を $2:1$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(3,-1,\ 1)+\frac{2}{3}(2,\ 1,-2)=\left(\frac{13}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

よって　$\mathbf{P_3}\left(\boldsymbol{\frac{13}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}}\right)$

(3) xy 平面，H はそれぞれベクトル $\vec{v}=(0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(2,\ 1,-2)$ に垂直であるから，求めるベクトルと平行なベクトルは

$$\vec{v}\times\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(-1,\ 2,\ 0)$$

$|\vec{v}\times\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|=\sqrt{5}$ より，求める単位ベクトルは　$\boldsymbol{\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ 2,\ 0)}$

(4) (3) で求めた単位ベクトルの 1 つを $\vec{e_1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ 2,\ 0)$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ と (3) で求めたベクトルの両方に垂直なベクトルは

$$(2,\ 1,-2)\times(-1,\ 2,\ 0)=(4,\ 2,\ 5)$$

これと平行な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e_2}=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}(4,\ 2,\ 5)$ とする．

C の半径は 1 であるから，C 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ は，媒介変数 θ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}+(\cos\theta)\vec{e_1}+(\sin\theta)\vec{e_2} \qquad (**)$$

$\mathrm{P_3}$ の z 座標が負であるから，$\sin\theta=-1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{d=\frac{1+\sqrt{5}}{3}}$

$\sin\theta=-1$, $\cos\theta=0$ により　$\mathbf{Q}\left(\dfrac{65-4\sqrt{5}}{15},-\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15},-\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$

解説 $\mathrm{P_1}(3,-1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 の方程式は

$$S_1 : (x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$$

$\mathrm{P_2}(5,\ 0,-1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 の方程式は

$$S_2 : (x-5)^2+y^2+(z+1)^2=2$$

S_1 および S_2 の方程式の辺々の差をとり整理すると，C を含む平面

$$H : 2x+y-2z-9=0$$

を得る．このとき，H の法ベクトル $\vec{n}=(2,\ 1,-2)$ は $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ と平行である．
また，直線 $\mathrm{P_1P_2}$ 上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとると，媒介変数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P}}=t\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} \quad \text{ゆえに} \quad (x-3,\ y+1,\ z-1)=t(2,\ 1,-2)$$

これから t を介して，次の直線 ℓ の方程式を得る．

$$\ell : \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}=t$$

ℓ と H の交点 $\mathrm{P_3}$ は

$$x=2t+3, \quad y=t-1, \quad z=-2t+1 \tag{A}$$

を H に代入すると

$$2(2t+3)+t-1-2(-2t+1)-9=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{2}{3}$$

これを (A) に代入すると，$\mathrm{P_3}\left(\frac{13}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ を得る．
また，点 $\mathrm{P_1}(3,-1,\ 1)$ と平面 H の距離は，点と平面の距離の公式により

$$\frac{|2{\cdot}3+(-1)-2{\cdot}1-9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2$$

直線の方程式

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ の直線 ℓ の方程式は

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}=t \qquad (t\text{ は媒介変数})$$

点と平面の距離

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $H: ax+by+cz+d=0$ の距離 h は

$$\boldsymbol{h=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

証明 平面 H の法ベクトルは $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$

点Pを通り，方向ベクトルが $\vec{n}$ の直線の方程式が ℓ であるから

$$x=at+x_1,\quad y=bt+y_1,\quad z=ct+z_1$$

ℓ と H の交点を $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とし，そのときの t の値を t_0 とすると

$$x_2=at_0+x_1,\quad y_2=bt_0+y_1,\quad z_2=ct_0+z_1 \tag{$*$}$$

Qは H 上の点であるから

$$a(at_0+x_1)+b(bt_0+y_1)+c(ct_0+z_1)+d=0$$

これを t_0 について解くと $t_0=-\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$

$(*)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(at_0,\ bt_0,\ ct_0)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\left|-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ **証終**

補足 3点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ を通る平面の法ベクトルを

$$\vec{n}=(a,\ b,\ c)=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とする．平面ABC上の任意の点を $\mathrm{T}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ より

$$a(x-a_1)+b(y-b_1)+c(z-c_1)=0$$

点 $\mathrm{D}(d_1,\ d_2,\ d_3)$ から平面ABCまでの距離 h は

$$h=\frac{|a(d_1-a_1)+b(d_2-a_2)+c(d_3-a_3)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ より[7]，四面体ABCDの体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot\frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\boldsymbol{\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}$$ ■

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10)

5　(1) $xf(x) = \log(2x-3)$ の両辺を微分すると

$$f(x) + xf'(x) = \frac{2}{2x-3}$$

両辺に $x(2x-3)$ を掛けると

$$x(2x-3)f(x) + x^2(2x-3)f'(x) = 2x$$

したがって　$g(x) = x^2(2x-3)f'(x) = 2x - x(2x-3)f(x)$
$= \boldsymbol{2x - (2x-3)\log(2x-3)}$

(2) (1) の結果から　$g'(x) = -2\log(2x-3)$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\{2x - (2x-3)\log(2x-3)\}$$
$$= \lim_{x\to\infty}(2x-3)\left\{\frac{2x}{2x-3} - \log(2x-3)\right\} = -\infty$$

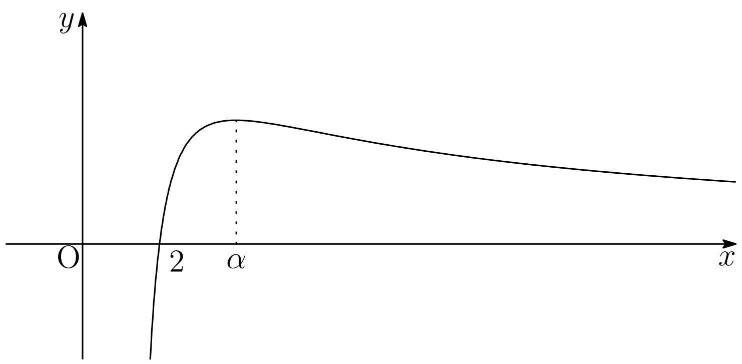
よって　$g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在する．

(3) $x > 2$ のとき，$f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号と一致するから

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x-3)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}\cdot\frac{\log(2x-3)}{2x-3} = 0$$

したがって，グラフの概形は次のようになる．



(4) $f(x) = \dfrac{\log(2x-3)}{x}$ より　$e^{f(x)} = (2x-3)^{\frac{1}{x}}$

$h(x) = (2x-3)^{\frac{1}{x}}$ とすると $(x \geqq 2)$，$h(x)$ は $x = \alpha$ で極大値をとる．

$3^4 = 81,\ 5^3 = 125$ より　$3^4 < 5^3$　ゆえに　$3^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{4}}$

$5^5 = 3125,\ 7^4 = 2401$ より　$5^5 > 7^4$　ゆえに　$5^{\frac{1}{4}} > 7^{\frac{1}{5}}$

$9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$ より　$h(6) = h(3)$　ゆえに　$3^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{4}} > 7^{\frac{1}{5}} > 9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$

すなわち　$h(3) < h(4) > h(5) > h(6) = h(3)$　$\cdots$①

2 整数 $m,\ n$ $(2 \leqq m < n)$ が

$$(2m-3)^n = (2n-3)^m \quad \text{すなわち} \quad h(m) = h(n)$$

を満たすとき，$2 < m < \alpha$ であるから $(3 < \alpha < 5)$，① より

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (3,\ 6)}$$

■

6 (1) P(0, 0, 1)，Q($\cos\theta$, $\sin\theta$, 0) より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\cos\theta,\ \sin\theta, -1)$

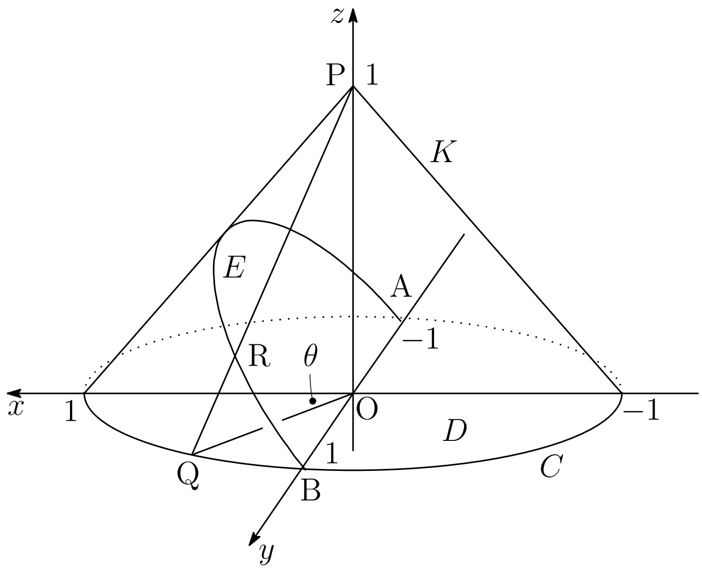
$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とすると (t は媒介変数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (0,\ 0,\ 1) + t(\cos\theta,\ \sin\theta, -1)\\ &= (t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t)\end{aligned}$$

R は平面 $z = x$ 上の点であるから

$$1 - t = t\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{1+\cos\theta}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{2}$ であるから　　$r(\theta) = |t||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}}$

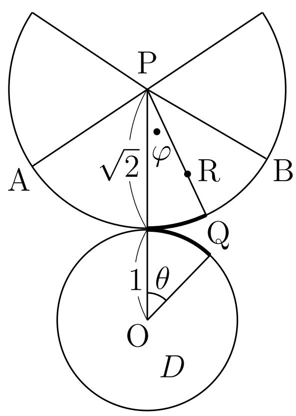


(2) 右の図の展開図において，PR の偏角を φ とし，これと D 上の偏角 θ について

$$\theta = \sqrt{2}\varphi$$

であるから，$\tilde{r}(\varphi) = r(\theta)$ とすると

$$\tilde{r}(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{1+\cos\sqrt{2}\varphi}$$



θ と φ の変換に注意して

$$S(\theta+h)-S(\theta)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi \tag{A}$$

$\tilde{r}(\varphi)=r(\sqrt{2}\varphi)$，$\tilde{r}(\varphi)$ は $0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ において，単調増加であるから

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)^2 d\varphi \leqq \frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi \leqq \frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}\left(\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}\right)^2 d\varphi$$

したがって　$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq \frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \tag{B}$$

(A)，(B) から次式が成立する．

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 展開図において，半径 $\sqrt{2}$ で中心角 $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ の扇形の面積を S_1 とし，線分 PR が通過する部分の面積を S_2 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r(\theta)^2\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

$u=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とすると　$\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1+u^2}{2}$

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
u	$0 \longrightarrow 1$

$\cos\theta=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ より，$\dfrac{1}{1+\cos\theta}=\dfrac{1+u^2}{2}$ であるから

$$S_2=\sqrt{2}\int_0^1\left(\frac{1+u^2}{2}\right)^2\frac{2du}{1+u^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1(1+u^2)\,du=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって　$T=S_1-S_2=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

補足 (2) の結果から，$S'(\theta)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\frac{1}{2}r(\theta)^2$ でもよい． ■

2.11 2025 年 (150 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5] [6]

[1] 原点を出発点として数直線上を動く点 P がある．試行 $(*)$ を次のように定める．

$$(*)\begin{cases} \text{1 枚の硬貨を 1 回投げて，} \\ \bullet\ \text{表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める．} \\ \bullet\ \text{裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ，} \\ \quad\text{奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め，} \\ \quad\text{偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める．} \end{cases}$$

ただし，硬貨を投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$，さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 試行 $(*)$ を 3 回繰り返したとき，点 P が原点にもどっている確率を求めよ．

(2) 試行 $(*)$ を 6 回繰り返したとき，点 P が原点にもどっている確率を求めよ．

(3) n を 3 で割り切れない正の整数とする．試行 $(*)$ を n 回繰り返したとき，点 P が原点にもどっている確率を求めよ．

[2] 正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) k を実数とする．$a_n = \log_2 x_n$，$b_n = \log_2 y_n$ とおく．このとき，数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

[3] a を実数とし，関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ で極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ．

$\boxed{4}$ n を正の整数，a を正の実数とし，関数 $f(x)$ と $g(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = n\log x, \quad g(x) = ax^n$$

また，曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が共有点をもち，その共有点における2つの曲線の接線が一致しているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) この2つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ．

(3) (2) で求めた S_n に対し，極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

$\boxed{5}$ S を xyz 空間内の原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径1の球面とする．また，点 P$(a,\ b,\ c)$ を点 N(0, 0, 1) とは異なる球面 S 上の点とする．点 P と点 N を通る直線 ℓ と xy 平面との交点を Q とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 Q の座標を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点 $(p,\ q,\ 0)$ と点 N を通る直線を m とする．直線 m と球面 S の交点のうち，点 N 以外の交点の座標を p，q を用いて表せ．

(3) 点 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，ベクトル $(3,\ 4,\ 5)$ に直交する平面 α を考える．点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき，点 Q は xy 平面上の円周を動くことを示せ．

$\boxed{6}$ 1辺の長さが1の正五角形を K とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) K の対角線の長さを求めよ．

(2) K の周で囲まれた図形を P とする．また，P を K の外接円の中心の周りに角 θ だけ回転して得られる図形を P_θ とする．P と P_θ の共通部分の周の長さを ℓ_θ とする．θ が $0^\circ < \theta < 72^\circ$ の範囲で動くとき，ℓ_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ 1 回の試行 $(*)$ で点 P は数直線上を正の向きに 1 または負の向きに -2 だけ進む．それぞれの事象を A，B とし，その確率を $p=P(A)$，$q=P(B)$ とすると

$$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{4},\quad q=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

(1) 3 回の試行 $(*)$ で事象 A，B の起きる回数をそれぞれ x，y とすると

$$x+y=3,\ x+(-2)y=0\quad \text{これを解いて}\quad x=2,\ y=1$$

したがって，求める確率は

$$\frac{3!}{2!1!}p^2q=3\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{27}{64}}$$

(2) 6 回の試行 $(*)$ で事象 A，B の起きる回数をそれぞれ x，y とすると

$$x+y=6,\ x+(-2)y=0\quad \text{これを解いて}\quad x=4,\ y=2$$

したがって，求める確率は

$$\frac{6!}{4!2!}p^2q=15\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1215}{4096}}$$

(3) n 回の試行 $(*)$ で事象 A，B の起きる回数をそれぞれ x，y とすると

$$x+y=n,\ x+(-2)y=0\quad \text{これを解いて}\quad x=\frac{2n}{3},\ y=\frac{n}{3}$$

n は 3 で割り切れない正の整数であるから，x，y が 0 以上の整数であることに反する．よって，求める確率は　**0**　■

2 (1) 正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は

$$x_1 = 2,\quad y_1 = \frac{1}{2},\quad x_{n+1} = (x_n)^5\cdot(y_n)^2,\quad y_{n+1} = x_n\cdot(y_n)^6$$

を満たすから，$a_n = \log_2 x_n$，$b_n = \log_2 y_n$ とおくと

$$a_1 = 1,\quad b_1 = -1,\quad a_{n+1} = 5a_n + 2b_n,\quad b_{n+1} = a_n + 6b_n$$

k を実数とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1} + kb_{n+1} &= 5a_n + 2b_n + k(a_n + 6b_n) \\ &= (5+k)a_n + (2+6k)b_n \end{aligned} \qquad (*)$$

したがって　$1 : k = (5+k) : (2+6k)$

$$k(5+k) = 2 + 6k \quad 整理すると \quad k^2 - k - 2 = 0$$

ゆえに　$(k+1)(k-2) = 0$　これを解いて　$k = -1,\ 2$

$k = -1,\ 2$ を $(*)$ にそれぞれ代入すると

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n),\quad a_{n+1} + 2b_{n+1} = 7(a_n + 2b_n) \qquad (**)$$

数列 $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n + 2b_n\}$ は公比がそれぞれ 4, 7 の等比数列である．

よって　　$\boldsymbol{k = -1,\ 2}$

(2) $(**)$ より

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= (a_1 - b_1)\cdot 4^{n-1} = \{1 - (-1)\}\cdot 4^{n-1} = 2\cdot 4^{n-1}, \\ a_n + 2b_n &= (a_1 + 2b_1)\cdot 7^{n-1} = \{1 + 2(-1)\}\cdot 7^{n-1} = -7^{n-1} \end{aligned}$$

上の 2 式から b_n を消去すると　$a_n = \dfrac{4^n - 7^{n-1}}{3}$

$x_n = 2^{a_n}$ であるから　　$\boldsymbol{x_n = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}}$ ■

3　(1) $f(x)=x^4+\dfrac{4a}{3}x^3+(a+2)x^2$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3+4ax^2+2(a+2)x \\ &= 2x(2x^2+2ax+a+2) \end{aligned}$$

$g(x)=2x^2+2ax+a+2$ とし，その係数について

$$D/4=a^2-2(a+2)=a^2-2a-2$$

とおく．$f(x)$ が極大値をもつ条件は

(∗)「$f'(x)$ の符号が正から負になる x が存在する」

ことである．

(i) $D \leqq 0$ のとき，$f'(x)=2xg(x)$，$g(x) \geqq 0$ より，条件 (∗) を満たさない．

(ii) $g(0)=0$，すなわち，$a=-2$ のとき　$f'(x)=4x^2(x-2)$

$$f'(x)=0 \quad \text{これを解くと} \quad x=0,\ 4$$

これらの x の値は，(∗) を満たさない．

(iii) $D>0$ かつ $a \neq -2$，すなわち，
$a<-2,\ -2<a<1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}<a$ のとき，$f'(x)=0$ は，
異なる 3 つの実数解をもち，それらを $x_1<x_2<x_3$ とすると

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$	x_3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

このとき，$f(x)$ は極大値をもつ．

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{a<-2,\ -2<a<1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}<a}$

(2) (1)(iii) の増減表で $x_2=0$ であるから，$g(x)=0$ の解が $x_1,\ x_3$ となる，
すなわち，$x_1<0<x_3$ となる条件は

$$g(0)=a+2<0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a<-2}$$

■

4 (1) $f(x)=n\log x$，$g(x)=ax^n$ より　$f'(x)=\dfrac{n}{x}$，　$g'(x)=anx^{n-1}$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接点の x 座標を $x=t$ とすると，

$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ より

$$(*)\begin{cases} n\log t = at^n \\ \dfrac{n}{t} = ant^{n-1} \end{cases} \qquad (*) \text{ の第 2 式から} \quad at^n = 1 \quad \cdots ①$$

① を $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$n\log t = 1 \quad \text{ゆえに} \quad t = e^{\frac{1}{n}} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると　$ae=1$　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{e}}$

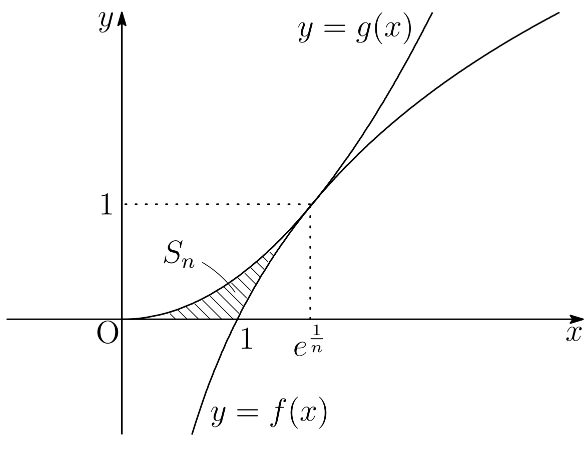
(2) (1) の結果から，S_n は下の図の斜線部分の面積である．

$$S_n = \int_0^{e^{\frac{1}{n}}} g(x)\,dx - \int_1^{e^{\frac{1}{n}}} f(x)\,dx = \frac{1}{e}\int_0^{e^{\frac{1}{n}}} x^n\,dx - n\int_1^{e^{\frac{1}{n}}} \log x\,dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)e}\Big[\, x^{n+1} \,\Big]_0^{e^{\frac{1}{n}}} - n\Big[\, x(\log x - 1) \,\Big]_1^{e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}} + n(e^{\frac{1}{n}} - 1) - e^{\frac{1}{n}} \qquad (**)$$

$$= \boldsymbol{\frac{n^2}{n+1}e^{\frac{1}{n}} - n}$$



(3) $n \longrightarrow \infty$ のとき，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$ より　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1)=1$

これを $(**)$ に利用すると

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}} + n(e^{\frac{1}{n}}-1) - e^{\frac{1}{n}}\right\}$$

$$= 0\cdot 1 + 1 - 1 = \boldsymbol{0}$$

補足 1 と n 個の $1+\dfrac{1}{n}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+1}\left\{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} > \sqrt[n+1]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

両辺を $n+1$ 乗すると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列である．

また，1 と $n+1$ 個の $\dfrac{n}{n+1}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+2}\left\{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\right\} > \sqrt[n+2]{1\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

両辺を $n+2$ 乗すると

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

上式の逆数をとると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は単調減少列である．したがって

$$2=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}<\cdots<b_2<b_1=4$$

また，$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ であるから　$0<b_n-a_n=\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{4}{n}$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$

この極限値を**ネイピア数**といい，e ($\fallingdotseq 2.71828\cdots$) で表す．

以上の結果より，$n \geqq 2$ とすると，$a_n<e<b_{n-1}$ であるから

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad 1<n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)<\frac{n}{n-1}$$

上の第 2 式から，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1$　■

$\boxed{5}$ (1) S 上の z 座標が1となる点は，点Nに限るから，点Nと異なる点P$(a,\ b,\ c)$ の z 座標について

$$c \neq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1-c \neq 0$$

直線NPの方程式を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} + t\overrightarrow{\mathrm{NP}} \\ &= (0,\ 0,\ 1) + t(a,\ b,\ c-1)\end{aligned}$$

この直線は点Qを通るから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (0,\ 0,\ 1) + t(a,\ b,\ c-1)$$

上式の z 座標について $(1-c \neq 0)$

$$0 = 1 + t(c-1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{1-c}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (0,\ 0,\ 1) + \dfrac{1}{1-c}(a,\ b,\ c-1) = \left(\dfrac{a}{1-c},\ \dfrac{b}{1-c},\ 0\right)$

よって　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{a}{1-c}},\ \boldsymbol{\dfrac{b}{1-c}},\ \mathbf{0}\right)$

(2) (1)の結果を利用して

$$p = \frac{a}{1-c}, \quad q = \frac{b}{1-c} \qquad (*)$$

とおくと，P$(a,\ b,\ c)$ は S 上の点であるから　$a^2+b^2+c^2=1$

これから $a^2+b^2=1-c^2$ を利用すると

$$\begin{aligned}p^2+q^2 &= \left(\frac{a}{1-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{1-c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{(1-c)^2} \\ &= \frac{1-c^2}{(1-c)^2} = \frac{1+c}{1-c} = -1 + \frac{2}{1-c}\end{aligned}$$

上式から　$1-c = \dfrac{2}{p^2+q^2+1}$　ゆえに　$c = \dfrac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}$

$(*)$ より　$a = p(1-c) = \dfrac{2p}{p^2+q^2+1}$，$b = 2q(1-c) = \dfrac{2q}{p^2+q^2+1}$

よって　$\left(\boldsymbol{\dfrac{2p}{p^2+q^2+1}},\ \boldsymbol{\dfrac{2q}{p^2+q^2+1}},\ \boldsymbol{\dfrac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}}\right)$

別解　N$(0,\ 0,\ 1)$，P$(a,\ b,\ c)$，Q$(p,\ q,\ 0)$ とする．

P は直線 NQ 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} + k\overrightarrow{\mathrm{NQ}} \qquad (\mathrm{P} \neq \mathrm{N}\ \text{より},\ k \neq 0)\\ &= (0,\ 0,\ 1) + k(p,\ q, -1)\\ &= (kp,\ kq,\ 1-k)\end{aligned}$$

P は S 上の点であるから

$$(kp)^2 + (kq)^2 + (1-k)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k\{(p^2+q^2+1)k - 2\} = 0$$

$k \neq 0$ より　　$k = \dfrac{2}{p^2+q^2+1}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\dfrac{2p}{p^2+q^2+1},\ \dfrac{2q}{p^2+q^2+1},\ \dfrac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}\right)$

(3)　平面 α の方程式は　　$3(x-0) + 4(y-0) + 5\left(z - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

すなわち　　$3x + 4y + 5z - \dfrac{5}{2} = 0$

S 上の点 P$(a,\ b,\ c)$ が平面 α 上にあるとき

$$3a + 4b + 5c - \frac{5}{2} = 0 \qquad (**)$$

直線 NP と xy 平面との交点を Q$(p,\ q,\ 0)$ とすると，(2) の結果から

$$(a,\ b,\ c) = \left(\frac{2p}{p^2+q^2+1},\ \frac{2q}{p^2+q^2+1},\ \frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}\right)$$

これを $(**)$ に代入すると

$$\frac{6p + 8q + 5(p^2+q^2-1)}{p^2+q^2+1} - \frac{5}{2} = 0$$

整理すると　　$p^2 + q^2 + \dfrac{12}{5}p + \dfrac{16}{5}q - 3 = 0$

したがって，点 Q の軌跡の方程式は　$x^2 + y^2 + \dfrac{12}{5}x + \dfrac{16}{5}y - 3 = 0$

$$\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = 7$$

よって，**点 Q の軌跡は中心 $\left(-\dfrac{6}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$，半径 $\sqrt{7}$ の円である．**

補足 S と共有点をもつ平面 α を

$$\alpha : \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \alpha_4$$

とし，S 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$，xy 平面上の点 $\mathrm{Q}(p,\ q,\ 0)$ とすると

$$(a,\ b,\ c) = \left(\frac{2p}{p^2+q^2+1},\ \frac{2q}{p^2+q^2+1},\ \frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}\right)$$

であり，$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ は α 上の点であるから

$$\frac{2\alpha_1 p + 2\alpha_2 q + \alpha_3(p^2+q^2-1)}{p^2+q^2+1} = \alpha_4$$

整理すると

$$2\alpha_1 p + 2\alpha_2 q - 2\alpha_3 = (\alpha_4 - \alpha_3)(p^2+q^2+1)$$

(i) $\alpha_3 \neq \alpha_4$ のとき (α は N を通らない)，点 Q の軌跡の方程式は

$$\frac{2\alpha_1 x + 2\alpha_2 y - 2\alpha_3}{\alpha_4 - \alpha_3} = x^2 + y^2 + 1$$

すなわち　円 : $x^2 + y^2 - \dfrac{2\alpha_1}{\alpha_4-\alpha_3}x - \dfrac{2\alpha_2}{\alpha_4-\alpha_3} + \dfrac{2\alpha_3}{\alpha_4-\alpha_3} + 1 = 0$

本題では $\alpha : 3x + 4y + 5z = \dfrac{5}{2}$ であるから

$$\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 5,\ \alpha_4 = \frac{5}{2}$$

を上式に代入すればよい．

(ii) $\alpha_3 = \alpha_4$ のとき (α は N を通る)，点 Q の軌跡は

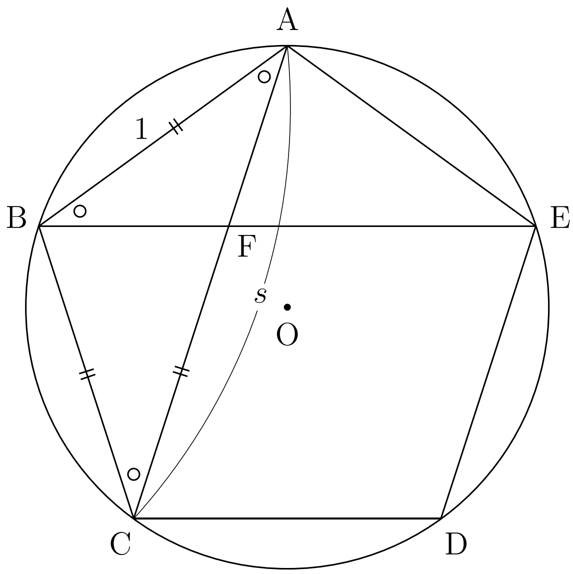
$$\text{直線} : \alpha_1 x + \alpha_2 y = \alpha_3$$

である．■

6　(1)　$s = \mathrm{CA}$ とおく．$\triangle\mathrm{BCA} \backsim \triangle\mathrm{FAB}$ より　$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} = \mathrm{FA} : \mathrm{AB}$

$$1 : s = s - 1 : 1 \quad \text{ゆえに} \quad s^2 - s - 1 = 0$$

$s > 0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{s = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$



別解　$s = 2\cos\dfrac{\pi}{5}$ であるから，$w = \cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}$ とおくと

$$w^5 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (w+1)(w^4 - w^3 + w^2 - w + 1) = 0$$

$w + 1 \neq 0$ であるから　　$w^4 - w^3 + w^2 - w + 1 = 0$

$$w^2 - w + 1 - \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} = 0$$

$$\left(w + \frac{1}{w}\right)^2 - \left(w + \frac{1}{w}\right) - 1 = 0$$

$s = w + \dfrac{1}{w}$ であるから　　$s^2 - s - 1 = 0$

$s > 0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{s = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(2) 下の図において，$x = \angle\mathrm{AOL}$，$y = \angle\mathrm{BOM}$ とする．$\alpha = \dfrac{\pi}{10}$ とおくと

$$\angle\mathrm{OAB} = \angle\mathrm{OBA} = 3\alpha,\quad \angle\mathrm{AOB} = 4\alpha,\quad x + y = 2\alpha$$

P の外接円の半径を R とすると　$R\cos 3\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$R = \mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \frac{1}{2\cos 3\alpha} = \frac{1}{2\sin 2\alpha}$$

$\triangle\mathrm{OAL}$, $\triangle\mathrm{OBM}$ に正弦定理を適用すると

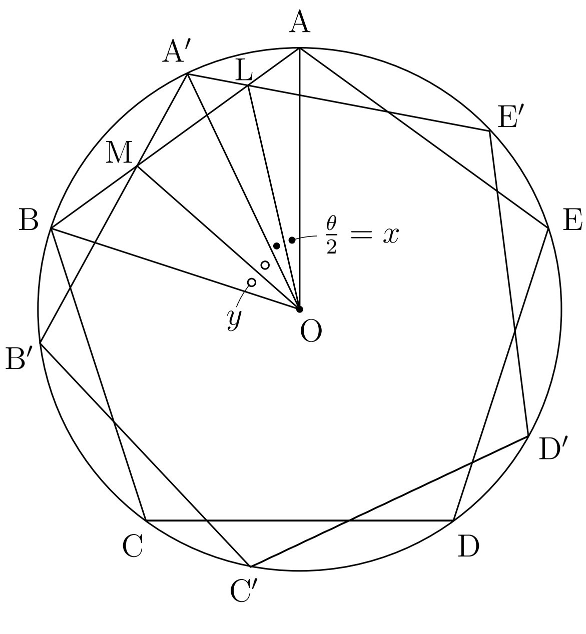
$$\frac{\mathrm{AL}}{\sin x} = \frac{R}{\sin(3\alpha + x)},\quad \frac{\mathrm{BM}}{\sin y} = \frac{R}{\sin(3\alpha + y)}$$

$3\alpha + x = 5\alpha - y = \dfrac{\pi}{2} - y$,　$3\alpha + y = 5\alpha - x = \dfrac{\pi}{2} - x$ であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{AL} + \mathrm{BM} &= \frac{R\sin x}{\cos y} + \frac{R\sin y}{\cos x} \\
&= \frac{R(\sin x\cos x + \sin y\cos y)}{\cos x\cos y} = \frac{R(\sin 2x + \sin 2y)}{2\cos x\cos y} \\
&= \frac{2R\sin(x+y)\cos(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \frac{2R\sin 2\alpha\cos(x-y)}{\cos 2\alpha + \cos(x-y)} \\
&= \frac{\cos(x-y)}{\cos 2\alpha + \cos(x-y)} = 1 - \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos(x-y)}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{\ell_\theta}{10} &= \mathrm{LM} = \mathrm{AB} - (\mathrm{AL} + \mathrm{BM}) \\
&= 1 - (\mathrm{AL} + \mathrm{BM}) = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos(x-y)}
\end{aligned}$$



$2\alpha = \dfrac{\pi}{5}$ であるから，(1) の結果から　$\cos 2\alpha = \dfrac{s}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$$\ell_\theta = \frac{10\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos(x-y)}$$

よって，ℓ_θ は，$x-y=0$，すなわち，$x=y=\alpha=\dfrac{\pi}{10}$ のとき

$$\text{最小値}\quad \frac{10\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}+1} = 2\sqrt{5}$$

をとる. ■

第 3 章　東京大学

出題分野 (2015-2025) 150 分

◀	東京大学	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	数と式											
I	2 次関数			5								
	図形と計量											
	データの分析											
	式と証明						1	6				
	複素数と方程式									5		
II	図形と方程式	1						1				
	三角関数			1			6					3
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法					2			3			
	関数											
	極限											
III	微分法とその応用		1		1·4	5		5		3	4	
	積分法	6				1			1	1	2	2
	積分法の応用	3	6	6	6		3·5	3	4·5	6	5	1
	場合の数と確率	2	2	2					6	2		
A	整数の性質	5	5	4		4		4	2		6	4
	図形の性質						2					
B	数列	4			2		4				3	5
	確率分布と統計											
	平面上のベクトル				3							
C	空間のベクトル		3			3				4	1	
	複素数平面		4	3	5	6		2				6
	式と曲線											

3.1　2015年(150分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える．

$$C : y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ．

2 どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く．さいころを投げ，出た目が1，2，3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く．さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく．たとえば，さいころを5回投げ，その出た目が順に2，5，6，3，4であったとすると，得られる文字列は

AACDAAB

となる．このとき，左から4番目の文字はD，5番目の文字はAである．

(1) n を正の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を求めよ．

(2) n を2以上の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がAで，かつ n 番目の文字がBとなる確率を求めよ．

3 a を正の実数とし，p を正の有理数とする．
座標平面上の2つの曲線 $y = ax^p \ (x > 0)$ と $y = \log x \ (x > 0)$ を考える．この2つの曲線の共有点が1点のみであるとし，その共有点をQとする．以下の問いに答えよ．必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい．

(1) a および点Qの x 座標を p を用いて表せ．

(2) この2つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を p を用いて表せ．

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ．

4 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める．

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2 + {p_n}^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ．

(2) すべての $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対し，$p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ．

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める．

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ．

5 m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

6 n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする．$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leqq f(x) \leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ．

$$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{-1}^{1} h(nx)\log(1 + e^{x+1})\,dx$$

解答例

$\boxed{1}$ $C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$ を a について整理すると　$4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0$

$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1$ とおくと

$$f(a) = \begin{cases} 4(x^2-1)\left\{a - \dfrac{y}{2(x^2-1)}\right\}^2 + \dfrac{x^2-y^2-1}{x^2-1} & (x^2 \neq 1) \\ -4ya + 1 & (x^2 = 1) \end{cases}$$

$f(a) = 0$ が正の解 a を持つためには，$f(0) = 1$ に注意して

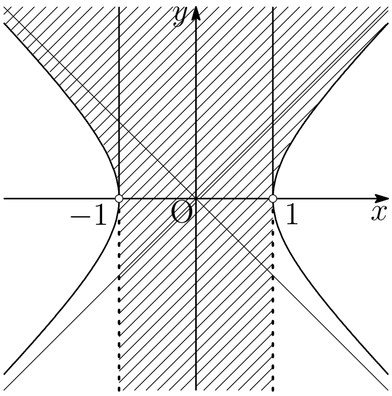
(i) $x^2 - 1 < 0$　ゆえに　$|x| < 1$

(ii) $x^2 - 1 > 0$，$\dfrac{y}{2(x^2-1)} > 0$，$\dfrac{x^2-y^2-1}{x^2-1} \leqq 0$

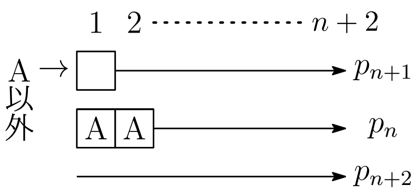
ゆえに　$y > 0$，$x^2 - y^2 - 1 \leqq 0$ $(|x| > 1)$

(iii) $x^2 - 1 = 0$，$-4y < 0$　ゆえに　$y > 0$ $(|x| = 1)$

求める領域は，下の図の斜線部分．ただし，点線部の境界は含まない．



2 (1) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とすると，p_{n+2} は最初に出た目が 4，5，6 の場合と 1，2，3 の場合により



$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots (*)$$

このとき　$p_1 = \dfrac{1}{2}$，$p_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$

$(*)$ より　$p_{n+2} - p_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$，

$$p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

第 1 式から　$p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から　$p_{n+1} + \dfrac{1}{2}p_n = p_2 + \dfrac{1}{2}p_1 = 1$

上の 2 式から　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{2}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad (n \geqq 1)}$

(2) 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字列が B となる確率を q_n とすると，q_{n+2} は，(1) と同様に

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots (**)$$

このとき　$q_2 = 0$，$q_3 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$

$(**)$ より　$q_{n+2} - q_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(q_{n+1} - q_n)$，

$$q_{n+2} + \frac{1}{2}q_{n+1} = q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$$

第 1 式から　$q_{n+1} - q_n = (q_3 - q_2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = \dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

第 2 式から　$q_{n+1} + \dfrac{1}{2}q_n = q_3 + \dfrac{1}{2}q_2 = \dfrac{1}{12}$

上の 2 式から　$\boldsymbol{q_n = \dfrac{1}{18}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad (n \geqq 2)}$　■

$\boxed{3}$ (1) $f(x) = ax^p - \log x$ とおくと $(x > 0)$

$$f'(x) = apx^{p-1} - \frac{1}{x} = \frac{p}{x}\left(ax^p - \frac{1}{p}\right)$$

$aq^p = \dfrac{1}{p} \cdots$ ①，すなわち，$q = \dfrac{1}{(ap)^{\frac{1}{p}}}$ とおくと，$f'(q) = 0$ より

x	(0)	$\cdots$	q	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

2 曲線 $y = ax^p$ $(x > 0)$ と $y = \log x$ $(x > 0)$ の共有点が 1 点のみであるとき，$f(q) = 0$ であるから

$$aq^p - \log q = 0 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　　$\boldsymbol{q = e^{\frac{1}{p}},\ a = \dfrac{1}{pe}}$

(2) 求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^q (ax^p)^2\,dx - \int_1^q (\log x)^2\,dx \\
&= a^2\left[\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}\right]_0^q - \left[x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\}\right]_1^q \\
&= \frac{(aq^p)^2 q}{2p+1} - q\{(\log q)^2 - 2\log q + 2\} + 2 \\
&= \frac{q}{(2p+1)p^2} - q\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2\right) + 2 \\
&= q\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{4}{2p+1}\right) - q\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2\right) + 2 \\
&= \frac{q(2-4p)}{1+2p} + 2 = \frac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \pi\left\{\dfrac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2\right\}}$

(3) (2) の結果から，$V = 2\pi$ のとき

$$\pi\left\{\frac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2\right\} = 2\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$$

■

4 (1) $p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より

$$\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{1}{p_{n+1}}\left(p_{n+2}+\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}}\right)$$
$$=\frac{1}{p_{n+1}}\left(\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}+p_n\right)=\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$$

よって　$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=\dfrac{{p_2}^2+{p_1}^2+1}{p_2p_1}=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot 1}=\mathbf{3}$

(2) (1) の結果から，${p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1=3p_{n+1}p_n$ であるから

$${p_{n+1}}^2+1=p_n(3p_{n+1}-p_n)\quad ゆえに\quad \frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}=3p_{n+1}-p_n$$

したがって　$p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n\cdots①$　すなわち　$p_{n+2}+p_n=3p_{n+1}$

よって　$p_{n+1}+p_{n-1}=\boldsymbol{3p_n}$

(3) $q_1=1$，$q_2=1$，$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ であるから，$q_3=q_2+q_1=2$

$$p_n=q_{2n-1}\quad (n=1,2,\cdots)\quad\cdots(*)$$

$p_1=q_1$，$p_2=q_3$ より，$n=1,\ 2$ のとき，$(*)$ は成立する．
$(*)$ が $n+1$ 以下の自然数について成立すると仮定すると，① より

$$\begin{aligned}p_{n+2}&=3q_{2n+1}-q_{2n-1}\\&=2q_{2n+1}+(q_{2n+1}-q_{2n-1})=2q_{2n+1}+q_{2n}\\&=(q_{2n+1}+q_{2n})+q_{2n+1}=q_{2n+2}+q_{2n+1}=q_{2n+3}\end{aligned}$$

したがって，$n+2$ のときも，$(*)$ が成立する．
よって，すべての自然数について，$(*)$ が成立する．

補足 漸化式より，$p_3=5$，$p_{n+2}p_n-{p_{n+1}}^2=1$ であるから $(n=1,2,\cdots)$

$$\frac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}-\frac{p_{n+1}+p_{n-1}}{p_n}=\frac{p_n(p_{n+2}+p_n)-p_{n+1}(p_{n+1}+p_{n-1})}{p_{n+1}p_n}$$
$$=\frac{(p_{n+2}p_n-{p_{n+1}}^2)-(p_{n+1}p_{n-1}-{p_n}^2)}{p_{n+1}p_n}=0$$

したがって　$\dfrac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}=\dfrac{p_3+p_1}{p_2}=\dfrac{5+1}{2}=3$

ここで，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$p_{n+2}-(\alpha^2+\beta^2)p_{n+1}+\alpha^2\beta^2p_n=0,\quad q_{n+2}-(\alpha+\beta)q_{n+1}+\alpha\beta q_n=0$$

よって　$p_n=\dfrac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\alpha^2-\beta^2}=\dfrac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\alpha-\beta}$，$q_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$　■

$\boxed{5}$ 正の整数 k に対し，$k = l_k{\cdot}2^{n_k}$ (l_kは奇数，n_kは0以上の整数) とすると

$$_{2015}\mathrm{C}_m = \prod_{k=1}^{m} \frac{2016-k}{k} = \prod_{k=1}^{m} \frac{63{\cdot}2^5 - l_k{\cdot}2^{n_k}}{l_k{\cdot}2^{n_k}} = \prod_{k=1}^{m} \frac{63{\cdot}2^{5-n_k} - l_k}{l_k}$$

$1 \leqq k < 2^5$ のとき，$0 \leqq n_k < 5$ であるから，$63{\cdot}2^{5-n_k} - l_k$ は奇数．

したがって，$1 \leqq m < 32$ のとき，$_{2015}\mathrm{C}_m$ は奇数．次に

$$_{2015}\mathrm{C}_{32} = \frac{63{\cdot}2^5 - 2^5}{2^5} \times {}_{2015}\mathrm{C}_{31} = 2{\cdot}31 \times {}_{2015}\mathrm{C}_{31}$$

は，偶数である．よって，求める最小の正の整数 m は　　**32**

東京大学 1999 年前期 理科

(1) k を自然数とする．m を $m = 2^k$ とおくとき，$0 < n < m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 $_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ．

(2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ．

条件：$0 \leqq n \leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 $_m\mathrm{C}_n$ は奇数である．

解答　(1)　$$_m\mathrm{C}_n = \frac{m \times {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}}{n} = \frac{2^k \times {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}}{n}$$

$m = 2^k$，$0 < n < m$ であるから，n が 2^{k-1} を因数にもつことがあっても 2^k を因数にもつことはないので，二項係数 $_m\mathrm{C}_n$ は偶数である．

(2) $_{m-1}\mathrm{C}_0 = 1$ および (1) の結果を $_{m-1}\mathrm{C}_j = {}_m\mathrm{C}_j - {}_{m-1}\mathrm{C}_{j-1}$ に適用すると，$_{m-1}\mathrm{C}_j$ $(0 \leqq j \leqq m-1)$ は奇数．

$_{2^k+1}\mathrm{C}_j = {}_{2^k}\mathrm{C}_{j-1} + {}_{2^k}\mathrm{C}_j$ であるから，(1) の結果により

$$j = 2, 3, \cdots, 2^k - 1 \text{ のとき}\quad {}_{2^k+1}\mathrm{C}_j \text{ は偶数}$$

$_{2^k+2}\mathrm{C}_j = {}_{2^k+1}\mathrm{C}_{j-1} + {}_{2^k+1}\mathrm{C}_j$ であるから，上の結果により

$$j = 3, 4 \cdots, 2^k - 1 \text{ のとき}\quad {}_{2^k+2}\mathrm{C}_j \text{ は偶数}$$

順次繰り返すことにより，$i = 0, 1, \cdots, 2^k - 2$ に対して

$$i + 1 \leqq j \leqq 2^k - 1 \text{ のとき}\quad {}_{2^k+i}\mathrm{C}_j \text{ は偶数}$$

よって　　$\boldsymbol{m = 2^k - 1}$ **(k は自然数)**

別解　整数を係数とする多項式を，偶数の係数を 0 に置き換え，奇数の係数を 1 に置き換える．2 つの整式がこの置き換えによって，等しくなるとき，この 2 つの整式は合同 ($\equiv$) とする．例えば，k を正の整数とすると

$$\begin{aligned}(1+x)^{2^k} &\equiv 1+x^{2^k},\\ (1+x)^{2^k-1} &\equiv 1+x+x^2+\cdots+x^{2^k-1}\end{aligned}$$

$2015 = 1024+512+256+128+64+16+8+4+2+1$ であるから

$$\begin{aligned}(1+x)^{2015} &= (1+x)^{1024}(1+x)^{512}(1+x)^{256}(1+x)^{128}(1+x)^{64}\\ &\qquad\times(1+x)^{16}(1+x)^{8}(1+x)^{4}(1+x)^{2}(1+x)\\ \sum_{m=0}^{2015}{}_{2015}\mathrm{C}_m x^m &\equiv (1+x^{1024})(1+x^{512})(1+x^{256})(1+x^{128})(1+x^{64})\\ &\qquad\times(1+x^{16})(1+x^{8})(1+x^{4})(1+x^{2})(1+x)\end{aligned}$$

右辺の係数が 0 になる最も次数の低い項は　x^{32}　よって　32 ■

$\boxed{6}$ (1)
$$g(x) = \begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x| \leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき})\end{cases}$$

これより
$$g(nx) = \begin{cases}\dfrac{\cos(\pi nx)+1}{2} & \left(|x| \leqq \frac{1}{n} \text{ のとき}\right)\\ 0 & \left(|x| > \frac{1}{n} \text{のとき}\right)\end{cases}$$

したがって
$$n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx = n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx \quad \cdots(*)$$

$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき，$p \leqq f(x) \leqq q$，$g(nx) \geqq 0$ に注意して

$$np\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx \leqq n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx \leqq nq\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx$$

ここで
$$n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \left[\frac{1}{2\pi}\sin(\pi t) + \frac{t}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$$

上の諸式により
$$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$$

(2)
$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

これより
$$h(nx)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi nx) & (|x|\leqq \frac{1}{n} \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>\frac{1}{n} \text{ のとき})\end{cases}$$

したがって $n^2\displaystyle\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$

$g'(x)=h(x)$ であるから

$$\begin{aligned}&n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx\\&=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g'(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx=n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{g(nx)\}'\log(1+e^{x+1})\,dx\\&=n\Big[\,g(nx)\log(1+e^{x+1})\,\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx\\&=-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx\end{aligned}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ $(-\frac{1}{n}\leqq x\leqq\frac{1}{n})$ とおくと，$f(x)$ は単調増加であるから

$f\left(-\dfrac{1}{n}\right)\leqq f(x)\leqq f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ すなわち $\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$

$(*)$ および (1) の結果にこれを適用すると

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)f(x)\,dx\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}=\frac{e}{1+e}$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)f(x)\,dx=\frac{e}{1+e}$$

よって
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)f(x)\,dx\right\}=-\boldsymbol{\frac{e}{1+e}}\end{aligned}$$

■

3.2　2016 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする．すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

2 A，B，C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する．以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する．

(a) 1 試合目で A と B が対戦する．

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する．

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する．ここで k は 2 以上の整数とする．

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1) n を 2 以上の整数とする．ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(2) m を正の整数とする．総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ．

3 a を $1<a<3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $P_1(1,\ 0,\ 1)$，$P_2(1,\ 1,\ 1)$，$P_3(1,\ 0,\ 3)$，$Q(0,\ 0,\ a)$ を考える．直線 P_1Q，P_2Q，P_3Q と xy 平面の交点をそれぞれ R_1，R_2，R_3 として，三角形 $R_1R_2R_3$ の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ．

4 z を複素数とする．複素数平面上の 3 点 $A(1)$，$B(z)$，$C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ．

5 k を正の整数とし，10進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を1つとる．ここで，a_1，a_2，$\cdots$，a_k は0から9までの整数で，$a_k\neq 0$ とする．

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ．

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ．

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r\leqq x<r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す．$\sqrt{s}-[\sqrt{s}\,]=0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ．

6 座標空間内を，長さ2の線分ABが次の2条件 (a)，(b) をみたしながら動く．

(a) 点Aは平面 $z=0$ 上にある．

(b) 点C(0, 0, 1) が線分AB上にある．

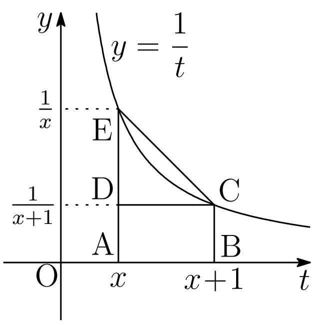
このとき，線分ABが通過することのできる範囲を K とする．K と不等式 $z\geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $f(x) = x\{\log(x+1) - \log x\}$，$g(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1) - \log x\}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log(x+1) - \log x + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{x+1}, \\ g'(x) &= \log(x+1) - \log x + \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

区間 $x \leqq t \leqq x+1$ における $y = \dfrac{1}{t}$ のグラフと t 軸で囲まれた部分の面積，右の図の長方形 ABCD および台形 ABCE の面積の大小関係から



$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)$$

したがって　　$f'(x) > 0$，$g'(x) < 0$

$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x) < \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$$

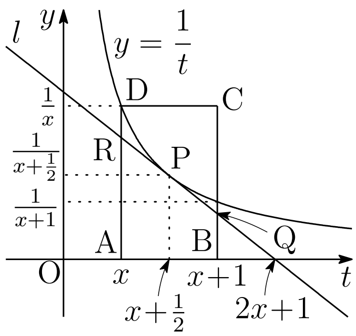
また　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{g(x) - f(x)\} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$

すなわち　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 1$

$g(x)$ は単調減少であるから　　$\displaystyle g(x) > \lim_{x\to\infty} g(x) = 1$

したがって　$f(x) < 1 < g(x)$　　よって　$\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

別解　曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ の点 $\mathrm{P}\left(x+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$ における接線を l とし $(x>0)$，l と直線 $t=x$，$t=x+1$ との交点をそれぞれ R，Q とする．右の図のように $x \leqq t \leqq x+1$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ および t 軸で囲まれた図形の面積と 2 つの四角形 ABCD および ABQR の面積との大小関係により



$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$$

したがって　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

よって　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

補足　上の図から，$x>0$ のとき　$\dfrac{1}{x+1}<\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x}$

別解と同様にして [1]　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

$h(x)=(x+1)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと，上の図に注意して

$$\begin{aligned} h'(x) &= \log(x+1)-\log x+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right) \\ &= \int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x}<0 \end{aligned}$$

$f(x)$ は単調増加，$h(x)$ は単調減少であるから，前ページと同様の議論により

$$f(x)<1<h(x),\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}h(x)=1$$

$F(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，$H(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}H(x)=e$$

$F(x)=H(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}H(-x-1)=\lim_{x\to\infty}H(x-1)=e$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=e$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F(x)=e$ であるから　$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$　■

[1]数列の証明は，http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照．

2 (1) $n_1 \equiv 1 \pmod 3$, $n_2 = n_1 + 1$, $n_3 = n_1 + 2$ とする．
優勝チームが決まらず対戦が続くとき，勝者・敗者・控えは 3 順ごとに，次の (i),(ii) のように繰り返す．

(i) 初戦で A が B に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	A	C	B	$\cdots$	A	C	B	$\cdots$
敗者	B	A	C	$\cdots$	B	A	C	$\cdots$
控え	C	B	A	$\cdots$	C	B	A	$\cdots$

(ii) 初戦で B が A に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	B	C	A	$\cdots$	B	C	A	$\cdots$
敗者	A	B	C	$\cdots$	A	B	C	$\cdots$
控え	C	A	B	$\cdots$	C	A	B	$\cdots$

n 試合目に A が優勝するのは，(i) の場合，$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，A は最後に C に勝って優勝し，(ii) の場合，$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，A は最後に B に勝って優勝する．これらの場合の確率は，ともに $\left(\frac{1}{2}\right)^n$．
よって，求める確率は

$$\boldsymbol{n \not\equiv 0 \text{ のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \equiv 0 \text{ のとき } 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 3)}$$

(2) (1) の結果から，A が最後に C に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

また，A が最後に B に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}}{\frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\} + \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}} = \boldsymbol{\frac{1 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{5 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和は $\boldsymbol{\dfrac{a - rl}{1 - r}}$ ■

3 (1) $\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$，$\mathrm{R_3}$ は，それぞれ直線 $\mathrm{P_1Q}$，$\mathrm{P_2Q}$，$\mathrm{P_3Q}$ の点であるから，実数 t_1，t_2，t_3 を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR_1}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} + t_1\overrightarrow{\mathrm{P_1Q}} = (1,\ 0,\ 1) + t_1(-1,\ 0,\ a-1)\\ &= (1-t_1,\ 0,\ 1+t_1(a-1)),\\ \overrightarrow{\mathrm{OR_2}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} + t_2\overrightarrow{\mathrm{P_2Q}} = (1,\ 1,\ 1) + t_2(-1, -1,\ a-1)\\ &= (1-t_2,\ 1-t_2,\ 1+t_2(a-1)),\\ \overrightarrow{\mathrm{OR_3}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP_3}} + t_3\overrightarrow{\mathrm{P_3Q}} = (1,\ 0,\ 3) + t_3(-1,\ 0,\ a-3)\\ &= (1-t_3,\ 0,\ 3+t_3(a-3)),\end{aligned}$$

$\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$，$\mathrm{R_3}$ は，xy 平面上の点であるから

$$1+t_1(a-1)=0,\quad 1+t_2(a-1)=0,\quad 3+t_3(a-3)=0$$

これを解いて　$t_1 = \dfrac{1}{1-a}$，$t_2 = \dfrac{1}{1-a}$，$t_3 = \dfrac{3}{3-a}$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OR_1}} = \left(\frac{a}{a-1},\ 0,\ 0\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OR_2}} = \left(\frac{a}{a-1},\ \frac{a}{a-1},\ 0\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OR_3}} = \left(\frac{a}{a-3},\ 0,\ 0\right)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{R_1R_2}} = \left(0,\ \dfrac{a}{a-1},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{R_1R_3}} = \left(\dfrac{2a}{(a-1)(a-3)},\ 0,\ 0\right)$

$1<a<3$ に注意して　$S(a) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{a-1}\cdot\dfrac{2a}{(a-1)(3-a)} = \dfrac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$

両辺の対数をとって，微分すると

$$\begin{aligned}&\log S(a) = 2\log a - 2\log(a-1) - \log(3-a),\\ &\frac{S'(a)}{S(a)} = \frac{2}{a} - \frac{2}{a-1} + \frac{1}{3-a} = -\frac{2}{a(a-1)} + \frac{1}{3-a} = \frac{(a+3)(a-2)}{a(a-1)(3-a)}\\ &S'(a) = \frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}\cdot\frac{(a+3)(a-2)}{a(a-1)(3-a)} = \frac{a(a+3)(a-2)}{(a-1)^3(3-a)^2}\end{aligned}$$

a	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	極小 4	$\nearrow$	

よって　最小値 $\boldsymbol{S(2)=4}$ ■

4 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) を頂点とする三角形であるから　$z \neq 1$

$$\mathrm{AB} = |z-1| \qquad \begin{aligned}\mathrm{BC} &= |z^2 - z| \\ &= |z||z-1|\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathrm{CA} &= |z^2-1| \\ &= |z+1||z-1|\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} = 1 : |z| : |z+1|$

△ABC が鋭角三角形であるとき，次の 3 式を満たせばよい．

$$1^2 + |z|^2 > |z+1|^2, \quad 1^2 + |z+1|^2 > |z|^2, \quad |z|^2 + |z+1|^2 > 1^2$$

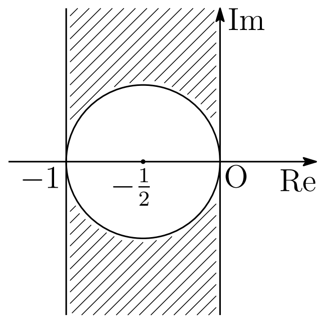
第 1 式から　$z + \overline{z} < 0$　すなわち　$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} < 0$　$\cdots$①

第 2 式から　$z + \overline{z} > -2$　すなわち　$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} > -1$　$\cdots$②

第 3 式から　$|z|^2 + \dfrac{z+\overline{z}}{2} > 0$　すなわち　$\left|z + \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}$　$\cdots$③

①～③ より　$\begin{cases} -1 < \mathrm{Re}(z) < 0 \\ \left|z + \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

z の満たす領域は，右の図の斜線部分．
ただし，境界線を含まない．



■

$\boxed{5}$ (1) $d_k = 0.a_1a_2\cdots a_k$ とおくと，$d_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < d_k + 10^{-k}$ より

$$10^k + d_k \leqq \sqrt{n} < 10^k + d_k + 10^{-k}$$

上式の辺々を平方すると

$$10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + {d_k}^2 \leqq n < 10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + 2 + (d_k + 10^{-k})^2$$

ここで，$d_k{\cdot}10^k$ が整数であることと

$$0 < {d_k}^2 < 1, \quad 0 < (d_k + 10^{-k})^2 \leqq 1$$

であることに注意すると，求める正の整数 n は

$$\boldsymbol{n = 10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + 1,\ \ 10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + 2}$$

(2) $d_k \leqq \sqrt{m} - p < d_k + 10^{-k}$ より

$$p + d_k \leqq \sqrt{m} < p + d_k + 10^{-k}$$

上式の辺々を平方すると

$$(p + d_k)^2 \leqq m < (p + d_k + 10^{-k})^2$$

p が $5{\cdot}10^{k-1}$ 以上の整数のとき

$$\begin{aligned}(p + d_k + 10^{-k})^2 - (p + d_k)^2 &= 2(p + d_k){\cdot}10^{-k} + 10^{-2k}\\ &> 2p{\cdot}10^{-k} \geqq 2{\cdot}5{\cdot}10^{k-1}{\cdot}10^{-k} = 1\end{aligned}$$

よって，条件をみたす正の整数 m が存在する．

(3) $\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = d_k$ をみたす正の整数 s が存在するとき

$$\sqrt{s} = [\sqrt{s}\,] + d_k \quad (0 < d_k < 1)$$

これから $\sqrt{s}$ は有限小数，すなわち，有理数であるから

$$\sqrt{s} = \frac{q}{r} \quad (\text{正の整数 } q,\ r \text{ は互いに素})$$

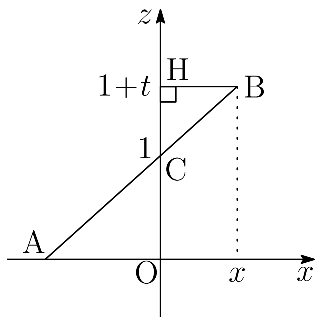
とおき，両辺を平方すると

$$s = \frac{q^2}{r^2}$$

左辺は正の整数であるから，$r = 1$ となる．このとき，$\sqrt{s} = [\sqrt{s}\,] = q$ より，$\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = 0$ であるから，条件をみたす正の整数 s は存在しない．

■

$\boxed{6}$ B の z 座標を $1+t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$，B から z 軸に降ろした垂線 BH の長さを x とすると



$$\mathrm{BC} = \sqrt{t^2+x^2}, \quad \frac{\mathrm{CA}}{1} = \frac{\mathrm{BC}}{t} = \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t}$$

$\mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 2$ であるから

$$\sqrt{t^2+x^2} + \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t} = 2$$

ゆえに　$\sqrt{t^2+x^2} = \dfrac{2t}{t+1}$　したがって　$x^2 = \left(\dfrac{2t}{t+1}\right)^2 - t^2$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2\,dt = \pi \int_0^1 \left\{ \left(\frac{2t}{t+1}\right)^2 - t^2 \right\} dt \\ &= \pi \int_0^1 \left\{ \left(2 - \frac{2}{t+1}\right)^2 - t^2 \right\} dt \\ &= \pi \int_0^1 \left\{ 4 - \frac{8}{t+1} + \frac{4}{(t+1)^2} - t^2 \right\} dt \\ &= \pi \left[4t - 8\log(t+1) - \frac{4}{t+1} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)} \end{aligned}$$

極方程式による曲線の回転体の体積

xy 平面において，極方程式 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

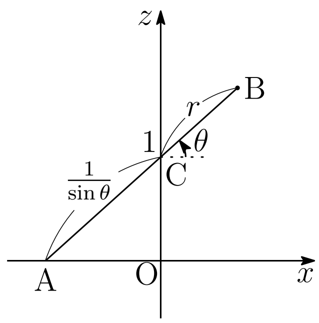
$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r(\theta)^3 \sin\theta\,d\theta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi)}$$

また，この曲線を y 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r(\theta)^3 \cos\theta\,d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)}$$

証明　p.830 の極方程式の計量を参照.

別解 zx 平面上で C を極として，$r = \mathrm{CB}$，CB と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると，求める体積 V は



$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\theta \, d\theta$$

このとき，$r = 2 - \dfrac{1}{\sin\theta}$ であるから

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{\sin\theta}\right)^3 \cos\theta \, d\theta$$

ここで，$u = \sin\theta$ とおくと　$\dfrac{du}{d\theta} = \cos\theta$

θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{2} \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2 - \frac{1}{u}\right)^3 du \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(8 - \frac{12}{u} + \frac{6}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right) du \\
&= \frac{2\pi}{3}\left[\, 8u - 12\log u - \frac{6}{u} + \frac{1}{2u^2} \,\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)}
\end{aligned}$$

■

3.3　2017 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 実数 a，b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$

とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$

を考える．

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ．

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a，b についての条件を求めよ．また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ．

2 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える．

(a) 最初に，点 P は原点 O にある．

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ．

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ．

3 複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w = \dfrac{1}{z}$ とする．

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする．点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる．この円の中心と半径を求めよ．

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする．点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ．

4 $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい．

(1) a_1，a_2 の値を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ とする．積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．

(3) a_n は自然数であることを示せ．

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

5 k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C，D の共通接線について考える．

$$C: \quad y = x^2 + k$$
$$D: \quad x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ．ただし $a \neq -1$ とする．

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める．このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ．

6 点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす．また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく．ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)
$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta \\ &= 4x^3 - 3x + a(2x^2 - 1) + bx \\ &= \boldsymbol{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a} \end{aligned}$$

$f(0) = 4 + 2a + (b-3) - a$ であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) - f(0) &= 4(x^3 - 1) + 2a(x^2 - 1) + (b-3)(x-1) \\ \frac{f(\theta) - f(0)}{x-1} &= 4(x^2 + x + 1) + 2a(x+1) + b - 3 \end{aligned}$$

よって　$g(\theta) = \dfrac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1} = \boldsymbol{4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1}$

(2) $x = \cos\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ より　$-1 < x < 1$
$h(x) = 4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1$ $(-1 < x < 1)$ とおくと

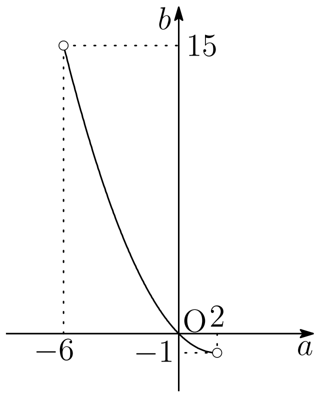
$$h(x) = 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + b$$

$h(x)$ は $-1 < x < 1$ で最小値 0 をとるから

$$-1 < -\frac{a+2}{4} < 1, \quad -\frac{a^2}{4} + a + b = 0$$

よって　$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{4}(a-2)^2 - 1 \quad (-6 < a < 2)}$

条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形は，右の図のとおり．



2 (1) x 軸方向に 1，-1，y 軸方向に 1，-1 だけ平行移動する回数をそれぞれ i，j，k，l とすると $(0 \leqq i,\ j,\ k,\ l \leqq 6)$，その確率は

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=6 \\ 0 \leqq i,j,k,l \leqq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

このとき　$i+j+k+l=6$,　$i-j=k-l$　すなわち　$i+l=j+k=3$

よって，求める確率は

$$\sum_{\substack{i+l=j+k=3 \\ 0 \leqq i,j,k,l \leqq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+l=3 \\ 0 \leqq i,l \leqq 3}} \frac{3!}{i!l!} \sum_{\substack{j+k=3 \\ 0 \leqq j,k \leqq 3}} \frac{3!}{j!k!}$$

$$= \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \mathbf{\frac{5}{16}}$$

(2) $i+j+k+l=6$，$i=j$，$k=l$　すなわち　$i+k=3$

よって，求める確率は

$$\sum_{\substack{i+k=3 \\ 0 \leqq i,k \leqq 3}} \frac{6!}{(i!k!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{4^6}\left\{\frac{1}{(3!)^2}+\frac{1}{(1!2!)^2}+\frac{1}{(2!1!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}\right\} = \mathbf{\frac{25}{256}}$$

別解　　$(1+x)^3 = {}_3\mathrm{C}_0 + {}_3\mathrm{C}_1 x + {}_3\mathrm{C}_2 x^2 + {}_3\mathrm{C}_3 x^3$,

$(1+x)^3 = {}_3\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_2 x + {}_3\mathrm{C}_1 x^2 + {}_3\mathrm{C}_0 x^3$

上の 2 式の積と $(1+x)^6$ の x^3 の係数 ${}_6\mathrm{C}_3$ との比較により

$$({}_3\mathrm{C}_0)^2 + ({}_3\mathrm{C}_1)^2 + ({}_3\mathrm{C}_2)^2 + ({}_3\mathrm{C}_3)^3 = {}_6\mathrm{C}_3$$

一般には，$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ の x^n の係数を比較することにより

$$\sum_{k=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_k)^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$$

したがって

$$\sum_{\substack{i+k=3 \\ 0 \leqq i,k \leqq 3}} \frac{6!}{(i!k!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+k=3 \\ 0 \leqq i,k \leqq 3}} \left(\frac{3!}{i!k!}\right)^2$$

$$= \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{k=0}^{3} ({}_3\mathrm{C}_k)^2$$

$$= {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^6 {}_6\mathrm{C}_3 = ({}_6\mathrm{C}_3)^2\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{25}{256}$$

■

3　(1) 点 $\alpha \neq 0$ と O を結ぶ線分の垂直二等分線 L の方程式は　$|z| = |z-\alpha|$

$w = \dfrac{1}{z}$ より，$z = \dfrac{1}{w}$ $(w \neq 0)$ であるから

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} - \alpha\right| \quad \text{ゆえに} \quad \left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w} - \alpha\right|$$

したがって　$\left|w - \dfrac{1}{\alpha}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|}$　よって，w は中心 $\boldsymbol{\dfrac{1}{\alpha}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{|\alpha|}}$ の円

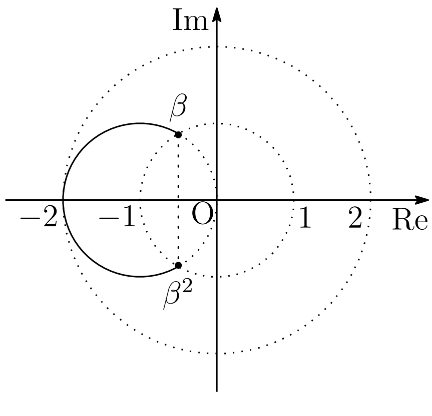
(2) $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ であるから，2 点 β，β^2 を結ぶ線は，点 -1 と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分であるから，(1) の結果から

$$|w+1| = 1 \quad \cdots ①$$

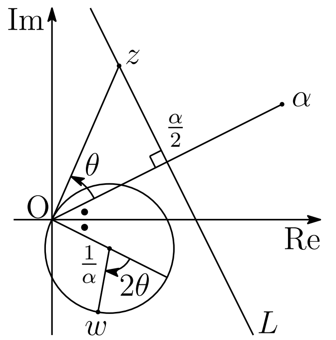
z は，点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くから

$$\frac{1}{2} \leqq |z| \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq |w| \leqq 2 \quad \cdots ②$$

したがって，点 w の軌跡は，①，② の共通部分で下の図の実線部分．



解説　L 上の点 z は



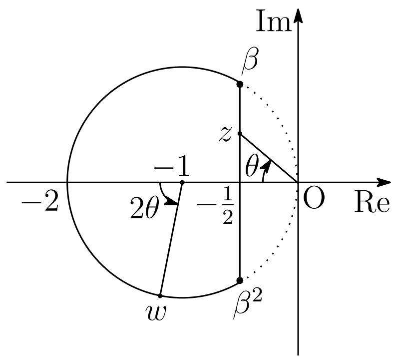
$$z = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$w = \dfrac{1}{z}$ により

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{1 + i\tan\theta} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{2\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= \frac{1}{\alpha}(2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{1}{\alpha}(1 + \cos 2\theta - i\sin 2\theta) \end{aligned}$$

点 w は点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とし，半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円周上にある．$-\pi < 2\theta < \pi$ であるから，点 w の表す軌跡はこの円から原点 O を除いたものになる．

また，点 β と β^2 を結ぶ線分上の点 z は



$$z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

$w = \dfrac{1}{z}$ により

$$\begin{aligned} w &= -\frac{2}{1 - i\tan\theta} = -\frac{2\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\ &= -2(\cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta) \\ &= -1 - (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \end{aligned}$$

$\boxed{4}$　(1)　$a_1 = p - \dfrac{1}{p} = 2 + \sqrt{5} - \dfrac{1}{2+\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 2) = \mathbf{4}$

$$a_2 = p^2 + \frac{1}{p^2} = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = \mathbf{18}$$

(2)　$p^{n+1} + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n+1} = \left(p - \dfrac{1}{p}\right)\left\{p^n + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^n\right\} + p^{n-1} + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}$ より

$$a_{n+1} = a_1 a_n + a_{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1}}$$

補足　$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$

(3) (1)，(2) の結果から　$a_1 = 4$，$a_2 = 18$，$a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$　$\cdots(*)$
よって，すべての自然数 n について，a_n は自然数である．

(4) 2 つの自然数 k，l の最大公約数を $\gcd(k,\ l)$ とする．
$(*)$ にユークリッドの互除法を順次適用することにより

$$\gcd(a_{n+1},\ a_n) = \gcd(a_n,\ a_{n-1}) = \cdots = \gcd(a_2,\ a_1) = \mathbf{2}$$

ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m \mid n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記すると，次は自明である．

$$(x, y) \mid x, \quad (x, y) \mid y$$

ユークリッドの互除法

2 整数 a，b について ($a > b > 0$)，a を b で割ったときの商を q，余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = (b, c)$$
$$c = 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = b$$

証明　$c \neq 0$ のとき，$a = bq + c$ より　$(b, c) \mid a$　また，$(b, c) \mid b$ であるから，(b, c) は a と b の公約数，したがって

$$(b, c) \mid (a, b) \quad \cdots ①$$

同様に，$c = a - bq$ より　$(a, b) \mid c$　また，$(a, b) \mid b$ であるから，(a, b) は b と c の公約数，したがって

$$(a, b) \mid (b, c) \quad \cdots ②$$

①，② より　　$(a, b) = (b, c)$

$c = 0$ のとき，自明．　証終

■

5　(1) $y=x^2+k$ と $y=ax+b$ から y を消去すると

$$x^2+k=ax+b \quad \text{ゆえに} \quad x^2-ax+k-b=0$$

このとき，方程式の係数について

$$(-a)^2-4(k-b)=0 \quad \text{すなわち} \quad 4k=a^2+4b \quad \cdots ①$$

$x=y^2+k$ と $y=ax+b$，すなわち，$x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$ について，① より

$$4k=\left(\frac{1}{a}\right)^2+4\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{4b}{a} \quad \cdots ②$$

①，② から k を消去すると

$$a^2-\frac{1}{a^2}+4b\left(1+\frac{1}{a}\right)=0$$
$$(a+1)(a-1)(a^2+1)+4ab(a+1)=0$$

$a\neq -1$ より，$a+1\neq 0$ であるから

$$(a-1)(a^2+1)+4ab=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b=\frac{(1-a)(1+a^2)}{4a}} \quad \cdots ③$$

これを ① に代入して

$$4k=a^2+4\cdot\frac{(1-a)(1+a^2)}{4a} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k=\frac{a^2-a+1}{4a}} \quad \cdots ④$$

(2) $a=2$ を ④ に代入すると　$k=\dfrac{3}{8}$　これを ①，② に代入すると

$$\frac{3}{2}=a^2+4b, \quad \frac{3}{2}=\frac{1}{a^2}-\frac{4b}{a}$$

上の 2 式から b を消去して整理すると

$$(a+1)(a-2)(2a-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad a=-1,\ 2,\ \frac{1}{2}$$

$k=\dfrac{3}{8}$ を ① に代入すると

$$\frac{3}{2}=a^2+4b \quad \text{ゆえに} \quad b=-\frac{a^2}{4}+\frac{3}{8}$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(-1,\ \frac{1}{8}\right),\ \left(2,-\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right)}$

別解　③，④ に $a=2$ を代入すると　$b=-\dfrac{5}{8}$，$k=\dfrac{3}{8}$

このとき，C，D の共通接線の 1 本は　$y=2x-\dfrac{5}{8}$

C と D は直線 $y=x$ に関して対称であるから，上の共通接線と直線 $y=x$ に関して対称な直線

$$x=2y-\frac{5}{8}\quad すなわち\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{16}$$

も C と D の共通接線である．

また，直線 $y=x$ に関して対称な直線 $x+y=d$ が $C: y=x^2+\dfrac{3}{8}$ と接するとき，2 式から y を消去して整理すると

$$x^2+x+\frac{3}{8}-d=0$$

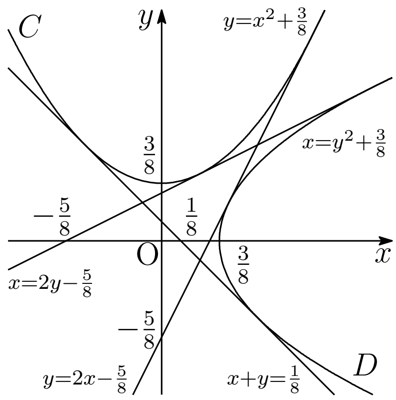
このとき，係数について

$$1^2-4\cdot1\left(\frac{3}{8}-d\right)=0\quad これを解いて\quad d=\frac{1}{8}$$

直線 $y=x$ に関する C と D の対称性により，直線

$$x+y=\frac{1}{8}\quad すなわち\quad y=-x+\frac{1}{8}$$

は，C と D の共通接線である．



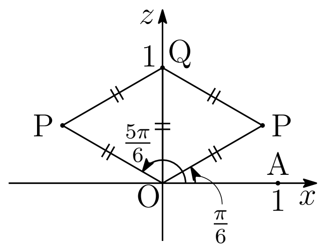
よって，求める 3 本の共通接線は

$$y=2x-\frac{5}{8},\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{16},\quad y=-x+\frac{1}{8}$$

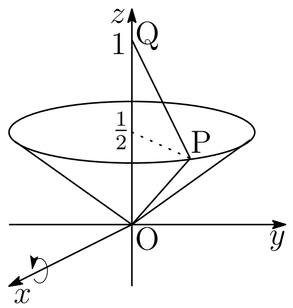
■

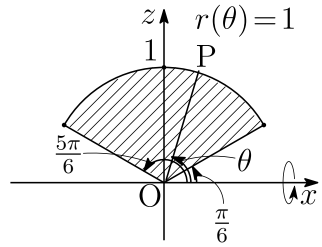
6　(1) θ が最大または最小となるのは，zx 平面上において，P が右の図で示した位置にあるときである．$x = \cos\theta$ であるから

$$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{6},\quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$



(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上の点 $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，辺 OP は左図の円錐面を描く．点 Q を平面 $x = 0$ を動かす，すなわち，OQ を平面 $x = 0$ 上で O を中心に回転させると，この円錐面が zx 平面を通過してできる zx 平面に描く輪郭は右図の斜線部分になる．





極方程式による曲線の回転体の体積

極方程式 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^3 \sin\theta\, d\theta}$$

したがって，(上の公式[2] に $r(\theta) = 1$，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$，$\beta = \dfrac{5\pi}{6}$ を代入すると)

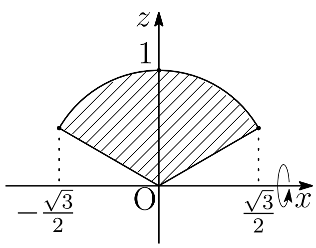
$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 1^3 \sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

別解　2012 年九大理系 p.7 の例 5 で示した公式[3]

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^2 a$$

に $r = 1$，$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を代入すると

$$V = \frac{4}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$



---

[2]p.830 の極方程式の計量を参照．

[3]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

2009 京都大学 (理系) 前期

xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r=2+\cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

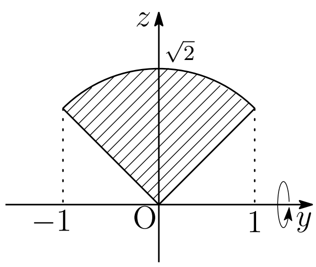
解答 $V=\dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta=\dfrac{2\pi}{3}\left[\,-\dfrac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\,\right]_0^{\pi}=\dfrac{40}{3}\pi$

2013 大阪大学 (理系) 前期

xyz 空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする．円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答 右の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積であるから

$$V=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^2\cdot 1=\frac{8}{3}\pi$$



■

3.4　2018 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 関数
$$f(x)=\frac{x}{\sin x}+\cos x \quad (0<x<\pi)$$
の増減表をつくり，$x\to +0$，$x\to \pi-0$ のときの極限を調べよ．

2 数列 $a_1, a_2, \cdots$ を
$$a_n=\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n=1,2,\cdots)$$
で定める．

(1) $n \geqq 2$ とする．$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ．

(2) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ．

3 放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする．座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える．$k>0$ を実数とする．点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする．

$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k\to+0} S(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} S(k)$ を求めよ．

4 $a>0$ とし，
$$f(x)=x^3-3a^2x$$
とおく．次の 2 条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件 1： 方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ．

条件 2： さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である．

$\boxed{5}$ 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．点 P(z) は C 上にあり，点 A(1) とは異なるとする．点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を Q(u) とする．$w = \dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す．

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ．

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする．点 P(z) が C' 上を動くときの点 R(w) の軌跡を求めよ．

$\boxed{6}$ 座標空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 1)$ を考える．$\dfrac{1}{2} < r < 1$ とする．点 P が線分 OA，AB，BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球 (内部を含む) が通過する部分を，それぞれ V_1，V_2，V_3 とする．

(1) 平面 $y=t$ が V_1，V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ．さらに，この範囲の t に対し，平面 $y=t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y=t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ．

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ．

(3) r は (2) の条件をみたすとする．V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする．V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ．

(4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする．S と T を求め，V の体積を決定せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$ より

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sin x - x\cos x}{\sin^2 x} - \sin x = \frac{\sin x(1-\sin^2 x) - x\cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin x\cos^2 x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\sin x\cos x - x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\sin 2x - 2x)}{2\sin^2 x}$$

ここで，$g(x) = \sin 2x - 2x \ (0 \leqq x < \pi)$ とおくと

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = 2(\cos 2x - 1) < 0 \quad (0 < x < \pi)$$

したがって　$0 < x < \pi$ のとき　$g(x) < 0$

$f'(x) = \dfrac{g(x)\cos x}{\sin^2 x}$ により，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x} + \cos x\right) = 1 + 1 = \mathbf{2}$

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \lim_{x\to\pi-0}\left(\frac{x}{\sin x} + \cos x\right) = \infty$$

■

2　(1) $a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ より　$a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}$

ゆえに
$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2 n!}{(2n-1)!}\\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2}{(n!)^2}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\ &= 2n(2n+1)\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}\end{aligned}$$

連続する 2 つの整数の積 $n(n+1)$ は 2 で割り切れるから

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n+1}{\frac{1}{2}n(n+1)} \quad \cdots (*)$$

このとき　$2n+1 = 2\cdot n + 1$，$2n+1 = 2(n+1) - 1$

$2n+1$ と n は互いに素，また，$2n+1$ と $n+1$ も互いに素である．

よって　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)}$，　$\boldsymbol{q_n = 2n+1}$

(2) $a_1 = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{1!} = 3$，$a_2 = \dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{2!} = 5$，(1) の結果から，$q_n$ は奇数，$p_3 = 6$.

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n}\frac{q_k}{p_k}$　ゆえに　$\displaystyle\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^{n}\frac{q_k}{p_k}$

したがって　$\displaystyle a_n = 3\prod_{k=2}^{n}\frac{q_k}{p_k} = \frac{3q_2q_3\cdots q_n}{p_2p_3\cdots p_n}$

$n \geqq 3$ のとき，$p_2p_3\cdots p_n$ は偶数であり，一方，$3q_2q_3\cdots q_n$ は奇数であるから，a_n は整数ではない．よって，a_n が整数となる n は

$$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$$

別解 $\dfrac{q_n}{p_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n+1}$ より

$n \leqq 3$ のとき $\dfrac{q_n}{p_n} > 1$，　$4 \leqq n$ のとき $\dfrac{q_n}{p_n} < 1$.

したがって　$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > a_n$

$$a_3 = \frac{35}{6},\ a_4 = \frac{21}{4},\ a_5 = \frac{77}{20},\ a_6 = \frac{143}{60},\ a_7 = \frac{143}{112},\ a_8 = \frac{2431}{4032}$$

$n \geqq 8$ のとき，$a_n < 1$ となる．よって，a_n が整数となる n は $n = 1,\ 2$

■

3 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ に対して $(-1 \leqq p \leqq 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{k}(p,\ p^2) = \left(\frac{p}{k},\ k\left(\frac{p}{k}\right)^2\right)$$

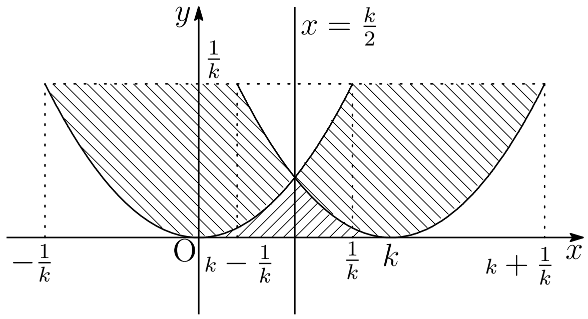
$-\dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{p}{k} \leqq \dfrac{1}{k}$ から，$\mathrm{P'}$ は放物線 $y = kx^2 \left(-\dfrac{1}{k} \leqq x \leqq \dfrac{1}{k}\right)$ 上にある．また，線分 OA 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ に対して $(0 \leqq q \leqq 1)$

$$k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k(q,\ 0) = (kq,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP'}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，R は点 $\mathrm{P'}$ を x 軸方向に kq だけ平行移動した点である．このとき，$0 \leqq kq \leqq k$ であるから，次のように場合分けを行う．

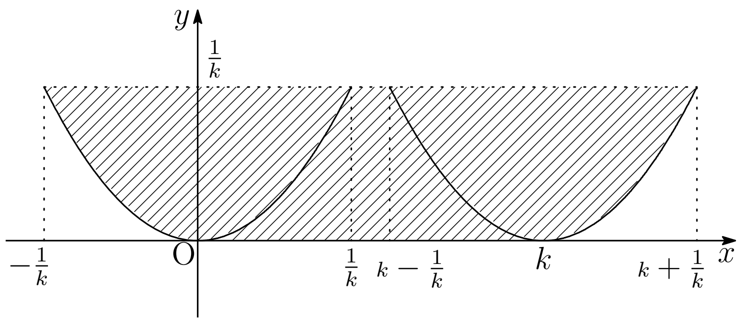
(i) $k - \dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k}$，すなわち，$k < \sqrt{2}$ のとき

$$S(k) = 2 \times \frac{1}{k}\cdot k - 2\int_0^{\frac{k}{2}} kx^2\,dx = 2 - 2\left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^{\frac{k}{2}} = \boldsymbol{2 - \frac{k^4}{12}}$$



(ii) $\dfrac{1}{k} \leqq k - \dfrac{1}{k}$，すなわち，$\sqrt{2} \leqq k$ のとき

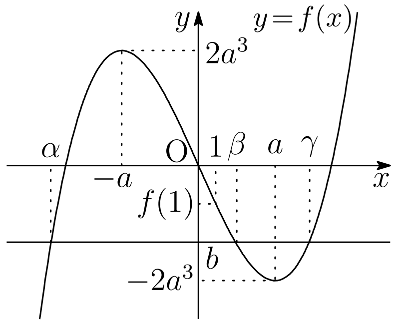
$$S(k) = \frac{1}{k}\left\{k + \frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k}\right)\right\} - 2\int_0^{\frac{1}{k}} kx^2\,dx = \boldsymbol{1 + \frac{4}{3k^2}}$$



(i)，(ii) の結果から　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{k \to +0} S(k) = 2,\ \ \lim_{k \to \infty} S(k) = 1}$ ■

$\boxed{4}$ $f(x) = x^3 - 3a^2x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

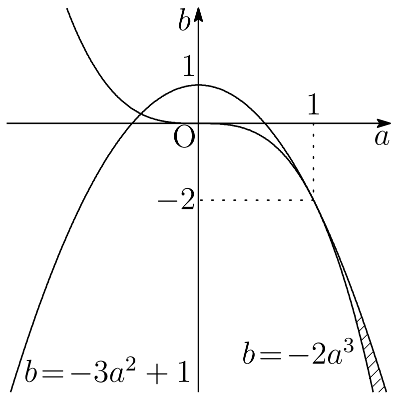


$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

$f(x) = b$ の解 $\alpha < \beta < \gamma$ について，$\beta > 1$ であるから

$$1 < a, \quad -2a^3 < b < f(1)$$



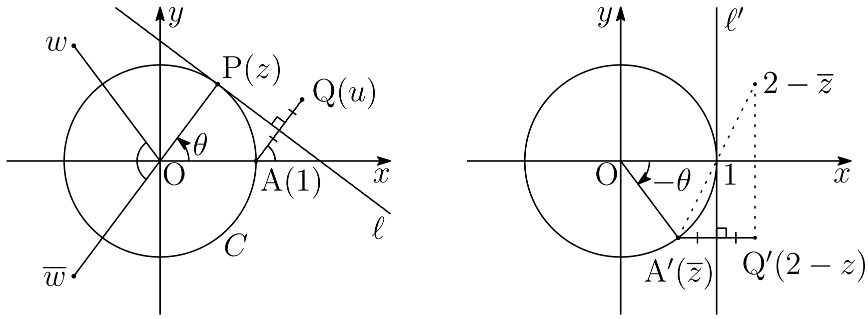
したがって

$$\boldsymbol{-2a^3 < b < -3a^2 + 1 \ \ (a > 1)}$$

点 $(a,\ b)$ の満たす領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含まない．

■

5 (1) $\theta = \arg z$ とし，2 点 A，Q をそれぞれ原点 O を中心に $-\theta$ だけ回転させた点をそれぞれ A′，Q′ とすると，A′$(\overline{z})$ を点 1 に関して対称位移動した点が $2-\overline{z}$ で，この点を x 軸に関して対称移動した点が Q′$(2-z)$ である．



Q(u) は Q′$(2-z)$ を原点 O を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\boldsymbol{u = z(2-z)} \quad \text{ゆえに} \quad w = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-z(2-z)} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

さらに $\overline{w} = \dfrac{1}{(\overline{z}-1)^2} = \dfrac{z^2}{z^2(\overline{z}-1)^2} = \dfrac{z^2}{(1-z)^2} = z^2 w$ よって $\boldsymbol{\dfrac{\overline{w}}{w} = z^2}$

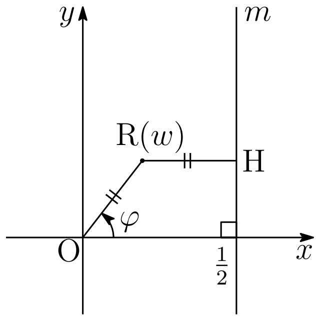
したがって

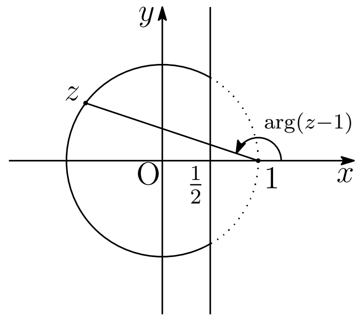
$$\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|} = \left|1 + \frac{\overline{w}}{w} - \frac{1}{w}\right| = \left|1 + z^2 - (z-1)^2\right| = 2|z| = \mathbf{2}$$

(2) (1) の結果より　$\arg w = -2\arg(z-1)$，$\left|\dfrac{w+\overline{w}}{2}-\dfrac{1}{2}\right| = |w|$　$\cdots(*)$

$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \arg(z-1) \leqq \dfrac{4}{3}\pi$ であるから　$-\dfrac{8}{3}\pi \leqq -2\arg(z-1) \leqq -\dfrac{4}{3}\pi$

$\varphi = \arg w$ とおくと　$-\dfrac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \dfrac{2}{3}\pi$





複素数平面上に R(w) をとり，点 $\dfrac{1}{2}$ を通り，x 軸に垂直な直線 m に R から垂線 RH を引く．$r=|w|$ とすると，$(*)$ より

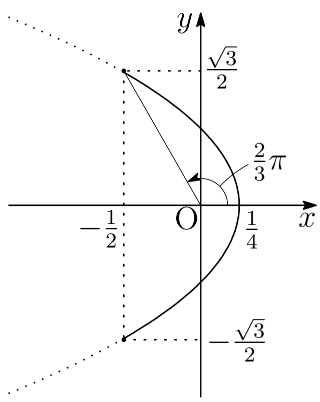
$$\mathrm{RH} = \left|\frac{w+\overline{w}}{2}-\frac{1}{2}\right| = r$$

$\mathrm{OR}\cos\varphi + \mathrm{RH} = \dfrac{1}{2}$ であるから　$r\cos\varphi + r = \dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

よって　　$r = \dfrac{1}{2(1+\cos\varphi)}$　$\left(-\dfrac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$　$\cdots(**)$

$w = x+yi$ とおくと，$x = r\cos\varphi$，$r^2 = x^2+y^2$ であるから，① より

$$x + r = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad r^2 = \left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$



整理すると　　$x = \dfrac{1}{4} - y^2$

$(**)$ より　$\varphi = \pm\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$r = 1$

$\varphi = -\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって，求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{4} - y^2}$　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

R(w) の表す軌跡は，右上の図のようになる．

補足 (∗∗) および $\varphi = \arg w$ より，w は次式で与えられる．

$$w = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} \quad \left(-\frac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$$

別解 $\theta = \arg z$ とすると，条件から $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

$w = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ により

$$w = \frac{1}{z^2-2z+1} = \frac{\overline{z}}{z+\overline{z}-2} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2\cos\theta - 2} = \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

ここで，$\theta = \pi - \varphi$ とおくと

$$w = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} \quad \left(-\frac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$$

$r = |w|$ とおくと，(∗∗) が得られる (以下の計算は同様)． ■

6 (1) 点 P が線分 OA 上を動くとき，点 P から平面 $y=t$ までの距離は　t
点 P が線分 BC 上を動くとき，点 P から平面 $y=t$ までの距離は　$1-t$
したがって，平面 $y=t$ が V_1，V_3 双方と共有点をもつような t の範囲は

$$t \leqq r \quad \text{かつ} \quad 1-t \leqq r \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{1-r \leqq t \leqq r} \quad \cdots(*)$$

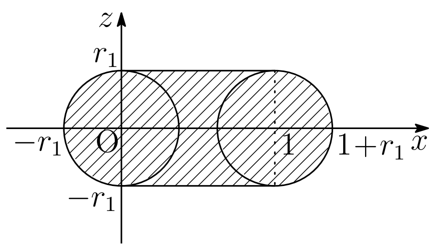
線分 OA 上の点 P$(c_1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 r の球 (内部を含む) は

$$(x-c_1)^2+y^2+z^2 \leqq r^2$$

これと平面 $y=t$ の共通部分は

$$(x-c_1)^2+z^2 \leqq r^2-t^2,\quad y=t$$

上式は，平面 $y=t$ において点 $(c_1,\ t,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{r^2-t^2}$ の円の内部である．点 P が線分 OA 上を動く，すなわち，$0 \leqq c_1 \leqq 1$ のとき上式が通過する図形が，平面 $y=t$ と V_1 の共通部分である．この図形を平面 $y=t$ 上に描くと右のようになる．境界を含む $(r_1=\sqrt{r^2-t^2})$．



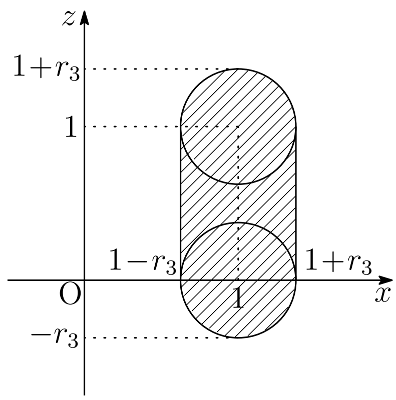
線分 BC 上の点 P$(1,\ 1,\ c_3)$ を中心とする半径 r の球 (内部を含む) は

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-c_3)^2 \leqq r^2$$

これと平面 $y=t$ の共通部分は

$$(x-1)^2+(z-c_3)^2 \leqq r^2-(t-1)^2,\quad y=t$$

上式は，平面 $y=t$ において点 $(1,\ t,\ c_3)$ を中心とする半径 $\sqrt{r^2-(t-1)^2}$ の円の内部である．点 P が線分 OA 上を動く，すなわち，$0 \leqq c_3 \leqq 1$ のとき上式が通過する図形が，平面 $y=t$ と V_3 の共通部分である．この図形を平面 $y=t$ 上に描くと右の図のようになる．境界を含む $(r_3=\sqrt{r^2-(t-1)^2})$．



$r_1 = \sqrt{r^2 - t^2}$，$r_3 = \sqrt{r^2 - (t-1)^2}$ であるから，これらの大小により t の値の範囲は次のようになる．

(i) $r_1 \geqq r_3$ のとき

$$\sqrt{r^2 - t^2} \geqq \sqrt{r^2 - (t-1)^2} \quad \text{これを解いて} \quad t \leqq \frac{1}{2}$$

このとき，$(*)$ に注意して　$1 - r \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$

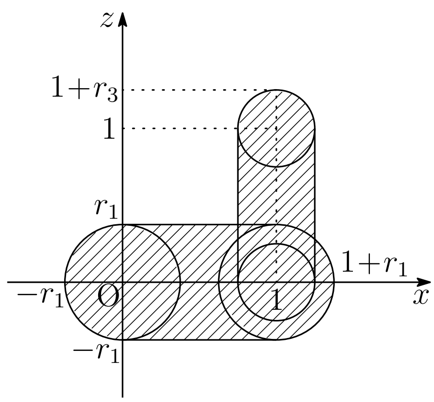
(ii) $r_1 < r_3$ のとき

$$\sqrt{r^2 - t^2} > \sqrt{r^2 - (t-1)^2} \quad \text{これを解いて} \quad t > \frac{1}{2}$$

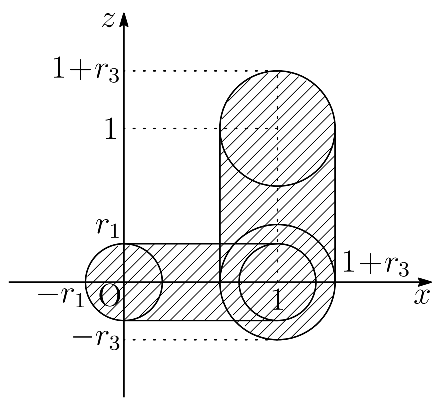
このとき，$(*)$ に注意して　$\dfrac{1}{2} < t \leqq r$

(i),(ii) の場合について，平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示すると次のようになる．

$r_1 \geqq r_3$ $(1 - r \leqq t \leqq \frac{1}{2})$ のとき

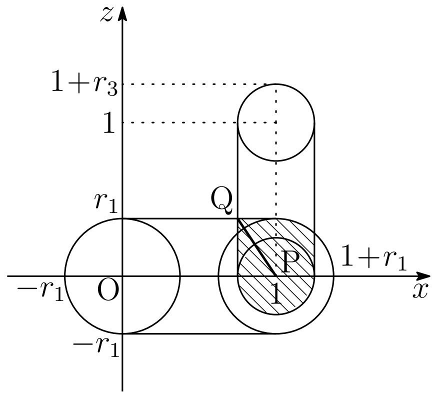


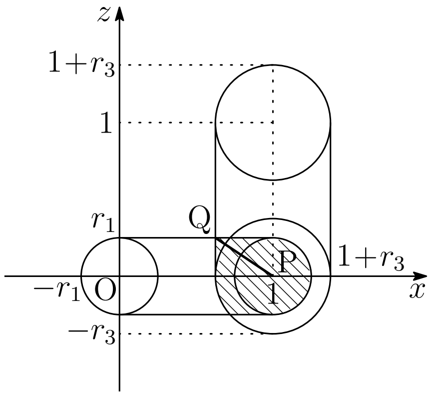
$r_1 < r_3$ $(\frac{1}{2} < t \leqq r)$ のとき



(2) (1) の結果から，V_1 と V_3 の共通部分を平面 $y=t$ 上に図示すると

$r_1 \geqq r_3$ $(1-r \leqq t \leqq \frac{1}{2})$ のとき　　$r_1 < r_3$ $(\frac{1}{2} < t \leqq r)$ のとき





また，P(1, t, 0) をとり，P から領域内の点までの距離が最大となる点を Q とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= {r_1}^2 + {r_3}^2 \\ &= (r^2 - t^2) + \{r^2 - (t-1)^2\} \\ &= 2r^2 - 2t^2 + 2t - 1 \end{aligned}$$

V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるとき　　$\mathrm{PQ} \leqq r$　$\cdots$①

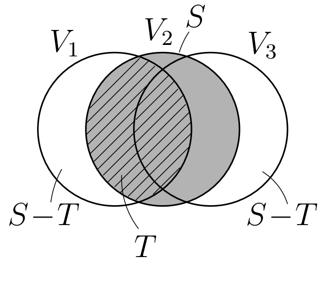
ゆえに　　$$\begin{aligned} r^2 - \mathrm{PQ}^2 &= 2t^2 - 2t + 1 - r^2 \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - r^2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < r < 1$ であるから，$t = \frac{1}{2}$ は $(*)$ の範囲に含まれる．

①，② より　$\frac{1}{2} - r^2 \geqq 0$　これを解いて　$r \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

与えられた r の値に注意して　　$\boldsymbol{\frac{1}{2} < r \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) V_1 の体積 S から V_1 と V_2 の共通部分の体積を引いた体積，V_3 の体積 S から V_3 と V_2 の共通部分の体積を引いた体積はともに $S-T$，V_2 の体積が S であるから，V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体の体積は



$$2(S-T) + S = \boldsymbol{3S - 2T}$$

(4) S は半径 r の半球が2つと底面の半径 r，高さ1の円柱の体積の和より

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2}$$

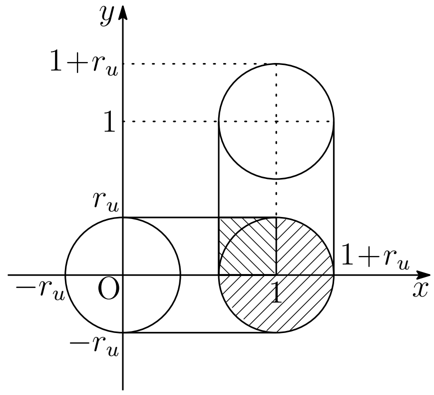
球面 $(x-1)^2+y^2+z^2=r^2$ の平面 $z=u$ による断面は $(-r \leqq u \leqq r)$，円

$$(x-1)^2+y^2=r^2-u^2$$

であり，この円の半径を r_u とすると

$${r_u}^2 = r^2 - u^2$$

したがって，T の平面 $z=u$ による断面は，右の図の斜線部分である．



右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{3}{4}\pi {r_u}^2 + {r_u}^2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right){r_u}^2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)(r^2-u^2)$$

よって　$T = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)\displaystyle\int_{-r}^{r}(r^2-u^2)du = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)\cdot\frac{4}{3}r^3 = \boldsymbol{\left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3}$

(3) の結果により，V の体積は

$$\begin{aligned}3S-2T &= 3\left(\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2\right) - 2\left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3 \\ &= \boldsymbol{\left(2\pi - \frac{8}{3}\right)r^3 + 3\pi r^2}\end{aligned}$$

■

3.5　2019 年 (150 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5] [6]

[1] 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

[2] 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える．3 点 P，Q，R はそれぞれ辺 AB，AD，CD 上にあり，3 点 A，P，Q および 3 点 P，Q，R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする．$\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値，最小値を求めよ．

[3] 座標空間内に 5 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(-2,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ -2,\ 0)$，E$(0,\ 0,\ -2)$ を考える．線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り，直線 AE に平行な平面を α とする．さらに，p は $2<p<4$ をみたす実数とし，点 P$(p,\ 0,\ 2)$ を考える．

(1) 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口および，平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ．

(2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ．

(3) 実数 p が (2) で定まる範囲にあるとする．八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geqq 0$，$z \geqq 0$ の部分を点 $(x,\ y,\ z)$ が動くとき，座標平面上で点 $(y,\ z)$ が動く範囲の面積を求めよ．

[4] n を 1 以上の整数とする．

(1) n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ．

(2) $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ．

5 以下の問いに答えよ．

(1) n を1以上の整数とする．x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ．

(2) (1) で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ．

(3) (1) で定まる数列 a_1，a_2，$a_3, \cdots, a_n, \cdots$ に対し，

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} {a_n}^n, \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ．

6 複素数 α，β，γ，δ および実数 a，b が，次の3条件をみたしながら動く．

条件1：α，β，γ，δ は相異なる．
条件2：α，β，γ，δ は4次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である．
条件3：複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は0であり，虚部は0でない．

(1) α，β，γ，δ のうち，ちょうど2つが実数であり，残りの2つは互いに共役な複素数であることを示せ．

(2) b を a で表せ．

(3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

解答例

1 被積分関数を展開すると

$$
\begin{aligned}
&\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)\\
=&x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\\
=&x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\\
=&x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}
$$

求める定積分を I とすると

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx\\
&=\int_0^1\left(x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx+\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad \cdots(*)
\end{aligned}
$$

まず

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\left(x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx&=\left[\frac{x^3}{3}+2\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1\\
&=\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{8}{3} \qquad \cdots①
\end{aligned}
$$

次に，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ について，$x=\tan\theta$ とおくと

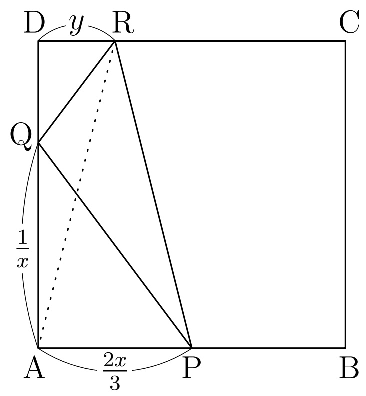
$$
\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}
$$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\\
&=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4} \qquad \cdots②
\end{aligned}
$$

$(*)$，①，② より　$I=\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{35}{12}}$ ■

2 $\dfrac{1}{\mathrm{AQ}}=x$，$\mathrm{DR}=y$ とおくと



$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\dfrac{1}{3}$ より

$$\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{AP}=\frac{2x}{3}$$

$0<\mathrm{AQ}\leqq 1$，$0<\mathrm{AP}\leqq 1$ より

$$0<\frac{1}{x}\leqq 1\quad \text{かつ}\quad 0<\frac{2x}{3}\leqq 1$$

すなわち　$1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$　$\cdots$①

$\triangle\mathrm{APR}+\triangle\mathrm{AQR}=\triangle\mathrm{APQ}+\triangle\mathrm{PQR}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\qquad\cdots②$$

$$=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}$$

① を定義域とすると　$\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq\dfrac{2}{3}$　これは，y の条件をみたす．

② より　$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{\mathrm{AQ}}\cdot\mathrm{DR}=xy=x\left(-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x\right)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{4}{3}x^2$

したがって，次の関数の最大値・最小値を求めればよい．

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2\quad\left(1\leqq x\leqq\frac{3}{2}\right)$$

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=-2x^2+\frac{8}{3}x=-2x\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

x	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

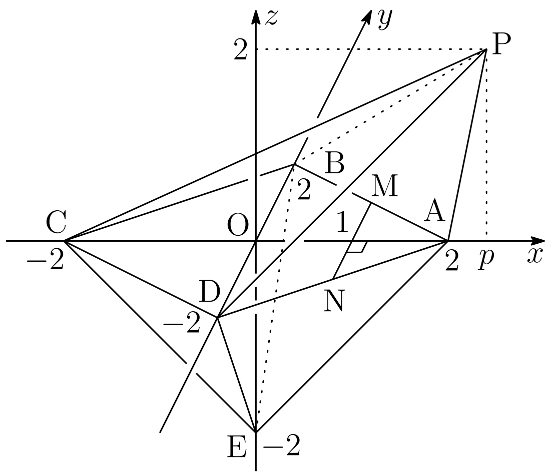
よって　　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ ■

3 (1) 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口は四角形 PCEA である．平面 α の平面 $y=0$ による切り口は，点 (1, 0, 0) を通り，方向ベクトルが (1, 0, 1) の直線であるから平面 $y=0$ におけるその方程式は

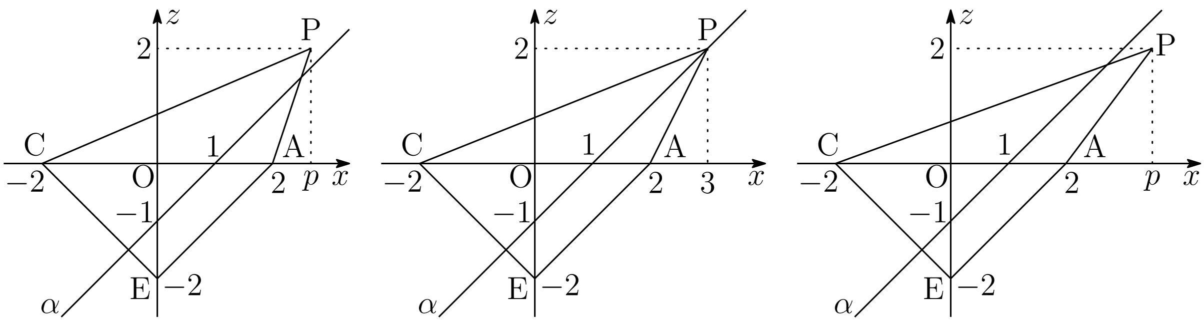
$$z = 1(x-1)$$

すなわち　$z = x-1$

したがって，この直線と P との位置関係により，次の (i)〜(iii) の場合に分けられる．



(i) $2<p<3$ のとき　(ii) $p=3$ のとき　(iii) $3<p<4$ のとき



(2) 平面 α は，2 点 M，N および点 (0, 0, −1) を通るから，3 点 B，C，D は平面 α に関して，点 E と反対側にあり，3 辺 BE，CE，DE は平面 α とそれぞれ交点をもつ．また，(1)(iii) のように，点 P が点 C と平面 α に関して反対側にあるとき，点 P は，2 点 B，D とも平面 α と反対側にあり，3 辺 BP，CP，DP は平面 α とそれぞれ交点をもつ．以上の 6 個の交点と 2 点 M，N を含めた 8 頂点からなる八角形が，八面体 PABCDE の平面 α による切り口である．よって，求める p の値の範囲は

$$\boldsymbol{3 < p < 4}$$

補足　$2<p \leqq 3$ のとき，線分 AP と α との交点を Q とする．3 辺 BE，CE，DE と α との 3 交点と 3 点 M，N，Q を頂点とする六角形がその切り口となる．

(3) 平面 α の方程式は $z = x - 1$

八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geqq 0$，$z \geqq 0$ の部分となすのは，次の4頂点からなる四角形である．

① 点 M$(1,\ 1,\ 0)$

② 線分 MN と x 軸との交点 $(1,\ 0,\ 0)$

③ 平面 $\alpha : z = x - 1$ と直線 CP : $z = \dfrac{2}{p+2}(x+2),\ y = 0$ の交点

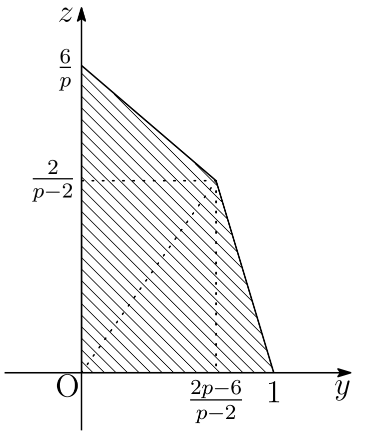
$$\left(\frac{p+6}{p},\ 0,\ \frac{6}{p}\right)$$

④ 平面 $\alpha : z = x - 1$ と直線 BP : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} p \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の交点

(t は媒介変数)

$$\left(\frac{p}{p-2},\ \frac{2p-6}{p-2},\ \frac{2}{p-2}\right)$$

①〜④より，$(y,\ z)$ の動く範囲 $(y \geqq 0,\ z \geqq 0)$ は，yz 平面上の4点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 0)$，$\left(0,\ \dfrac{6}{p}\right)$，$\left(\dfrac{2p-6}{p-2},\ \dfrac{2}{p-2}\right)$ を頂点とする四角形である．したがって，求める面積は



$$\frac{1}{2}\cdot 1\frac{2}{p-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{p}\cdot\frac{2p-6}{p-2} = \boldsymbol{\frac{7p-18}{p(p-2)}}$$

■

4 (1) $5n^2+9$ を n^2+1 で割ると　$5n^2+9=5(n^2+1)+4$

ユークリッドの互除法により，d_n は 4 の約数であり，法 4 について

$$n \equiv \pm 1 \text{ のとき} \quad n^2+1 \equiv 2 \pmod 4$$
$$n \equiv 0,\ 2 \text{ のとき} \quad n^2+1 \equiv 1 \pmod 4$$

よって $$\boldsymbol{d_n = \begin{cases} 2 & (n \text{ が奇数}) \\ 1 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}}$$

(2) まず　$n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$ であるから，n^2+1 は平方数でない．$\cdots$①

$$(n^2+1)(5n^2+9) \text{ は整数の 2 乗である．} \quad \cdots(*)$$

$(*)$ が成立すると仮定し，(1) の結果から，次の場合分けを行う．

(i) $d_n=1$ のとき，n^2+1 および $5n^2+9$ は平方数となる．
これは ① に反するので矛盾．

(ii) $d_n=2$ のとき

$$n^2+1=2p^2, \quad 5n^2+9=2q^2 \qquad \cdots(**)$$

とおき ($p,\ q$ は互いに素)，2 式から n^2 を消去して整理すると

$$q^2=5p^2+2$$

ここで，法 4 について

$$0^2 \equiv 0,\ (\pm 1)^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv 0 \pmod 4,$$
$$q^2 \equiv p^2+2 \pmod 4$$

$p \equiv 0,\ 2 \pmod 4$ のとき　$q^2 \equiv 2 \pmod 4$ となり，矛盾．
$p \equiv \pm 1 \pmod 4$ のとき　$q^2 \equiv 3 \pmod 4$ となり，矛盾．

(i)，(ii) より，$(*)$ は成立しない．

別解 $d_n=2$ のとき，$(**)$ により

$$2(n^2+2)=(q+p)(q-p) \qquad \cdots(\mathrm{A})$$

このとき，n は奇数であるから

$$2(n^2+2) \equiv 2 \pmod 4 \quad \cdots①$$

$q+p=(q-p)+2p$ より，$q+p$ と $q-p$ の偶奇は一致するから

$$(q+p)(q-p) \not\equiv 2 \pmod 4 \quad \cdots②$$

①，② より，(A) をみたす $p,\ q$ は存在しない．■

$\boxed{5}$ (1) 　　方程式 $x^{2n-1} = \cos x \quad \cdots (*)$

(i) $|x| > 1$ のとき　$|x^{2n-1}| > 1$

したがって，この範囲に方程式 $(*)$ の解は存在しない．

(ii) $-1 \leqq x < 0$ のとき，$-\dfrac{\pi}{2} < -1$ に注意して

$$-1 \leqq x^{2n-1} < 0, \quad \cos x > 0$$

したがって，この範囲に方程式 $(*)$ の解は存在しない．

(iii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$f(x) = x^{2n-1} - \cos x \ (0 \leqq x \leqq 1)$ とおくと

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 - \cos 1 > 0 \quad \cdots ①$$

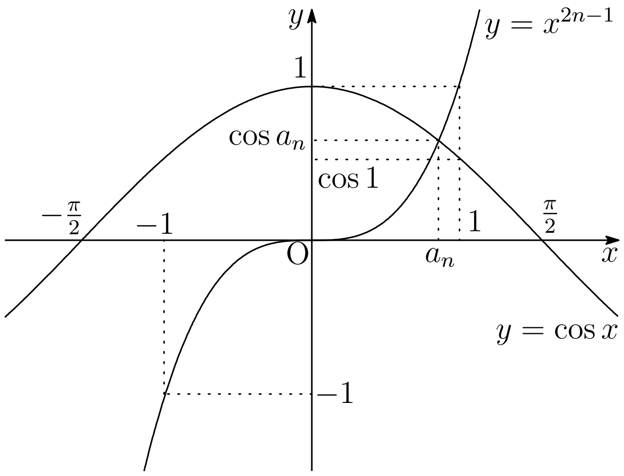
$0 < x < 1$ において　$f'(x) = (2n-1)x^{2n-2} + \sin x > 0$

$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(a_n) = 0 \quad \text{すなわち} \quad {a_n}^{2n-1} - \cos a_n = 0$$

をみたす $a_n \ (0 < a_n < 1)$ がただ一つ存在する．

(i)〜(iii) より，方程式 $(*)$ は，ただ 1 つの解をもつ．



(2) (1) の結果から　$0 < a_n < 1$　よって　$\cos a_n > \cos 1$

(3) ${a_n}^{2n-1} = \cos a_n$ および (2) の結果により

$$a_n = (\cos a_n)^{\frac{1}{2n-1}} > (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}$$

また，$0 < a_n < 1$ であるから

$$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \cdots ②$$

${a_n}^{2n} = a_n \cos a_n$ であるから，${a_n}^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$ より

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n \cos a_n} = \sqrt{1 \cdot \cos 1} = \sqrt{\cos 1} \quad \cdots ③$$

よって　　$\boldsymbol{a = 1,\ b = \sqrt{\cos 1}}$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} &= \frac{{a_n}^{2n} - b^2}{(a_n - a)({a_n}^n + b)} = \frac{a_n(\cos a_n - b^2) + b^2(a_n - a)}{(a_n - a)({a_n}^n + b)} \\ &= \frac{a_n}{{a_n}^n + b} \cdot \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} + \frac{b^2}{{a_n}^n + b} \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

② に注意して，$g(x) = \cos x$ とすると，$g'(x) = -\sin x$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} = g'(1) = -\sin 1 \quad \cdots ⑤$$

②〜⑤ より

$$\begin{aligned} c = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{{a_n}^n + b} \cdot \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} + \frac{b^2}{{a_n}^n + b} \right) \\ &= \frac{1}{b + b}(-\sin 1) + \frac{b^2}{b + b} = \boldsymbol{\frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}} \end{aligned}$$

別解 $h(x) = \sqrt{x \cos x}$ とおくと　$h'(x) = \dfrac{\cos x - x \sin x}{2\sqrt{x \cos x}}$

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n \cdot {a_n}^{2n-1}} - b}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n \cos a_n} - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n) - h(1)}{a_n - 1} = h'(1) = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{6}$ (1) w が方程式 $z^4-2z^3-2az+b=0\cdots(*)$ の解であるとき

$$w^4-2w^3-2aw+b=0$$

a，b は実数であるから

$$\overline{w^4}-2\overline{w^3}-2a\overline{w}+b=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{w})^4-2(\overline{w})^3-2a\overline{w}+b=0$$

w が方程式 $(*)$ の解であるとき，$\overline{w}$ も $(*)$ の解である．
したがって，方程式 $(*)$ の解の種類は

(A) 実数解が 4 個
(B) 実数解が 2 個と互いに共役な複素数が 1 組
(C) 互いに共役な複素数が 2 組

のいずれかである．
(A) は，明らかに条件 3 に反する．
(C) と仮定し，解を $w,\ \overline{w},\ u,\ \overline{u}$ とすると，$\alpha\beta+\gamma\delta$ は

$$w\,\overline{w}+u\,\overline{u}, \quad wu+\overline{wu}, \quad w\overline{u}+\overline{w}u$$

であるから，これらはすべて実数 (虚部が 0) となり，条件 3 に反する．
よって，方程式 $(*)$ の解の種類は (B) であり，題意は成立する．

(2) (1) の結果から，(B) のとき，その解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \overline{\alpha}$ とすると
($\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0,\ \beta,\ \gamma\ (\beta\neq\gamma)$ は実数)

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\gamma\delta&=\alpha\beta+\gamma\overline{\alpha}\\&=(\beta+\gamma)\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}+(\beta-\gamma)\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2}\\&=(\beta+\gamma)\mathrm{Re}(\alpha)+(\beta-\gamma)\mathrm{Im}(\alpha)i\end{aligned}$$

条件 3 より，$(\beta+\gamma)\mathrm{Re}(\alpha)=0$，すなわち，

$$(**) \quad \gamma=-\beta\neq 0 \quad \text{または} \quad \mathrm{Re}(\alpha)=0\ (\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0)$$

のとき，条件 1～条件 3 をみたす．

$(**)$ により，次の場合分けを行う．

(i) $\gamma = -\beta \neq 0$ のとき (γ, β は実数)，方程式 $(*)$ は

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta)(z+\beta)=0$$
$$(z^2-2\mathrm{Re}(\alpha)z+|\alpha|^2)(z^2-\beta^2)=0 \quad \cdots ①$$

ゆえに　$z^4-2\mathrm{Re}(\alpha)z^3+(|\alpha|^2-\beta^2)z^2+2\mathrm{Re}(\alpha)\beta^2 z-|\alpha|^2\beta^2=0$

これと $(*)$ の係数を比較すると

$$-2\mathrm{Re}(\alpha)=-2, \quad |\alpha|^2-\beta^2=0, \quad 2\mathrm{Re}(\alpha)\beta^2=-2a, \quad -|\alpha|^2\beta^2=b$$

したがって　$\mathrm{Re}(\alpha)=1$，$|\alpha|^2=\beta^2=-a>0$，$b=-a^2$

これを ① に代入して　$(z^2-2z-a)(z^2+a)=0 \quad (a<0)$

方程式 $z^2+a=0$ $(a<0)$ は異なる 2 つの実数解をもつ．

方程式 $z^2-2z-a=0$ が虚数解をもつから，$a<0$ に注意して

$$(-2)^2-4\cdot 1(-a)<0 \quad \text{ゆえに} \quad a<-1$$

よって　$b=-a^2 \ \ (a<-1)$

(ii) $\mathrm{Re}(\alpha)=0$ $(\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0)$ のとき，方程式 $(*)$ は

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta)(z-\gamma)=0$$
$$(z^2+|\alpha|^2)(z^2-(\beta+\gamma)z+\beta\gamma)=0 \quad \cdots ②$$

ゆえに　$z^4-(\beta+\gamma)z^3+(|\alpha|^2+\beta\gamma)z^2-|\alpha|^2(\beta+\gamma)z+|\alpha|^2\beta\gamma=0$

これと $(*)$ の係数を比較すると

$$-(\beta+\gamma)=-2, \quad |\alpha|^2+\beta\gamma=0, \quad -|\alpha|^2(\beta+\gamma)=-2a, \quad |\alpha|^2\beta\gamma=b$$

したがって　$\beta+\gamma=2$，$|\alpha|^2=a>0$，$\beta\gamma=-a$，$b=-a^2$

これを ② に代入して　$(z^2+a)(z^2-2z-a)=0 \quad (a>0)$

方程式 $z^2+a=0$ $(a>0)$ は異なる 2 つの虚数解をもつ．

方程式 $z^2-2z-a=0$ $(a>0)$ の判別式は

$$D=(-2)^2-4\cdot(-a)=4+4a>0$$

ゆえに，方程式 $z^2-2z-a=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ．

よって　$b=-a^2 \ \ (a>0)$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{b=-a^2 \ (a<-1,\ 0<a)}$

(3) (2) の結果から，方程式 (∗) は

$$(z^2-2z-a)(z^2+a)=0 \quad (a<-1,\ 0<a)$$

(i) (2)(i) から，$a<-1$ のとき，方程式 (∗) の解は

$$z=1\pm\sqrt{-a-1}\,i,\ \pm\sqrt{-a}$$

このとき　$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{-a}\pm\sqrt{-a-1}\,i \quad (a<-1) \quad \cdots ③$

(ii) (2)(ii) から，$a>0$ のとき，方程式 (∗) の解は

$$z=1\pm\sqrt{a+1},\ \pm\sqrt{a}\,i$$

このとき　$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{a+1}\pm\sqrt{a}\,i \quad (a>0) \quad \cdots ④$

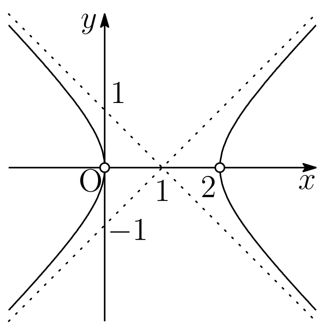
③ について，$a'=-a-1$ とおくと

$$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{a'+1}\pm\sqrt{a'}\,i \quad (a'>0) \quad \cdots ③'$$

$\alpha+\beta=x+yi$ とおくと，③′，④ から

$$x=1\pm\sqrt{a+1},\quad y=\pm\sqrt{a} \quad (a>0)$$

上の 2 式から　$(x-1)^2-y^2=1 \quad (y\neq 0)$
よって，$\alpha+\beta$ がとりうる範囲は右の図のようになる．



3.6　2020 年 (150 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ a，b，c，p を実数とする．不等式

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&>0\\ bx^2+cx+a&>0\\ cx^2+ax+b&>0 \end{aligned}$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする．

(1) a，b，c はすべて 0 以上であることを示せ．

(2) a，b，c のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ．

(3) $p=0$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面上の点 P，Q，R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle\mathrm{PQR}$ で表す．また，P，Q，R が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR}=0$ とする．A，B，C を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC}=1$ とする．この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，

$$\begin{aligned} x(t)&=(1+t)\sqrt{1+t}\\ y(t)&=3(1+t)\sqrt{1-t} \end{aligned}$$

とする．座標平面上の点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ を考える．

(1) $-1<t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ．

(2) 原点と P の距離を $f(t)$ とする．$-1 \leqq t \leqq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ，最大値を求めよ．

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし，C と x 軸で囲まれた領域を D とする．原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき，D が通過する領域の面積を求めよ．

4 n，k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる．k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく．例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である．

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ．

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える．$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ．

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n，k で表せ．

5 座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える．この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐 (内部を含む) を S とする．また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を考える．

(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする．平面 $z=1$ による S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ．

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ．

6 以下の問いに答えよ．

(1) A，α を実数とする．θ の方程式

$$A\sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha) = 0$$

を考える．$A > 1$ のとき，この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せ．

(2) 座標平面上の楕円

$$C : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える．また，$0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする．D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r $(0 < r < 1)$ が存在することを示せ．また，そのような r の最大値を求めよ．

条件：C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある．

解答例

1 (1) 一般に，$l < 0$ とする関数 $f(x) = lx^2 + mx + n$ は

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} lx^2\left(1 + \frac{m}{lx} + \frac{n}{lx^2}\right) < 0$$

であるから，不等式 $f(x) > 0$ が $x > p$ を解にもつことはない．

連立不等式 $$(*)\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ bx^2 + cx + a > 0 \\ cx^2 + ax + b > 0 \end{cases}$$

の解が，$x > p$ であるから，これらの x^2 の係数 $a,\ b,\ c$ が負になることはない．よって，$a,\ b,\ c$ はすべて 0 以上である．

(2) 一般に，$l' > 0$ とする関数 $g(x) = l'x^2 + m'x + n'$ は

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} l'x^2\left(1 + \frac{m'}{l'x} + \frac{n'}{l'x^2}\right) > 0$$

であるから，$x < q$ が不等式 $g(x) > 0$ を満たすように q がとれる．

$(*)$ の x^2 の係数 $a,\ b,\ c$ がすべての正であるとき，$x > p$ 以外に $x < q'$ も連立不等式 $(*)$ の解となる q' がとれるから，条件に反する．これと (1) の結果から，$a,\ b,\ c$ の少なくとも1個は0である．

(3) (i) 0である個数が1個で，例えば，$c = 0,\ a > 0,\ b > 0$ とすると，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^2 + bx > 0 \\ bx^2 + a > 0 \\ ax + b > 0 \end{cases}$$

上の第1式から，$x < -\dfrac{b}{a},\ 0 < x$，第2式から，すべての実数，

第3式から，$x > -\dfrac{b}{a}$．これらを同時に満たす範囲は　$x > 0$

$(a = 0,\ b > 0,\ c > 0)$，$(b = 0,\ c > 0,\ a > 0)$ の場合も同様に　$x > 0$

(ii) 0である個数が2個で，例えば，$a = b = 0,\ c > 0$ とすると，$(*)$ は

$$\begin{cases} c > 0 \\ cx > 0 \\ cx^2 > 0 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad x > 0$$

(iii) 3個とも0であるとすると，$(*)$ は，$0 > 0$ より，解なしとなる．
これは，$(*)$ の解 $x > p$ に反するので，不適．

(i)～(iii) より　$p = 0$ ■

2　(1) 与えれた条件は，次のように表される．

$$(*)\quad \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=t\quad (2 \leqq t \leqq 3)$$

平面上の点 X が △ABC の内部にあるとき，

$$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=1$$

であるから，X は △ABC の外部にある．直線 AB，BC，CA によって分けれた領域で，△ABC の外部にある領域を右下の図のように D_k，E_k とする $(k=1,2,3)$．境界線は，隣接する両方の領域に含まれるものとする．

- $\mathrm{X} \in D_1$ のとき　$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{ABC}$
  上式および $\triangle\mathrm{ABC}=1$ を $(*)$ に代入すると

$$2\triangle\mathrm{BCX}+1=t\quad \text{ゆえに}\quad \triangle\mathrm{BCX}=\frac{t-1}{2}$$

線分 AB の B の延長線上に F_t，線分 AC の C の延長線上に G_t をそれぞれ

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BF}_t=\mathrm{AC}:\mathrm{CG}_t=1:\frac{t-1}{2}$$

となるようにとると，X は線分 $\mathrm{F}_t\mathrm{G}_t$ 上にある．

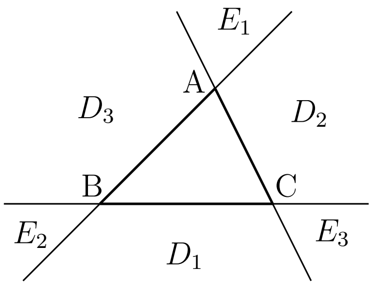
- $\mathrm{X} \in E_1$ のとき　$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{BCX}-\triangle\mathrm{ABC}$
  上式および $\triangle\mathrm{ABC}=1$ を $(*)$ に代入すると

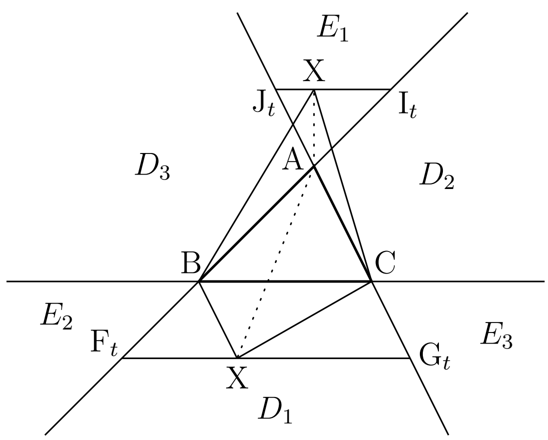
$$2\triangle\mathrm{BCX}-1=t\quad \text{ゆえに}\quad \triangle\mathrm{BCX}=\frac{t+1}{2}$$

線分 AB の A の延長線上に I_t，線分 AC の A の延長線上に J_t をそれぞれ

$$\mathrm{BA}:\mathrm{AI}_t=\mathrm{CA}:\mathrm{AJ}_t=1:\frac{t+1}{2}-1=1:\frac{t-1}{2}$$

となるようにとると，X は線分 $\mathrm{I}_t\mathrm{J}_t$ 上にある．

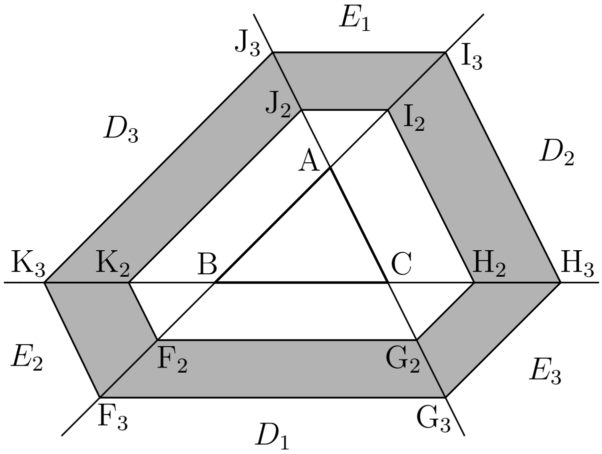




同様に，線分 BC の C の延長線上に H_t，線分 BC の B の延長上に K_t をそれぞれ

$$\mathrm{BC} : \mathrm{CH}_t = \mathrm{CB} : \mathrm{BK}_t = 1 : \frac{t-1}{2}$$

をとると，$2 \leqq t \leqq 3$ であるから，点 X は六角形 $\mathrm{F_2G_2H_2I_2J_2K_2}$ の外部と六角形 $\mathrm{F_2G_2H_2I_2J_2K_2}$ の内部で囲まれた部分を動く．



D_k，E_k で点 X の動きうる範囲の面積をそれぞれ $S(D_k)$，$D(E_k)$ とおくと $(k = 1, 2, 3)$

$$\frac{\mathrm{AF}_3}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AG}_3}{\mathrm{AC}} = 2, \qquad \frac{\mathrm{AF}_2}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AG}_2}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{2},$$
$$\frac{\mathrm{AI}_3}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AJ}_3}{\mathrm{AC}} = 1, \qquad \frac{\mathrm{AI}_2}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AJ}_2}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}$$

ゆえに　$S(D_1) = 2^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{7}{4}$，$S(E_1) = 1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

同様の計算により

$$S(D_1) = S(D_2) = S(D_3), \quad S(E_1) = S(E_2) = S(E_3)$$

よって　　$S = 3\{S(D_1) + S(E_1)\} = 3\left(\dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{4}\right) = \boldsymbol{\dfrac{15}{2}}$ ■

3 (1) $x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$, $y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$ より $(-1 \leqq t \leqq 1)$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} = 3\sqrt{\frac{2}{1+t} - 1}$$

$-1 < t \leqq 1$ において，$\dfrac{2}{1+t} - 1$ は単調減少であるから，$\dfrac{y(x)}{x(t)}$ は $-1 < t \leqq 1$ において単調に減少する．

(2) 原点 O と点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の距離 $f(t)$ より

$$\begin{aligned} f(t)^2 &= x(t)^2 + y(t)^2 \\ &= (1+t)^3 + 9(1+t)^2(1-t) \\ &= 2(1+t)^2(5-4t) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}f(t)^2 = (1+t)^2(5-4t)$

この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} f(t)f'(t) &= 2(1+t)(5-4t) + (1+t)^2(-4) \\ &= 6(1+t)(1-2t) \end{aligned}$$

① および $f(t) > 0$ であるから $(-1 < t < 1)$

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

よって　最大値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{6}}{2}}$

補足 3 正数 $2(1+t)$, $2(1+t)$, $5-4t$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

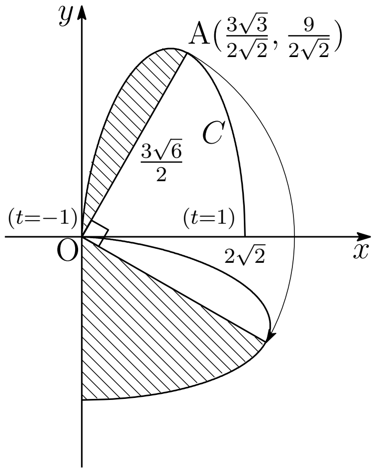
$$\frac{2(1+t) + 2(1+t) + 5 - 4t}{3} \geqq \sqrt[3]{\{2(1+t)\}^2(5-4t)}$$

したがって　$2(1+t)^2(5-4t) \leqq \dfrac{27}{2}$　ゆえに　$f(t) \leqq \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

上式において，等号が成立するとき

$$2(1+t) = 5 - 4t \quad すなわち \quad t = \frac{1}{2}$$

(3) C と x 軸で囲まれた領域の面積を S_1 とすると，右の図の斜線部分の面積は S_1 に等しい．



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{x(-1)}^{x(1)} y\,dx = \int_{-1}^{1} y(t)x'(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} 3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt \\ &= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt \\ &= 9\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt = 9\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{4} = \frac{9\pi}{4} \end{aligned}$$

$f(t)$ が最大となる C 上の点を A とすると　$\mathrm{OA} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

OA を半径とする $\frac{1}{4}$ 円の面積を S_2 とすると　$S_2 = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{27\pi}{8}$

求める面積は　$S_1 + S_2 = \frac{9\pi}{4} + \frac{27\pi}{8} = \boldsymbol{\frac{45\pi}{8}}$

発展　積分公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる[4]．これに $m = n = \frac{1}{2}$，$\alpha = -1$，$\beta = 1$ を代入すると

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}\cdot 2^2$$

左辺は，中心を原点とする半径 1 の円の x 軸の上側にある半円の面積であるから

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{1}{2}!\right)^2 \quad ゆえに \quad \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

さらに，$\frac{3}{2}! = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}! = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$，$\frac{5}{2}! = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}! = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$，$\cdots$ となる．本題では

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}!\cdot\frac{1}{2}!}{3!}\cdot 2^3 = \frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{6}\cdot 8 = \frac{9\pi}{4} \end{aligned}$$

■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{4}$ (1) 等式 $(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1})^2=\sum_{k=0}^{n-1}{x_k}^2+2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1}x_ix_j$

において，$x_m=2^m$ とすると $(m=0,1,\ldots,n-1)$

$$(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2=\sum_{k=0}^{n-1}(2^k)^2+2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1}2^i{\cdot}2^j$$

$$\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2=\frac{4^n-1}{4-1}+2a_{n,2}$$

$$4^n-2{\cdot}2^n+1=\frac{1}{3}{\cdot}4^n-\frac{1}{3}+2a_{n,2}$$

ゆえに　$a_{n,2}=\frac{1}{3}{\cdot}4^n-2^n+\frac{2}{3}$　　よって　$\boldsymbol{a_{n,2}=\frac{1}{3}(2^n-1)(2^n-2)}$

(2) $f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$ の定義により，次式が成立する．

$$f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}x^k=\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x)\quad\cdots(*)$$

したがって

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x)=(1+2^nx)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x)\\&=(1+2^nx)f_n(x),\\f_{n+1}(x)&=\prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x)=(1+x)\prod_{k=2}^{n+1}(1+2^{k-1}x)\\&=(1+x)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}{\cdot}2x)=(1+x)f_n(2x)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx,\quad\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x}$

(3) (2) で示した

$$(**)\begin{cases} f_{n+1}(x) = (1+2^n x)f_n(x) \\ f_{n+1}(x) = (1+x)f_n(2x) \end{cases}$$

の第 1 式から　$f_{n+1}(2x) = (1+2^{n+1}x)f_n(2x)$

これと $(**)$ の第 2 式の辺々の差をとると

$$f_{n+1}(2x) - f_{n+1}(x) = (2^{n+1}-1)xf_n(2x) \tag{A}$$

$(*)$ より

$$\begin{aligned} f_{n+1}(2x) - f_{n+1}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k}(2x)^k - \left\{1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k}x^k\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= a_{n+1,1}x + \sum_{k=2}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= (2^{n+1}-1)x + \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1} \qquad \text{(B)} \\ (2^{n+1}-1)xf_n(2x) &= (2^{n+1}-1)x\left\{1 + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}(2x)^k\right\} \\ &= (2^{n+1}-1)x + (2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{n,k}x^{k+1} \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

(B)，(C) を (A) に代入して，整理すると

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1} = (2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{n,k}x^{k+1}$$

上式の同じ次数の項の係数は等しいから

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1} = (2^{n+1}-1)2^k a_{n,k}$$

よって　$$\boldsymbol{\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{(2^{n+1}-1)2^k}{2^{k+1}-1}}$$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) S の表す領域は

$$(*)\quad x^2+y^2 \leqq \left(\frac{2-z}{2}\right)^2,\ 0 \leqq z \leqq 2$$

S の $z=1$ による切り口を S' とすると　$S' : x^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{4},\quad z=1$

次に，S の底面にある点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ 0)$ をとると　$X^2+Y^2 \leqq 1 \quad \cdots ①$

AP の中点を $\mathrm{M}(x,\ y,\ 1)$ とすると

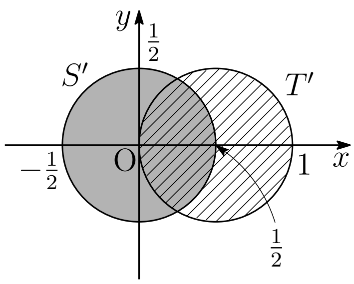
$$\frac{1+X}{2}=x,\quad \frac{Y}{2}=y,\quad \text{ゆえに}\quad X=2x-1,\ Y=2y$$

これらを ① に代入すると

$$(2x-1)^2+(2y)^2 \leqq 1$$

平面 $z=1$ による T の切り口を T' とすると

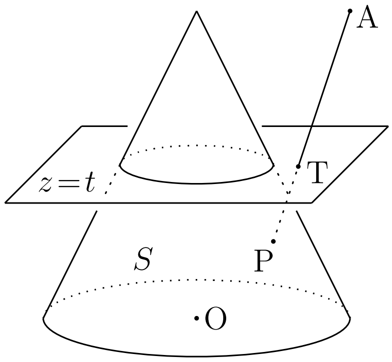
$$T' : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \frac{1}{4},\quad z=1$$



(2) S の平面 $z=a$ 上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ Z)$ は，$(*)$ より，次式を満たす．

$$X^2+Y^2 \leqq \left(\frac{2-a}{2}\right)^2,\quad Z=a \quad \cdots ②$$

線分 AP と平面 $z=t$ $(a \leqq t \leqq 2)$ との共有点を $\mathrm{T}(x,\ y,\ t)$ とすると，$\mathrm{P}(X,\ Y,\ a)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ の z 座標に注意すると，点 P は線分 TA を $t-a:2-a$ に外分するから

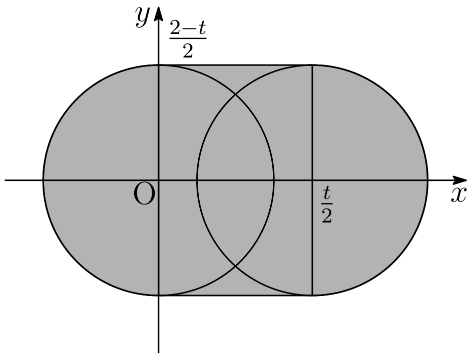


$$X=\frac{-(2-a)x+(t-a)}{t-2},$$
$$Y=\frac{-(2-a)y}{t-2}$$

上の 2 式を ② に代入すると

$$\left\{\frac{-(2-a)x+(t-a)}{t-2}\right\}^2+\left\{\frac{-(2-a)y}{t-2}\right\}^2 \leqq \left(\frac{2-a}{2}\right)^2$$
$$\left(x-\frac{t-a}{2-a}\right)^2+y^2 \leqq \left(\frac{2-t}{2}\right)^2$$

上式で t を固定して，a を $0 \leqq a \leqq t$ の値をとると，半径 $\dfrac{2-t}{2}$ は不変で，中心は $(0,\ 0)$ から $\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$ にあるから，平面 $z=t$ における描く図形は，右図のようになる．その面積を $S(t)$ とすると



$$S(t)=\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}(2-t)$$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\int_0^2 S(t)\,dt=\int_0^2\left\{\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}(2-t)\right\}dt\\&=-\frac{\pi}{12}\Big[\ (2-t)^3\ \Big]_0^2+\frac{1}{12}(2-0)^3\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}(\pi+1)}\end{aligned}$$

■

6 (1) $f(\theta)=A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)$ とおくと，$A>1$，$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$ より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)>0,\quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)<0$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)>0,\quad f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)<0$$

方程式 $f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right)$ にそれぞれ少なくとも 1 つずつ解をもつ．また，$f(0)\leqq 0$ のときは，$f(\theta)=0$ は区間 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ に解をもち，$f(0)=f(2\pi)>0$ のときは，$f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right)$ に少なくとも 1 つ解をもつ．よって，$f(\theta)=0$ は，$0\leqq\theta<2\pi$ において，少なくとも 4 個解をもつ．

(2) $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ より，$x=\sqrt{2}\cos\theta,\ y=\sin\theta$ とすると $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=\left(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \cos\theta\right)$$

したがって，C 上の点 $(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ における法線の方程式は

$$(-\sqrt{2}\sin\theta)(x-\sqrt{2}\cos\theta)+(\cos\theta)(y-\sin\theta)=0$$

すなわち　$l:\sqrt{2}x\sin\theta-y\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$

$D:2x^2+y^2<r^2$ の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{B\cos(-\beta)}{\sqrt{2}},\ B\sin(-\beta)\right)$ が l 上の点であるとき $(0\leqq B<r,\ 0\leqq\beta<2\pi)$

$$\sqrt{2}\left(\frac{B\cos\beta}{\sqrt{2}}\right)\sin\theta-(-B\sin\beta)\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 2\theta-2B\sin(\theta+\beta)=0 \qquad \text{(A1)}$$

(i) $B=0$ のとき，(A1) を満たす θ は　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$
P$(0,\ 0)$ に対して，Q は $(\pm\sqrt{2},\ 0)$，$(0,\pm 1)$ の 4 点存在する．

(ii) $B>0$ のとき，(A1) より

$$\frac{1}{2B}\sin 2\theta-\sin(\theta+\beta)=0$$

(1) の結果から，$\dfrac{1}{2B}>1$，すなわち，$B<\dfrac{1}{2}$ となるように

$$0<r\leqq\frac{1}{2}$$

をとればよい．

$r>\dfrac{1}{2}$ であるとき，$B=\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ を (A1) に代入すると

$$\sin 2\theta-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

これから　$2\theta=\theta+\dfrac{\pi}{4}+2m\pi,\ \pi-\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+2n\pi$　(m，n は整数)

$0\leqq\theta<2\pi$ に注意して解くと　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{11\pi}{12},\ \dfrac{19\pi}{12}$

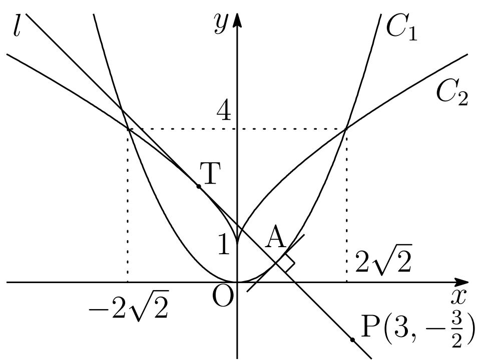
このとき，θ は3個であるから，条件を満たす r の最大値は　$\boldsymbol{r=\dfrac{1}{2}}$

補足 $\beta=\dfrac{\pi}{4}$ 以外に，$\beta=\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ としてもよい．実際，

$$\begin{aligned}
\beta&=\frac{3\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta=\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{12},\ \frac{17\pi}{12}\\
\beta&=\frac{5\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta=\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12}\\
\beta&=\frac{7\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta=\frac{7\pi}{4},\ \frac{5\pi}{12},\ \frac{13\pi}{12}
\end{aligned}$$

解説 本題は，点Pから楕円 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ に引いた法線が4本引ける領域について考察する問題である．楕円の法線群の包絡線について理解しておくと，本題の主旨が理解できる．法線が引ける本数は，包絡線に引ける接線の本数に等しい．例えば，放物線 $C_1:y=\dfrac{x^2}{2}$ の法線群の包絡線は $C_2:y=1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ である[5]．y 軸上にない点Pをとると，C_2 の下側にある点Pからは C_1 に1本の法線，C_2 上の点Pから C_1 に2本の法線，C_2 の上側にある点Pからは C_1 に3本の法線が引ける．また，y 軸上の点からは C_1 に1本の法線が引ける．

$\mathrm{P}(3,-\frac{3}{2})$ から包絡線 C_2 に引いた接線 $l:y=-x+\frac{5}{2}$ は第2象限の点 $\mathrm{T}(-1,\ \frac{5}{2})$ で接し，l と C_1 の第1象限の交点は $\mathrm{A}(1,\ \frac{1}{2})$ である．このとき C_1 の点Aにおける法線が l である．また，C_1 のAにおける接触円 (曲率円) の中心がTである．



[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf の $\boxed{3}$ を参照．

別解 $C : \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上に点 $\mathrm{X}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$.

点 X の接方向は $(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \cos\theta)$ であるから，C の点 X における法線は

$$(-\sqrt{2}\sin\theta)(x - \sqrt{2}\cos\theta) + (\cos\theta)(y - \sin\theta) = 0$$

すなわち　　$\sqrt{2}x\sin\theta - y\cos\theta = \sin\theta\cos\theta$

C 上に隣接 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{2}\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2}\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとると $(\alpha \neq \beta)$，A，B における法線は，それぞれ

$$\begin{cases} \sqrt{2}x\sin\alpha - y\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha & \cdots ① \\ \sqrt{2}x\sin\beta - y\cos\beta = \sin\beta\cos\beta & \cdots ② \end{cases}$$

① $\times \cos\beta -$ ② $\times \cos\alpha$ より (y を消去)

$$\sqrt{2}(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)x = \cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha - \sin\beta)$$

これを解いて　　$x = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta(\sin\beta - \sin\alpha)}{\sqrt{2}\sin(\beta - \alpha)}$　　$\cdots (*)$

$(*)$ において，$\beta \to \alpha$ とすると

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to\alpha} x &= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\cos\alpha\cos\beta(\sin\beta - \sin\alpha)}{\sqrt{2}\sin(\beta - \alpha)} \\ &= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \end{aligned}$$

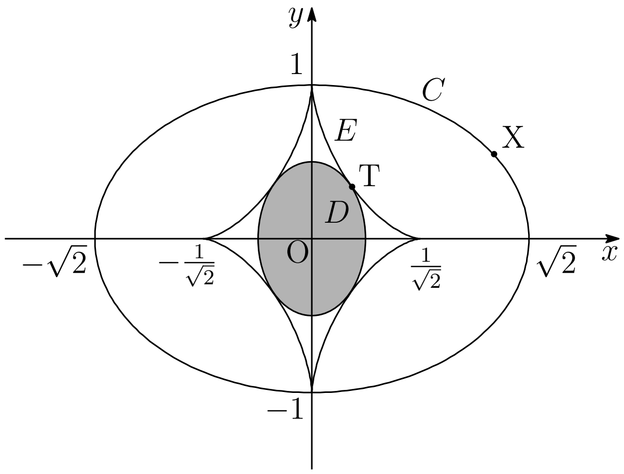
ここで，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha} \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha}$ は $\sin x$ の $x = \alpha$ における微分係数 $\cos\alpha$，
また，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha} \frac{\beta - \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = 1$ であるから

$$\lim_{\beta\to\alpha} x = \frac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}} \quad \text{これを①に代入すると} \quad \lim_{\beta\to\alpha} y = -\sin^3\alpha$$

点 A に対応する点 $\left(\dfrac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}},\ -\sin^3\alpha\right)$ が描く軌跡 E の方程式は

$$x = \frac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}},\quad y = -\sin^3\alpha \quad \text{すなわち} \quad E : (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

与えれた条件を満たす点 P は，E の内部の点である (境界線を含まない)．
$\partial D : 2x^2+y^2=r^2$ とすると，求める r は ∂D と E が接するときである．
この ∂D と E の第 1 象限における共有点を A とすると，A におけるこれらの接線は，共通接線である．



∂D より　$4x+2yy'=0$　ゆえに　$y'=-\dfrac{2x}{y}$

E より　$\dfrac{2}{3}(\sqrt{2}x)^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$　ゆえに　$y'=-\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

したがって　$-\dfrac{2x}{y}=-\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$　第 1 象限の点であるから　$y=\sqrt{2}x$

これと E の方程式を連立すると　$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

点 A は ∂D の点であるから

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=r^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r=\frac{1}{2}}$$

補足　E の内部 (境界を含まない)E' の点から E に引ける接線は 4 本ある[6]．例えば，第 1 象限にある E' の点からは，E に第 1 象限で接する l_1, l_1' の 2 本の接線，第 2 象限で接する l_2，第 4 象限で接する l_4 がある．l_1, l_1' と C の第 4 象限の交点が，C のそれぞれの点における法線である．l_2 と C の第 3 象限の交点が，C の点における法線である．l_4 と C の第 1 象限の交点が，C の点における法線である．■

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2020_04_19.pdf を参照

3.7　2021 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 a, b を実数とする．座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす．

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ．

2 複素数 a, b, c に対して整式 $f(z) = az^2 + bz + c$ を考える．i を虚数単位とする．

(1) α, β, γ を複素数とする．$f(0) = \alpha$, $f(1) = \beta$, $f(i) = \gamma$ が成り立つとき，a, b, c をそれぞれ α, β, γ で表せ．

(2) $f(0)$, $f(1)$, $f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

3 関数

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

に対して，$y = f(x)$ のグラフを C とする．点 A$(1,\ f(1))$ における C の接線を

$$\ell : y = g(x)$$

とする．

(1) C と ℓ の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ．

(2) (1) で求めた共有点の x 座標を α とする．定積分

$$\int_{\alpha}^{1} \{f(x) - g(x)\}^2\, dx$$

を計算せよ．

4 以下の問いに答えよ．

(1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする．K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする．このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$, $B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ．

(3) a, b は (2) の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする．${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ．

5 α を正の実数とする．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha, -3)$，$\mathrm{P}(\theta + \sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める．

(1) $0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ．

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる．

6 定数 b, c, p, q, r に対し，

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が x についての恒等式であるとする．

(1) $p \neq 0$ であるとき，q, r を p, b で表せ．

(2) $p \neq 0$ とする．b, c が定数 a を用いて

$$b = (a^2 + 1)(a + 2), \quad c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2 - (a^2 + 1)\}\{p^4 + f(a)p^2 + g(a)\} = 0$$

を満たすものを 1 組求めよ．

(3) a を整数とする．x の 4 次式

$$x^4 + (a^2 + 1)(a + 2)x - \left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ．

解答例

1　(1)　$C: y = x^2 + ax + b$ と $y = -x^2$ の 2 式から y を消去して整理すると

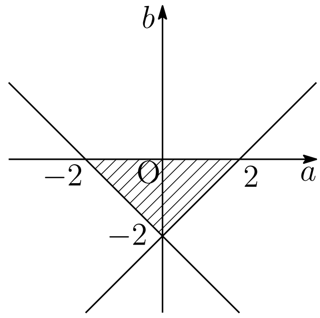
$$2x^2 + ax + b = 0$$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ とおく．C と $y = -x^2$ の共有点の x 座標が $-1 < x < 0$，$0 < x < 1$ であるとき，次を満たせばよい．

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 > 0 \\ f(0) = b < 0 \\ f(1) = a + b + 2 > 0 \end{cases}$$

それぞれ整理すると

$$\begin{cases} b > a - 2 \\ b < 0 \\ b > -a - 2 \end{cases}$$



よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線を含まない．

(2)　C の方程式から，$b = -xa + y - x^2$ であるから

$$g(a) = -xa + y - x^2$$

とおくと，$b = g(a)$ は，傾き $-x$，切片 $y - x^2$ の直線である．
これが (1) で求めた領域を通る条件，切片に注目して求めればよい．

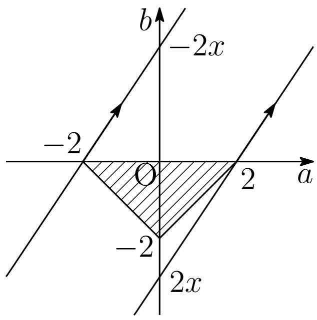
(i)　$x \leqq -1$ のとき

$$2x < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x < y < x^2 - 2x \quad (x \leqq -1)$$

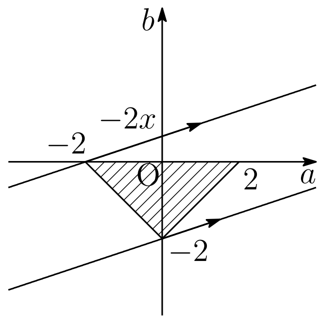
(ii)　$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき

$$-2 < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2 < y < x^2 - 2x \quad (-1 \leqq x \leqq 0)$$

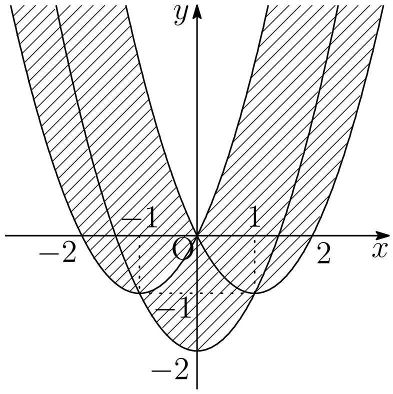
(i) $x \leqq -1$ のとき



(ii) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき



$C: y = x^2 + ax + b$ と放物線 $y = -x^2$ が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ の区間でそれぞれ共有点をもつから，x と $-x$ の対称性に注意すると，$x \leqq 0$ で C の通りうる範囲と $0 \leqq x$ で C の通りうる範囲は y 軸について対称である．よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



■

2 (1) $f(z) = az^2 + bz + c$ について，$f(0) = \alpha$, $f(1) = \beta$, $f(i) = \gamma$ であるから

$$\boldsymbol{c = \alpha}, \quad a + b + c = \beta, \quad -a + bi + c = \gamma$$

上の第1式を第2式，第3式に代入して整理すると

$$\begin{cases} a + b = \beta - \alpha & \cdots ① \\ -a + bi = \gamma - \alpha & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より　$(1+i)b = \beta + \gamma - 2\alpha$

$$b = \frac{\beta + \gamma - 2\alpha}{1+i} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i)}$$

① × i − ② より　$(1+i)a = (\beta - \alpha)i + \alpha - \gamma$

$$a = \frac{(\beta - \alpha)i + \alpha - \gamma}{1+i} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\{(\beta - \gamma) + (\beta + \gamma - 2\alpha)i\}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(2) &= 4a + 2b + c \\ &= 2(\beta - \gamma) + 2(\beta + \gamma - 2\alpha)i + (\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i) + \alpha \\ &= -\alpha + 3\beta - \gamma + (-2\alpha + \beta + \gamma)i \end{aligned}$$

$f(2)=x+yi$ とすると，$1 \leqq \alpha,\beta,\gamma \leqq 2$ に注意して

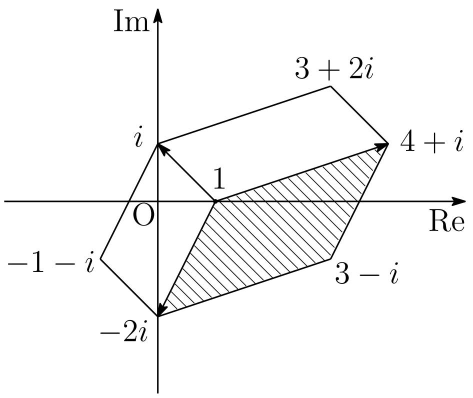
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\alpha+3\beta-\gamma \\ -2\alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\alpha-1)\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + (\beta-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (\gamma-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\gamma=1$ のとき，$f(2)=x+yi$ のとりうる範囲は，左下の図のように点 1 を始点として，$-1-2i$，$3+i$ の張る平行四辺形の内部で境界線を含む．
よって，求める領域は，この平行四辺形を $-1+i$ だけ平行移動したときに描く軌跡の領域であるから，右下の図のように複素数平面上の 6 点

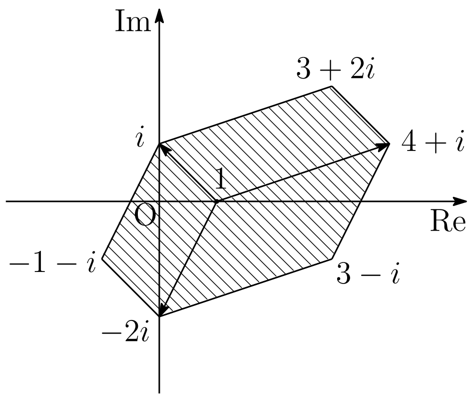
$$-2i,\quad 3-i,\quad 4+i,\quad 3+2i,\quad i,\quad -1-i$$

を頂点とする六角形の内部で境界線を含む．

$1 \leqq \alpha,\beta \leqq 2,\ \gamma=1$



$1 \leqq \alpha,\beta,\gamma \leqq 2$



3 (1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ より　$f'(x)=\dfrac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$　　$f(1)=\dfrac{1}{4}$，$f'(1)=\dfrac{1}{8}$

ℓ は点 $\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{8}$ の直線であるから

$$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}(x-1)\quad \text{ゆえに}\quad \ell : y=\frac{1}{8}(x+1)$$

$C : y=f(x)$ と $\ell : y=\dfrac{1}{8}(x+1)$ の共有点の x 座標は

$$\frac{x}{x^2+3}=\frac{1}{8}(x+1)\quad \text{整理すると}\quad x^3+x^2-5x+3=0$$

ゆえに　$(x-1)^2(x+3)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{x=-3}$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$，$g(x) = \dfrac{1}{8}(x+1)$ であるから

$$\begin{aligned}
\{f(x)-g(x)\}^2 &= \left\{\frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{8}(x+1)\right\}^2 \\
&= \left(\frac{x}{x^2+3}\right)^2 - \frac{x(x+1)}{4(x^2+3)} + \frac{1}{64}(x+1)^2 \\
&= \frac{(x^2+3)-3}{(x^2+3)^2} - \frac{(x^2+3)+x-3}{4(x^2+3)} + \frac{1}{64}(x+1)^2 \\
&= -\frac{3}{(x^2+3)^2} + \frac{7}{4(x^2+3)} - \frac{1}{4} - \frac{x}{4(x^2+3)} + \frac{1}{64}(x+1)^2
\end{aligned}$$

ここで，次の 2 つの定積分を

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-3}^{1} \left\{-\frac{3}{(x^2+3)^2} + \frac{7}{4(x^2+3)}\right\} dx, \\
J &= \int_{-3}^{1} \left\{-\frac{1}{4} - \frac{x}{4(x^2+3)} + \frac{1}{64}(x+1)^2\right\} dx
\end{aligned}$$

とおくと

$$\int_{-3}^{1} \{f(x)-g(x)\}^2\,dx = I + J$$

$x = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

x	$-3 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}
I &= \sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left(-\frac{1}{3}\cos^2\theta + \frac{7}{12}\right) d\theta \\
&= \sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{6}\cos 2\theta\right) d\theta \\
&= \sqrt{3}\left[\frac{5}{12}\theta - \frac{1}{12}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{5\pi}{24}\sqrt{3} - \frac{1}{4}, \\
J &= \left[-\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\log(x^2+3) + \frac{1}{192}(x+1)^3\right]_{-3}^{1} \\
&= -\frac{11}{12} + \frac{1}{8}\log 3
\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int_{-3}^{1} \{f(x)-g(x)\}^2\,dx = \left(\frac{5\pi}{24}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{11}{12} + \frac{1}{8}\log 3\right)$

$$= \boldsymbol{\frac{5\pi}{24}\sqrt{3} + \frac{1}{8}\log 3 - \frac{7}{6}}$$

■

4　(1) $KA = LB$ より

$$KA - KB = LB - KB \quad \text{ゆえに} \quad K(A-B) = (L-K)B$$

K, L をそれぞれ 4 で割った余りが等しいから　$L - K \equiv 0 \pmod 4$

$$K(A-B) \equiv 0 \pmod 4$$

K は正の奇数であるから　$A - B \equiv 0$　すなわち　$A \equiv B \pmod 4$

よって，A を 4 で割った余りは，B を 4 で割った余りと等しい．

(2) $A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} = \displaystyle\prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b = \displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k}$ より

$$\begin{aligned}
A &= \prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j} \\
&= \prod_{k=0}^{b} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+1)}{4b+1-(4k+1)} \\
&\qquad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+2)}{4b+1-(4k+2)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+3)}{4b+1-(4k+3)} \\
&= (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k} \\
&\qquad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-1-4k}{4b-1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{2a-1-2k}{2b-1-2k} \\
&= (4a+1-4b)B \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)}{(4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)}
\end{aligned}$$

これから，正の奇数 K, L を

$$K = \prod_{k=0}^{b-1} (4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)$$

$$L = (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} (4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)$$

とおくと，次式を満たす正の奇数 K, L が存在する．

$$A = \frac{LB}{K} \quad \text{すなわち} \quad KA = LB$$

(3) 2つの奇数 $K,\ L$ の因数は，法4について ($a-b$ は2で割り切れる)

$$\begin{aligned}
&4a+1-4b \equiv 1 && \pmod 4\\
&4b+1-4k \equiv 4a+1-4k && \pmod 4\\
&4b-1-4k \equiv 4a-1-4k && \pmod 4\\
&2b-1-2k = 2a-1-2k-2(a-b) \equiv 2a-1-2k && \pmod 4
\end{aligned}$$

したがって，2つの奇数 $K,\ L$ について　$K \equiv L \pmod 4$

これと $A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b$ を (1) の結論に適用すると

$$(*) \quad {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} \equiv {}_a\mathrm{C}_b \pmod 4$$

よって，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を4で割った余りは，${}_a\mathrm{C}_b$ を4で割った余りと等しい．

(4) $(*)$ の左辺は $a=505,\ b=9$ を代入したもので $a-b$ は2で割り切れるから

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_9 \pmod 4$$

さらに，上式の右辺は，$(*)$ の左辺に $a=126,\ b=2$ を代入したもので $a-b$ は2で割り切れるから

$${}_{505}\mathrm{C}_9 \equiv {}_{126}\mathrm{C}_2 \pmod 4$$

このとき　${}_{126}\mathrm{C}_2 = \dfrac{126\cdot125}{2\cdot1} = 63\cdot125 \equiv 3\cdot1 \equiv 3 \pmod 4$

したがって　${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv 3 \pmod 4$　よって　求める余りは　**3**　■

5 (1) $\mathrm{A}(-\alpha, -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$，$f(\theta) = \mathrm{AP}^2$ より

$$f(\theta) = (\theta+\sin\theta+\alpha)^2 + (\cos\theta+3)^2$$

これを順次微分し，第 3 次導関数まで求めると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2(\theta+\sin\theta+\alpha)(1+\cos\theta) + 2(\cos\theta+3)\cdot(-\sin\theta) \\ &= 2(\theta - 2\sin\theta + \alpha + \theta\cos\theta + \alpha\cos\theta), \\ f''(\theta) &= 2(1-\cos\theta-\theta\sin\theta-\alpha\sin\theta), \\ f'''(\theta) &= -2(\theta+\alpha)\cos\theta \end{aligned}$$

$\alpha > 0$ であるから，$f''(\theta)$ の増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f''(\theta)$	0	↘	極小	↗	4

上の増減表から，次を満たす φ が唯一存在する

$$f''(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi$$

これから，$f'(\varphi)$ の増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	φ	$\cdots$	π
$f''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f'(\theta)$	4α	↘	極小	↗	0

$f'(0) = 4\alpha > 0$ であるから，上の増減表より

$$f'(\psi) = 0, \quad 0 < \psi < \pi$$

を満たす ψ がただ一つ存在し，題意は証明された．

(2) (1) の結果から，$f(\theta)$ の増減表は

θ	0	$\cdots$	ψ	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

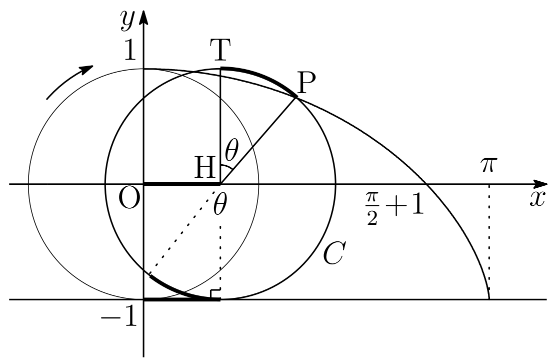
$\theta = \psi$ で最大であるから $(0 < \psi < \frac{\pi}{2})$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \quad \text{すなわち} \quad 2\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \alpha\right) < 0$$

$\alpha > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{0 < \alpha < 2 - \dfrac{\pi}{2}}$

補足　P の描く図形はサイクロイドである．半径1の円 C が下の図のように直線 $y=-1$ 上を滑ることなく転がるとき，C 上の定点 P が描く軌跡である．$\theta=0$ のとき，C の中心 H は原点 O，P は $(0,\ 1)$ にあるから，HP の偏角は $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ である．点 T を $(\theta,\ 1)$ とすると，$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\mathrm{OH}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\begin{pmatrix}\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta+\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$



$x(\theta)=\theta+\sin\theta$，$y(\theta)=\cos\theta$，$\vec{v}=(x'(\theta),\ y'(\theta))$ とおくと

$$f(\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(x(\theta)+\alpha)^2+(y(\theta)+3)^2$$

これを θ について微分すると

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=2(x(\theta)+\alpha)x'(\theta)+2(y(\theta)+3)y'(\theta)\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

$f'(\theta)=0$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{v}=0$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{v}$

このとき，点 P における接ベクトル $\vec{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は垂直である．　■

6 (1) $(*)$　$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$

$(*)$ の右辺を展開すると

$$x^4+bx+c=x^4+(-p^2+q+r)x^2-p(q-r)x+qr$$

$(*)$ は x に関する恒等式であるから，同じ次数の項の係数を比較して

$$\begin{cases} -p^2+q+r=0 & \cdots ① \\ -p(q-r)=b & \cdots ② \\ qr=c & \cdots ③ \end{cases}$$

$p\neq 0$ のとき，①，② より

$$q+r=p^2,\quad q-r=-\frac{b}{p}$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{q=\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{b}{p}\right),\quad r=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{b}{p}\right)}$

(2) (1) の結果を ③ に代入すると

$$c=\frac{1}{4}\left(p^4-\frac{b^2}{p^2}\right)\quad \text{ゆえに}\quad p^6-4cp^2-b^2=0$$

上の第 2 式に $b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$ を代入すると

$$\begin{aligned} p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2&=0 \\ p^6+\{(a+2)^2-(a^2+1)\}(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2&=0 \\ p^6-(a^2+1)^2p^2+(a^2+1)(a+2)^2\{p^2-(a^2+1)\}&=0 \\ p^2\{p^2+(a^2+1)\}\{p^2-(a^2+1)\}& \\ +(a^2+1)(a+2)^2\{p^2-(a^2+1)\}&=0 \\ \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}&=0 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{f(t)=t^2+1,\quad g(t)=(t^2+1)(t+2)^2}$

別解　(A)　$p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2$ が

$$\text{(B)}\quad \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}$$

であるから，p に関する定数項と 2 次の項の係数を比較して

$$\begin{cases} -(a^2+1)g(a)=-(a^2+1)^2(a+2)^2 \\ g(a)-(a^2+1)f(a)=(4a+3)(a^2+1) \end{cases}$$

第 1 式から　　$g(a)=(a^2+1)(a+2)^2$

これを第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} (a^2+1)(a+2)^2-(a^2+1)f(a)&=(4a+3)(a^2+1) \\ (a+2)^2-f(a)&=4a+3 \\ f(a)&=a^2+1 \end{aligned}$$

逆に，$f(a)=a^2+1$，$g(a)=(a^2+1)(a+2)^2$ を (B) に代入して展開すると，(A) を得る．よって，$\boldsymbol{f(t)=t^2+1}$，$\boldsymbol{g(t)=(t^2+1)(t+2)^2}$

(3) $b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$

(i) $p=0$ のとき，①〜③ により

$$q+r=0,\quad (a^2+1)(a+2)=0,\quad qr=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

上の第 2 式から　$a=-2$　これを第 3 式に代入して　$qr=\dfrac{25}{4}$

$q,\ r$ は 2 次方程式 $x^2+\dfrac{25}{4}=0$ の解で，実数解を持たず，不適.

(ii) $p\neq 0$ のとき，(2) の結果から

$$(**)\quad \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$$

を満たす p である．(**) において

$$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0$$

であるから，$p^2-(a^2+1)=0$　ゆえに　$p^2=a^2+1$

(*) より，p は有理数で，$p=\dfrac{k}{l}$ とすると ($k,\ l$ は互いに素)

$$\frac{k^2}{l^2}=a^2+1$$

右辺は整数であるから，$l=1$ となり，p は整数.

$$p^2-a^2=1\quad (p+a)(p-a)=1$$

したがって　$\begin{cases} p+a=1 \\ p-a=1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} p+a=-1 \\ p-a=-1 \end{cases}$

これを解いて　$(p,\ a)=(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$

よって，求める a の値は　$\boldsymbol{a=0}$　■

3.8　2022年(150分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $f(x)$ は区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ．

(2) $f(x)$ の区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = {a_n}^2 + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 正の整数 n が3の倍数のとき，a_n は5の倍数となることを示せ．

(2) k，n を正の整数とする．a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k，n を用いて表せ．

(3) a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ．

3　O を原点とする座標平面上で考える．座標平面上の 2 点 S$(x_1,\ y_1)$，T$(x_2,\ y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する．

不等式

$$0 \leqq x \leqq 3, \quad 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 A(3, 0)，B(3, 3) を考える．さらに，次の条件 (i)，(ii) をともに満たす点 P をとる．

(i) 点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある．

(ii) 点 P は，3 点 O，A，B のいずれからも十分離れている．

点 P の x 座標を a とする．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 次の条件 (iii)，(iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ．

(iii) 点 Q は領域 D の点である．

(iv) 点 Q は，4 点 O，A，B，P のいずれからも十分離れている．

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする．(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

4　座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 - x$$

を考える．

(1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ．

(i) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する．

(2) 次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(ii) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 ℓ と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する．

$\boxed{5}$ 座標空間内の点 A(0, 0, 2) と点 B(1, 0, 1) を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする．S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が PQ $=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

$\boxed{6}$ O を原点とする座標平面上で考える．0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\vec{v}_k$ を

$$\vec{v}_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める．投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0, X_1, $\mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_N$ を以下の規則 (i)，(ii) に従って定める．

(i) X_0 は O にある．

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする．X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める．

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \vec{v}_k$$

  により X_n を定める．ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする．

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める．

(1) $N=8$ とする．X_8 が O にある確率を求めよ．

(2) $N=200$ とする．X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく．ただし $0 \leqq r \leqq 200$ である．p_r を求めよ．また p_r が最大となる r の値を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \displaystyle\int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt$ を微分すると

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -(\sin x)\log(\cos x) + \cos x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} + \sin x + (\cos x)\log(\cos x) \\
&= (\cos x - \sin x)\log(\cos x) = \cos x(1 - \tan x)\log(\cos x)
\end{aligned}
$$

したがって，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において最小値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をとる．

(2) (1) の結果から，最小値は

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t)'\log(\cos t)\,dt \\
=&\Big[\,(\sin t)\log(\cos t)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \cdot \frac{-\sin t}{\cos t}\,dt \\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos t} - \cos t\right)dt \\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} + \left[\,\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t\,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} + \log(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

よって，求める最小値は

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} + \log(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \boldsymbol{\log(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(\log\sqrt{2}+1)}
\end{aligned}
$$

補足 $u=\sin t$ とおくと，$\dfrac{du}{dt}=\cos t$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos t}\,dt &= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C\end{aligned}$$

上式と同様に次式が利用できる．

$$\begin{aligned}\int (\cos t)\log(\cos t)\,dt &= \frac{1}{2}\int \log(1-u^2)\,du \\ &= \frac{1}{2}u\log(1-u^2) - \frac{1}{2}\int u\cdot\frac{-2u}{1-u^2}\,du \\ &= \frac{1}{2}u\log(1-u^2) + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}-2\right)du \\ &= \frac{1}{2}u\log(1-u^2) + \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - u + C \\ &= (\sin t)\log|\cos t| + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t + C\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt = (\sin x)\log|\cos x| + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \sin x$$

これから，$f(x)$ は $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}f(x) &= (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt \\ &= (\cos x)\log(\cos x) - \cos x \\ &\qquad + (\sin x)\log(\cos x) + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \sin x \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + (\sin x + \cos x)\{\log(\cos x) - 1\}\end{aligned}$$

よって，最小値は　$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \log(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(\log\sqrt{2}+1)$ ■

2 (1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = {a_n}^2 + 1$ より

$$a_2 = {a_1}^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2,$$
$$a_3 = {a_2}^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$b = a^2 + 1$，$c = b^2 + 1$，$d = c^2 + 1$ とおくと，$a \equiv 0 \pmod 5$ のとき

$$\begin{aligned} b &= a^2 + 1 \equiv 0^2 + 1 \equiv 1 && \pmod 5 \\ c &= b^2 + 1 \equiv 1^2 + 1 \equiv 2 && \pmod 5 \\ d &= c^2 + 1 \equiv 2^2 + 1 \equiv 0 && \pmod 5 \end{aligned}$$

上式より，$a_3 \equiv 0 \pmod 5$ であるから，$a_6 \equiv 0 \pmod 5$
したがって，順次，a_3，a_6，a_9，$\cdots$ は 5 の倍数となる．
よって，正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となる．

(2) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = {a_n}^2 + 1$ より　$a_n \geqq 1$
さらに，$a_{n+1} - a_n = a_n(a_n - 1) + 1 > 0$ より　$a_n < a_{n+1}$
$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{k-1} < a_k$ より，a_1，a_2，$a_3, \cdots$，a_{k-1} を a_k で割った余りは，それぞれ，a_1，a_2，$a_3, \cdots$，a_{k-1} である．
$l = 1, 2, 3, \cdots, k$ について，

$$(*) \quad a_{k+l} \equiv a_l \pmod{a_k}$$

が成立することを示す．

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= {a_k}^2 + 1 \equiv 0^2 + 1 = a_1 && \pmod{a_k} \\ a_{k+2} &= {a_{k+1}}^2 + 1 \equiv {a_1}^2 + 1 = a_2 && \pmod{a_k} \\ a_{k+3} &= {a_{k+2}}^2 + 1 \equiv {a_2}^2 + 1 = a_3 && \pmod{a_k} \\ &\ \vdots \\ a_{2k-1} &= {a_{k+(k-2)}}^2 + 1 \equiv {a_{k-2}}^2 + 1 = a_{k-1} && \pmod{a_k} \\ a_{2k} &= {a_{k+(k-1)}}^2 + 1 \equiv {a_{k-1}}^2 + 1 = a_k \equiv 0 && \pmod{a_k} \end{aligned}$$

これから，$(*)$ が成立し，特に $a_{k+l} \equiv 0 \pmod{a_k}$ となるのは，$l = k$ のときに限る．したがって，a_k の倍数は

$$a_k,\ a_{2k},\ a_{3k}, \cdots$$

よって，a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件は　$\boldsymbol{n}$ **が** $\boldsymbol{k}$ **の倍数**

補足　k の値について実験を行い，結論を予想する．整数 $p,\ q$ について，p が q の倍数 (q が p の約数) であることを，$q \mid p$ と書く．

$b = a^2 + 1$，$c = b^2 + 1$，$d = c^2 + 1$，$e = d^2 + 1$ とおく．

(i) $k = 1$ のとき，$a_1 = 1$ であるから，正の整数 n について　$a_1 \mid a_n$

(ii) $k = 2$ のとき，$a_2 = 2$．$a \equiv 0 \pmod 2$ とすると

$$\begin{aligned} b &= a^2 + 1 \equiv 0^2 + 1 \equiv 1 && \pmod 2 \\ c &= b^2 + 1 \equiv 1^2 + 1 \equiv 0 && \pmod 2 \end{aligned}$$

したがって，順次，$a_2,\ a_4,\ a_6, \cdots$ は a_2 の倍数である．
よって，n が 2 の倍数のとき　$a_2 \mid a_n$

(iii) $k = 3$ のとき，(1) の結論から，n が 3 の倍数のとき　$a_3 \mid a_n$

(iv) $k = 4$ のとき，$a_4 = {a_3}^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$．$a \equiv 0 \pmod{26}$ とすると

$$\begin{aligned} b &= a^2 + 1 \equiv 0^2 + 1 \equiv 1 && \pmod{26} \\ c &= b^2 + 1 \equiv 1^2 + 1 \equiv 2 && \pmod{26} \\ d &= c^2 + 1 \equiv 2^2 + 1 \equiv 5 && \pmod{26} \\ e &= d^2 + 1 \equiv 5^2 + 1 \equiv 0 && \pmod{26} \end{aligned}$$

したがって，順次，$a_4,\ a_8,\ a_{12}, \cdots$ は a_4 の倍数である．
よって，n が 4 の倍数のとき　$a_4 \mid a_n$

(i)〜(iv) から，「$k \mid n \iff a_k \mid a_n$」が予想される．

(3) (2) の結論から，a_{4k} は a_k の倍数．$k=2022$ とおくと，$8091=4k+3$ より

$$\begin{aligned} a_{4k+1} &= {a_{4k}}^2+1 \equiv 0^2+1=1 && (\text{mod } a_k)\\ a_{4k+2} &= {a_{4k+1}}^2+1 \equiv 1^2+1=2 && (\text{mod } a_k)\\ a_{4k+3} &= {a_{4k+2}}^2+1 \equiv 2^2+1=5 && (\text{mod } a_k)\\ {a_{4k+3}}^2 &\equiv 5^2=25 && (\text{mod } a_k) \end{aligned}$$

ユークリッドの互除法により

(∗∗)　${a_{4k+3}}^2$ と a_k の最大公約数は，a_k と 25 の最大公約数．

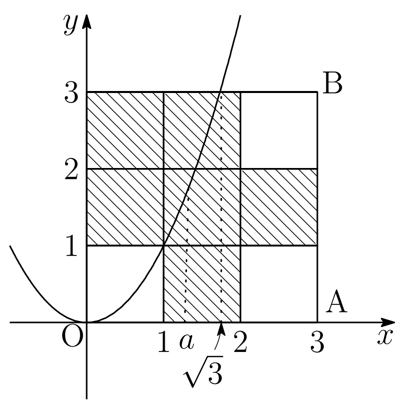
$b=a^2+1$，$c=b^2+1$，$d=c^2+1$，$e=d^2+1$ とおくと，$a\equiv 1 \pmod{25}$ のとき

$$\begin{aligned} b &= a^2+1 \equiv 0^2+1 \equiv 1 && (\text{mod } 25)\\ c &= b^2+1 \equiv 1^2+1 \equiv 2 && (\text{mod } 25)\\ d &= c^2+1 \equiv 2^2+1 \equiv 5 && (\text{mod } 25)\\ e &= d^2+1 \equiv 5^2+1 \equiv 1 && (\text{mod } 25) \end{aligned}$$

$a_1=1$ より，k が 3 の倍数のとき　$a_k \equiv 5 \pmod{25}$
これから a_k は 5 で割り切れるが，25 で割り切れない．
(∗∗) より，求める最大公約数は　**5**　■

3 (1) D で (ii) を満たす点 P の表す領域は図の斜線部分である．放物線上の点 $(a,\ a^2)$ がこの領域にあるから

$$\boldsymbol{1 \leqq a \leqq \sqrt{3}}$$



(2) (1) の結果に注意して，$a^2+1 \leqq 3$ および $3 \leqq a^2+1$，すなわち，$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ および $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ で場合分けを行う．

(i) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

$1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 3$ における点 Q の領域の面積は　$(3-2)\cdot 1 = 1$

$0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2$ における点 Q の領域の領域は　$(3-2)\cdot 1 = 1$

$0 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 3$ における点 Q の領域の領域は

$$1 - \{1-(a-1)\}\{(a^2+1)-2\} = a^3 - 2a^2 - a + 3$$

したがって　$f(a) = 1 + 1 + (a^3 - 2a^2 - a + 3) = a^3 - 2a^2 - a + 5$

(ii) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき

$1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1$ における点 Q の領域の面積は　1

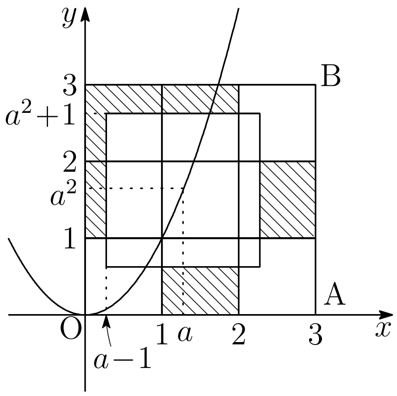
$0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2$ における点 Q の領域の面積は

$$3\cdot 1 - 2\{2-(a^2-1)\} = 2a^2 - 3$$

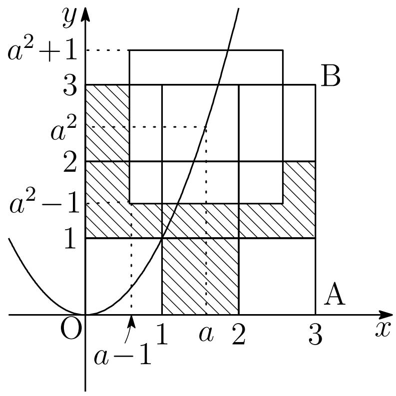
$0 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 3$ における点 Q の領域の面積は　$1(a-1) = a-1$

したがって　$f(a) = 1 + (2a^2-3) + (a-1) = 2a^2 + a - 3$

i) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$



ii) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$



よって　$\boldsymbol{f(a) = \begin{cases} a^3 - 2a^2 - a + 5 & (1 \leqq a \leqq \sqrt{2}) \\ 2a^2 + a - 3 & (\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}) \end{cases}}$

(3) $f(a)$ は $1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ で連続であり

$$f'(a) = \begin{cases} 3a^2 - 4a - 1 = 3\left(a - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{7}{3} & (1 < a < \sqrt{2}) \\ 4a + 1 & (\sqrt{2} < a < \sqrt{3}) \end{cases}$$

$1 < a < \sqrt{2}$ で $f'(a) < 5 - 4\sqrt{2} < 0$，$\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$ で $f'(a) > 0$．

よって，$f(a)$ を最小にする a の値は　　$\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$　■

4 (1) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通り，傾き m の直線を ℓ とすると，その方程式は

$$y-b=m(x-a)\quad すなわち\quad y=mx-ma+b$$

$C: y=x^3-x$ と $\ell: y=mx-ma+b$ の方程式から，y を消去すると

$$x^3-x=mx-ma+b\quad ゆえに\quad x^3-(m+1)x+ma-b=0 \qquad (*)$$

$f(x)=x^3-(m+1)x+ma-b$ とおくと，ℓ と C が異なる 3 点で交わるとき，3 次関数 $f(x)$ は極値をもち，極値を与える x の値は 2 次方程式 $f'(x)=0$ の異なる 2 つの実数解であるから

$$3x^2-(m+1)=0\quad これを解いて\quad x=\pm\sqrt{\frac{m+1}{3}}\quad (m>-1)$$

ここで，$k=\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\cdots$ ① とおくと $(k>0)$

$$f(x)=x^3-3k^2x+(3k^2-1)a-b$$

極大値 $f(-k)$，極小値 $f(k)$ は

$$f(-k)=2k^3+(3k^2-1)a-b,\quad f(k)=-2k^3+(3k^2-1)a-b$$

上の 2 式から，十分大きい k の値に対して

$$\begin{aligned} f(-k)f(k)&=\{(3k^2-1)a-b\}^2-4k^6\\ &=k^6\left\{\left(\frac{3a}{k}-\frac{a+b}{k^3}\right)^2-4\right\}<0 \end{aligned}$$

① より，ℓ の傾き m が十分に大きいとき，条件 (i) を満たす．

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると $(\alpha<\beta<\gamma)$，点 P が条件 (ii) を満たすとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\beta^\gamma\{-f(x)\}\,dx\quad ゆえに\quad \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=0 \qquad (**)$$

このとき，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ であるから

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}(x-\gamma)\\ &=-(x-\alpha)^2(\gamma-x)+(\beta-\alpha)(x-\alpha)(\gamma-x) \end{aligned}$$

したがって[7]

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx &= -\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)^2(\gamma-x)\,dx + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(\gamma-x)\,dx \\ &= -\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^4 + (\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3\{-(\gamma-\alpha)+2(\beta-\alpha)\} \\ &= \frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3(-\alpha+2\beta-\gamma)\end{aligned}$$

$(**)$ より　$-\alpha+2\beta-\gamma=0 \quad \cdots ②$

また，3次方程式 $(*)$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-m-1, \quad \alpha\beta\gamma=-ma+b$$

上の3式と ② から $(\alpha<\beta<\gamma)$

$$-\alpha=\gamma>0, \quad \beta=0, \quad m=\gamma^2-1, \quad -ma+b=0$$

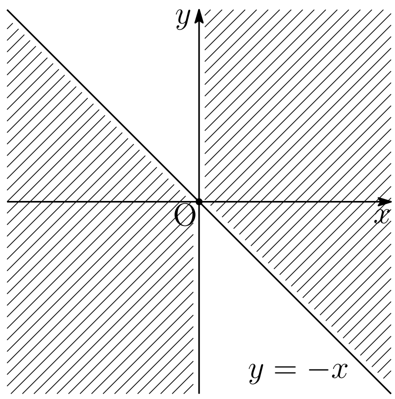
これから，直線 ℓ の方程式は　$y=(\gamma^2-1)x \quad (\gamma>0)$

(i) $x=0$ のとき　$y=0$

(ii) $x>0$ のとき，直線 $y=-x$ の上側で境界線を含まない．

(iii) $x<0$ のとき，直線 $y=-x$ の下側で境界線を含まない．

以上の結果から，点 P の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．ただし，原点を含む．



■

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf (p.8 を参照)

5 P が線分 AB 上にあるとき，P$(2-2t,\ 0,\ 2t)$ とする $\left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$.

P から xy 平面に垂線 PR を引くと　R$(2-2t,\ 0,\ 0)$

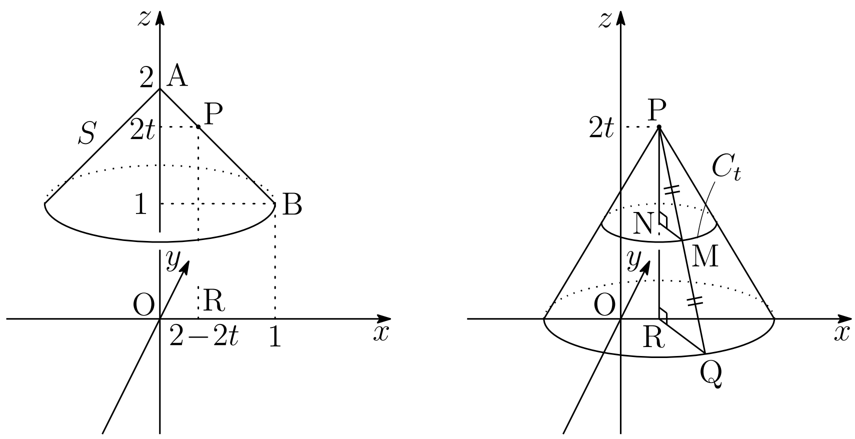
直角三角形 PQR において，PQ $=2$，PR $=2t$ であるから

$$\mathrm{QR}=\sqrt{\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2}=\sqrt{2^2-(2t)^2}=2\sqrt{1-t^2}$$

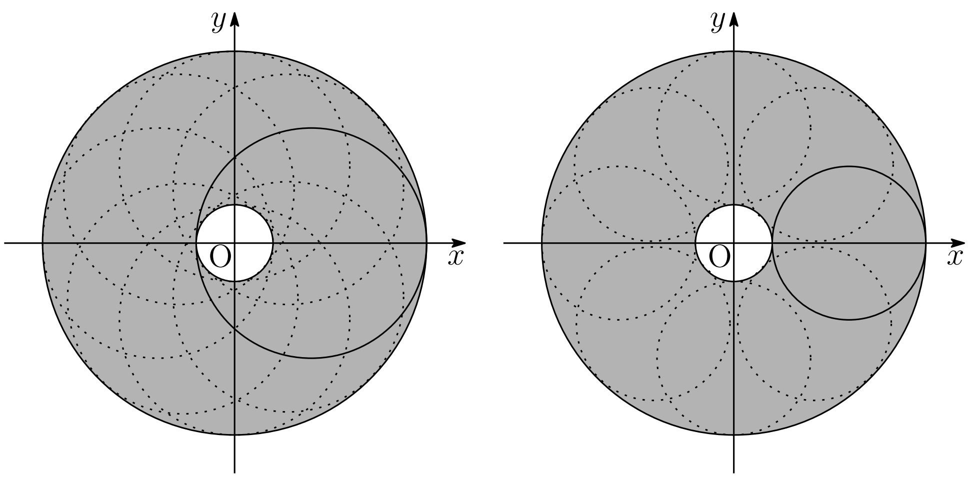
PR の中点を N とすると，中点連結定理により

$$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{QR}=\sqrt{1-t^2}$$

したがって，平面 $z=t$ における中心 $(2-2t,\ 0,\ t)$，半径 $\sqrt{1-t^2}$ の円を C_t とすると，M は C_t 上にある．



C_t の x 座標 $2-2t$ および半径 $\sqrt{1-t^2}$ の大小関係により，点 P が S 上にあるから，点 M が通過する範囲は，次の領域 (C_t の包絡線) を描く．



$2-2t<\sqrt{1-t^2}$　　　　$2-2t>\sqrt{1-t^2}$

K の $z=t$ における断面積を $S(t)$ とすると $\left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi\left\{(2-2t)+\sqrt{1-t^2}\right\}^2 - \pi\left|(2-2t)-\sqrt{1-t^2}\right|^2 \\ &= 4\pi(2-2t)\sqrt{1-t^2} \\ &= 8\pi\sqrt{1-t^2} - 8\pi t\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

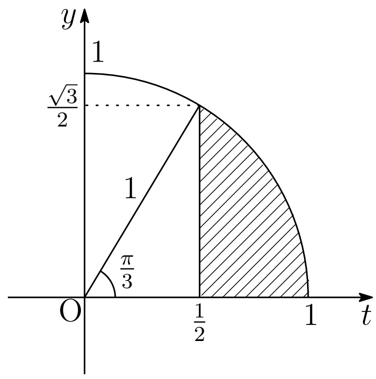
K の体積を V とすると

$$\frac{V}{8\pi} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{S(t)}{8\pi}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt \qquad (*)$$

ここで

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt$$

は，右の図の斜線部分の面積と等しいから



$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

また　　$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \cdots ②$

①，② を $(*)$ に代入すると

$$\frac{V}{8\pi} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって　　$V = 8\pi\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\pi\left(\dfrac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)}$ ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\vec{v}_k = \left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ より

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_3 = \vec{v}_6 = \cdots,\quad \vec{v}_1 = \vec{v}_4 = \vec{v}_7 = \cdots,\quad \vec{v}_2 = \vec{v}_5 = \vec{v}_8 = \cdots$$

$\vec{u}_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ を次のように定める．

$$\vec{u}_j = \begin{cases} \vec{v}_k & (j\ \text{回目で表が出て},k\ \text{は}\ j\ \text{回目までに裏が出た回数}) \\ \vec{0} & (j\ \text{回目で裏が出る}) \end{cases}$$

与えられた漸化式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \sum_{j=1}^{n} \vec{u}_j$$

$\vec{u}_j \in \left\{\vec{0},\ \vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2\right\}$ であり，上式の右辺の $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ の個数をそれぞれ a, b, c とすると，X_n が O にあるとき，$\vec{v}_0 = -(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ により

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} &= a\vec{v}_0 + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 = -a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 \\ &= (b-a)\vec{v}_1 + (c-a)\vec{v}_2 = \vec{0}\end{aligned}$$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ は，1 次独立であるから

$$b - a = c - a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = b = c \tag{$*$}$$

このとき，$a + b + c \leqq 8$ であるから　$a = b = c = 0,\ 1,\ 2$

(i) $a = b = c = 0$ のとき，8 回とも裏が出る確率であるから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

(ii) $a = b = c = 1$ のとき，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を α_k とすると $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}_8} &= \alpha_0\vec{v}_0 + \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \alpha_4\vec{v}_4 + \alpha_5\vec{v}_5 \\ &= (\alpha_0 + \alpha_3)\vec{v}_0 + (\alpha_1 + \alpha_4)\vec{v}_1 + (\alpha_2 + \alpha_5)\vec{v}_2 = \vec{0}\end{aligned}$$

$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3$，$\alpha_0 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_5$ より

$$\alpha_0 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_5 = 1$$

このときの確率は　$2^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

(iii) $a=b=c=2$ のとき，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を β_k とすると $(k=0,1,2)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_8}=\beta_0\vec{v}_0+\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2=\vec{0}$$

$\beta_0+\beta_1+\beta_2=6$，$\beta_0=\beta_1=\beta_2$ より

$$\beta_0=\beta_1=\beta_2=2$$

このときの確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

(i)〜(iii) より，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8+2^3\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^8=10\left(\frac{1}{2}\right)^8=\mathbf{\frac{5}{128}}$$

(2) $(*)$ より，X_n が O にあるとき，表の出た回数 $r=a+b+c$ について，$a=b=c$ であるから，r は 3 の倍数である．まず

$$p_r=0 \quad (r\not\equiv 0 \pmod 3)$$

$r\equiv 0 \pmod 3$，すなわち，$r=3s$ のとき $(s=0,1,2,\cdots,66)$，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を t_k とすると

$$\begin{aligned}t_0+t_3+t_6+\cdots+t_{198-3s}&=s\\t_1+t_4+t_7+\cdots+t_{199-3s}&=s\\t_2+t_5+t_8+\cdots+t_{200-3s}&=s\end{aligned}$$

上の 3 式を満たす t_k の組は，すべて

$${}_{67-s}\mathrm{H}_s={}_{(67-s)+s-1}\mathrm{C}_s={}_{66}\mathrm{C}_s$$

このとき　$$p_{3s}=({}_{66}\mathrm{C}_s)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{200}=\frac{({}_{66}\mathrm{C}_s)^3}{2^{200}} \qquad (**)$$

よって　$$\boldsymbol{p_r=\begin{cases}\mathbf{0} & (r\not\equiv 0)\\ \dfrac{\left({}_{66}\mathrm{C}_{\frac{r}{3}}\right)^3}{2^{200}} & (r\equiv 0)\end{cases} \pmod 3}$$

p_r が最大となるのは，(**) より，${}_{66}\mathrm{C}_s$ が最大となるときである．

$$\frac{{}_{66}\mathrm{C}_{s+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_s} = \frac{66!}{(s+1)!(65-s)!} \cdot \frac{s!(66-s)!}{66!} = \frac{66-s}{s+1}$$

ゆえに　$\dfrac{{}_{66}\mathrm{C}_{s+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_s} - 1 = \dfrac{65-2s}{s+1}$

したがって

$${}_{66}\mathrm{C}_0 < {}_{66}\mathrm{C}_1 < \cdots < {}_{66}\mathrm{C}_{32} < {}_{66}\mathrm{C}_{33} > {}_{66}\mathrm{C}_{34} > \cdots > {}_{66}\mathrm{C}_{66}$$

よって，$s = 33$，すなわち，$\boldsymbol{r = 99}$ のとき p_r は最大となる．　■

3.9 2023年(150分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 (1) 正の整数 k に対し，

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく．次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数 n に対し，

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ．

2 黒玉3個，赤玉4個，白玉5個が入っている袋から玉を1個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に12個すべて並べる．ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする．

(1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ．

(2) どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ．

3 a を実数とし，座標平面上の点 $(0,\ a)$ を中心とする半径1の円の周を C とする．

(1) C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ．

(2) a は(1)で求めた範囲にあるとする．C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする．S 上の点Pに対し，点Pでの C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_P とする．$L_Q = L_R$ となる S 上の相異なる2点Q，Rが存在するような a の範囲を求めよ．

4 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，B(1, 1, 1)，C(1, 2, 3) を考える．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ．

(2) 点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える．S が三角形 OHB と共有点をもつような r の範囲を求めよ．ただし，三角形 OHB は 3 点 O，H，B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする．

5 整式 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を考える．

(1) $g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく．$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ．

(2) a, b を実数とし，$h(x) = x^2 + ax + b$ とおく．$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく．$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ．

6 O を原点とする座標空間において，不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す立方体を考える．その立方体の表面のうち，$z < 1$ を満たす部分を S とする．

以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める．

(1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ．

(i) $\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ．

(2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii)，(iv)，(v) をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ．必要ならば，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい．

(iii) $\mathrm{ON} + \mathrm{NP} \leqq \sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点を持たない．

(v) 線分 NP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x=\sqrt{t}$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

x	$\sqrt{k\pi} \longrightarrow \sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi \longrightarrow (k+1)\pi$

$$A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ において

$$\frac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}} \leqq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}$$

したがって

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\,dt \leqq A_k \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}\,dt$$

$t=k\pi+u$ とおくと $\dfrac{dt}{du}=1$

$$\int_0^{\pi}\frac{|\sin(k\pi+u)|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\,du \leqq A_k \leqq \int_0^{\pi}\frac{|\sin(k\pi+u)|}{2\sqrt{k\pi}}\,du$$
$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_0^{\pi}|\sin u|\,du \leqq A_k \leqq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^{\pi}|\sin u|\,du$$

$\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin u|\,du=\int_0^{\pi}\sin u\,du=\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi}=2$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) $B_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから，(1) の結果より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \lim_{n\to\infty} B_n \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \qquad (*)$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[\ 2\sqrt{x}\ \Big]_1^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

これらを $(*)$ に代入すると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \boldsymbol{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個の 12 個の玉の並べ方の総数を N とすると

$$N = \frac{12!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

黒玉 3 個と，白玉 5 個の 8 個を並べ，その 8 個の玉の両側と間の 9 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を A とすると

$$A = \frac{8!}{3!5!} \times \frac{9!}{4!5!} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率 p は

$$p = \frac{A}{N} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \Big/ \frac{12!}{3!4!5!} = \frac{8!}{5!} \cdot \frac{9!}{12!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \mathbf{\frac{14}{55}}$$

(2) 黒玉 3 個のうち 2 個をひとまとめにして，$\boxed{\text{黒黒}}$，黒玉 1 個，白玉 5 個を並べ，その 7 個の両側と間の 8 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を B とすると

$$B = \frac{7!}{1!1!5!} \times \frac{8!}{4!4!} = \frac{7!8!}{4!4!5!} \quad (\text{通り})$$

この中には，$\boxed{\text{黒黒}}$黒，または，黒$\boxed{\text{黒黒}}$のように，連続して並ぶ黒玉 3 個が重複する場合がある．黒玉 3 個をひとまとめにして，$\boxed{\text{黒黒黒}}$，白玉 5 個を並べ，その 6 個の両側と間の 7 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を C とすると

$$C = \frac{6!}{1!5!} \times \frac{7!}{4!3!} = \frac{6!7!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

どの赤玉も隣り合わないとき，隣り合う黒玉が存在する条件付き確率は

$$\begin{aligned}\frac{B-C}{A} &= \left(\frac{7!8!}{4!4!5!} - \frac{6!7!}{3!4!5!}\right) \cdot \frac{3!4!5!5!}{8!9!} \\ &= \left(\frac{7!8!}{4!} - \frac{6!7!}{3!}\right) \cdot \frac{3!5!}{8!9!} \\ &= (8 \cdot 7 - 4)\frac{6!7!}{4!} \cdot \frac{3!5!}{8!9!} \\ &= 52 \cdot \frac{6!}{8!} \cdot \frac{7!}{9!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot 3! = \frac{65}{168}\end{aligned}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから $1 - \dfrac{65}{168} = \mathbf{\dfrac{103}{168}}$ ■

3 (1) C 上の点 $(0,\ a-1)$ が $y > x^2$ を含まれるから，$a-1>0$ は必要条件．
放物線 $y=x^2$ 上の点 $(u,\ u^2)$ と点 $(0,\ a)$ の距離を d とすると

$$d^2 = u^2 + (u^2-a)^2 = \left(u^2 - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + \frac{4a-1}{4}$$

d^2 は $u = \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{4a-1}{4}$ をとる．

条件をみたすとき，$d>1$，すなわち，$d^2>1$ であるから

$$\frac{4a-1}{4} > 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a > \frac{5}{4}}$$

(2) $\mathrm{A}(0,\ a)$ とし，S 上の点 P における接線の偏角を θ とすると $(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2})$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin\theta, -\cos\theta),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (\sin\theta,\ a - \cos\theta)$$

$C: x^2 + (y-a)^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(\sin\theta,\ a-\cos\theta)$ における接線の方程式は

$$x\sin\theta - (y-a)\cos\theta = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = x\tan\theta - \frac{1}{\cos\theta} + a$$

この直線と放物線 $y=x^2$ の方程式から y を消去し，整理すると

$$x^2 - x\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta} - a = 0$$

この方程式の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = \tan\theta, \quad \alpha\beta = \frac{1}{\cos\theta} - a$$

2 点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ を結ぶ線分の長さを L とすると

$$\begin{aligned}
L^2 &= (\beta-\alpha)^2 + (\beta^2-\alpha^2)^2 = (\beta-\alpha)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\} \\
&= \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}\{1+(\alpha+\beta)^2\} \\
&= \left(\tan^2\theta - \frac{4}{\cos\theta} + 4a\right)(1+\tan^2\theta) \\
&= \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 - \frac{4}{\cos\theta} + 4a\right)\frac{1}{\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

$t = \dfrac{1}{\cos\theta}$，$f(t) = L^2$ とおくと

$$f(t) = t^4 - 4t^3 + (4a-1)t^2 \qquad (t \geqq 1)$$

$f(t)$ の第1次導関数と第2次導関数を求めると

$$f'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 2(4a-1)t$$
$$f''(t) = 12t^2 - 24t + 2(4a-1)$$

$t \geqq 1$ に注意して，$f''(t) = 0$ を解くと　$t = 1 + \sqrt{\dfrac{7-4a}{6}}$

$f'(t)$ を $f''(t)$ で割って，$k = \sqrt{\dfrac{7-4a}{6}}$ とおくと

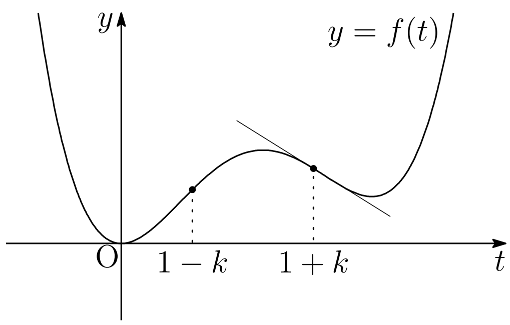
$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{3}(t-1)f''(t) + \frac{4}{3}(4a-7)t + \frac{2}{3}(4a-1) \\ &= \frac{1}{3}(t-1)f''(t) - 8k^2t - 4k^2 + 4 \end{aligned}$$

$f'(1+k) < 0$ を満たせばよい．$f''(1+k) = 0$ より

$$-8k^2(1+k) - 4k^2 + 4 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (k+1)^2(2k-1) > 0$$

これを解いて　$k > \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\sqrt{\dfrac{7-4a}{6}} > \dfrac{1}{2}$　すなわち　$a < \dfrac{11}{8}$

これと (1) の結果により　$\boldsymbol{\dfrac{5}{4} < a < \dfrac{11}{8}}$



参考　3次関数 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標を c とする．$f'(c)$ の符号と $f(x)$ の x^3 の係数の符号が異なることは $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件．■

4　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 0,\ 0)$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1,\ 1)$ と垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{v}=(0,-1,\ 1)$$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{v}$ であるから (k は定数)，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$ より

$$k\{0\cdot1+(-1)\cdot2+1\cdot3\}=1 \quad ゆえに \quad k=1$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{v}=(0,-1,\ 1)$　よって　$\mathbf{P(0,-1,\ 1)}$

(2) H は直線 AB 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}) \qquad (*)\\&=\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=(2-t,\ t,\ t)\cdot(-1,\ 1,\ 1)=3t-2=0\end{aligned}$$

これを解いて　$t=\dfrac{2}{3}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

(3) 空間の点 X を平面 OAB に垂線を下ろした点を $f(X)$ とすると

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \vec{0}, \quad f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

f は線形変換であるから，f による Q の像を R とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = f(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \frac{3}{4}f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + f(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$(*)$ により，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，R から線分 OH に垂線 RT を引くと

$$\mathrm{RT} = \frac{3}{4}\mathrm{AH} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{AB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \frac{1}{2}|(-1,\ 1,\ 1)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = \frac{3}{2}$

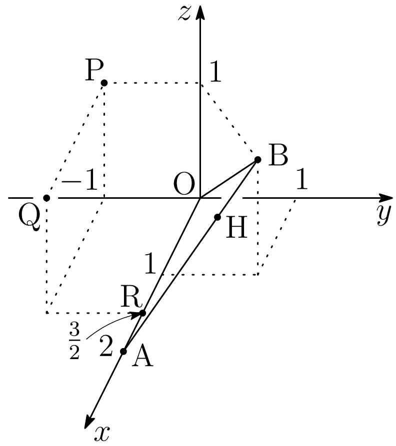
$$\overrightarrow{\mathrm{RB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1,\ 1,\ 1) - \left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0\right), = \left(-\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$$

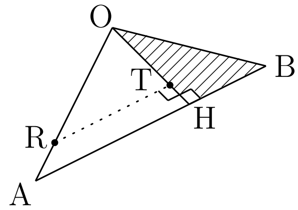
$$|\overrightarrow{\mathrm{RB}}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{2}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |(0, -1,\ 1)| = \sqrt{2}$ であるから，求める r の値の範囲は

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \leqq r \leqq \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

よって　　$\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2} \leqq r \leqq \frac{\sqrt{17}}{2}}$





5　(1) $g(x)-r(x)$ は $f(x)$ を因数に持つ．

$$g(x)^7-r(x)^7=\{g(x)-r(x)\}\sum_{k=1}^{7}g(x)^{7-k}r(x)^{k-1}$$

したがって，題意は成立する．

別解 $g(x)\equiv r(x)\pmod{f(x)}$ のとき　$g(x)^7\equiv r(x)^7\pmod{f(x)}$
したがって，題意は成立する．

(2) $h(x)^7\equiv h_1(x),\ h_1(x)^7\equiv h(x)\pmod{f(x)}$ より

$$h(x)^{49}\equiv h_1(x)^7\equiv h(x)\quad ゆえに\quad h(x)\{h(x)^{48}-1\}\equiv 0\pmod{f(x)}$$

$A=h(x)$ とすると

$$\begin{aligned}A(A^{48}-1)&=A(A^{24}+1)(A^{12}+1)(A^6+1)(A^3+1)(A^3-1)\\&=A(A+1)(A-1)(A^{24}+1)(A^{12}+1)(A^6+1)\\&\qquad\times(A^2+A+1)(A^2-A+1)\end{aligned}$$

次の因数

$$\begin{aligned}&A^{24}+1>0,\quad A^{12}+1>0,\quad A^6+1>0,\\&A^2\pm A+1=\left(A\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\end{aligned}$$

は $x-1,\ x-2$ を因数に持たない (複号同順)．
したがって，$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ は $(x-1)^2(x-2)$ を因数にもつ．
$h(x),\ h(x)+1,\ h(x)-1$ のいずれかが $(x-1)(x-2)$ を因数にもつとき，x^2-3x+C (C は定数) は $x-1$ を因数に持たないので不適．
$h(x),\ h(x)+1,\ h(x)-1$ 中で $x-1,\ x-2$ を因数にもつものを次の 6 つの場合について調べる．

	$h(x)$	$h(x)+1$	$h(x)-1$	
①	$x-1$	$x-2$		$h(1)=0,\ h(2)=-1$
②	$x-1$		$x-2$	$h(1)=0,\ h(2)=1$
③	$x-2$	$x-1$		$h(2)=0,\ h(1)=-1$
④		$x-1$	$x-2$	$h(1)=-1,\ h(2)=1$
⑤	$x-2$		$x-1$	$h(2)=0,\ h(1)=1$
⑥		$x-2$	$x-1$	$h(2)=-1,\ h(1)=1$

$h(x)=x^2+ax+b$ であるから，①〜⑥ は次のようになる．

		$h(x)$	$h(x)+1$	$h(x)-1$
①	$a=-4,\ b=3$	$(x-1)(x-3)$	$(x-2)^2$	x^2-4x+2
②	$a=-2,\ b=1$	$(x-1)^2$	x^2-2x+2	$x(x-2)$
③	$a=-2,\ b=0$	$x(x-2)$	$(x-1)^2$	x^2-2x-1
④	$a=-1,\ b=-1$	x^2-x-1	$x(x-1)$	$(x+1)(x-2)$
⑤	$a=-4,\ b=4$	$(x-2)^2$	x^2-4x+5	$(x-1)(x-3)$
⑥	$a=-5,\ b=-5$	x^2-5x+5	$(x-2)(x-3)$	$(x-1)(x-4)$

$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ が $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ で割り切れるものは，② と ③ の場合であるから

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(-2,\ 1),\ (-2,\ 0)}$$

別解　$h(x)^{49}-h(x)$ は $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を因数にもつから

$$h(1)\{h(1)^{48}-1\}=0,\quad h'(1)\{49h(1)^{48}-1\}=0,\quad h(2)\{h(2)^{48}-1\}=0$$

上の第1式から $h(1)=0,\ \pm1$ であるから，第2式より　$h'(1)=0$
$h(x)=x^2+ax+b$ より，$h'(x)=2x+a$

$$h'(1)=2+a=0\quad ゆえに\quad a=-2$$

$h(x)=x^2-2x+b$ であるから，$h(2)=0,\pm1$ により　$b=0,\pm1$

(i)　$b=0$ のとき

$$h(x)=x(x-2),\quad h(x)+1=(x-1)^2,\quad h(x)-1=x^2-2x-1$$

(ii)　$b=1$ のとき

$$h(x)=(x-1)^2,\quad h(x)+1=x^2-2x+2,\quad h(x)-1=x(x-2)$$

(iii)　$b=-1$ のとき

$$h(x)=x^2-2x-1,\quad h(x)+1=x(x-2),\quad h(x)-1=x^2-2x-2$$

$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ が $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を因数に持つのは，(i) と (ii) の場合であるから

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(-2,\ 0),\ (-2,\ 1)}$$

■

6 (1) P が $z \leqq 1$ にあるとき，線分 OP の通過領域は　2^3

P が $z \geqq 1$ にあるとき，線分 OP の通過領域は　$\dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 - 2^3\right\}$

求める体積を V_1 とすると　$V_1 = 2^3 + \dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 - 2^3\right\} = \boldsymbol{\dfrac{20}{3} + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

(2) $\mathrm{G}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{H}(-1, -1,\ 1)$ とし，$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3,\ z \geqq 1$ の平面 OGH による断面積を S とすると，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ より

$$S = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2(2\alpha - \sin 2\alpha) = 3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = 3\alpha - \sqrt{2}$$

右下の図の斜線部分を y 軸の周りに回転させた立体の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \pi\int_{-1}^{1}\{t^2 - (\sqrt{2})^2\}\,dy = \pi\int_{-1}^{1}(1 - y^2)\,dy = \frac{4}{3}\pi$$

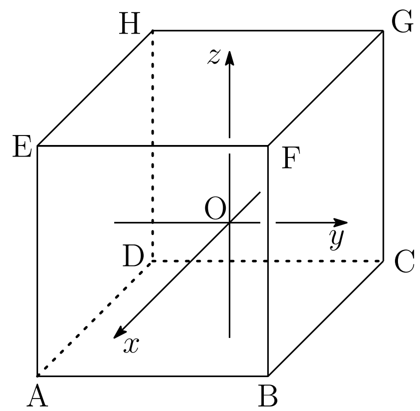
図の斜線部分の重心の y 軸からの距離を d とすると，パップス・ギュルダンの定理により

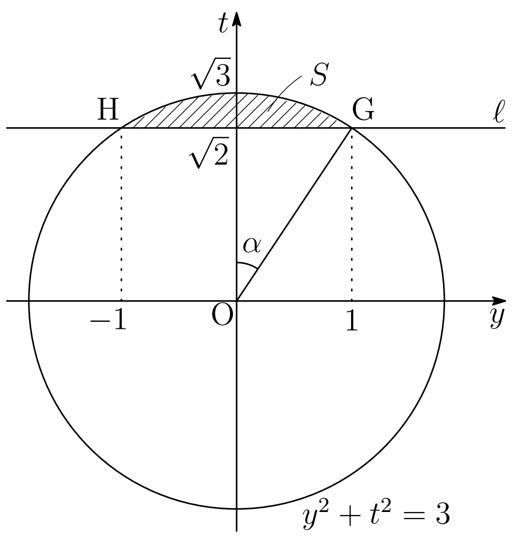
$$d = \frac{V_2}{2\pi S} = \frac{2}{3S}$$

斜線部分を $t = \sqrt{2}$ の周りに $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転させた立体の体積を V_3 とすると

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{3}{4}\pi(d - \sqrt{2})S = \frac{3}{4}\pi\left(\frac{2}{3S} - \sqrt{2}\right)S = \frac{\pi}{4}(2 - 3\sqrt{2}S) \\ &= \frac{\pi}{4}\{2 - 3\sqrt{2}(3\alpha - \sqrt{2})\} = \frac{\pi}{4}(8 - 9\sqrt{2}\alpha) \end{aligned}$$

よって，求める体積は　$V_1 + 4V_3 = \boldsymbol{\dfrac{20}{3} + \pi\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 8 - 9\sqrt{2}\alpha\right)}$ ■





3.10　2024年(150分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 座標空間内の点 $A(0, -1,\ 1)$ をとる．xy 平面上の点 P が次の条件 (i)，(ii)，(iii) をすべて満たすとする．

(i) P は原点 O と異なる．

(ii) $\angle \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii) $\angle \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ．

2 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ をみたす実数 α で，$f'(\tan\alpha) = 0$ となるものを求めよ．

(2) (1) で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．必要ならば，$0.69 < \log 2 < 0.7$ であることを用いてよい．

3 座標平面上を次の規則 (i)，(ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える．

(i) 最初に，P は点 $(2,\ 1)$ にいる．

(ii) ある時点で P が点 $(a,\ b)$ にいるとき，その 1 秒後には P は

- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=-x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点

にいる．

以下の問いに答えよ．ただし，(1) については，結論のみを書けばよい．

(1) P がとりうる点の座標をすべて求めよ．

(2) n を正の整数とする．最初から n 秒後に P が点 $(2,\ 1)$ にいる確率と，最初から n 秒後に P が点 $(-2,-1)$ にいる確率は等しいことを示せ．

(3) n を正の整数とする．最初から n 秒後に P が点 $(2,\ 1)$ にいる確率を求めよ．

4 $f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$ とおく．$0<t<4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y=f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心をもつ円を C_t とする．

(1) 円 C_t の中心の座標を $(c(t),\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく．$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ．

(2) 実数 a は $0<a<f(3)$ を満たすとする．円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0<t<4$ の範囲にいくつあるか．

5 座標空間内に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ をとり，D を線分 AC の中点とする．三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ．

6 2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数をもたない数を素数という．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=x^3+10x^2+20x$ とする．$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

(2) a，b を整数の定数とし，$g(x)=x^3+ax^2+bx$ とする．$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ P$(x,\ y,\ 0)$ とおく．条件 (i) より　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

条件 (ii) から

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \cos\angle\mathrm{AOP} \leqq \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2},$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} = \cos\angle\mathrm{OAP} \geqq \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

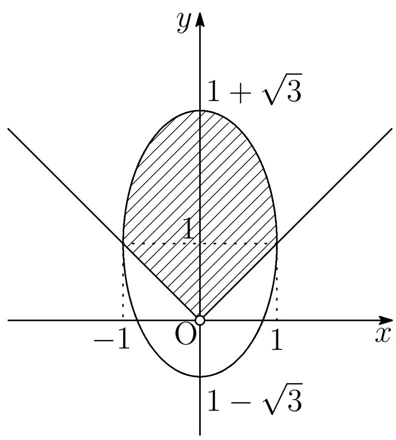
$$\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leqq -\frac{1}{2},\quad \frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

上式から，$y \geqq 0$ に注意して，整理すると

$$y \geqq |x|,\quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{3} \leqq 1$$

条件 (i) より　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$

P の取り得る範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，O は除く．



別解　P$(x,\ y,\ z)$ とおく．直交変換

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{Z}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

を行うと

$$x=X,\quad y=\frac{Y-Z}{\sqrt{2}},\quad z=\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$$

これから

$$X=x,\quad Y=\frac{y+z}{\sqrt{2}},\quad Z=\frac{-y+z}{\sqrt{2}} \tag{$*$}$$

A の XYZ-系における点を A$'$ とすると　A$'(0,\ 0,\ \sqrt{2})$
P$'(X,\ Y,\ Z)$ とすると，条件 (ii) より

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP'}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}||\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|}=\cos\angle\mathrm{A'OP'}\leqq\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2},$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{A'O}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A'P'}}}{|\overrightarrow{\mathrm{A'O}}||\overrightarrow{\mathrm{A'P'}}|}=\cos\angle\mathrm{OA'P'}\geqq\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=(0,\ 0,\ \sqrt{2})$，$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(X,\ Y,\ Z)$，$\overrightarrow{\mathrm{A'O}}=(0,\ 0,-\sqrt{2})$，
$\overrightarrow{\mathrm{A'P'}}=(X,\ Y,\ Z-\sqrt{2})$ であるから

$$\frac{\sqrt{2}Z}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\leqq-\frac{1}{2},\quad \frac{-\sqrt{2}(Z-\sqrt{2})}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2+(Z-\sqrt{2})^2}}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$Z\leqq 0$ に注意して

$$\frac{Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}\geqq\frac{1}{4},\quad \frac{(Z-\sqrt{2})^2}{X^2+Y^2+(Z-\sqrt{2})^2}\geqq\frac{3}{4}$$

整理すると

$$X^2+Y^2-3Z^2\leqq 0,\quad 3X^2+3Y^2-(Z-\sqrt{2})^2\leqq 0 \tag{$**$}$$

$(*)$ に $z=0$ を代入すると　$X=x,\ Y=\dfrac{y}{\sqrt{2}},\ Z=-\dfrac{y}{\sqrt{2}}$

これらを $(**)$ に代入すると

$$x^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2-3\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqq 0, \quad 3x^2+3\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2 \leqq 0$$

整理すると

$$x^2-y^2 \leqq 0, \quad x^2+\frac{(y-1)^2}{3} \leqq 1$$

$Z \leqq 0$ より，$y \geqq 0$ であるから，上の第1式は

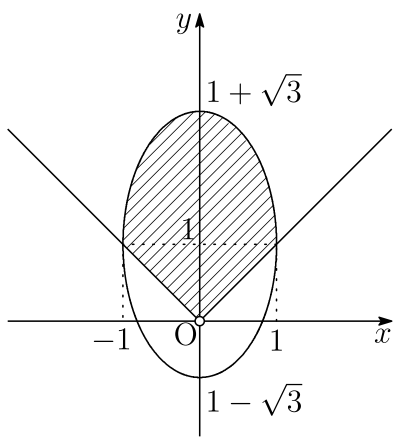
$$|x|^2 \leqq |y|^2 \quad \text{ゆえに} \quad y \geqq |x|$$

したがって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の満たす不等式は

$$(x,\ y) \neq (0,\ 0), \quad y \geqq |x|, \quad x^2+\frac{(y-1)^2}{3} \leqq 1$$

条件 (i) より　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$

P の取り得る範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，O は除く．



2 (1) $x=\tan\theta$ とすると $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4})$

$$f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt=\int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}\,dt$$
$$=x\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt-x\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \qquad (*)$$

これを微分すると

$$f'(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$t=\tan\varphi$ とすると　$\dfrac{dt}{d\varphi}=\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$

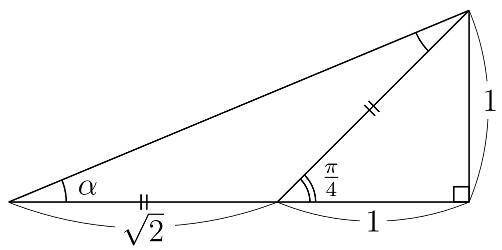
$$f'(\tan\theta)=\int_0^\theta \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}-\int_\theta^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$
$$=\int_0^\theta d\varphi-\int_\theta^{\frac{\pi}{4}} d\varphi=2\theta-\frac{\pi}{4}$$

$f'(\tan\alpha)=0$ とすると

$$2\alpha-\frac{\pi}{4}=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{8}}$$

(2) (1) の結果から

$$\tan\alpha=\tan\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$$



(3) (*) より，$x = \tan\theta$ とすると

$$f(x) = x\Big[\ \varphi\ \Big]_0^{\theta} - \frac{1}{2}\Big[\ \log(1+t^2)\ \Big]_0^{x} + \frac{1}{2}\Big[\ \log(1+t^2)\ \Big]_x^{1} - x\Big[\ \varphi\ \Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= x\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \log\frac{\sqrt{2}}{1+x^2} \qquad (**)$$

(2) の結果から，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

(**) より

$$f(0) = \frac{1}{2}\log 2$$

$$f(\sqrt{2}-1) = \log\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

$\log 2 < 0.7$ より

$$f(1) - f(0) = \frac{\pi}{4} - \log 2 = \frac{\pi - 4\log 2}{4} > \frac{\pi - 4\times 0.7}{4} > 0$$

よって　**最大値** $\boldsymbol{f(1) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\log 2}$**,**

最小値 $\boldsymbol{f(\sqrt{2}-1) = \log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$ ■

3 (1) **(2, 1), (1, 2), (−1, 2), (−2, 1),**
(−2, −1), (−1, −2), (1, −2), (2, −1)

(2) P が n 秒後に点 $(a,\ b)$ にいる確率を $P_n(a,\ b)$ とすると，規則 (ii) より，確率漸化式

$$P_{n+1}(j,\ k)=\frac{1}{3}P_n(j,-k)+\frac{1}{3}P_n(-j,\ k)+\frac{1}{6}P_n(k,\ j)+\frac{1}{6}P_n(-k,-j) \tag{A}$$

が成立する $(j,k=\pm1,\pm2,\ j\neq k)$.
(A) において，$j,\ k$ をそれぞれ $-j,-k$ に置き換えると

$$P_{n+1}(-j,-k)=\frac{1}{3}P_n(-j,\ k)+\frac{1}{3}P_n(j,-k)+\frac{1}{6}P_n(-k,-j)+\frac{1}{6}P_n(k,j) \tag{B}$$

(A)，(B) の右辺がそれぞれ等しいから，自然数 n について

$$P_n(j,\ k)=P_n(-j,-k)\qquad(j,k=\pm1,\pm2,\ j\neq k) \tag{C}$$

が成立する．したがって，$P_n(2,\ 1)=P_n(-2,-1)$ が成立する．

(3) (C) より，$P_n(-j,\ k)=P_n(j,-k)$，$P_n(-k,-j)=P_n(k,\ j)$ であるから，これらを (A) に代入すると

$$P_{n+1}(j,\ k)=\frac{2}{3}P_n(j,-k)+\frac{1}{3}P_n(k,\ j) \tag{D1}$$

(D1) は (C) に注意しながら，次にように書き直すことができる．

$$P_{n+1}(k,\ j)=\frac{2}{3}P_n(k,-j)+\frac{1}{3}P_n(j,\ k) \tag{D2}$$
$$P_{n+1}(j,-k)=\frac{2}{3}P_n(j,\ k)+\frac{1}{3}P_n(k,-j) \tag{D3}$$
$$P_{n+1}(k,-j)=\frac{2}{3}P_n(k,j)+\frac{1}{3}P_n(j,-k) \tag{D4}$$

(D1)，(D4) より

$$P_{n+1}(j,\ k)+P_{n+1}(k,-j)=P_n(k,\ j)+P_n(j,-k) \tag{E1}$$
$$P_{n+1}(j,\ k)-P_{n+1}(k,-j)=-\frac{1}{3}\{P_n(k,\ j)-P_n(j,-k)\} \tag{E2}$$

(D2)，(D3) より

$$P_{n+1}(k,\ j)+P_{n+1}(j,-k)=P_n(j,\ k)+P_n(k,-j) \tag{E3}$$
$$P_{n+1}(k,\ j)-P_{n+1}(j,-k)=-\frac{1}{3}\{P_n(j,\ k)-P_n(k,-j)\} \tag{E4}$$

ここで

$$\begin{aligned} a_n &= P_n(j,\ k) + P_n(k, -j), \quad b_n = P_n(j,\ k) - P_n(k, -j), \\ c_n &= P_n(k,\ j) + P_n(j, -k), \quad d_n = P_n(k,\ j) - P_n(j, -k) \end{aligned}$$

とおくと，(E1)～(E4) より

$$a_{n+1} = c_n, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{3}d_n, \quad c_{n+1} = a_n, \quad d_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n$$

これから

$$\begin{aligned} a_{n+1} + c_{n+1} &= a_n + c_n, & b_{n+1} + d_{n+1} &= -\frac{1}{3}(b_n + d_n), \\ a_{n+1} - c_{n+1} &= -(a_n - c_n), & b_{n+1} - d_{n+1} &= \frac{1}{3}(b_n - d_n) \end{aligned}$$

上の 4 つの漸化式から

$$\begin{aligned} a_n + c_n &= a_1 + c_1, & b_n + d_n &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(b_1 + d_1), \\ a_n - c_n &= (-1)^{n-1}(a_1 - c_1), & b_n - d_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(b_1 - d_1) \end{aligned}$$

$j = 2,\ k = 1$ とすると

$$\begin{aligned} &P_1(-2,\ 1) = P_1(2, -1) = \frac{1}{3}, \quad P_1(1,\ 2) = P_1(-1,\ 2) = \frac{1}{6}, \\ &P_1(2,\ 1) = P_1(-1,\ 2) = P_1(-2, -1) = P_1(1, -2) = 0 \end{aligned}$$

このとき，$a_1 = b_1 = 0,\ c_1 = \dfrac{1}{2},\ d_1 = -\dfrac{1}{6}$ であるから

$$a_n = \frac{1}{4}\{1 + (-1)^n\}, \quad b_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n\{1 + (-1)^n\}$$

したがって，自然数 n について

$$P_n(2,\ 1) = \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \boldsymbol{\frac{1}{8}\{1 + (-1)^n\}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

注意　$P_0(2,\ 1) = 1$，$P_0(-2, -1) = 0$ より，$n = 0$ のとき (C) は成立しないから，$n \geqq 1$ で $P_n(2,\ 1)$ を求める．

別解　最初から n 秒後に P が

点 $(2,\ 1)$ または点 $(-2, -1)$ にいる確率を	p_n
点 $(1,\ 2)$ または点 $(-1, -2)$ にいる確率を	q_n
点 $(-1,\ 2)$ または点 $(1, -2)$ にいる確率を	r_n
点 $(-2,\ 1)$ または点 $(2, -1)$ にいる確率を	s_n

とおくと，条件 (ii) から，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= \frac{2}{3}r_n + \frac{1}{3}s_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{2}{3}s_n,\\ r_{n+1} &= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \quad s_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}(p_{n+1}+q_{n+1})+(r_{n+1}+s_{n+1}) &= (p_n+q_n)+(r_n+s_n)\\ (p_{n+1}+q_{n+1})-(r_{n+1}+s_{n+1}) &= -\{(p_n+q_n)-(r_n+s_n)\}\\ (p_{n+1}-q_{n+1})+(r_{n+1}-s_{n+1}) &= -\frac{1}{3}\{(p_n-q_n)+(r_n-s_n)\}\\ (p_{n+1}-q_{n+1})-(r_{n+1}-s_{n+1}) &= \frac{1}{3}\{(p_n-q_n)-(r_n-s_n)\}\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}(p_n+q_n)+(r_n+s_n) &= (p_0+q_0)+(r_0+s_0)\\ (p_n+q_n)-(r_n+s_n) &= (-1)^n\{(p_0+q_0)-(r_0+s_0)\}\\ (p_n-q_n)+(r_n-s_n) &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n(p_0-q_0)+(r_0-s_0)\\ (p_n-q_n)-(r_n-s_n) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n\{(p_0-q_0)-(r_0-s_0)\}\end{aligned}$$

$p_0 = 1,\ q_0 = r_0 = s_0 = 0$ であるから

$$\begin{aligned}2(p_n+q_n) &= 1+(-1)^n\\ 2(p_n-q_n) &= \{1+(-1)^n\}\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

よって，求める確率は (n は自然数)

$$\frac{1}{2}p_n = \boldsymbol{\frac{1}{8}\{1+(-1)^n\}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

■

4　(1)　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は

$$x - t + f'(t)\{y - f(t)\} = 0$$

この直線が点 $(c(t),\ 0)$ を通るから

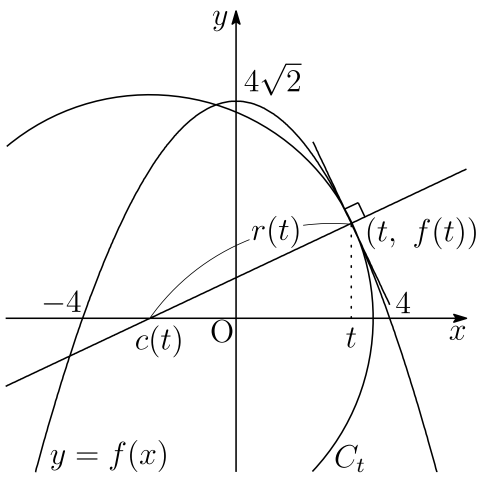
$$c(t) - t - f'(t)f(t) = 0 \quad ゆえに \quad c(t) = t + f'(t)f(t)$$

2 点 $(c(t),\ 0)$, $(t,\ f(t))$ 間の距離 $r(t)$ は，上の結果から

$$\begin{aligned} r(t)^2 &= (t - c(t))^2 + f(t)^2 \\ &= \{f'(t)f(t)\}^2 + f(t)^2 = \{f'(t)^2 + 1\}f(t)^2 \end{aligned}$$

$f(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x^2 - 16)$ より，$f'(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ であるから

$$\begin{aligned} c(t) &= t + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2 - 16)\right\} = \boldsymbol{\frac{t^3}{4} - 3t}, \\ r(t)^2 &= \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + 1\right\}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2 - 16)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{16}(t^2 + 2)(t^2 - 16)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{16}(t^2 + 2)(t + 4)^2(t - 4)^2} \end{aligned}$$



(2) $f(3) = \dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ より，$0 < a < f(3)$ を満たすから

$$0 < a^2 < \frac{49}{8}$$

(1) の結果から，円 C_t の方程式は

$$C_t : \left(x - \frac{t^3}{4} + 3t\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2$$

点 $(3,\ a)$ は C_t 上にあるから

$$\left(3 - \frac{t^3}{4} + 3t\right)^2 + a^2 = \frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2$$

a^2 について解くと　　$a^2 = -\dfrac{3}{8}t^4 + \dfrac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$

$g(t) = -\dfrac{3}{8}t^4 + \dfrac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$ とおくと $(0 < t < 4)$

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 6t - 18 \\ &= -\frac{3}{2}(t^3 - 3t^2 - 4t + 12) = -\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3) \end{aligned}$$

$g(t)$ の増減表は，次のようになる．

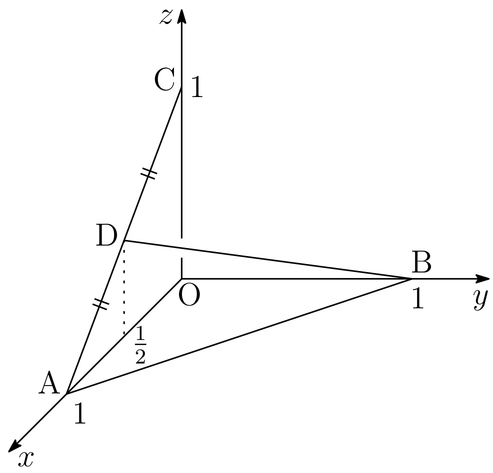
t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	(23)	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\frac{49}{8}$	$\searrow$	(-1)

$g(t) = a^2$ の実数解 t の個数は

$$\begin{cases} 0 < a^2 < 5 \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ a^2 = 5 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ 5 < a^2 < \dfrac{49}{8} \text{ のとき} & 3\text{ 個} \end{cases}$$

したがって　$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < \sqrt{5}} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a = \sqrt{5}} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\sqrt{5} < a < \dfrac{7}{4}\sqrt{2}} \textbf{ のとき} & \textbf{3 個} \end{cases}$$　■

5 3直線 AB，BD，AC の方程式は



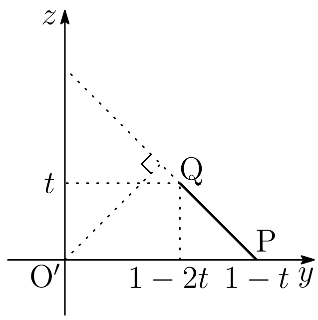
$$\text{直線 AB} : x + y = 1,\ z = 0,$$
$$\text{直線 BD} : x = \frac{y-1}{-2} = z,$$
$$\text{直線 AC} : z + x = 1,\ y = 0$$

3直線 AB，BD，AC と平面 $x = t$ との交点をそれぞれ P，Q，R とすると

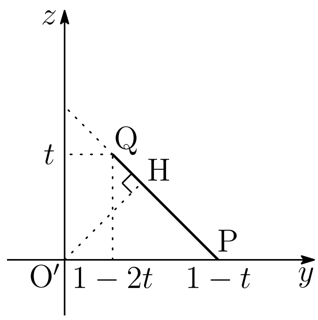
$$\begin{array}{ll} \mathrm{P}(t,\ 1-t,\ 0) & (0 \leqq t \leqq 1), \\ \mathrm{Q}(t,\ 1-2t,\ t) & (0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}), \\ \mathrm{R}(t,\ 0,\ 1-t) & (\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1) \end{array}$$

$\triangle$ABD の平面 $x = t$ による断面は次のようになる．

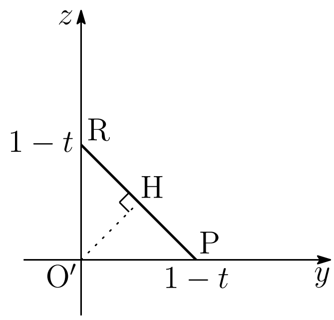
(i) $0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$



(ii) $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$



(iii) $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$



直線 PQ と x 軸との距離を O′H とすると，図 (i)〜図 (iii) より

$$\mathrm{O'H} = \frac{\mathrm{O'P}}{\sqrt{2}}, \quad \mathrm{O'P} = 1 - t, \quad \mathrm{O'Q} = \sqrt{(1-2t)^2 + t^2}$$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{3}} (\mathrm{O'P}^2 - \mathrm{O'Q}^2)\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^{1} (\mathrm{O'P}^2 - \mathrm{O'H}^2)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} (2t - 4t^2)\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{2}(t-1)^2\,dt \\ &= \Big[\, t^2 - \frac{4}{3}t^3 \,\Big]_0^{\frac{1}{3}} + \Big[\, \frac{1}{6}(t-1)^3 \,\Big]_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

したがって　　$\boldsymbol{V = \frac{\pi}{9}}$ ■

6 (1) $f(x) = x(x^2+10x+20)$ より，$f(n)$ が素数となるのは，次の場合である．

- $n = p$ のとき (p は素数)

$$p^2+10p+20 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p(p+10) = -19$$

これを満たす素数 p は存在しない．

- $n = -q$ のとき (q は素数)

$$q^2-10q+20 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (q-3)(q-7) = 0$$

これを解いて　$q = 3,\ 7$　すなわち　$n = -3, -7$

- $n = 1$ のとき，$f(1) = 1(1^2+10{\cdot}1+20) = 31$
  $f(1)$ は素数であるから，$n = 1$ は条件を満たす．
- $n = -1$ のとき，$f(-1) = -1{\cdot}\{(-1)^2+10{\cdot}(-1)+20\} = -11$
  $f(-1)$ は素数でないから，$n = -1$ は条件を満たさない．

以上の結果から　　$\boldsymbol{n = -3, -7,\ 1}$

(2) $g(x)=x(x^2+ax+b)$ より ($a,\ b$ は整数)，$h(x)=x^2+ax+b$ とおくと，$g(n)$ が素数となるのは，(i)〜(iv) の場合である．

(i) $n=p$ のとき (p は素数)，$h(p)=1$

(ii) $n=-q$ のとき (q は素数)，$h(-q)=-1$

(iii) $n=1$ のとき，$h(1)$ は素数

(iv) $n=-1$ のとき，$-h(-1)$ は素数

［A］(i)，(ii) を満たす素数 $p,\ q$ がともに存在すると仮定すると

$$p^2+ap+b=1,\quad q^2-aq+b=-1$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$p^2-q^2+a(p+q)=2 \quad \text{ゆえに} \quad (p+q)(p-q+a)=2$$

$p+q \geqq 4$，$p-q+a$ は整数であるから，上の第 2 式を満たす素数 $p,\ q$ は存在しない．よって，(i) と (ii) は同時に成立しない．

［B］(i) を満たす素数 $p_1,\ p_2$ が存在すると仮定すると

$$h(x)-1=(x-p_1)(x-p_2)$$

$x=-1$ を上式に代入すると

$$h(-1)-1=(-1-p_1)(-1-p_2)>0 \quad \text{ゆえに} \quad -h(-1)<-1$$

このとき，(iv) は成立しない

［C］(ii) を満たす素数 $q_1,\ q_2$ が存在すると仮定すると

$$h(x)+1=(x+q_1)(x+q_2)$$

$x=-1$ を上式に代入すると

$$h(-1)+1=(-1-q_1)(-1-q_2)>0 \quad \text{ゆえに} \quad -h(-1)<1$$

このとき，(iv) は成立しない

［A］〜［C］から，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数は 3 個以下である．

■

3.11　2025 年 (150 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5] [6]

[1] 座標平面上の点 A(0, 0)，B(0, 1)，C(1, 1)，D(1, 0) を考える．実数 $0 < t < 1$ に対して，線分 AB，BC，CD を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t，R_t とし，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$，$\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t，T_t とする．さらに，線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点を U_t とする．また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする．

(1) 点 U_t の座標を求めよ．

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする．t が $0 \leqq t \leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ．

[2] (1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log x \leqq x - 1$ を示せ．

(2) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^2 \log\left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$$

[3] 平行四辺形 ABCD において，$\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB} = a$，$\mathrm{BC} = b$，$a \leqq b$ とする．次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする．

条件： 点 A，B，C，D はそれぞれ辺 EF，FG，GH，HE 上にある．

ただし，辺はその両端の点を含むものとする．

(1) $\angle\mathrm{BCG} = \theta$ とするとき，S を a，b，θ を用いて表せ．

(2) S のとりうる値の最大値を a，b を用いて表せ．

4 この問いでは，0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ．a を正の整数とし，$f_a(x) = x^2 + x - a$ とおく．

(1) n を正の整数とする．$f_a(n)$ が平方数ならば，$n \leqq a$ であることを示せ．

(2) $f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく．次の条件 (i)，(ii) が同値であることを示せ．

　(i) $N_a = 1$ である．

　(ii) $4a + 1$ は素数である．

5 n を 2 以上の整数とする．1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている．1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して，次の操作 (T_i) を考える．

(T_i) 左から i 番目の札の数字が，左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ，これら 2 枚の札の位置を入れかえる．そうでなければ，札の位置をかえない．

最初の状態において札の数字は左から，A_1，$A_2, \ldots,$ A_n であったとする．この状態から $(n-1)$ 回の操作 (T_1)，$(\mathrm{T}_2), \ldots, (\mathrm{T}_{n-1})$ を順に行った後，続けて $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_{n-1}), \ldots, (\mathrm{T}_2)$，$(\mathrm{T}_1)$ を順に行ったところ，札の数字は左から 1，$2, \ldots,$ n と小さい順に並んだ．以下の問いに答えよ．

(1) A_1 と A_2 の少なくとも一方は 2 以下であることを示せ．

(2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 A_1，A_2，$\ldots$，A_n の総数を c_n とする．n が 4 以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ．

6 複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする．

(1) 曲線 C 上の複素数 z に対し，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ．

(2) α，β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

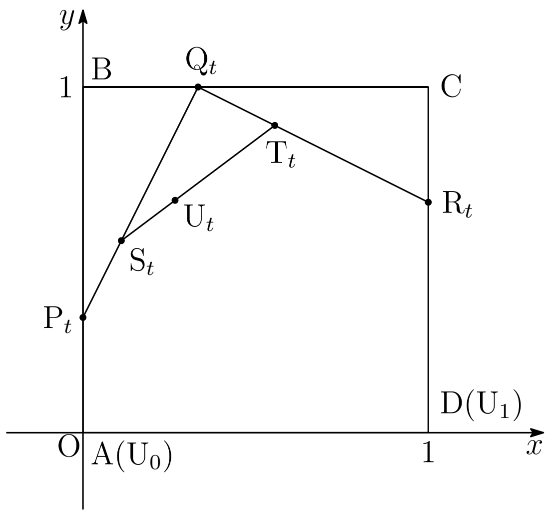
(3) γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ．

解答例

1 (1) 条件から $\mathrm{P}_t(0,\ t)$, $\mathrm{Q}_t(t,\ 1)$, $\mathrm{R}_t(1,\ 1-t)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}_t} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}_t} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}\\ &= (1-t)(0,\ t) + t(t,\ 1) = (t^2,\ 2t-t^2),\\ \overrightarrow{\mathrm{OT}_t} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t} + t\overrightarrow{\mathrm{OR}_t}\\ &= (1-t)(t,\ 1) + t(1,\ 1-t) = (2t-t^2,\ 1-t^2),\\ \overrightarrow{\mathrm{OU}_t} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OS}_t} + t\overrightarrow{\mathrm{OT}_t}\\ &= (1-t)(t^2,\ 2t-t^2) + t(2t-t^2,\ 1-t^2) = (3t^2-2t^3,\ 3t-3t^2)\end{aligned}$$

よって $\mathbf{U}_t(3t^2-2t^3,\ 3t-3t^2)$



(2) (1) の結果から，点 U_t が描く曲線を媒介変数すると

$$x = 3t^2 - 2t^3,\quad y = 3t(1-t)\quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

このとき $\dfrac{dx}{dt} = 6t(1-t)$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$0 \longrightarrow 1$

求める面積を S とすると [8]

$$\begin{aligned}\int_0^1 y\,dx &= \int_0^1 3t(1-t)\cdot 6t(1-t)\,dt = 18\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt\\ &= 18\cdot\frac{2!2!}{5!}(1-0)^5 = \mathbf{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

補足 $\displaystyle \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf (p.5 を参照)

(3) $\dfrac{dx}{dt} = 6t - 6t^2$, $\dfrac{dy}{dt} = 3 - 6t$ より，求める曲線の長さを s とすると

$$\begin{aligned} s &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^a \sqrt{(6t-6t^2)^2 + (3-6t)^2}\, dt \\ &= 3\int_0^a \sqrt{(2t^2-2t)^2 + (2t-1)^2}\, dt \\ &= 3\int_0^a \sqrt{(2t^2-2t)^2 + 2(2t^2-2t) + 1} \\ &= 3\int_0^a |2t^2 - 2t + 1|\, dt \end{aligned}$$

$2t^2 - 2t + 1 = 2\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$ であるから

$$\begin{aligned} s &= 3\int_0^a (2t^2 - 2t + 1)\, dt \\ &= 3\left[\, \frac{2}{3}t^3 - t^2 + t \,\right]_0^a \\ &= \boldsymbol{2a^3 - 3a^2 + 3a} \end{aligned}$$

■

2 (1) $f(x)=x-1-\log x$ とすると　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$x>0$ のとき，$f(x)\geqq 0$ であるから

$$x-1-\log x\geqq 0\quad \text{すなわち}\quad \log x\leqq x-1$$

(2) (1) の結果から

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}-1=\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)\qquad\text{(A)}$$

$x>0$ より，$x^{\frac{1}{n}}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\geqq\log\sqrt{1\cdot x^{\frac{1}{n}}}=\log x^{\frac{1}{2n}}\qquad\text{(B)}$$

(A)，(B) より

$$\log x^{\frac{1}{2n}}\leqq\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)$$

$$\frac{1}{2}\log x\leqq n\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq\frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2\log x\,dx\leqq n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx\leqq\frac{n}{2}\int_1^2(x^{\frac{1}{n}}-1)\,dx\qquad(*)$$

ここで　$$\frac{1}{2}\int_1^2\log x=\frac{1}{2}\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^2=\log 2-\frac{1}{2}\qquad\text{(C)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_1^2(x^{\frac{1}{n}}-1)\,dx&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left[\,\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-x\,\right]_1^2\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}(2^{\frac{1}{n}+1}-1)-1\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left(2^{\frac{1}{n}+1}-2-\frac{1}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\right)=\log 2-\frac{1}{2}\qquad\text{(D)}\end{aligned}$$

$(*)$，(C)，(D) から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=\boldsymbol{\log 2-\frac{1}{2}}$$

補足　$f(x)=2^x$ とすると　$f'(x)=2^x\log 2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{h\to+0}\frac{2^h-2^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=\log 2$$

別解　$x^{\frac{1}{n}}=t$ とすると　$x=t^n$，$\dfrac{dx}{dt}=nt^{n-1}$

x	$1\longrightarrow 2$
t	$1\longrightarrow 2^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned}n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx&=n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}\log\frac{1+t}{2}\cdot nt^{n-1}\,dt=n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}(t^n)'\log\frac{1+t}{2}\,dt\\&=n\Big[\,t^n\log\frac{1+t}{2}\,\Big]_1^{2^{\frac{1}{n}}}-n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}t^n\cdot\frac{1}{1+t}\,dt\\&=2n\log\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}-n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}\frac{t^n}{1+t}\,dt\qquad\text{(X)}\end{aligned}$$

ここで，$g(x)=\log\dfrac{1+2^x}{2}$ とすると　$g'(x)=\dfrac{2^x\log 2}{1+2^x}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}2n\log\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}&=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\log\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{h\to+0}2\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\\&=2g'(0)=2\cdot\frac{\log 2}{2}=\log 2\qquad\text{(Y)}\end{aligned}$$

また，$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}nt^n\,dt<n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}\frac{t^n}{1+t}\,dt<\frac{1}{1+2^{\frac{1}{n}}}\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}nt^n\,dt$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2},\quad\lim_{n\to\infty}\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}nt^n\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\Big[\,t^{n+1}\,\Big]_1^{2^{\frac{1}{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}(2\cdot 2^{\frac{1}{n}}-1)=1$$

上の結果から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}\frac{t^n}{1+t}\,dt=\frac{1}{2}\qquad\text{(Z)}$$

さらに，(X)，(Y)，(Z) から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=\boldsymbol{\log 2-\frac{1}{2}}\qquad\blacksquare$$

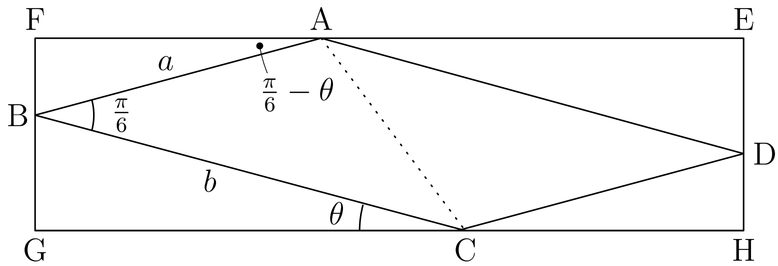
3　(1) $\angle\text{BCG} + \angle\text{BAF} = \angle\text{ABC}$ であるから

$$\theta + \angle\text{BAF} = \frac{\pi}{6} \quad \text{ゆえに} \quad \angle\text{BAF} = \frac{\pi}{6} - \theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}\right)$$

$\dfrac{S}{2} = \triangle\text{ABC} + \triangle\text{ABF} + \triangle\text{CBG}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}a\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\cdot a\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \frac{1}{2}b\sin\theta\cdot b\cos\theta \\ &= \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right) + \frac{1}{4}b^2\sin 2\theta \\ &= \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}a^2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos 2\theta - \cos\frac{\pi}{3}\sin 2\theta\right) + \frac{1}{4}b^2\sin 2\theta \\ &= \frac{1}{4}ab + \frac{\sqrt{3}a^2}{8}\cos 2\theta + \frac{2b^2 - a^2}{8}\sin 2\theta\end{aligned}$$

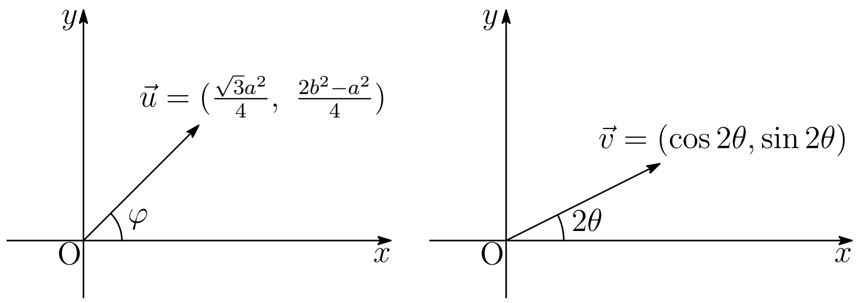
よって　　$\boldsymbol{S = \dfrac{ab}{2} + \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}\cos 2\theta + \dfrac{2b^2 - a^2}{4}\sin 2\theta}$



(2) $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4},\ \dfrac{2b^2 - a^2}{4}\right)$，$\vec{v} = (\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ とし $(a \leqq b)$，$\vec{u}$ の偏角を φ とすると $\left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\tan\varphi = \frac{2b^2 - a^2}{\sqrt{3}a^2},$$

$$S = \frac{ab}{2} + \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{ab}{2} + \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{2}\cos(2\theta - \varphi) \qquad (*)$$



$0 \leqq 2\theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ に注意して，次の場合分けを行う．

(i) $0 < \tan\varphi = \dfrac{2b^2 - a^2}{\sqrt{3}a^2} \leqq \sqrt{3}$，すなわち，$a \leqq b \leqq \sqrt{2}a$ のとき

$(*)$ より，$2\theta = \varphi$ のとき，最大値 $\dfrac{ab}{2} + \dfrac{\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{2}$ をとる．

(ii) $\sqrt{3} < \tan\varphi = \dfrac{2b^2 - a^2}{\sqrt{3}a^2}$，すなわち，$\sqrt{2}a < b$ のとき

$(*)$ より，$2\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値は

$$\begin{aligned}\frac{ab}{2} + \vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{ab}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4},\ \frac{2b^2 - a^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{ab}{2} + \frac{\sqrt{3}b^2}{4}\end{aligned}$$

(i)，(ii) より

$\boldsymbol{a \leqq b \leqq 2\sqrt{a}}$ **のとき，　最大値** $\boldsymbol{\dfrac{ab}{2} + \dfrac{\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{2}}$

$\boldsymbol{\sqrt{2}a < b}$ **のとき，　　最大値** $\boldsymbol{\dfrac{ab}{2} + \dfrac{\sqrt{3}b^2}{4}}$

$\boxed{4}$ (1) $n-a>0$ のとき，$n^2+n-a>n^2$ より，$f_a(n)$ が平方数と仮定すると

$$f_a(n)=n^2+n-a \geqq (n+1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq -n-1$$

これは，a が正の整数であることに反する．
したがって，$f_a(n)$ が平方数ならば，$n-a \leqq 0$，すなわち，$n \leqq a$

(2) $f_a(n)$ が平方数 k^2 であるとき (k は 0 以上の正の整数)

$$n^2+n-a=k^2 \quad \text{ゆえに} \quad (2n+2k+1)(2n-2k+1)=4a+1$$

$4a+1 \equiv 1 \pmod 4$ であるから

$$2n+2k+1 \equiv 2n-2k+1 \equiv \pm 1 \pmod 4$$

このとき，$4a+1$ が合成数

$$4a+1=(4p\pm 1)(4q\pm 1) \quad (p,\ q \text{ は整数},\ p \geqq q > 1)$$

であると仮定すると (複号同順)

$$\begin{cases} 2n+2k+1=4p\pm 1 \\ 2n-2k+1=4q\pm 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2n+2k+1=(4p\pm 1)(4q\pm 1) \\ 2n-2k+1=1 \end{cases}$$

について，それぞれ

$$\begin{cases} n=p+q\pm\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ k=p-q \end{cases}, \quad \begin{cases} n=4pq\pm(p+q) \\ k=4pq\pm(p+q) \end{cases}$$

であるから，$N_a>1$ となり，$N_a=1$ に反する．
したがって，$N_a=1$ ならば，$4a+1$ は素数である．
また，$4a+1$ が素数であるとき

$$\begin{cases} 2n+2k+1=4a+1 \\ 2n-2k+1=1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} n=a \\ k=a \end{cases}$$

したがって，$4a+1$ が素数ならば，$N_a=1$ である．
よって，(i)，(ii) は同値である．　■

5 (1) $M(x,y)=\max(x,y)$，$m(x,y)=\min(x,y)$ とする．
最初の操作 (T_1) 直後の並びは

$$m(A_1,A_2),\ M(A_1,A_2),\ A_3,\ \cdots,\ A_n$$

最後の操作 (T_1) 直前の並びを

$$m(A_1,A_2),\ X,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n$$

とすると $(X\in\{1,\ 2\})$，最後の操作 (T_1) 後の並びは

$$m(m(A_1,A_2),X),\ M(m(A_1,A_2),X),\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n$$

となるから

$$m(m(A_1,A_2),X)=1,\quad M(m(A_1,A_2),X)=2$$

$A_1>2,\ A_2>2$ と仮定すると，$m(A_1,A_2)>2$ となり，上の第2式を満たさない．したがって，A_1 と A_2 の少なくとも一方は2以下である

(2) (1) で示した操作 (T_1) 直後の $n-1$ 個の並び

$$(*)\quad M(A_1,A_2),\ A_3,\ \cdots,\ A_n$$

について，次の (i)〜(iv) の場合に分けて考える．

(i) $A_1=1$ のとき，$(*)$ が規定の操作の繰り返しにより，$2,\ 3,\ \cdots,\ n$ となる c_{n-1} 通り．

(ii) $A_2=1$ のとき，$(*)$ が規定の操作の繰り返しにより，$2,\ 3,\ \cdots,\ n$ となる c_{n-1} 通り．

(iii) $A_1=2,\ A_2\neq1$ のとき，(ii) の場合から $A_1=2,\ A_2=1$ の場合を除く，すなわち，$n-2$ 個の並び $A_3,\ A_4,\ \cdots,\ A_n$ の場合の数を引いた

$$c_{n-1}-c_{n-2}\ (\text{通り})$$

(iv) $A_2=2,\ A_1\neq1$ のとき，(i) の場合から $A_1=1,\ A_2=2$ の場合を除く，すなわち，$n-2$ 個の並び $A_3,\ A_4,\ \cdots,\ A_n$ の場合の数を引いた

$$c_{n-1}-c_{n-2}\ (\text{通り})$$

(i)〜(iv) より　　$c_n=2c_{n-1}+2(c_{n-1}-c_{n-2})=\boldsymbol{4c_{n-1}-2c_{n-2}}$ ■

6　(1) C 上の複素数 z は

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{2} \qquad (-\pi < \theta < \pi)$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{2}{1+\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{2(1+\cos\theta - i\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{2(1+\cos\theta)} \\ &= 1 - \frac{i\sin\theta}{1+\cos\theta} = 1 - \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1 - i\tan\frac{\theta}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 である．

(2) (1) の結果から，実数 s, t を用いて

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + si, \quad \frac{1}{\beta} = 1 + ti \qquad (s \neq t)$$

とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= (1+si)^2 + (1+ti)^2 \\ &= 2 - (s^2+t^2) + 2(s+t)i\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = x + yi$ とすると　$x = 2 - (s^2+t^2)$,　$y = 2(s+t)$

$$s^2 + t^2 = 2 - x, \quad s + t = \frac{y}{2} \qquad (*)$$

実数 s, t $(s \neq t)$ を解とする 2 次方程式

$$\lambda^2 - (s+t)\lambda + st = 0$$

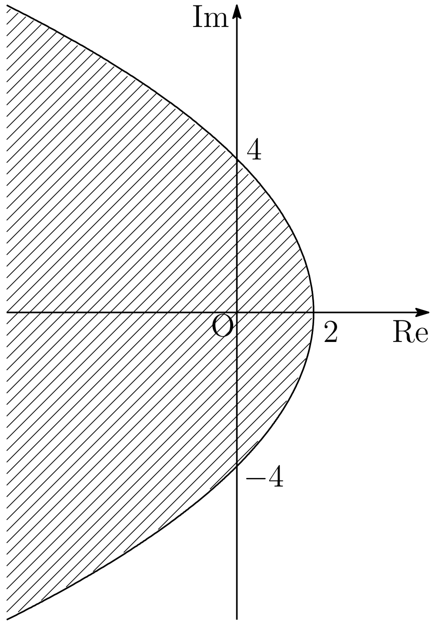
の係数について，$D = (s+t)^2 - 4st > 0$ であるから

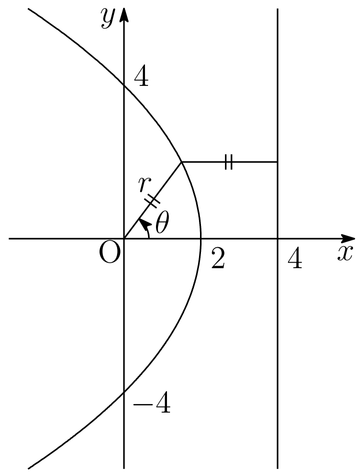
$$2(s^2+t^2) - (s+t)^2 > 0$$

$(*)$ を上式に代入すると

$$2(2-x) - \left(\frac{y}{2}\right)^2 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x < -\frac{y^2}{8} + 2$$

求める領域は，左下の図の斜線部分で境界線を含まない．





(3) 放物線 $y^2 = -8(x-2)$ の焦点 $(0,\ 0)$，準線 $x = 4$ により，
O を極とする極方程式は，右上の図より

$$r + r\cos\theta = 4 \quad \text{すなわち} \quad r = \frac{4}{1+\cos\theta} \qquad (-\pi < \theta < \pi)$$

(2) に属さない複素数 γ は　$\gamma = k(\cos\theta + i\sin\theta)$　$(k \geqq r > 0)$

$$(**)\quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{k}(\cos\theta - i\sin\theta) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{1}{k}\cos\theta$$

(i) $\cos\theta \geqq 0$ のとき　$0 \leqq \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\gamma}\right) \leqq \dfrac{1}{r}\cos\theta = \dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

(ii) $\cos\theta < 0$ のとき　$\dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta = \dfrac{1}{r}\cos\theta \leqq \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\gamma}\right) < 0$

$$\frac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta = \frac{1}{4}\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{16} \text{ より} \quad -\frac{1}{16} \leqq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) < 0$$

(i)，(ii) より　　$k = r$，$\theta = 0$ のとき **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，

$k = r$，$\theta = \pm\dfrac{2}{3}\pi$ のとき **最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{16}}$

補足 (3) の (∗∗) より　$\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{r}{k}\cdot\dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)$

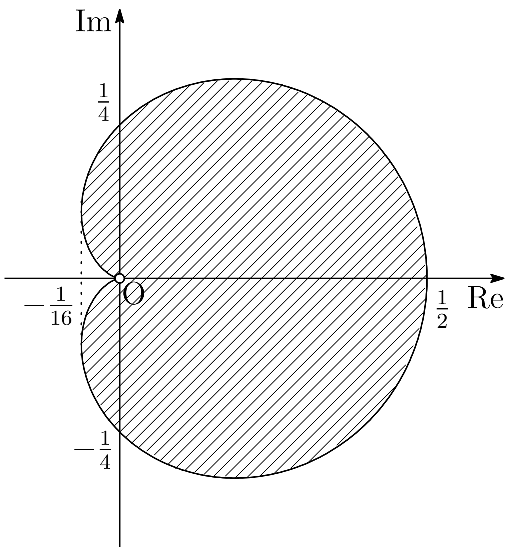
$r(\theta)=\dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)$，$\lambda=\dfrac{r}{k}$ とおくと

$$\frac{1}{\gamma}=\lambda r(\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)\qquad(-\pi<\theta<\pi,\ 0<\lambda\leqq 1)$$

$r(-\theta)=r(\theta)$ であるから，$\dfrac{1}{\gamma}$ を，次のように表記できる．

$$\frac{1}{\gamma}=\lambda r(\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\qquad(-\pi<\theta<\pi,\ 0<\lambda\leqq 1)$$

極方程式 $r(\theta)$ の表す図形はカージオイド (cardioid) であり，λ の値の範囲から，$\dfrac{1}{\gamma}$ はカージオイドとその内部を表す．ただし，原点 O を除く．

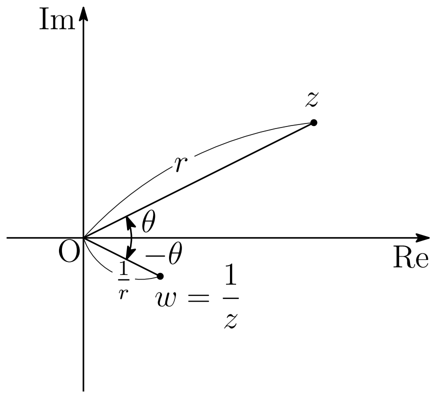


反転

複素数平面上の点 z を $w = \dfrac{1}{z}$ に移す変換を**反転**という．
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$$

となり，下の図のような位置関係になる．

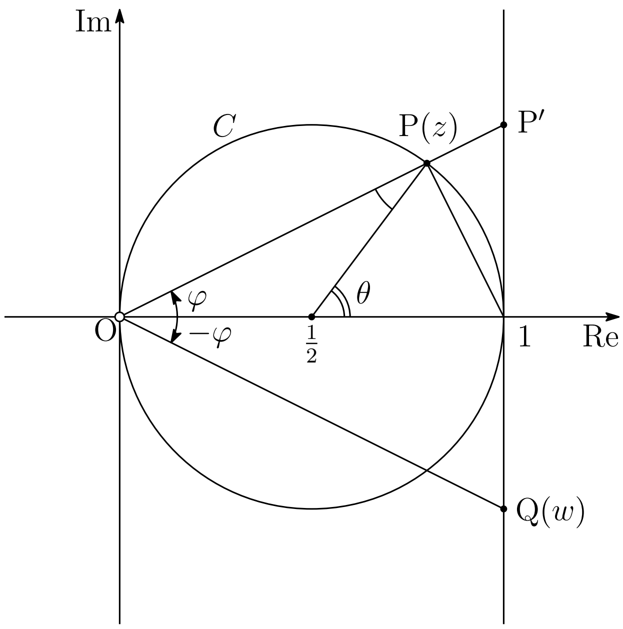


下の図において

$$\mathrm{OP} = \cos\varphi,\quad \mathrm{OP}' = \frac{1}{\cos\varphi},\quad \varphi = \frac{\theta}{2}$$

したがって，C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ を反転させた像 $\mathrm{Q}(w)$ は[9]

$$w = \frac{1}{z} = 1 + i\tan(-\varphi) = 1 + i\tan\left(-\frac{\theta}{2}\right)$$



[9] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf $\boxed{3}$

一般に，中心 $\alpha \neq 0$，半径 r の円 $|z-\alpha| = r$ を反転すると

$$\left|\frac{1}{w} - \alpha\right| = r \quad \text{ゆえに} \quad |1-\alpha w| = r|w|$$

上の第 2 式から

$$(1-\alpha w)(1-\overline{\alpha}\,\overline{w}) = r^2|w|^2$$
$$(|\alpha|^2 - r^2)|w|^2 - (\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w}) + 1 = 0 \qquad (*)$$

(i) $|\alpha|^2 - r^2 \neq 0$ のとき，$(*)$ より

$$|w|^2 - \frac{\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w}}{|\alpha|^2 - r^2} = -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2}$$
$$|w|^2 - \frac{\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w}}{|\alpha|^2 - r^2} + \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} = -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} + \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2}$$
$$\left(w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right)\left(\overline{w} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right) = \frac{r^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2}$$
$$\left|w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right| = \frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$$

(ii) $|\alpha|^2 - r^2 = 0$ のとき，$(*)$ より　$\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w} = 1$

$$\frac{w}{\overline{\alpha}} + \frac{\overline{w}}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|^2} \quad \text{ゆえに} \quad \left|w - \frac{1}{\alpha}\right|^2 = |w|^2$$

したがって，w は原点 O と $\dfrac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線である．

反転公式

中心 $\alpha (\neq 0)$，半径 r の円を反転した像は

(i) $|\alpha| \neq r$ のとき，中心 $\dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}$，半径 $\dfrac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$ の円

(ii) $|\alpha| = r$ のとき，原点 O と点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線

上の (ii) から，次が成立する．

> 原点 O と点 α を結ぶ線分の垂直二等分線上の点を反転した像は，点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とする半径 $\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|$ の円 (ただし，原点を除く)

第 4 章　東京科学大学 (理工系)

出題分野 (2015-2025) 180 分

◀	東京科学大学 (理工系)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	数と式											
I	2 次関数											
	図形と計量											
	データの分析											
	式と証明					1						
	複素数と方程式											
II	図形と方程式											
	三角関数								3			
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法											
	関数											
	極限	1									3·4	3·4
III	微分法とその応用	4	1	3	3	5						5
	積分法			2		2	5			1		1
	積分法の応用	3	5		4		4	5	5	4	2	
	場合の数と確率		2	4						3		
A	整数の性質	5	4	1	2		1		2	2		
	図形の性質		3									
B	数列				5	4·5		1·3				
	確率分布と統計											
	平面上のベクトル											
C	空間のベクトル	2					3	4		5		2
	複素数平面			5	1	3	2		1·4		5	
	式と曲線							2			1	

4.1 2015 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

2 四面体 OABC において，OA = OB = OC = BC = 1，AB = AC = x とする．頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする．頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を H′ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ と表す．このとき，p，q，r および s，t を x の式で表せ．

(2) 四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ．また，x が変化するときの V の最大値を求めよ．

3 $a > 0$ とする．曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x = a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする．

(1) A の体積 V を求めよ．

(2) 点 $(t,\ 0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)} ds$$

を示せ．

(3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx$$

を示せ．

4 xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=t^2\cos t,\quad y=t^2\sin t$$

で表されている．原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ．

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする．このとき，$t_2-t_1<\pi$ を示せ．

5 n を相異なる素数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k$ $(k\geqq 1)$ の積とする．a，b を n の約数とするとき，a，b の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，

$$f(a,\ b)=\frac{L}{G}$$

とする．

(1) $f(a,\ b)$ が n の約数であることを示せ．

(2) $f(a,\ b)=b$ ならば，$a=1$ であることを示せ．

(3) m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする．

$$S(f(a,\ b))+S(a)+S(b)$$

が偶数であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は

$$x = \frac{4x-9}{x-2} \quad \text{すなわち} \quad (x-3)^2 = 0$$

この方程式の解が $x=3$ であるから

$$a_{n+1} - 3 = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} - 3 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_{n+1}-3} = \frac{1}{a_n - 3} + 1$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-3}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-3}$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-3} = \frac{1}{a_1-3} + (n-1) = \frac{2n-1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = \frac{6n-1}{2n-1}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k a_k = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(6k-1)}{2k-1} \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left(3k+1+\frac{1}{2k-1}\right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{2}n(n+1)+n+\frac{1}{2k-1}\right\} \\ &= 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

ここで　$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n-1} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \leqq \sum_{k=1}^{n}$$

すなわち　$$\frac{n}{2n-1} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \leqq n \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると，次式から明らか．

$$3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(2n-1)} \leqq b_n \leqq 3 + \frac{4}{n+1} \qquad \cdots (*)$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{(n+1)(2n-1)}\right\} = 3, \quad \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n+1}\right) = 3$

上の 2 式から，$(*)$ にはさみうちの原理を適用すると　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \mathbf{3}$

解説 p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ $\cdots(*)$

$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．

$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots(**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots(***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha}\left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s}\right)^{n-1}$$

これから，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

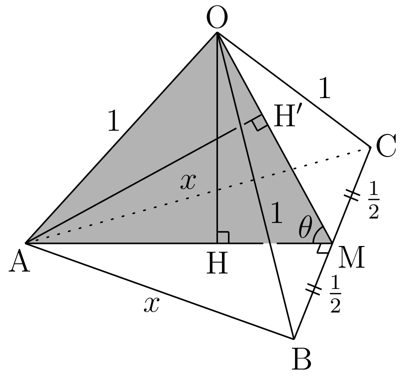
逆数をとると $\quad \dfrac{1}{a_{n+1} - \alpha} = \dfrac{1}{a_n - \alpha} + \dfrac{2r}{p + s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n - \alpha}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1 - \alpha}$，公差 $\dfrac{2r}{p + s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n - \alpha} = \frac{1}{a_1 - \alpha} + \frac{2r}{p + s}(n - 1)$$

これから，a_n が求まる． ■

2 (1) BCの中点をMとし，$\theta=\angle\mathrm{OMA}$とすると



$$\mathrm{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\mathrm{MA}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}$$

△OAMに余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OM}^2+\mathrm{MA}^2-\mathrm{OA}^2}{2\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{MA}}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-1}{2\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{MA}}=\frac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{MA}}$$

上式より，$\mathrm{OM}\cos\theta=\dfrac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{MA}}$，$\mathrm{MA}\cos\theta=\dfrac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{OM}}$ $\cdots$ ① であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(\mathrm{OM}\cos\theta){\cdot}\frac{\overrightarrow{\mathrm{MA}}}{\mathrm{MA}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{MA}^2}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{x^2-\frac{1}{2}}{2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}\left(\vec{a}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$
$$=\frac{2x^2-1}{4x^2-1}\vec{a}+\frac{x^2}{4x^2-1}(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(\mathrm{MA}\cos\theta){\cdot}\frac{\overrightarrow{\mathrm{MO}}}{\mathrm{MO}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\frac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{OM}^2}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\frac{2}{3}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{4-2x^2}{3}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c})$$

よって　$\boldsymbol{p=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}}$，$\boldsymbol{q=r=\dfrac{x^2}{4x^2-1}}$，$\boldsymbol{s=t=\dfrac{2-x^2}{3}}$

(2) ① より，$\mathrm{MA}\cos\theta=\dfrac{x^2-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$ であるから

$$\mathrm{MA}^2\sin^2\theta=\mathrm{MA}^2-(\mathrm{MA}\cos\theta)^2=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=-\frac{1}{3}x^4+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}(x^2-2)^2$$

$\mathrm{AH'}=\mathrm{MA}\sin\theta$ であるから，$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}{\cdot}\mathrm{AH'}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}\sqrt{3-(x^2-2)^2}}$

よって，$x=\sqrt{2}$ のとき，V は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{12}}$ をとる．

補足 $\triangle\mathrm{OAM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{MA}\sin\theta$ より，$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAM}{\cdot}\mathrm{BC}=\dfrac{1}{12}\sqrt{3-(x^2-2)^2}$

別解 $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{a}|=x$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1-\dfrac{x^2}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は平面 ABC に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ より

$$(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0,\quad (p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

これらを整理すると

$$-x^2p+x^2q+(x^2-1)r=0,\quad -q+r=0$$

上の 2 式および $p+q+r=1$ により　$\boldsymbol{p=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}}$，$\boldsymbol{q=r=\dfrac{x^2}{4x^2-1}}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}'}$ は平面 OBC に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AH}'}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OH}'}\cdot\vec{c}=0$ より

$$(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0,\quad (s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{c}=0$$

これらを整理すると

$$2s+t+x^2-2=0,\quad s+2t+x^2-2=0$$

よって　　$\boldsymbol{s=t=\dfrac{2-x^2}{3}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}'}=s(\vec{b}+\vec{c})$ より

$$\mathrm{OH}'^2=|\overrightarrow{\mathrm{OH}'}|^2=s^2(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)=\frac{(2-x^2)^2}{3}$$

したがって　$\mathrm{AH}'=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OH}'^2}=\sqrt{1-\dfrac{(2-x^2)^2}{3}}$

よって　$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AH}'=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot1^2\sin 60^\circ\right)\mathrm{AH}'=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}\sqrt{3-(2-x^2)^2}}$

また，V が最大となるのは，A から平面 OBC に下ろした垂線 AH$'$ の長さが最大となる，すなわち，H$'$ が O と一致するときであるから

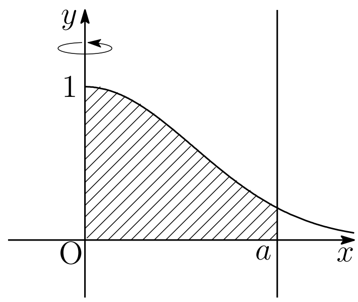
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}'}=\frac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}\quad \text{よって}\quad x=\sqrt{2}$$

このとき，$\mathrm{AH}'=\mathrm{AO}=1$ より，V の最大値は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AH}'=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\sin 60^\circ\right)\cdot1=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}$$

■

3　(1) 求める体積 V は



$$V = 2\pi\int_0^a xe^{-x^2}\,dx$$
$$= \pi\left[-e^{-x^2}\right]_0^a = \boldsymbol{\pi(1-e^{-a^2})}$$

(2) 回転体 A の領域は，y 軸からの距離が r であるとき $(0 \leqq r \leqq a)$

$$0 \leqq y \leqq e^{-r^2}$$

xy 平面に垂直で原点 O を通る座標軸を z 軸とすると　$r^2 = z^2 + x^2$

このとき，平面 $x = t$ による A の断面の表す領域は $(-a \leqq t \leqq a)$

$$x = t, \quad -\sqrt{a^2-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{a^2-t^2}, \quad 0 \leqq y \leqq e^{-(z^2+t^2)}$$

したがって，この断面積 $S(t)$ について

$$S(t) = \int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(z^2+t^2)}dz \leqq \int_{-a}^a e^{-(z^2+t^2)}dz$$

よって　$$S(t) \leqq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)}ds$$

(3) (2) の結果から　$$S(t) \leqq e^{-t^2}\int_{-a}^a e^{-s^2}ds$$

したがって　$$V = \int_{-a}^a S(t)\,dt \leqq \int_{-a}^a e^{-t^2}dt\int_{-a}^a e^{-s^2}ds$$

上式および (1) の結果から

$$\pi(1-e^{-a^2}) \leqq \left(\int_{-a}^a e^{-x^2}dx\right)^2 \quad \text{よって} \quad \sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^a e^{-x^2}dx$$

■

4　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y) = t^2(\cos t,\ \sin t)$ より $(t > 0)$

$$\frac{dx}{dt} = 2t\cos t - t^2\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t\sin t + t^2\cos t$$

ゆえに　$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = t(2\cos t - t\sin t,\ 2\sin t + t\cos t)$$

$\theta(t)$ は，2 つのベクトル

$$\frac{1}{t^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos t,\ \ \sin t),\quad \frac{1}{t}\vec{v} = (2\cos t - t\sin t,\ 2\sin t + t\cos t)$$

のなす角であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta(t) &= \frac{\cos t(2\cos t - t\sin t) + \sin t(2\sin t + t\cos t)}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\sqrt{(2\cos t - t\sin t)^2 + (2\sin t + t\cos t)^2}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{4+t^2}}\end{aligned}$$

したがって　$\lim_{t\to\infty}\cos\theta(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+t^2}} = 0$　よって　$\boldsymbol{\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \frac{\pi}{2}}$

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になる t $(t>0)$ は，$\dfrac{dx}{dt} = 0$ のときであるから

$$2\cos t - t\sin t = 0 \quad すなわち \quad \tan t - \frac{2}{t} = 0$$

$f(t) = \tan t - \dfrac{2}{t}$ とおくと　$f'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} + \dfrac{2}{t^2} > 0$

$\lim_{t\to+0} f(t) = -\infty$，$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} f(t) = \infty$ であり，区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ で $f(t)$ は単調増加であるから，中間値の定理により

$$f(t_1) = 0 \quad \left(0 < t_1 < \frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす t_1 が唯一存在する．

$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}+0} f(t) = -\infty$，$f(\pi) = -\dfrac{2}{\pi}$，$\lim_{t\to\frac{3}{2}\pi-0} f(t) = \infty$ であり，区間 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ において $f(t)$ は単調増加であるから，中間値の定理により

$$f(t_2) = 0 \quad \left(\pi < t_2 < \frac{3}{2}\pi\right)$$

を満たす t_2 が唯一存在する．したがって

$$\tan t_1 = \frac{2}{t_1} > \frac{2}{t_2} = \tan t_2 = \tan(t_2 - \pi)$$

$t_1,\ t_2 - \pi \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから

$$t_1 > t_2 - \pi \quad よって \quad t_2 - t_1 < \pi$$

■

5 (1) $a = Ga',\ b = Gb'$ ($a',\ b'$は互いに素) とおくと，$L = Ga'b'$ より

$$f(a,\ b) = \frac{L}{G} = a'b' \quad \cdots (*)$$

$a = Ga'$，$b = Gb'$ は n の約数であるから，a'，b' は n の約数である．
このとき，a'，b' は互いに素であるから，$a'b'$ は n の約数である．
よって，$f(a,\ b)$ は n の約数である．

(2) $f(a,\ b) = b$ のとき，$(*)$ および $b = Gb'$ より

$$a'b' = Gb' \quad \text{ゆえに} \quad a' = G \quad \text{すなわち} \quad a = G^2$$

a は相異なる素数の積であるから，a が 1 以外の平方数になることはない．
よって，$a = 1$

(3) x，y が相異なる素数の積であるとき，$S(xy) = S(x) + S(y)$ であるから

$$\begin{aligned}
&S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)\\
=&S(a'b') + S(Ga') + S(Gb')\\
=&\{S(a') + S(b')\} + \{S(G) + S(a')\} + \{S(G) + S(b')\}\\
=&2\{S(G) + S(a') + (b')\}
\end{aligned}$$

よって，$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)$ は偶数である． ■

4.2　2016 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 a を正の定数とし，放物線 $y = \dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする．

(1) 点 P が C_1 上を動くとき，P と点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4} - 2\right)$ の距離の最小値を求めよ．

(2) Q を中心とする円 $(x-2a)^2 + \left(y - \dfrac{a^2}{4} + 2\right)^2 = 2a^2$ を C_2 とする．P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ．

2 △ABC を一辺の長さ 6 の正三角形とする．サイコロを 3 回振り，出た目を順に X，Y，Z とする．出た目に応じて，点 P，Q，R をそれぞれ線分 BC，CA，AB 上に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \frac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

をみたすように取る．

(1) △PQR が正三角形になる確率を求めよ．

(2) 点 B，P，R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，点 C，Q，P を互いに線分で結んでできる図形を T_2，点 A，R，Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする．T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ．

(3) △PQR の面積を S とし，S のとりうる値の最小値を m とする．m の値および $S = m$ となる確率を求めよ．

3 水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している．

(1) S_1，S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1，P_2 とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ．

(2) α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える．それらの球と α の接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ．

4 n を 2 以上の自然数とする．

(1) n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ．

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ．

5 次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ．

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C_1 上の点 P を $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$，$f(t)=\mathrm{PQ}^2$ とする．$a>0$ より，$\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の x 座標は正であり，C_1 は y 軸に関して対称であるから，PQ の距離が最小となるのは，$t \geqq 0$ のときについて調べればよい．

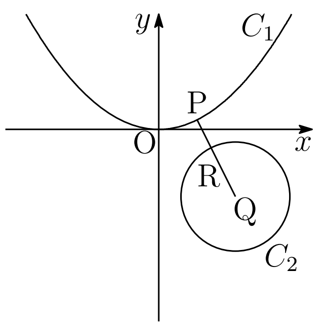
$$\begin{aligned} f(t) &= (t-2a)^2+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)^2 \\ f'(t) &= 2(t-2a)+2\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)\cdot\frac{t}{2} \\ &= \frac{t^3}{4}-\frac{a^2}{4}t+4t-4a \\ &= \frac{1}{4}(t-a)(t^2+at+16) \end{aligned}$$

このとき，$t^2+at+16>0$ であることに注意して

t	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小 a^2+4	$\nearrow$

よって，求める最小値は　$\sqrt{f(a)}=\boldsymbol{\sqrt{a^2+4}}$

(2) $C_2:(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ の半径が $\sqrt{2}a$ であるから (1) の結果に注意して



$\sqrt{2}a \geqq \sqrt{a^2+4}$，すなわち，$a \geqq 2$ のとき

PR の最小値 0

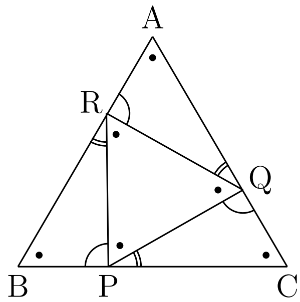
$\sqrt{2}a < \sqrt{a^2+4}$，すなわち，$0<a<2$ のとき

PR の最小値 $\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}a$

よって，PR の最小値は $\begin{cases} \boldsymbol{a \geqq 2} & \textbf{のとき}\ \ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0<a<2} & \textbf{のとき}\ \ \boldsymbol{\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}a} \end{cases}$

■

2 (1) $\triangle$PQR が正三角形のとき



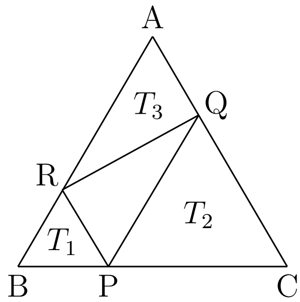
$$\triangle \mathrm{BPR} \equiv \triangle \mathrm{CQP} \equiv \triangle \mathrm{ARQ}$$

であるから，BP = CQ = AR

したがって　$X = Y = Z$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{6^3} = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2) T_1 と T_2 だけが正三角形であるとき



$$\mathrm{RB} = \mathrm{BP},\quad \mathrm{PC} = \mathrm{CQ},\quad \mathrm{QA} \neq \mathrm{AR}$$

ゆえに　$6 - Z = X,\ \ 6 - X = Y,\ \ 6 - Y \neq Z$

すなわち　$Y = Z = 6 - X \quad (X = 1, 2, 4, 5)$

T_1 と T_2 だけが正三角形となる確率は　$\dfrac{4}{6^3}$

T_2 と T_3 だけ，T_3 と T_1 だけが正三角形となる確率もこれと等しい．

よって，求める確率は　$\dfrac{4{\cdot}3}{6^3} = \mathbf{\dfrac{1}{18}}$

(3) $\dfrac{\triangle \mathrm{BPR}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \dfrac{(6-Z)X}{36},\ \ \dfrac{\triangle \mathrm{CQP}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \dfrac{(6-X)Y}{36},\ \ \dfrac{\triangle \mathrm{ARQ}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \dfrac{(6-Y)Z}{36}$ より

$$\begin{aligned}\frac{36S}{\triangle \mathrm{ABC}} &= \frac{36}{\triangle \mathrm{ABC}}(\triangle \mathrm{ABC} - \triangle \mathrm{BPR} - \triangle \mathrm{CQP} - \triangle \mathrm{ARQ}) \\ &= 36 - (6-Z)X - (6-X)Y - (6-Y)Z \\ &= 36 - 6(X+Y+Z) + XY + YZ + ZX \\ &= (6-X)(6-Y) + Z(X+Y-6)\end{aligned}$$

(i) $X + Y - 6 < 0$ のとき，$Z = 6$ で S は最小となり

$$\frac{36S}{\triangle \mathrm{ABC}} = XY \geqq 1 \quad (\text{等号は } X = Y = 1 \text{ のとき})$$

(ii) $X + Y - 6 = 0$ のとき，$X \neq 6$ に注意して

$$\frac{36S}{\triangle \mathrm{ABC}} = (6-X)(6-Y) = (6-X)X = 9 - (X-3)^2 \geqq 5$$

(iii) $X + Y - 6 > 0$ のとき，$Z = 1$ で S は最小となり

$$\frac{36S}{\triangle \mathrm{ABC}} = 5 + (5-X)(5-Y) \geqq 1 \quad (\text{等号は } (X, Y) = (1, 6), (6, 1) \text{ のとき})$$

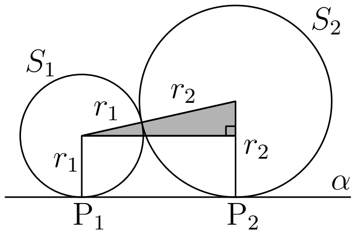
(i)〜(iii) から $\dfrac{36m}{\triangle\mathrm{ABC}}=1$ であるから

$$m=\frac{1}{36}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

これを満たすのは，$(X,Y,Z)=(1,1,6),(1,6,1),(6,1,1)$ の 3 組．

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{72}}$ ■

3 (1) 右の図の直角三角形について



$$\mathrm{P_1P_2}^2+(r_1-r_2)^2=(r_1+r_2)^2$$
$$\mathrm{P_1P_2}^2=4r_1r_2$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{P_1P_2}=2\sqrt{r_1r_2}}$

(2) α 上の半径 r の球 S が，S_1 および S_2 に外接するとき，S と α の接点を P とすると

$$\mathrm{P_1P}=2\sqrt{r_1r},\quad \mathrm{P_2P}=2\sqrt{r_2r}$$

(i) $r_1\neq r_2$ のとき　$\mathrm{P_1P}:\mathrm{P_2P}=\sqrt{r_1}:\sqrt{r_2}$

2 点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を $\sqrt{r_1}:\sqrt{r_2}$ に内分，外分する点を A，B とすると，P は線分 AB を直径とする円周上にある．

(ii) $r_1=r_2$ のとき　$\mathrm{P_1P}=\mathrm{P_2P}$

P は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の垂直二等分線上にある． ■

4 (1) n が素数のとき，$n-1$ 以下の正の整数は n を因数に持たないので

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

は n で割り切れない．

また，$n=4$ のとき，$(n-1)!=6$ は，n で割り切れない．

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$n=pq$，$2 \leqq p \leqq q$ とおくと

$$n-1-q = pq-1-q = (p-1)(q-1)+(p-2) > 0$$

ゆえに　　$2 \leqq p \leqq q < n-1$

(i) $p \neq q$ のとき　　$(n-1)! = (n-1)\cdots q\cdots p\cdots 1$

したがって，$(n-1)!$ は $n=pq$ で割り切れる．

(ii) $p=q$ のとき，$n \neq 4$ であるから，$2<p$，$2p<p^2=n$ より，$2p \leqq n-1$

$(n-1)!$ は p と $2p$ を因数にもつので，$(n-1)!$ は $n=p^2$ で割り切れる．

(i)，(ii) より，n が素数でも 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる．

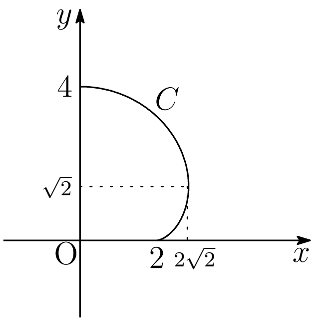
■

5 (1) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$ $\quad (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$

上式を t について微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 6\cos 2t \sin t$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 6\sin 2t \sin t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	
(x, y)	(2,0)	$\cdots$	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\cdots$	$(0, 4)$



C の概形は右の図のようになる．

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t)\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - 4\cos 3t \cos t + \cos^2 3t)\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - 2(\cos 4t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(1 + \cos 6t)\right\} dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{2}\cos 2t - 2\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t\right) dt \\
&= 3\left[\, 2t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin 6t \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boldsymbol{3\pi}
\end{aligned}$$

別解 本題は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

$$f(t)=3\cos t-\cos 3t,\quad g(t)=3\sin t-\sin 3t\quad \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$f'(t)=-3(\sin t-\sin 3t),\quad g'(t)=3(\cos t-\cos 3t)$$

したがって

$$\begin{aligned}f(t)g'(t)-f'(t)g(t)&=(3\cos t-\cos 3t)\cdot 3(\cos t-\cos 3t)\\&\qquad-(-3)(\sin t-\sin 3t)(3\sin t-\sin 3t)\\&=12(1-\cos 3t\cos t-\sin 3t\sin t)\\&=12(1-\cos 2t)\end{aligned}$$

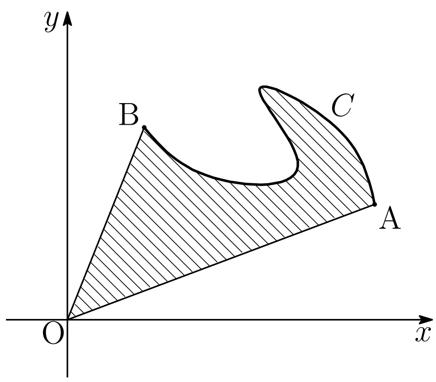
よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt\\&=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt\\&=6\left[\,t-\frac{1}{2}\sin 2t\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{3\pi}\end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C: x=f(t),\ y=g(t)\ (\alpha\leqq t\leqq\beta)$ について，$t=\alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}dt$$



4.3　2017 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の条件 (i)，(ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ．

(i) N の正の約数の個数は 12 個

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12.

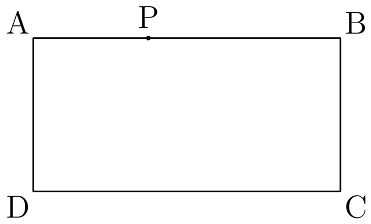
ただし，N の約数には 1 と N も含める．

2 実数 x の関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ の最大値と最小値を求めよ．

3 a を 1 以上の実数とする．図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている．ただし AD $= 1$，AB $= a$ である．P を辺 AB 上の点とし，AP $= x$ とする．頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を一回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする．

(1) S を a と x で表せ．

(2) $a = 1$ とする．P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ．



なお配布された白紙を自由に使ってよい．(白紙は回収しない．)

4 n は正の整数とし，文字 a，b，c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする．A_n の要素に対し次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 文字 c が 2 つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件 $(*)$ を満たす確率 $P(n)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 12$ とする．A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件 $(*)$ を満たし，その 7 番目の文字は c であった．このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ．

5 実数 a，b，c に対して $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$，$f(x) = x^2 + cx + 1$ とおく．また，複素数平面内の単位円周から 2 点 1，-1 を除いたものを T とする．

(1) $f(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ．

(2) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるならば，

$$F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$$

を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ．

(3) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

解答例

$\boxed{1}$ N の約数が 12 個あり，N が $2^2{\cdot}3$ を約数をもつことから，N は次の積で表される (p は 5 以上の素数)．

(a) $N=2^5{\cdot}3$　(b) $N=2^3{\cdot}3^2$　(c) $N=2^2{\cdot}3^3$　(d) $N=2^2{\cdot}3p$

(a) $N=2^5{\cdot}3=96$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12$$

(b) $N=2^3{\cdot}3^2=72$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12$$

(c) $N=2^2{\cdot}3^3=108$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12$$

(d) 条件 (ii) を満たす p は 5，7，11 のいずれかである．

$p=5$ のとき，$N=2^2{\cdot}3{\cdot}5=60$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12$$

$p=7$ のとき，$N=2^2{\cdot}3{\cdot}7=84$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 12$$

$p=11$ のとき，$N=2^2{\cdot}3{\cdot}11=132$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 11,\ 12$$

(a)～(d) から，条件 (ii) を満たす正の整数 N は　**84，96，108，132**　■

$\boxed{2}$ $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ より　$f(x+\pi)=\displaystyle\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$

第 2 式について，$t=u+\pi$ とおくと　$\dfrac{dt}{du}=1$

t	$x+\pi \longrightarrow x+\frac{3}{2}\pi$
u	$x \longrightarrow x+\frac{\pi}{2}$

ゆえに　$f(x+\pi)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(u+\pi)|}{1+\sin^2(u+\pi)}\,du=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{1+\sin^2 u}\,du=f(x)$

$f(x)$ は，周期 π の周期関数であるから，$0\leqq x\leqq\pi$ において求めればよい．

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt \quad \cdots (*)$

$$f'(x) = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} - \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$$
$$= \frac{(\cos x - \sin x)(1-\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)} = -\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x) = \displaystyle\int_x^{\pi} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt - \int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt \quad \cdots (**)$

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{1+\sin^2 x} - \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\sin x}{1+\sin^2 x} - \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$$
$$= -\frac{(\sin x + \cos x)(1+\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)} = -\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}$$

(i)，(ii) より，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで $\displaystyle\int \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt = \int \frac{\sin t}{2-\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}-\cos t} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}+\cos t}\right)dt$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

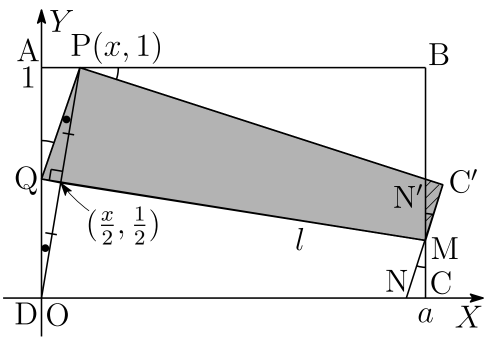
$F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\dfrac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right)$ とおくと，$(*)$，$(**)$ より

最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = F\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) - F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log 3}$

最小値 $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) = 2F(\pi) - F\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) - F\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\log(\sqrt{2}+1) - \log 3\right\}}$

■

3 (1) 右の図のように四角形 ABCD を XY 座標平面上に定め，原点 O と点 $\mathrm{P}(x,\ 1)$ を結ぶ線分 OP の垂直二等分線を l とすると，その方程式は



$$Y-\frac{1}{2}=-x\left(X-\frac{x}{2}\right)$$

$$l: 2xX+2Y-x^2-1=0$$

l と X 軸との交点の X 座標は　$X=\dfrac{x^2+1}{2x}$

(i) $a \leqq \dfrac{x^2+1}{2x}$，$0 \leqq x \leqq a$　すなわち　$0 \leqq x \leqq a-\sqrt{a^2-1}$ のとき

l と直線 $X=a$ の交点の Y 座標は　$Y=\dfrac{x^2-2ax+1}{2}$

$\theta=\angle\mathrm{AOP}$ とおくと，$\angle\mathrm{AQP}=2\theta$ より

$$\tan\theta=x\quad ゆえに\quad \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}$$

上図で，$\triangle\mathrm{MNC}\equiv\triangle\mathrm{MN'C'}$，$\angle\mathrm{NMC}=2\theta$，$\mathrm{NC}=\mathrm{MC}\tan 2\theta$ より

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{MC}\cdot\mathrm{NC}=\frac{1}{2}\mathrm{MC}^2\tan 2\theta$$

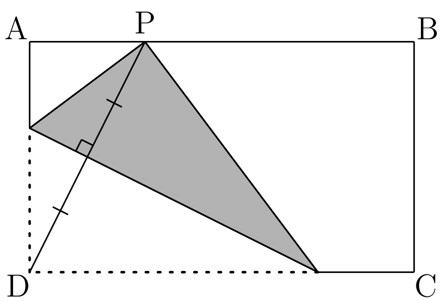
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2ax+1}{2}\right)^2\frac{2x}{1-x^2}=\boldsymbol{\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}}$$

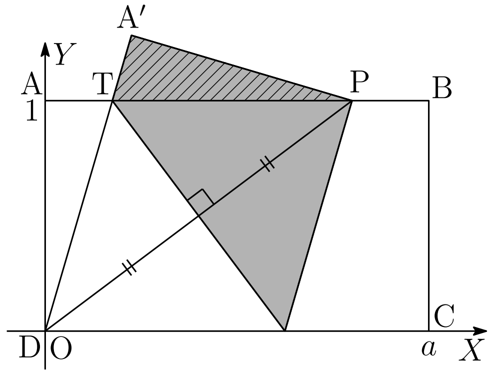
(ii) $\dfrac{x^2+1}{2x} \leqq a$，$0 \leqq x \leqq 1$　すなわち　$a-\sqrt{a^2-1} \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\boldsymbol{S=0}$$

(iii) $1 \leqq a$ のとき，l と直線 $Y=1$ の交点の X 座標は　$X=\dfrac{x^2-1}{2x}$

$$S=\triangle\mathrm{A'TP}=\triangle\mathrm{ATO}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AT}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{x^2-1}{2x}=\boldsymbol{\frac{x^2-1}{4x}}$$





(2) (1) の結果から，$a=1$ のとき

$$S=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)}\quad(0 \leqq x \leqq 1)$$

$0<x<1$ のとき，両辺の自然対数をとると

$$\log S=\log x+3\log(1-x)-\log(1+x)-\log 4$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}\frac{S'}{S}&=\frac{1}{x}-\frac{3}{1-x}-\frac{1}{1+x}\\&=\frac{(1-x)(1+x)-3x(1+x)-x(1-x)}{x(1+x)(1-x)}\\&=-\frac{3x^2+4x-1}{x(1+x)(1-x)}\end{aligned}$$

ゆえに　$S'=-\dfrac{3x^2+4x-1}{x(1+x)(1-x)}\cdot\dfrac{x(1-x)^3}{4(1+x)}=-\dfrac{(3x^2+4x-1)(1-x)^2}{4(1+x)^2}$

$0<x<1$ に注意して，$S'=0$ を解くと　$x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$

したがって，S の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって，S を最大にする x は　$\boldsymbol{x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}}$ ■

4 (1) 集合 A_n のうち n 番目の文字が a または b である文字列の個数を x_n，n 番目の文字が c である文字列の個数を y_n とすると，次の漸化式が成立する．

$$x_1 = 2,\ y_1 = 1 \qquad (*)\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \qquad (n \geqq 1)$$

漸化式から　$x_{n+1} - \lambda y_{n+1} = (2-\lambda)x_n + 2y_n \quad \cdots (**)$

ここで，$1 : -\lambda = 2-\lambda : 2$ とすると

$$-\lambda(2-\lambda) = 1{\cdot}2 \quad \text{ゆえに} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

この2次方程式の解を α，β とすると $(\alpha > \beta)$

$$\alpha = 1+\sqrt{3}, \quad \beta = 1-\sqrt{3}$$

とすると，$2-\alpha = \beta$，$2-\beta = \alpha$ であるから，$(**)$ より

$$x_{n+1} - \alpha y_{n+1} = \beta(x_n - \alpha y_n)$$
$$x_{n+1} - \beta y_{n+1} = \alpha(x_n - \beta y_n)$$

したがって　$x_n - \alpha y_n = \beta^{n-1}(x_1 - \alpha y_1) = \beta^n$

$x_n - \beta y_n = \alpha^{n-1}(x_1 - \beta y_1) = \alpha^n$

上の2式から　$x_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$，$y_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

$$x_n + y_n = \frac{(\alpha+1)\alpha^n - (\beta+1)\beta^n}{\alpha - \beta}$$

ここで，$\alpha + 1 = \dfrac{\alpha^2}{2}$，$\beta + 1 = \dfrac{\beta^2}{2}$ であるから

$$x_n + y_n = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha - \beta)} \quad \cdots ①$$

よって　$P(n) = \dfrac{x_n + y_n}{3^n} = \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha - \beta)3^n}$

$$= \boldsymbol{\frac{(1+\sqrt{3})^{n+2} - (1-\sqrt{3})^{n+2}}{4\sqrt{3}{\cdot}3^n}}$$

(2) ① より，A_n の個数を a_n とすると　$a_n = \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha - \beta)}$

$(*)$ より，7 番目の文字が c であるとき

k	1	$\cdots$	7	8	9	$\cdots$	n
x_k	2	$\cdots$	0	$2y_7$	$4y_7$	$\cdots$	$2y_7x_{n-8}$
y_k	1	$\cdots$	y_7	0	$2y_7$	$\cdots$	$2y_7y_{n-8}$

$x_9 = 2y_7x_1$，$y_9 = 2y_7y_1$ であるから，このときの場合の数は　$2y_7a_{n-8}$

同様に，7 番目と 10 番目の文字が c であるとき

k	1	$\cdots$	7	8	9	10	11	12	$\cdots$	n
x_k	2	$\cdots$	0	$2y_7$	$4y_7$	0	$8y_7$	$16y_7$	$\cdots$	$8y_7x_{n-11}$
y_k	1	$\cdots$	y_7	0	$2y_7$	$4y_7$	0	$8y_7$	$\cdots$	$8y_7y_{n-11}$

$x_{12} = 8y_7x_1$，$y_{12} = 8y_7y_1$ であるから，このときの場合の数は　$8y_7a_{n-11}$

したがって　$Q(n) = \dfrac{8y_7a_{n-11}}{2y_7a_{n-8}} = \dfrac{4(\alpha^{n-9} - \beta^{n-9})}{\alpha^{n-6} - \beta^{n-6}}$

$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left\{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}\right\}}{\alpha^3 - \beta^3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}} = \frac{4}{\alpha^3}$

$\alpha\beta = -2$ に注意して　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n) = \frac{4\beta^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{4(1-\sqrt{3})^3}{(-2)^3} = \mathbf{3\sqrt{3} - 5}$

発展　行列を用いると，$(*)$ は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7 番目が c であるとき，9 番目に注目して

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-9}\begin{pmatrix} 4y_7 \\ 2y_7 \end{pmatrix} &= 2y_7\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2y_7\begin{pmatrix} x_{n-8} \\ y_{n-8} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

このときの場合の数は　$2y_7(x_{n-8} + y_{n-8}) = 2y_7a_{n-8}$　■

$\boxed{5}$ (1) (必要性) $f(x) = 0$ が虚数解をもつことが必要であるから，係数について

$$c^2 - 4 < 0 \quad \text{すなわち} \quad -2 < c < 2$$

実数を係数とする方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき，それらは互いに共役であるから，その 2 解を z，$\overline{z}$ とおくと，解と係数の関係により

$$z\overline{z} = 1 \quad \text{すなわち} \quad |z| = 1$$

したがって，z と $\overline{z}$ は T 上にある．

(十分性) T 上にある 2 数 z，$\overline{z}$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - (z + \overline{z})x + z\overline{z} = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2\mathrm{Re}(z)x + 1 = 0$$

$-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$ であるから，$c = -2\mathrm{Re}(z)$ とおくと　$-2 < c < 2$

よって，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{-2 < c < 2}$

(2) 実数を係数とする方程式 $F(x) = 0$ の解が T 上にあるとき，(1) の結果から，これらの解を α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ とおける $(|\alpha| = |\beta| = 1)$．
x^4 の係数が 1 であることに注意して，因数定理を用いると

$$\begin{aligned} F(x) &= (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})(x - \beta)(x - \overline{\beta}) \\ &= \{x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + |\alpha|^2\}\{x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + |\beta|^2\} \\ &= \{x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + 1\}\{x^2 - 2\mathrm{Re}(\beta)x + 1\} \end{aligned}$$

$c_1 = -2\mathrm{Re}(\alpha)$，$c_2 = -2\mathrm{Re}(\beta)$ とすると　$-2 < c_1 < 2$，$-2 < c_2 < 2$

よって　$F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1) \quad (-2 < c_1 < 2,\ -2 < c_2 < 2)$

(3) $$\begin{aligned} F(x) &= (x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1) \\ &= x^4+(c_1+c_2)x^3+(c_1c_2+2)x^2+(c_1+c_2)x+1 \end{aligned}$$

これと $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ の同じ次数の項の係数を比較すると

$$c_1+c_2=a,\quad c_1c_2=b-2 \quad \cdots (*)$$

c_1，c_2 を解とする 2 次方程式は　$x^2-ax+b-2=0$

この方程式は，実数解をもつから

$$(-a)^2-4\cdot 1(b-2) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad b \leqq \frac{a^2}{4}+2 \quad \cdots ①$$

$-2<c_1<2$，$-2<c_2<2$ より

$$-4<c_1+c_2<4,\quad (c_1+2)(c_2+2)>0,\quad (c_1-2)(c_2-2)>0$$

第 1 式に $(*)$ を適用すると　$-4<a<4 \quad \cdots ②$

第 2 式を展開すると　$c_1c_2+2(c_1+c_2)+4>0$

これに $(*)$ を適用すると

$$b-2+2a+4>0 \quad \text{ゆえに} \quad b>-2a-2 \quad \cdots ③$$

第 3 式を展開すると　$c_1c_2-2(c_1+c_2)+4>0$

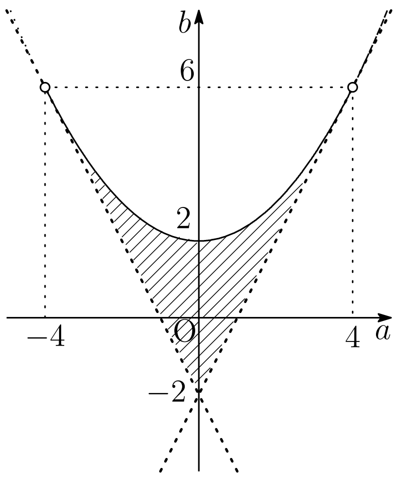
これに $(*)$ を適用すると

$$b-2-2a+4>0 \quad \text{ゆえに} \quad b>2a-2 \quad \cdots ④$$

①～④ より，点 $(a,\ b)$ の満たす領域は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-4<a<4} \\ \boldsymbol{b \leqq \dfrac{a^2}{4}+2} \\ \boldsymbol{b>-2a-2} \\ \boldsymbol{b>2a-2} \end{cases}$$

ただし，境界は実線部のみ．



■

4.4　2018 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 a，b，c を実数とし，3 つの 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2+ax+1=0 &\quad \cdots ① \\ x^2+bx+2=0 &\quad \cdots ② \\ x^2+cx+3=0 &\quad \cdots ③ \end{aligned}$$

の解を複素数平面上で考察する．

(1) 2 つの方程式 ①，② がいずれも実数解を持たないとき，それらの解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にあることを示せ．また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を a，b を用いて表せ．

(2) 3 つの方程式 ①，②，③ がいずれも実数解を持たず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a，b，c を用いて表せ．

2 次の問に答えよ．

(1) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を一組求めよ．

(2) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの，およびその最小値を求めよ．

3 方程式

$$e^x(1-\sin x)=1$$

について，次の問に答えよ．

(1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ．また，正の実数解を無限個持つことを示せ．

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ を求めよ．

4 xyz 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1, \quad |z| \leqq 6$$

により定まる領域を V とし，2 点 $(2,\ 0,\ 2)$，$(-2,\ 0, -2)$ を通る直線を ℓ とする．

(1) $|t| \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする．また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする．L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ．

(2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える．このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ．

5 xyz 空間内の一辺の長さが 1 の立方体

$$\{(x,\ y,\ z)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$$

を Q とする．点 X は頂点 A$(0,\ 0,\ 0)$ から出発して Q の辺上を 1 秒ごとに長さ 1 だけ進んで隣の頂点に移動する．X が x 軸，y 軸，z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p，q，r である．ただし

$$p \geqq 0, \quad q \geqq 0, \quad r \geqq 0, \quad p+q+r=1$$

である．X が n 秒後に頂点 A$(0,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ 0,\ 1)$，D$(0,\ 1,\ 1)$ にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．

(1) a_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n と p，q，r を用いて表せ．

(2) $a_n-b_n+c_n-d_n$ を p，q，r，n を用いて表せ．

(3) a_n を p，q，r，n を用いて表せ．

解答例

1 (1) $x^2+ax+1=0\cdots$①，$x^2+bx+2=0\cdots$②，$x^2+cx+3=0\cdots$③

a, b は実数で，①，② は実数解を持たないから，① の 2 解を α, $\overline{\alpha}$ とし，② の 2 解を β, $\overline{\beta}$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\overline{\alpha}=-a,\quad \alpha\overline{\alpha}=1,\quad \beta+\overline{\beta}=-b,\quad \beta\overline{\beta}=2\quad\cdots(*)$$

したがって　$\mathrm{Re}(\alpha)=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=-\dfrac{a}{2},\quad \mathrm{Re}(\beta)=\dfrac{\beta+\overline{\beta}}{2}=-\dfrac{b}{2}$

(i) $a=b$ のとき，$\mathrm{Re}(\alpha)=\mathrm{Re}(\beta)$ であるから，このとき，4 点 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ は点 $-\dfrac{a}{2}$ を通り虚軸に平行な直線上にある．

(ii) $a\neq b$ のとき，2 点 α, $\overline{\alpha}$ を通る円の中心は実軸上にあり，2 点 β, $\overline{\beta}$ を通る円の中心も実軸上にある．この円の中心を k とすると (k は実数)，次式を満たすとき，4 点 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ を通る円が存在する．

$$|\alpha-k|=|\beta-k|\quad \text{ゆえに}\quad \alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})k=\beta\overline{\beta}-(\beta+\overline{\beta})k$$

$(*)$ により　$1+ak=2+bk$　ゆえに　$k=\boldsymbol{\dfrac{1}{a-b}}$

また，この円の半径を r とすると

$$\begin{aligned}r^2&=|\alpha-k|^2=\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})k+k^2\\&=1+ak+k^2=1+\frac{a}{a-b}+\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{2a^2-3ab+b^2+1}{(a-b)^2}\end{aligned}$$

よって　$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2a^2-3ab+b^2+1}}{|a-b|}}$

(2) ③ の 2 解を γ, $\overline{\gamma}$ とすると　$\gamma+\overline{\gamma}=-c,\quad \gamma\overline{\gamma}=3\quad\cdots(**)$

$b=c$ のとき，(i) と同様にして，$\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\gamma)$ となる．このとき，4 点 β, $\overline{\beta}$, γ, $\overline{\gamma}$ は同一直線上にあり，不適．

したがって，$b\neq c$ のとき，(ii) の結果および次式を満たせばよい．

$$|\beta-k|=|\gamma-k|\quad \text{ゆえに}\quad \beta\overline{\beta}-(\beta+\overline{\beta})k=\gamma\overline{\gamma}-(\gamma+\overline{\gamma})k$$

$(*)$，$(**)$ により　$2+bk=3+ck$　ゆえに　$k=\dfrac{1}{b-c}$

①，②，③ が実数解を持たないことと上式および (ii) から

$$\boldsymbol{a^2-4<0,\quad b^2-8<0,\quad c^2-12<0,\quad a-b=b-c\neq 0}$$

注意 解答を $\boldsymbol{a^2<4,\ b^2<8,\ c^2<12,\ a\neq b,\ a+c=2b}$ としてもよい．

別解 $\lambda_1 = a$，$\lambda_2 = b$，$\lambda_3 = c$ とおく．

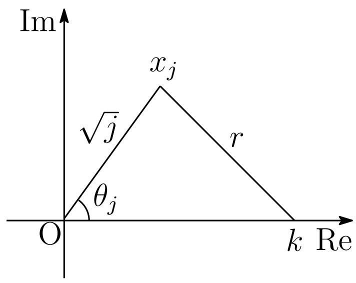
$x^2 + \lambda_1 x + 1 = 0 \cdots$①，$x^2 + \lambda_2 x + 2 = 0 \cdots$②，$x^2 + \lambda_3 x + 3 = 0 \cdots$③

①，②，③ は実数解を持たないから

$$\lambda_j = -2\sqrt{j}\cos\theta_j \quad (0 < \theta_j < \pi)$$
$$x_j = \sqrt{j}\,(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

とおくと，x_1，$\overline{x}_1$ は ① の解，x_2，$\overline{x}_2$ は ② の解，x_3，$\overline{x}_3$ は ③ の解である．

6 点 x_j，$\overline{x_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ の実軸に関する対称性により，この 6 点を通る円の中心を k(k は実数)，半径を r とする．右の図の三角形に余弦定理を適用すると



$$r^2 = j + k^2 - 2|k|\sqrt{j}\cos\theta_j$$
$$r^2 - k^2 = j + |k|\lambda_j$$

これに $j = 1, 2, 3$ を代入すると

$$r^2 - k^2 = 1 + |k|a = 2 + |k|b = 3 + |k|c$$

したがって　$|k|(a - b) = |k|(b - c) = 1$

①，②，③ が実数解を持たないことと上式から

$$a^2 - 4 < 0, \quad b^2 - 8 < 0, \quad c^2 - 12 < 0, \quad a - b = b - c \neq 0$$ ■

2 (1) $35x + 91y + 65z = 3$ は，$5{\cdot}7x + 7{\cdot}13y + 5{\cdot}13z = 3 \quad \cdots(*)$

$$35x \equiv 3 \pmod{13}, \quad 91y \equiv 3 \pmod{5}, \quad 65z \equiv 3 \pmod{7}$$

ゆえに　$x \equiv 9 \pmod{13}$，$y \equiv 3 \pmod{5}$，$z \equiv 5 \pmod{7}$

整数 a，b，c を用いて

$$x = 9 + 13a, \quad y = 3 + 5b, \quad z = 5 + 7c \quad \cdots(**)$$

$(**)$ を $(*)$ に代入すると　$5{\cdot}7(9 + 13a) + 7{\cdot}13(3 + 5b) + 5{\cdot}13(5 + 7c) = 3$

整理すると　$a + b + c = -2$

$a = b = -1$，$c = 0$ とすると　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-4, -2,\ 5)}$

(2) $|x| \geqq 4$ (等号は $x = -4$ のとき)，$|y| \geqq 2$ (等号は $y = -2$ のとき) であるから，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-4, -2,\ 5)}$ のとき，$x^2 + y^2$ の最小値は　**20** ■

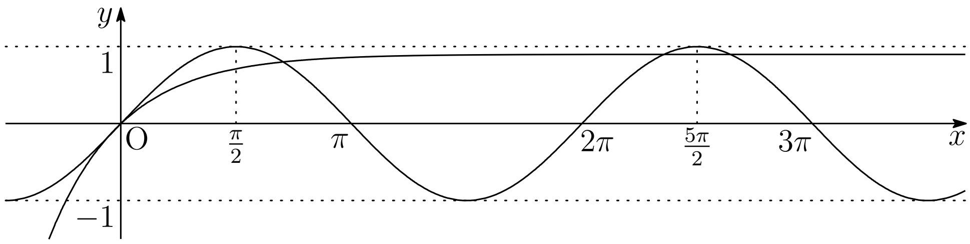
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ を変形すると　$1-e^{-x}=\sin x$　$\cdots(*)$

$(*)$ より，$f(x)=1-e^{-x}-\sin x$ とおくと　$f'(x)=e^{-x}-\cos x$

$$f(0)=0,\ x<0 \text{ のとき } f'(x)>0$$

$x<0$ において $f(x)<0$ であるから，$x<0$ において $(*)$ の解はない．

$x>0$ において，$0<1-e^{-x}<1$．基本周期 2π の周期関数 $\sin x$ の値域は $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから，$(*)$ の正の解は無限個ある．



(2) $f(\frac{\pi}{2})<0$，$f(\pi)>0$ より　$\frac{\pi}{2}<a_1<\pi$

k を自然数とすると

$$f(2k\pi)>0,\quad f\left(\left(2k+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right)<0,\quad f((2k+1)\pi)>0$$

ゆえに　$2k\pi<a_{2k}<(2k+\frac{1}{2})\pi<a_{2k+1}<(2k+1)\pi$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1}<\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\pi=m^2\pi$$
$$\sum_{k=1}^{m} a_{2k}>\sum_{k=1}^{m}2k\pi=m(m+1)\pi$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1}<\sum_{k=1}^{m} a_{2k}$ であるから　$\displaystyle 2m^2\pi<\sum_{k=1}^{2m} a_k<2m(m+1)\pi$

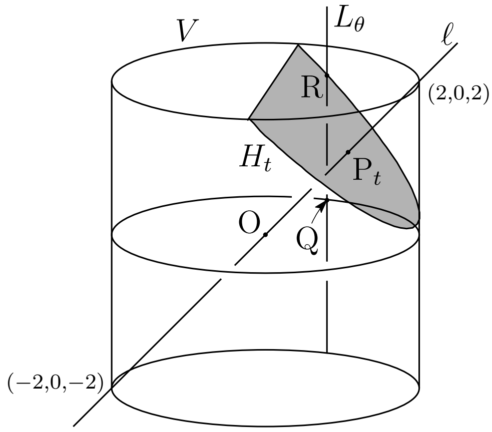
$$\frac{\pi}{2}<\frac{1}{(2m)^2}\sum_{k=1}^{2m} a_k<\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(2m)^2}\sum_{k=1}^{2m} a_k=\frac{\pi}{2}\quad \text{よって}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

■

4 (1) 点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を Q とし，Q を通り z 軸に平行な直線 L_θ と平面 H_t の交点を $\mathrm{R}(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ z_{\mathrm{R}})$ とすると，$\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}}=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ z_{\mathrm{R}}-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

直線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{v}=(1,\ 0,\ 1)$ とすると，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}}=0$ であるから

$$1\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+1\left(z_{\mathrm{R}}-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=0 \quad \text{よって} \quad z_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{\sqrt{2}t-2\cos\theta}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}}=\left(2\cos\theta-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}-2\cos\theta\right)$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}}|^2&=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\sin^2\theta+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-2\cos\theta\right)^2\\&=7\cos^2\theta-4\sqrt{2}t\cos\theta+t^2+1\\&=7\left(\cos\theta-\frac{2\sqrt{2}t}{7}\right)^2+1-\frac{t^2}{7}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}}|^2$ の最小値を r^2 とすると

$$r^2=\begin{cases}1-\dfrac{t^2}{7} & \left(|t|\leqq\dfrac{7}{2\sqrt{2}}\right)\\(|t|-2\sqrt{2})^2 & \left(\dfrac{7}{2\sqrt{2}}\leqq|t|\leqq2\sqrt{2}\right)\end{cases}$$

よって，求める回転体の体積は，r^2 が t に関する偶関数であるから

$$\begin{aligned}&2\pi\int_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}}\left(1-\frac{t^2}{7}\right)dt+2\pi\int_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}}(t-2\sqrt{2})^2\,dt\\&=2\pi\Big[\,t-\frac{t^3}{21}\,\Big]_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}}+\frac{2\pi}{3}\Big[\,(t-2\sqrt{2})^3\,\Big]_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi}\end{aligned}$$

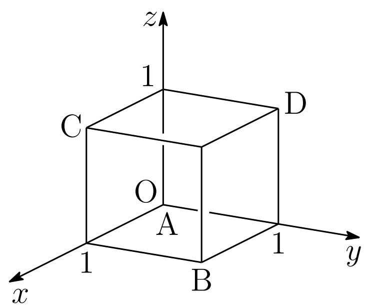
■

$\boxed{5}$ (1) X が n 秒後に A，B，C，D にある確率がそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n より

n が偶数のとき　$a_n+b_n+c_n+d_n=1$

n が奇数のとき　$a_n=b_n=c_n=d_n=0$

X が $n+2$ 秒後に A にあるとき，X は n 秒後に 4 点 A，B，C，D のいずれかある．このとき，これらの 4 点から A に移動する確率は



(i) X が n 秒後に A にあるとき　$p^2+q^2+r^2$

(ii) X が n 秒後に B にあるとき　$2pq$

(iii) X が n 秒後に C にあるとき　$2rp$

(iv) X が n 秒後に D にあるとき　$2qr$

よって，次の確率漸化式が成立する．

$$\boldsymbol{a_{n+2}=(p^2+q^2+r^2)a_n+2pqb_n+2rpc_n+2qrd_n}$$

(2) (1) と同様にして，c_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n を用いて表すと

$$c_{n+2}=2rpa_n+2qrb_n+(p^2+q^2+r^2)c_n+2pqd_n$$

上式および (1) の辺々を加えると

$$\begin{aligned}a_{n+2}+c_{n+2}&=(p^2+q^2+r^2+2rp)(a_n+c_n)+(2pq+2qr)(b_n+d_n)\\&=(p^2+q^2+r^2+2rp)(a_n+c_n)+(2pq+2qr)(1-a_n-c_n)\\&=(p^2+q^2+r^2-2pq-2qr+2rp)(a_n+c_n)+2q(p+r)\\&=(p-q+r)^2(a_n+c_n)+2q(1-q)\\&=(1-2q)^2(a_n+c_n)+2q(1-q)\end{aligned}$$

したがって　$a_{n+2}+c_{n+2}-\dfrac{1}{2}=(1-2q)^2\left(a_n+c_n-\dfrac{1}{2}\right)$

n が偶数のとき，$a_0=1$，$c_0=0$ より

$$a_n+c_n-\frac{1}{2}=(1-2q)^n\cdot\frac{1}{2}\quad ゆえに\quad a_n+c_n=\frac{1}{2}\{1+(1-2q)^n\}$$

$a_n-b_n+c_n-d_n=a_n+c_n-(b_n+d_n)=2(a_n+c_n)-1$ より

$$\boldsymbol{a_n-b_n+c_n-d_n=\begin{cases}(1-2q)^n & (n\text{ が偶数})\\ 0 & (n\text{ が奇数})\end{cases}}$$

(3) b_{n+2}，c_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n を用いて表すと

$$b_{n+2} = 2pqa_n + (p^2+q^2+r^2)b_n + 2qrc_n + 2rpd_n \quad \cdots ①$$
$$d_{n+2} = 2qra_n + 2rpb_n + 2pqc_n + (p^2+q^2+r^2)d_n \quad \cdots ②$$

これらは (1),(2) で求めた確率漸化式

$$a_{n+2} = (p^2+q^2+r^2)a_n + 2pqb_n + 2rpc_n + 2qrd_n$$
$$c_{n+2} = 2rpa_n + 2qrb_n + (p^2+q^2+r^2)c_n + 2pqd_n$$

に対して，① は b_n (b_{n+2}) と c_n (c_{n+2})，q と r を交換したものであり，② は d_n (d_{n+2}) と c_n (c_{n+2})，q と p を交換したものである．$b_0=0$，$d_0=0$ であるから，(2) と同様にして

$$a_n + b_n = \frac{1}{2}\{1+(1-2r)^n\}$$
$$a_n + d_n = \frac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\}$$

上の 2 式と $a_n + c_n = \dfrac{1}{2}\{1+(1-2q)^n\}$ の辺々を加えると

$$2a_n + (a_n+b_n+c_n+d_n) = \frac{1}{2}\{3+(1-2p)^n+(1-2q)^n+(1-2r)^n\}$$

$a_n+b_n+c_n+d_n=1$ であるから

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\{1+(1-2p)^n+(1-2q)^n+(1-2r)^n\} & (n\text{ が偶数}) \\ 0 & (n\text{ が奇数}) \end{cases}}$$

補足　a_n を求めたことにより，a_n+b_n，a_n+c_n，a_n+d_n の結果により，n が偶数のとき

$$b_n = \frac{1}{4}\{1-(1-2p)^n-(1-2q)^n+(1-2r)^n\}$$
$$c_n = \frac{1}{4}\{1-(1-2p)^n+(1-2q)^n-(1-2r)^n\}$$
$$d_n = \frac{1}{4}\{1+(1-2p)^n-(1-2q)^n-(1-2r)^n\}$$

■

4.5　2019 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 (1) $h>0$ とする．座標平面上の点 O(0, 0)，点 P$(h,\ s)$，点 Q$(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする．ただし，$s<t$ とする．三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ p，q，r とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときの s，t の値を求めよ．

(2) 四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，辺 AD，BD，CD の長さをそれぞれ ℓ，m，n とする．このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ．

2 次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A，B を求めよ．

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x-1)+A+\frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする．

3 i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

(1) 原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ．

(2) 複素数平面の相異なる 2 点 z，w を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分 $L(0,\ 1)$，$L\left(1,\ 1+\dfrac{i}{2}\right)$，$L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$，$L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$，$L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$，$L(i,\ 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

4 $H_1, \cdots, H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする．$H_1, \cdots, H_n$ によって空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，

- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$，

である．

(1) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

5 $a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

を考える．

(1) 関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ．

(2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) O(0, 0)，P(h, s)，Q(h, t) より ($s < t$)

$$p^2 = \mathrm{OP}^2 = h^2 + s^2, \quad q^2 = \mathrm{OQ}^2 = h^2 + t^2, \quad r^2 = \mathrm{PQ}^2 = (t-s)^2$$

$S = \triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}h(t-s)$ であるから

$$\begin{aligned} p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S &= (h^2+s^2)+(h^2+t^2)+(t-s)^2-4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}h(t-s) \\ &= 2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2(s^2-st+t^2) \\ &= 2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}(s+t)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

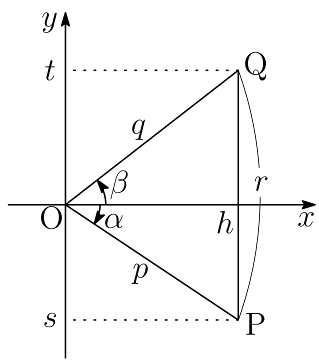
したがって　$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$

上式において等号が成立するとき

$$h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)=s+t=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{s=-\frac{h}{\sqrt{3}},\ t=\frac{h}{\sqrt{3}}}$$

このとき，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}h$ であるから，△OPQ は正三角形

別解 OP，OQ の偏角をそれぞれ α, β とする．
$\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$



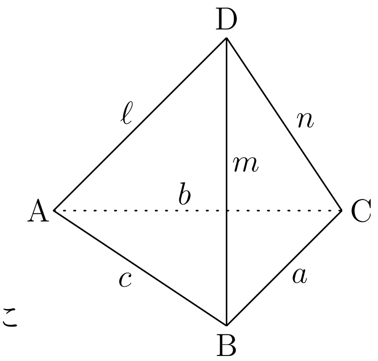
$$\begin{aligned} p^2 &= h^2(1+\tan^2\alpha) \\ q^2 &= h^2(1+\tan^2\beta) \\ r^2 &= h^2(\tan\beta-\tan\alpha)^2 \\ S &= \frac{1}{2}h^2(\tan\beta-\tan\alpha) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S}{h^2} &= (1+\tan^2\alpha)+(1+\tan^2\beta) \\ &\quad +(\tan\beta-\tan\alpha)^2-2\sqrt{3}(\tan\beta-\tan\alpha) \\ &= \left(\tan\beta-\tan\alpha-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &\quad +\left(\tan\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\tan\beta-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

等号が成立するとき　$\alpha=-\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　△OPQ は正三角形

(2) (1) の結果を利用すると



$$a^2+b^2+c^2 \geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{ABC}$$
$$c^2+\ell^2+m^2 \geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{DAB}$$
$$a^2+m^2+n^2 \geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{DBC}$$
$$b^2+n^2+\ell^2 \geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{DCA}$$

$T=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{DAB}+\triangle\mathrm{DBC}+\triangle\mathrm{DCA}$ に注意して上の 4 式の辺々を加えると

$$2(a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2) \geqq 4\sqrt{3}T$$

したがって　$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$

また，(1) の結論から，上式において等号が成立するとき，四面体 ABCD は**正四面体**である．

解説　$2s=p+q+r$ とし，3 正数 $s-p$，$s-q$，$s-r$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(s-p)+(s-q)+(s-r)}{3} \geqq \sqrt[3]{(s-p)(s-q)(s-r)} \quad \cdots ①$$

① における等号成立条件は　$s-p=s-q=s-r$　すなわち　$p=q=r$

$$\frac{s^4}{27} \geqq s(s-p)(s-q)(s-r)$$
$$(2s)^2 \geqq 12\sqrt{3}\sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)}$$
$$(p+q+r)^2 \geqq 12\sqrt{3}S \quad \cdots ②$$

$\vec{u}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}=(p,\ q,\ r)$ を $|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geqq (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ に適用すると

$$(1^2+1^2+1^2)(p^2+q^2+r^2) \geqq (1\cdot p+1\cdot q+1\cdot r)^2 \quad (\text{シュワルツの不等式})$$
$$3(p^2+q^2+r^2) \geqq (p+q+r)^2 \quad \cdots ③$$

③ において等号が成立するとき　$\vec{u}/\!/\vec{v}$　すなわち　$p=q=r$

②，③ より　$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$　(等号が成立とき $p=q=r$)

この幾何不等式を **Weitzenbock** の不等式という．■

2 (∗) $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x} \qquad (1 \leqq x \leqq 2)$

(∗) の左辺について，$t = xy$ とおくと

y	$\frac{1}{x} \longrightarrow \frac{2}{x}$
t	$1 \longrightarrow 2$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy &= \int_1^2 \left|\log \frac{t}{x}\right| f(t) \frac{1}{x}\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\log\frac{t}{x}\,dt + \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)\log\frac{t}{x}\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_1^x f(t)(\log t - \log x)\,dt - \frac{1}{x}\int_2^x f(t)(\log t - \log x)\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\log t\,dt + \frac{\log x}{x}\int_1^x f(t)\,dt \\
&\qquad - \frac{1}{x}\int_2^x f(t)\log t\,dt + \frac{\log x}{x}\int_2^x f(t)\,dt
\end{aligned}$$

上式により，(∗) の両辺に x を掛けると

$$\begin{aligned}
-\int_1^x f(t)\log t\,dt - \int_2^x f(t)\log t\,dt + (\log x)\left(\int_1^x f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt\right) \\
= 3x^2(\log x - 1) + Ax + B \quad \cdots (**)
\end{aligned}$$

(∗∗) の両辺を x について微分すると

$$\begin{aligned}
-2f(x)\log x + \frac{1}{x}\left(\int_1^x f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt\right) + (\log x)\cdot 2f(x) \\
= 6x(\log x - 1) + 3x + A
\end{aligned}$$

上式の両辺を整理して，両辺に x を掛けると

$$\int_1^x f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt = 6x^2\log x - 3x^2 + Ax \quad \cdots (***)$$

(∗∗∗) に $x = 1,\ 2$ を代入すると

$$\int_2^1 f(t)\,dt = A - 3, \quad \int_1^2 f(t)\,dt = 2A + 24\log 2 - 12$$

これを解いて $\boldsymbol{A = 5 - 8\log 2}$, $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = -2 + 8\log 2 \quad \cdots ①$

$(**)$ に $x=1,\ 2$ を代入すると

$$-\int_2^1 f(t)\log t\,dt = A+B-3$$
$$-\int_1^2 f(t)\log t\,dt + (\log 2)\int_1^2 f(t)\,dt = 2A+B+12(\log 2-1)$$

上の 2 式に ① を代入すると

$$-\int_2^1 f(t)\log t\,dt = (5-8\log 2)+B-3,$$
$$-\int_1^2 f(t)\log t\,dt + (\log 2)(-2+8\log 2) = 2(5-8\log 2)+B+12(\log 2-1)$$

これらをそれぞれ整理すると

$$-\int_2^1 f(t)\log t\,dt = B+2-8\log 2,$$
$$-\int_1^2 f(t)\log t\,dt = B-2-2\log 2-8(\log 2)^2$$

上の 2 式から　　$\boldsymbol{B = 5\log + 4(\log 2)^2}$

$(***)$ を微分すると　$2f(x) = 12x\log x + A$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = 6x\log x + \frac{5}{2} - 4\log 2}$　■

3 (1) $z=a+bi$ とおくと ($a,\ b$ は整数)

$$r=\left|\frac{z}{3+2i}\right|=\frac{|a+bi|}{|3+2i|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{13}}$$

r を小さい順に調べると

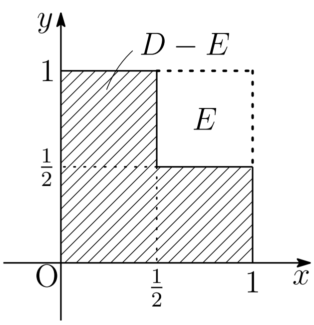
$(a,\ b)=(0,\ 0)$ のとき	$r=0$	(1 個)
$(a,\ b)=(\pm1,\ 0),\ (0,\pm1)$ のとき	$r=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$	(4 個)
$(a,\ b)=(\pm1,\pm1)$ のとき	$r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$	(4 個)
$(a,\ b)=(\pm2,\ 0),\ (0,\pm2)$ のとき	$r=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$	(4 個)
$(a,\ b)=(\pm2,\pm1),\ (\pm1,\pm2)$ のとき	$r=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	(8 個)
$(a,\ b)=(\pm2,\pm2)$ のとき	$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$	(4 個)

r	0	$\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$
$N(r)$	1	5	9	13	21	25

よって　$\{r\,|\,10\leqq N(r)<25\}$ は　$\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{13}}\leqq r<\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}}$

(2) 2 つの領域 D，E を次のように定める．

$$D=\{x+yi\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\},$$
$$E=\{x+yi\,|\,\tfrac{1}{2}<x\leqq 1,\ \tfrac{1}{2}<y\leqq 1\}$$



6 つの線分で囲まれる領域は $D-E$ で，右の図の斜線部分である．$z=a+bi$ とおくと

$$\frac{z}{3+2i}=\frac{3a+2b}{13}+\frac{-2a+3b}{13}i$$

これが，領域 D に含まれるとき

$$\begin{cases}0\leqq\frac{3a+2b}{13}\leqq1\\0\leqq\frac{-2a+3b}{13}\leqq1\end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad (*)\begin{cases}0\leqq 3a+2b\leqq 13\\0\leqq -2a+3b\leqq 13\end{cases}$$

また，領域 E に含まれるとき，a，b が整数であることに注意して

$$\begin{cases}\frac{1}{2}<\frac{3a+2b}{13}\leqq1\\\frac{1}{2}<\frac{-2a+3b}{13}\leqq1\end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad (**)\begin{cases}7\leqq 3a+2b\leqq 13\\7\leqq -2a+3b\leqq 13\end{cases}$$

$(*)$ の 2 式から a を消去すると (第 1 式 $\times 2+$ 第 2 式 $\times 3$)

$$0 \leqq 2(3a+2b)+3(-2a+3b) \leqq 13 \times 5 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq b \leqq 5$$

これらを順次，$(*)$ の 2 式に代入することにより

$b=0$ のとき	$a=0$	(1 個)
$b=1$ のとき	$a=0,\ 1$	(2 個)
$b=2$ のとき	$a=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$	(5 個)
$b=3$ のとき	$a=-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2$	(5 個)
$b=4$ のとき	$a=0,\ 1$	(2 個)
$b=5$ のとき	$a=1$	(1 個)

したがって，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数は

$$1+2+5+5+2+1=16 \text{ (個)}$$

$(**)$ の 2 式から a を消去すると (第 1 式 $\times 2+$ 第 2 式 $\times 3$)

$$7 \times 5 \leqq 2(3a+2b)+3(-2a+3b) \leqq 13 \times 5 \quad \text{ゆえに} \quad b=3,\ 4,\ 5$$

これらを順次，$(**)$ の 2 式に代入することにより

$b=3$ のとき	$a=1$	(1 個)
$b=4$ のとき	$a=0,\ 1$	(2 個)
$b=5$ のとき	$a=1$	(1 個)

したがって，$(**)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数は

$$1+2+1=4 \text{ (個)}$$

求める個数は，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数から $(**)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数を引けばよいから

$$16-4=\mathbf{12} \text{ (個)}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 平面の n 本の直線による最大分割数を s_n とすると $(n=1,2,\cdots)$，次の漸化式が成立する．

$$s_1=2,\quad s_n=s_{n-1}+n\quad (n\geqq 2)$$

$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(s_k-s_{k-1})=\sum_{k=2}^{n}k$　ゆえに　$s_n-s_1=\dfrac{1}{2}n(n+1)-1$

上の第 2 式は，$n=1$ のときも成立するから

$$s_n=\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

平面 $H_1,\cdots,H_n$ による空間分割が最大分割であるとき，その最大分割数を r_n とする $(n=1,2,\cdots)$．$H_1,\cdots,H_{n-1}$ と H_n との交線による平面 H_n の分割数は s_{n-1} に等しく，空間 $H_1,\cdots,H_{n-1}$ による最大分割数 r_{n-1} は，平面 H_n の分割により s_{n-1} だけ増加するから，次の漸化式が成立する．

$$r_1=2,\quad r_n=r_{n-1}+s_{n-1}\quad (n\geqq 2)$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}(r_k-r_{k-1})&=\sum_{k=2}^{n}s_{k-1}=\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+1\right\}\\ r_n-r_1&=\frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}\\ &\qquad+\sum_{k=2}^{n}\{k-(k-1)\}\\ r_n-2&=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)+n-1\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立することから

$$\begin{aligned}r_n&=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)+n+1\\ &=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1\end{aligned}$$

よって，$T(H_1,\cdots,H_n)$ のとり得る値のうち最も大きいものは

$$\boldsymbol{\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1}$$

(2)　(i)　$n=2$ のとき

$$T(H_1, H_2) = \begin{cases} 4 & (H_1 \text{ と } H_2 \text{ が平行でない}) \\ 3 & (H_1 \text{ と } H_2 \text{ が平行}) \end{cases}$$

よって，$T(H_1, H_2)$ のとり得る値で，2 番目に大きいものは　3

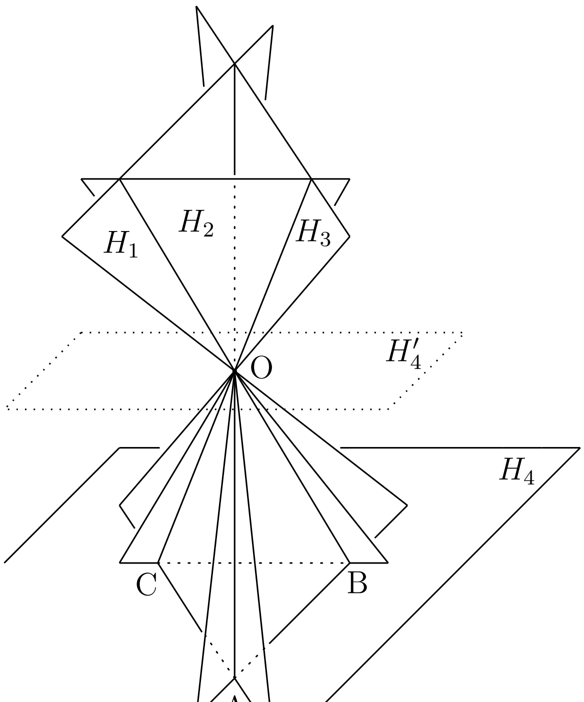
(ii)　$n=3$ のとき，(1) の結果および問題文にある具体例 1，2 から，$T(H_1, H_2, H_3)$ のとり得る最大値および 2 番目に大きい値は，それぞれ 8，7 である．
よって，$T(H_1, H_2, H_3)$ のとり得る値で，2 番目に大きいものは　7

(iii)　問題文にある具体例 4 では，閉領域

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0, \quad x+y+z \leqq 1$$

が存在し，$H_4 : x+y+z=1$ を平行移動した平面 $H_4' : x+y+z=0$ に移動することで，この閉領域は退化するから

$$T(H_1, H_2, H_3, H_4') = T(H_1, H_2, H_3, H_4) - 1 = 15 - 1 = 14$$



$n \geqq 4$ のとき，境界をもつ閉領域が存在し，閉領域 (四面体 OABC) の頂点の 1 つを O とし，O の対面に相当する平面 (平面 ABC) を O を通る平面に移動することで，この閉領域は退化する．

(i)〜(iii) から，求める値は　$r_n - 1 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n}$

(3) 平面 H_1, $H_2, \cdots$, H_n は，空間の最大分割を与えるものとする．

i) $n \geqq 5$ のとき，閉領域は複数あるため，(2) で行った閉領域の頂点への平面の移動により，その閉領域を退化させることができる．その平面の移動を 2 回行うことで，$T(H_1, H_2, \cdots, H_n)$ のとり得る値で 3 番目に大きいものは

$$r_n - 2 = \frac{1}{6}n^3 - \frac{5}{6}n - 1$$

ii) $n = 3$ のとき，(1) の結果および問題文にある具体例 1，2，3 から，$T(H_1, H_2, H_3)$ のとり得る最大値，2 番目および 3 番目に大きい値は，それぞれ 8，7，6 である．

iii) $n = 4$ のとき，問題文の具体例 4 および (2)(iii) で示した閉領域をもつとき，空間分割数はその最大値 15 をとる．$T(H_1, H_2, H_3, H_4)$ が最大値以外の値をとるとき，この閉領域が退化する A)，B) の場合がある．

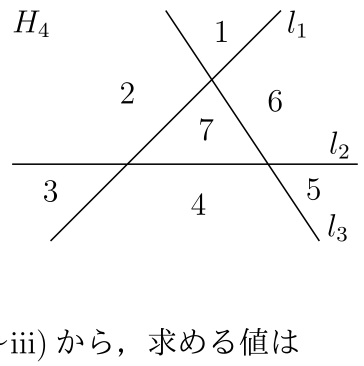
A) (2) で示したように閉領域が 1 つ退化して，4 平面の共有点 O が，各平面の中心となるとき，その分割数は 14 で，さらに領域を退化させるとき，O に関する対称性により，領域は偶数個ずつ減少するから，空間分割数が 13 になることはない (分割数は偶数)．

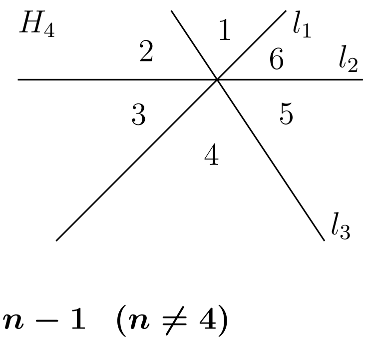
B) (2) で示した図で 3 平面 H_1, H_2, H_3 の共有点 O を解消する (領域が 1 つ減る)，すなわち，H_1, H_2 の交線と H_2, H_3 の交線を平行にとるとき (H_1, H_3 の交線もこれと平行)，その空間分割数は，H_4 に関して同数 (分割数は偶数個) であることに注意して (左下の図)

$$15 - 1 = 7 \times 2 = 14$$

H_1, H_2, H_3 の H_4 との交線を，それぞれ，l_1, l_2, l_3 とする．特に，l_1, l_2, l_3 が 1 点で交わるとき，その空間分割数は (右下の図)

$$6 \times 2 = 12$$





i)〜iii) から，求める値は
$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n - 1} & \boldsymbol{(n \neq 4)} \\ \boldsymbol{12} & \boldsymbol{(n = 4)} \end{cases}$$

空間の最大分割数

非負の整数 $p,\ q$ について，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & (p < q) \\ {}_p\mathrm{C}_q & (p \geqq q) \end{cases}$ とすると

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 \\ q+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q+1 \end{pmatrix}$$

(1) で求めた平面の直線による最大分割数 s_n は

$$s_n = \frac{1}{2}n(n+1)+1 = 1+n+\frac{1}{2}n(n-1) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$$

空間の平面による最大分割数 r_n は，$r_1 = 2,\ r_n = r_{n-1} + s_{n-1}\ (n \geqq 2)$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}(r_k - r_{k-1}) &= \sum_{k=2}^{n} s_{k-1} \\
r_n - 2 &= \sum_{k=2}^{n}\left\{1 + \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\
r_n &= 1+n+\sum_{k=2}^{n}\begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^{n}\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 1+n+\sum_{k=2}^{n}\left\{\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{n}\left\{\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \\
r_n &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

m 次元空間における n 個の余次元 $1(m-1$ 次元) の超平面による最大分割数は

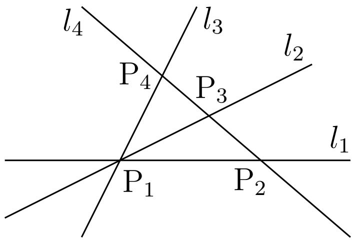
$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

である (帰納法により示すことができる).

平面の直線による分割

平面の n 本の直線による分割について ($n \geqq 2$)，オイラーの多面体定理[1] を用いた証明を与える．交点の総数を p，直線が交点で分断される線分の総数を S'，半直線の総数を S'' とし，$S = S' + S''$ とする．境界がすべて線分である領域を閉領域，半直線を境界に持つ領域を開領域という．閉領域，開領域の総数を，それぞれ R'，R'' とし，$R = R' + R''$ とおく．

交点の重複度を与える関数を λ とする．例えば，右の図における P_k の重複度は次のようになる．



$$\lambda(\mathrm{P}_1) = 3, \quad \lambda(\mathrm{P}_2) = \lambda(\mathrm{P}_3) = \lambda(\mathrm{P}_4) = 2$$

l_1 上には交点が 2 個，線分が 1 個あり，l_4 上には交点が 3 個，線分が 2 個ある (交点の数=線分の数 +1)．

一般に，n 本の直線について，交点の個数および線分の本数の総和を求めると

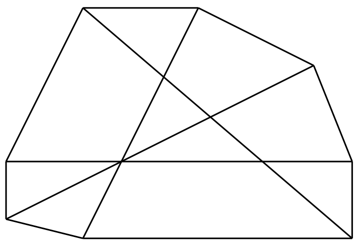
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda(\mathrm{P}_k) = S' + n$$

また，半直線の本数および開領域の個数は，半直線が放射状に伸びた部分から

$$S'' = 2n, \quad R'' = 2n$$

$S = S' + S''$ より　　$S = \sum_{k=1}^{p} \lambda(\mathrm{P}_k) + n$

右の図のように，n 本の半直線上に点をとり，それらを結んでできる図形を考え，その周囲の辺を底面とする立体を考える．その立体の頂点，辺，領域の数は，それぞれ $p + 2n$，$S + 2n$，$R + 1$ となる．これをオイラーの多面体定理に適用すると



$$(p + 2n) - (S + 2n) + (R + 1) = 2$$

よって

$$\begin{aligned} R &= 1 - p + S = 1 - p + \sum_{k=1}^{p} \lambda(\mathrm{P}_k) + n \\ &= 1 + n + p + \sum_{k=1}^{p} \{\lambda(\mathrm{P}_k) - 2\}, \\ R' &= 1 - n + p + \sum_{k=1}^{p} \{\lambda(\mathrm{P}_k) - 2\} \end{aligned}$$

重複度が 3 以上の交点について，その重複を 1 つ解消する (-1) ごとに p が 2 増えるから，すべての交点の重複度が 2 のとき，R は最大となり，このとき $p = {}_n\mathrm{C}_2$．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2016_10_19.pdf を参照．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = (x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ より $(x>0)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + (x+1)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x} \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \int_x^{x+1} \frac{dt}{x} = \int_x^{x+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right) dt < 0 \end{aligned}$$

よって，関数 $f(x)$ は $x>0$ で単調減少.

(2) $a = \dfrac{2^8}{3^4}$. 数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

$b_k > 0$ に注意して，両辺の自然対数をとると

$$\log b_k = (k+1)\log(k+1) - k\log a - \log k!$$

ゆえに $\quad \log b_{k+1} = (k+2)\log(k+2) - (k+1)\log a - \log(k+1)!$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} \log b_{k+1} - \log b_k &= (k+2)\log(k+2) - (k+2)\log(k+1) - \log a \\ &= (k+2)\log\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) - \log a \\ &= f(k+1) - \log a \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$2^2 > \dfrac{2^8}{3^4} > e$，$f(1) = 2\log 2$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} f(k+1) = 1$ および (1) の結論により

$$f(k+1) - \log a = 0$$

を満たす k はただ一つ存在し，実際，$k+1 = 3$ のとき

$$\log\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2} - \log\left(\frac{4}{3}\right)^4 = 0$$

$(*)$ より $\quad b_1 < b_2 = b_3 > b_4 > b_5 > \cdots$

よって $\quad b_k = M$ となる k は $\qquad \boldsymbol{k = 2,\ 3}$

$$M = b_2 = \frac{3^3}{a^2 2!} = \frac{3^3}{2}\left(\frac{3^4}{2^8}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{3^{11}}{2^{17}}} \qquad \left(= \frac{177147}{131072}\right)$$

補足 $g(x) = x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ とすると $(x>0)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1} \\ &= \int_x^{x+1}\frac{dt}{t} - \int_x^{x+1}\frac{dt}{x+1} = \int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x+1}\right)dt > 0 \end{aligned}$$

よって，$g(x)$ は $x>0$ で単調増加．また

$$f(x) - g(x) = (x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\} = 0$　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$　$\cdots$(A)

$f'(x) < 0$ より　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} < 0$　ゆえに　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < 1$

$g'(x) > 0$ より　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} > 0$　ゆえに　$1 < \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

上の 2 式から　　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < 1 < \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

$G(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，$F(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ とおくと

$$G(x) < e < F(x)$$

(A) より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} F(x)$ であるから

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} F(x) = e$$

さらに，$G(x) = F(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty} F(-x-1) = \lim_{x\to\infty} F(x-1) = e$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} G(x) = e$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x) = e$ であるから [2]

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

■

[2]数列の証明は，http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照．

4.6　2020 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ．

(1) $|x^2 - x - 23|$ の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ．

(2) k 個の連続した正の整数 x_1，$\cdots$，x_k に対して，

$$|{x_j}^2 - x_j - 23| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 x_1，$\cdots$，x_k をすべて求めよ．ここで k 個の連続した整数とは，

$$x_1,\ x_1 + 1,\ x_2 + 2,\ \cdots,\ x + k - 1$$

となる列のことである．

2 複素数平面上の異なる 3 点 A，B，C を複素数 α，β，γ で表す．ここで A，B，C は同一直線上にないと仮定する．

(1) △ABC が正三角形となる必要十分条件は，

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であることを示せ．

(2) △ABC が正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる．このとき，

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4 + \mathrm{BP}^4 + \mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ．ただし 2 点 X，Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標空間に 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(3,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 4),\ \mathrm{P}(0,\ 0,-2)$$

をとる．さらに $0 < a < 3$，$0 < b < 3$ に対して 2 点 Q$(a,\ 0,\ 0)$ と R$(0,\ b,\ 0)$ を考える．

(1) 点 P，Q，R を通る平面を H とする．平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ．

(2) 点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を正の奇数とする．曲線 $y = \sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x + y = 0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく．また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．

(2) (1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ k を正の整数とし，$a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく．

(1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ．

(2) k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ．

(3) (2) の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 $m,\ n$ $(m > n \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ．

(4) (2) と (3) の極限値 A，B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 $p,\ q,\ r$ $(p > q > r \geqq 1)$ を求めよ．またそのとき極限値を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=x^2-x-23$ とおくと，法3について

$$(*)\quad |f(x)|\equiv 2 \pmod 3$$

を満たす正の整数 x を求めればよい．

$$\begin{array}{llll} x\equiv 0 \text{ のとき} & f(x)\equiv 1, & -f(x)\equiv 2 & \pmod 3 \\ x\equiv 1 \text{ のとき} & f(x)\equiv 1, & -f(x)\equiv 2 & \pmod 3 \\ x\equiv 2 \text{ のとき} & f(x)\equiv 0, & -f(x)\equiv 0 & \pmod 3 \end{array}$$

$f(x)=(x+4)(x-5)-3=(x+5)(x-6)+7$ より

$$\begin{array}{lll} 1\leqq x\leqq 5 \text{ のとき} & f(x)<0 \text{ より} & |f(x)|=-f(x) \\ 6\leqq x \text{ のとき} & f(x)>0 \text{ より} & |f(x)|=f(x) \end{array}$$

$(*)$ を満たす正の整数は，$1\leqq x\leqq 5$ で

$$x\equiv 0 \quad \text{または} \quad x\equiv 1 \pmod 3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=1,\ 3,\ 4}$$

(2) (1) で示した

$$x\equiv 2 \text{ のとき} \quad |f(x)|\equiv 0 \pmod 3$$

により，$x\equiv 2 \pmod 3$ のとき，$|f(x)|$ は3で割り切れる．

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	**23**	21	**17**	**11**	**3**	**7**	**19**	33

$$x\geqq 6 \text{ のとき} \quad |f(x)|=f(x)\geqq f(6)=7$$

$x\equiv 2 \pmod 3$, $x\geqq 8$ のとき，$|f(x)|$ は3を因数にもつ合成数である．
このとき，連続して素数が現れる正の整数は高々2個である．
よって，上の表から，k の最大値は **5**

連続する正の整数は **3，4，5，6，7**

補足 正の整数 x を順次代入することで，結果 $(k=5)$ が予測できる．$x\geqq 8$ において，k が5より小さいことを示してもよい．例えば，法7について

$$\begin{array}{ll} f(8)\equiv f(1)=-23\equiv 5, & f(9)\equiv f(2)=-21\equiv 0, \\ f(10)\equiv f(3)=-17\equiv 4, & f(11)\equiv f(4)=-11\equiv 3, \\ f(12)\equiv f(5)=-3\equiv 4, & f(13)\equiv f(6)=7\equiv 0, \\ f(14)\equiv f(0)=-23\equiv 5 & \end{array}$$

このように，7で割り切れる数が間に現れ，$k<5$ であることが分かる．■

$\boxed{2}$ (1) 複素数平面上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が正三角形となるとき

$$w = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = w \quad \text{または} \quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \overline{w}$$

$w + \overline{w} = 1$，$w\overline{w} = |w|^2 = 1$ より，w，$\overline{w}$ を解とする 2 次方程式は

$$z^2 - (w+\overline{w})z + w\overline{w} = 0 \quad \text{すなわち} \quad z^2 - z + 1 = 0$$

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は，この 2 次方程式の解であるから

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 - \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} + 1 = 0 \quad \cdots ①$$

$$(\gamma-\alpha)^2 - (\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) + (\beta-\alpha)^2 = 0$$

整理すると　$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \quad \cdots (*)$

また，$(*) \Longrightarrow ① \Longrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = w,\ \overline{w} \Longrightarrow \triangle$ABC は正三角形

よって，△ABC が正三角形となる必要十分条件は

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

(2) 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする正三角形 ABC の外心を原点 O とすると ($|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = R$)，△ABC の外心と重心は一致するから

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha+\beta+\gamma = 0 \quad \cdots ②$$

△ABC の外接円の点 P(z) について ($|z| = R$)

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}^2 &= |z-\alpha|^2 = (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = |z|^2 - (\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z}) + |\alpha|^2 \\ &= 2R^2 - (\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z}) \end{aligned}$$

同様に　$\mathrm{BP}^2 = 2R^2 - (\overline{\beta}z + \beta\overline{z})$，$\mathrm{CP}^2 = 2R^2 - (\overline{\gamma}z + \gamma\overline{z})$

上の 3 式および ② から

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 &= 6R^2 - (\overline{\alpha+\beta+\gamma})z + (\alpha+\beta+\gamma)\overline{z} \\ &= \boldsymbol{6R^2} \end{aligned}$$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=0$ より　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

これと (1) の結果から

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \quad \cdots(**)$$

$\mathrm{AP}^2=2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^4&=(\mathrm{AP}^2)^2=\{2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})\}^2\\&=4R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+\overline{\alpha}^2z^2+2R^4+\alpha^2\overline{z}^2\\&=6R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+\overline{\alpha}^2z^2+\alpha^2\overline{z}^2\end{aligned}$$

同様に，$\mathrm{BP}^2=2R^2-(\overline{\beta}z+\beta\overline{z})$，$\mathrm{CP}^2=2R^2-(\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z})$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^4&=6R^4-4R^2(\overline{\beta}z+\beta\overline{z})+\overline{\beta}^2z^2+\beta^2\overline{z}^2,\\\mathrm{CP}^4&=6R^4-4R^2(\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z})+\overline{\gamma}^2z^2+\gamma^2\overline{z}^2\end{aligned}$$

これらの 3 式と $(**)$ により

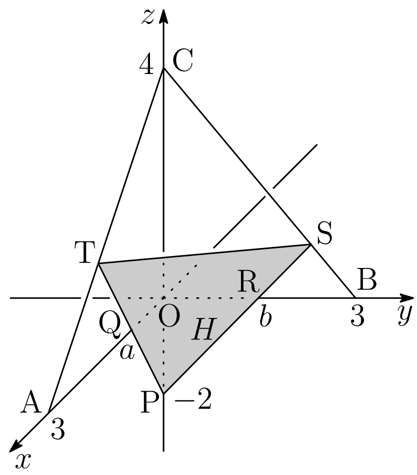
$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4&=18R^4-4R^2(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z-4R^2(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\&\quad+(\overline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})z^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\overline{z}^2=\boldsymbol{18R^4}\end{aligned}$$

別解　$w=\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ とおくと　$1+w+\overline{w}=0$，$1+w^2+\overline{w}^2=0$

$\mathrm{A}(R)$，$\mathrm{B}(Rw)$，$\mathrm{C}(R\overline{w})$，$\mathrm{P}(z)$ とおくと $(|z|=R)$

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=|z-R|^2+|z-Rw|^2+|z-R\overline{w}|^2\\&=(z-R)(\overline{z}-R)+(z-Rw)(\overline{z}-R\overline{w})\\&\qquad+(z-R\overline{w})(\overline{z}-Rw)\\&=2R^2-R(z+\overline{z})+2R^2-R(\overline{w}z+w\overline{z})\\&\qquad+2R^2-R(wz+\overline{wz})\\&=6R^2-R(1+w+\overline{w})(z+\overline{z})=\boldsymbol{6R^2},\\\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4&=(|z-R|^2)^2+(|z-Rw|^2)^2+(|z-R\overline{w}|^2)^2\\&=\{2R^2-R(z+\overline{z})\}^2+\{2R^2-R(\overline{w}z+w\overline{z})\}^2\\&\qquad\{2R^2-R(wz+\overline{wz})\}^2\\&=4R^4-4R^3(z+\overline{z})+R^2(z^2+\overline{z}^2+2R^2)\\&\quad+4R^4-4R^3(\overline{w}z+w\overline{z})+R^2(\overline{w}^2z^2+w^2\overline{z}^2+2R^2)\\&\qquad+4R^4-4R^3(wz+\overline{wz})+R^2(w^2z^2+\overline{w}^2\overline{z}^2+2R^2)\\&=18R^4-4R^3(1+w+\overline{w})(z+\overline{z})+R^2(1+w^2+\overline{w}^2)(z^2+\overline{z}^2)\\&=\boldsymbol{18R^4}\end{aligned}$$

3　(1) T は 2 点 P$(0,\ 0, -2)$，Q$(a,\ 0,\ 0)$ を通る直線上の点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

とおくと (t は実数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\\ \overrightarrow{\mathrm{OT}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= (at,\ 0,\ 2t-2)\\ &= \frac{at}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

T は線分 AC 上の点であるから　$\dfrac{at}{3} + \dfrac{t-1}{2} = 1$

ゆえに　$t = \dfrac{9}{2a+3}$　　よって　$\mathbf{T}\left(\dfrac{\mathbf{9a}}{\mathbf{2a+3}},\ \mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{4(3-a)}}{\mathbf{2a+3}}\right)$

S は 2 点 P$(0,\ 0, -2)$，R$(0,\ b,\ 0)$ を通る直線上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = s\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

とおくと (s は実数)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s(\overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\ &= (0,\ bs,\ 2s-2) = \frac{bs}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{s-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

S は線分 BC 上の点であるから　$\dfrac{bs}{3} + \dfrac{s-1}{2} = 1$

ゆえに　$s = \dfrac{9}{2b+3}$　　よって　$\mathbf{S}\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{9b}}{\mathbf{2b+3}},\ \dfrac{\mathbf{4(3-b)}}{\mathbf{2b+3}}\right)$

別解　T は zx 平面上の 2 直線 AC，PQ の交点であるから

$$\mathrm{AC} : \frac{x}{3} + \frac{z}{4} = 1,\quad \mathrm{PQ} : \frac{x}{a} + \frac{z}{-2} = 1$$

ゆえに　$x = \dfrac{9a}{2a+3},\quad z = \dfrac{4(3-a)}{2a+3}$　　よって　$\mathrm{T}\left(\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{4(3-a)}{2a+3}\right)$

S は yz 平面上の 2 直線 BC，PR の交点であるから

$$\mathrm{BC} : \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1,\quad \mathrm{PQ} : \frac{y}{b} + \frac{z}{-2} = 1$$

ゆえに　$y = \dfrac{9b}{2b+3},\quad z = \dfrac{4(3-b)}{2b+3}$　　よって　$\mathrm{S}\left(0,\ \dfrac{9b}{2b+3},\ \dfrac{4(3-b)}{2b+3}\right)$

(2) 方べきの定理とその逆により，点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT} = \mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS} \quad \text{ゆえに} \quad t\mathrm{PQ}^2 = s\mathrm{PR}^2$$

が成立することである．$\mathrm{PQ}^2 = a^2 + 4$，$\mathrm{PR}^2 = b^2 + 4$ および (1) で求めた s，t を上の第 2 式に代入すると

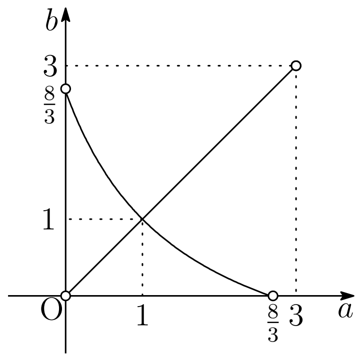
$$\frac{9}{2a+3}\cdot(a^2+4) = \frac{9}{2b+3}\cdot(b^2+4)$$

ゆえに　$(a^2+4)(2b+3) = (b^2+4)(2a+3)$

$$(a-b)(2ab+3a+3b-8) = 0$$

よって　$\boldsymbol{b = a}$　**または**　$\boldsymbol{b = \dfrac{-3a+8}{2a+3}}$

$\boldsymbol{(0 < a < 3,\ 0 < b < 3)}$



$\boxed{4}$ (1) O を原点とする xy 系から，O を原点とし X 軸，Y 軸をそれぞれ ℓ に平行および垂直な XY 系への直交変換を行う．xy 系の正規直交基底

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，XY 系の正規直交基底を

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = X\vec{f}_1 + Y\vec{f}_2$ より

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{X}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X+Y \\ -X+Y \end{pmatrix}$$

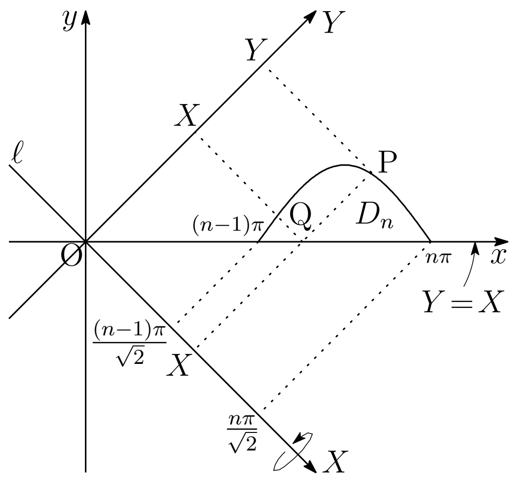
したがって　$\begin{cases} x = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$　逆に　$(*)\begin{cases} X = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$

XY 系において点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ と点 Q の X 座標は等しく，Q は直線 $Y=X$ 上の点であるから

$$\mathrm{Q}(X,\ X)$$

線分 PQ を ℓ (X 軸) の周りに 1 回転させてできる図形の面積は

$$\pi(Y^2-X^2)=\pi\left\{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=2\pi xy=\boldsymbol{2\pi x\sin x}$$



(2) $(*)$ より　$X=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{dX}{dx}=\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{2}}$　ゆえに

x	$(n-1)\pi\ \longrightarrow\ n\pi$
X	$\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}\ \longrightarrow\ \frac{n\pi}{\sqrt{2}}$

(1) の結果から，回転体の体積 V_n は，n が奇数であることに注意して

$$\begin{aligned}
\frac{V_n}{\pi}&=\int_{\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{n\pi}{\sqrt{2}}}(Y^2-X^2)\,dX\\
&=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}2x\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}\,dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(2x\sin x-x\sin 2x)\,dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-2x\cos x+2\sin x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\\
&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(4n-\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V_n=\sqrt{2}\pi^2\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)}$

発展 D_n の面積を S_n とし，x 軸の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体の体積を W_n とすると

$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = 2,$$

$$W_n = \pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

D_n の対称性により D_n の重心を $\mathrm{G}_n\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}, h_n\right)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理[3] により

$$W_n = 2\pi h_n S_n \quad \text{ゆえに} \quad h_n = \frac{W_n}{2\pi S_n} = \frac{\pi}{8}$$

重心 $\mathrm{G}_n\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{8}\right)$ から直線 $\ell : x+y=0$ までの距離を d_n とすると

$$d_n = \frac{\left|\dfrac{(2n-1)\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2n - \frac{3}{4}\right)$$

よって $\quad V_n = 2\pi d_n S_n = 2\pi\cdot\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2 = \sqrt{2}\pi^2\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)$

別解 $y=\sin x$ の微小区間 $[t,\ t+\Delta t]$ の面積 ΔS とその重心 G は

$$\Delta S = (\sin t)\Delta t, \quad \mathrm{G}\left(t,\ \frac{1}{2}\sin t\right)$$

G と直線 $x+y=0$ の距離 d は $\quad d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \dfrac{1}{2}\sin t\right)$

$$V_n = 2\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{2}\sin t\right)\sin t\,dt$$

$$= \sqrt{2}\pi\Big[-t\cos t + \sin t + \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \sqrt{2}\pi^2\left(2n-\frac{3}{4}\right)$$

注意 パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外であるから，検算としての利用に留めなければならない． ■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

5 (1) $a_k=\displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\sin\frac{\pi x}{2}dx$ より (k は正の整数)

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= \int_0^1 x^{k+1}\sin\frac{\pi x}{2}dx = \int_0^1 x^{k+1}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)'dx \\
&= \left[\,x^{k+1}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\,\right]_0^1 - \int_0^1 (k+1)x^k\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx \\
&= \int_0^1 (k+1)x^k\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)'dx \\
&= \left[\,(k+1)x^k\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)\,\right]_0^1 - \int_0^1 k(k+1)x^{k-1}\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx \\
&= \frac{4(k+1)}{\pi^2} - \frac{4k(k+1)}{\pi^2}\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx
\end{aligned}$$

よって　$a_{k+2}=\dfrac{4(k+1)}{\pi^2}-\dfrac{4k(k+1)}{\pi^2}a_k=\boldsymbol{\dfrac{4(k+1)}{\pi^2}(1-ka_k)}$

(2) (1) の結果から　$1-ka_k=\dfrac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}$

$a_{k+2}=\displaystyle\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ より

$$0<a_{k+2}<\int_0^1 x^{k+1}\,dx=\left[\,\frac{x^{k+2}}{k+2}\,\right]_0^1=\frac{1}{k+2}$$

したがって　　$0<1-ka_k<\dfrac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}(1-ka_k)=0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\lim_{k\to\infty}ka_k=1}$$

別解　$a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$ より (k は正の整数)

$$
\begin{aligned}
a_k &< \int_0^1 x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k},\\
a_k &= \int_0^1 \left(\frac{x^k}{k}\right)'\sin\frac{\pi x}{2}\,dx\\
&= \left[\ \frac{x^k}{k}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1\\
&\qquad\qquad + \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)\cos\frac{\pi x}{2}\,dx\\
&= \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)}\int_0^1 x^{k+1}\cos\frac{\pi x}{2}\,dx\\
&> \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)}\int_0^1 x^{k+1}dx = \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}
$$

したがって　$\dfrac{1}{k} - \dfrac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} < a_k < \dfrac{1}{k}$

$$-\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)} < ka_k - 1 < 0$$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}\right\} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}(ka_k - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad A = \lim_{k\to\infty} ka_k = 1$$

(3) $a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2}\, dx$ より (k は正の整数) [別解を参照]

$$a_k > \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)},$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_0^1 \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin \frac{\pi x}{2}\, dx \\
&= \Bigg[\frac{x^k}{k} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right) \\
&\qquad + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)} \left(-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(-\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi x}{2}\right) \Bigg]_0^1 \\
&\qquad\qquad\quad + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(\frac{\pi^4}{16} \sin \frac{\pi x}{2}\right) dx \\
&< \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot \frac{\pi^4}{16}\, dx \\
&= \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
\end{aligned}$$

したがって

$$(*) \quad 0 < a_k - \frac{1}{k} + \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$A = 1$ および $(*)$ から，$\{k^m a_k - k^n A\}$ が 0 ではない値に収束することに注意して，辺々に $k^3 > 0$ を掛けると

$$0 < k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

さらに，辺々に $\dfrac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}$ を加えると

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} &< k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2}{4} \\
&< \frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^4k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}\left(k^3a_k-k^2A+\frac{\pi^2}{4}\right)=0$$

よって　$\boldsymbol{B=\lim_{k\to\infty}(k^3a_k-k^2A)=-\frac{\pi^2}{4},\ m=3,\ n=2}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}&<k^3a_k-k^2A-B\\&<\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\end{aligned}$$

辺々に $k>0$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}&<k^4a_k-k^3A-kB\\&<\frac{\pi^2k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\end{aligned}$$

さらに，辺々に $-\frac{3\pi^2}{4}$ を加えると

$$\begin{aligned}-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}&<k^4a_k-k^3A-kB-\frac{3\pi^2}{4}\\&<-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}\right\}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}\left(k^4a_k-k^3A-kB-\frac{3\pi^2}{4}\right)=0$$

よって　$\boldsymbol{\lim_{k\to\infty}(k^4a_k-k^3A-kB)=\frac{3\pi^2}{4},\ p=4,\ q=3,\ r=1}$

解説　本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x)$$
$$\cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx$$

が成立する．同様に，次式も成立する．

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x)$$
$$\cdots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x)\,dx$$

例えば，$\displaystyle\int x^{k-1}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$ について，$f(x) = \dfrac{x^k}{k}$，$g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ とすると

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{x^k}{k}\right)'\sin\frac{\pi x}{2}\,dx &= \frac{x^k}{k}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\\ &\quad + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)}\left(-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}\right)\\ &\quad - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(-\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\\ &\quad + \int \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(\frac{\pi^4}{16}\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx\end{aligned}$$

本題 (3) はこれを利用して，定積分を行っている．

発展 前ページで示した結果から，定積分についても同様に，次式が成立する．

$$\int_x^a f(t)g'(t)\,dt = \Big[\ f(t)g(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=0}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(-k)}(t)\ \Big]_x^a + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)g^{(-n+1)}(t)\,dt$$

$g^{(-k)}(t) = \dfrac{1}{k!}(t-x)^k$ とおくと $(k=-1,0,1,\ldots)$，$g(t)=1$，$g'(t)=0$ より

$$0 = \Big[\ f(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)\frac{(t-x)^k}{k!}\ \Big]_x^a + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

したがって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

ここで

$$J = (-1)^n\int_x^a \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = (-1)^n\Big[\ \frac{(t-x)^n}{n!}\ \Big]_x^a = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

とおき，積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると

$$K = (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

は MJ と mJ の間にあるから

$$K = f^{(n)}(c)J$$

を満たす c が積分区間に少なくとも 1 つ存在する (積分学の平均値の定理)．

よって，次の等式が成立する (テイラー展開)．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

例えば，n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，次式が成立する．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + A(x-a)^n$$

■

4.7　2021 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 正の整数に関する条件

(∗)　10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件 (∗) を満たす正の整数の個数を a_k とする．このとき，a_k を k の式で表せ．

(2) 正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n \text{ が条件 } (*) \text{ を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件 } (*) \text{ を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく．このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

2 xy 平面上の楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) a，b を実数とする．直線 $\ell : y = ax + b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a，b の条件を求めよ．

(2) 実数 a，b，c に対して，直線 $\ell : y = ax + b$ と直線 $m : y = ax + c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする．ただし，$b > c$ とする．直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする．また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする．このとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

が成り立つための a，b，c の条件を求めよ．

(3) 楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ．

3 以下の問いに答えよ．

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ．

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ．

(2) 正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく．このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ．

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ．

4 S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする．S 上を動く点 A，B，C，D に対して

$$F = 2(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2) - 3(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ．

(2) 点 A，B，C，D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ．

(3) 点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，$F = M$ となる S 上の点 A，B の組をすべて求めよ．

5 xy 平面上の円 $C : x^2 + (y-a)^2 = a^2$ $(a > 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(2) 円 C が $y \geqq x^2 - x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(3) a が (2) の範囲にあるとする．xy 平面において連立不等式

$$|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4},\quad y \geqq x^2 - x^4,\quad x^2 + (y-a)^2 \geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答例

1　(1) 10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満で条件 $(*)$ を満たす数は，最高位の k 桁の数は 1〜8 の 8 通りで，他の 1 桁から $k-1$ 桁の数は 0〜8 の 9 通りであるから

$$\boldsymbol{a_k = 8\cdot 9^{k-1}}$$

(2) j を k 以下の自然数とし，10^{j-1} 以上かつ 10^j 未満で条件 $(*)$ を満たす整数の集合を U_j とすると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{n\in U_j}\frac{1}{n} \\
&\leqq \sum_{j=1}^{k}\sum_{n\in U_j}\frac{1}{10^{j-1}} = \sum_{j=1}^{k}\frac{a_j}{10^{j-1}} = \sum_{j=1}^{k}\frac{8\cdot 9^{j-1}}{10^{j-1}} \\
&= 8\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{j-1} = 8\times\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k}{1-\frac{9}{10}} \\
&= 80\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\} < 80
\end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と $\ell : y=ax+b$ を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ縮小した図形はそれぞれ $E' : x^2+y^2=1$，$\ell' : y=2ax+b$ である．

E と ℓ が異なる2点を共有するとき，E' と ℓ' も異なる2点を共有するから

$$\frac{|b|}{\sqrt{(2a)^2+1}}<1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b^2<4a^2+1}$$

(2) $m : y=ax+c$ を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ縮小した図形は

$$m' : y=2ax+c$$

である．条件を満たすとき，ℓ'，m' が E' と異なる2点で交わり，その弦の長さが等しいから

$$\frac{|b|}{\sqrt{(2a)^2+1}}=\frac{|c|}{\sqrt{(2a)^2+1}}<1$$

$b>c$ であるから，求める条件は

$$\boldsymbol{c=-b,\quad b^2<4a^2+1}$$

(3) (2) の結果から，$\ell : y=ax+b$ と $m : y=ax-b$ は原点に関して対称であり，楕円 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ も原点に関して対称である．また，(2) の4点P，Q，S，R が正方形の頂点となるとき，これらの頂点を

$$\mathrm{P}(-v,\ u),\quad \mathrm{Q}(u,\ v),\quad \mathrm{S}(-u,-v),\ \mathrm{R}(v,-u)$$

とすると $(u,v>0)$

$$u=-av+b,\quad v=au+b,\quad \frac{u^2}{4}+v^2=1,\quad \frac{v^2}{4}+u^2=1$$

上の第3式および第4式から　$u=v=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

これを第1式および第2式に代入すると　$a=0,\ b=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

また，直線PQおよび直線SRが y 軸に平行な場合も上の4頂点とみなしてよい．よって，求める4頂点は

$$\boldsymbol{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

■

3 (1) 正の整数 n に対して

$$\begin{aligned} n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n &= (n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= (n+1)\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = (n+1)_{2n}\mathrm{C}_{n-1} \end{aligned}$$

n と $n+1$ は互いに素であるから，上式より，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数である．

(2) 正の整数 n に対して，$n \geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2n-k}{n-k} \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n(2n-1)\cdots(n+3)(n+2)(n+1)}{n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1} \\ &= (n+2)\cdot\frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+3)}{(n-1)(n-2)\cdots3} \\ &= (n+2)\prod_{k=1}^{n-3}\frac{2n-k}{n-k} > n+2 \end{aligned}$$

(3) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ より (a_n はカタラン数[4])

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{{}_{2n+2}\mathrm{C}_{n+1}}{n+2} = \frac{1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2}\cdot\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}a_n \qquad (*) \end{aligned}$$

したがって　$(n+2)a_{n+1} = (4n+2)a_n$　$(**)$

$(*)$ から　$a_{n+1} > a_n$　$\cdots$①

また，(2) の結果を $(*)$ に適用すると，$n \geqq 4$ のとき

$$a_{n+1} > \frac{4n+2}{n+2}\cdot(n+2) = 4n+2 \quad \cdots②$$

a_{n+1} $(n \geqq 4)$ が素数のとき，$(**)$ より，a_{n+1} は $4n+2$ または a_n の素因数となるが，①，② より，a_{n+1} が $4n+2$ または a_n の素因数にはならない．

a_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ について，求めると

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 2,\quad a_3 = 5,\quad a_4 = 14 = 2\cdot7$$

よって，a_n が素数となる正の整数 n は　$\boldsymbol{n = 2,\ 3}$ ■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2008_kouki.pdf (p.6 参照)

4 (1) 3 点 A，B，C は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1, \quad |\vec{b}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1, \quad |\vec{c}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1, \quad |\vec{d}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = 1$$

$F = 2(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2) - 3(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2)$ より

$$\begin{aligned}
F &= 2\{|\vec{b} - \vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{c}|^2\} - 3\{|\vec{d} - \vec{a}|^2 + |\vec{d} - \vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2\} \\
&= 4(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{c}\cdot\vec{a}) \\
&\qquad - 3(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 3|\vec{d}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{d} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2\vec{c}\cdot\vec{d}) \\
&= 4(3 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{c}\cdot\vec{a}) - 3(6 - 2\vec{a}\cdot\vec{d} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2\vec{c}\cdot\vec{d}) \\
&= -4(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) + 6(\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{d}) - 6 \\
&= -2\{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a}\} + 6(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{d} \\
&= -2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + 6(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{d} \\
&= -2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{k = -2}$

(2) $\triangle$ABC の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$ とすると　$\vec{g} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

$\vec{g}$ は球 S の内部にあるから　$|\vec{g}| \leqq 1$

したがって，(1) の結果から

$$\begin{aligned}
F &= -2\cdot 3\vec{g}\cdot(3\vec{g} - 3\vec{d}) = -18(\vec{g}\cdot\vec{g} - \vec{d}\cdot\vec{g}) \\
&= -18\left|\vec{g} - \frac{1}{2}\vec{d}\right|^2 + \frac{9}{2}|\vec{d}|^2 = -18\left|\vec{g} - \frac{1}{2}\vec{d}\right|^2 + \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

$|\vec{g}| = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\vec{d} = 2\vec{g}$ とすると，このとき，F は最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとる．

よって　$\boldsymbol{M = \dfrac{9}{2}}$

(3) (2) の結果から，$F = M$ となるとき，$\vec{d} = 2\vec{g}$ であるから

$$\vec{d} = 2\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}+\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{d} - \vec{c}$$

$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，$\mathrm{D}(1,\ 0,\ 0)$ より　$\vec{a}+\vec{b} = \left(\frac{7}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$

したがって　$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 + 0^2 = 4$

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \theta = 0, \quad \vec{a} = \vec{b}$$

したがって　$\vec{a} = \vec{b} = \left(\frac{7}{8}, -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$

よって　$\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}, -\frac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{8}},\ \mathbf{0}\right)$，$\mathbf{B}\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}, -\frac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{8}},\ \mathbf{0}\right)$　■

5　(1) $C : x^2 + (y-a)^2 = a^2$ の中心を $\mathrm{A}(0,\ a)$，点 $\mathrm{P}(s,\ s^2)$ とすると $(a > 0)$

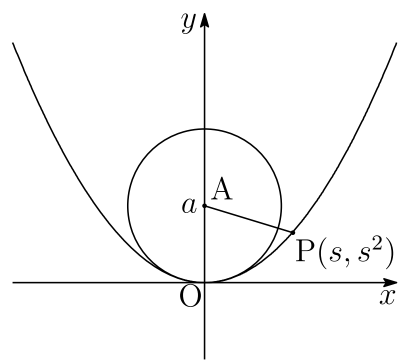
$$\mathrm{AP}^2 = s^2 + (s^2 - a)^2$$

であるから，$t = s^2$，$f(t) = \mathrm{AP}^2$ とおくと

$$f(t) = t + (t-a)^2 = \left(t - a + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4} \quad (t \geqq 0)$$

条件を満たすとき，$f(t)$ は $t = 0$ で最小でなければならないから

$$a - \frac{1}{2} \leqq 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{0 < a \leqq \frac{1}{2}}$$

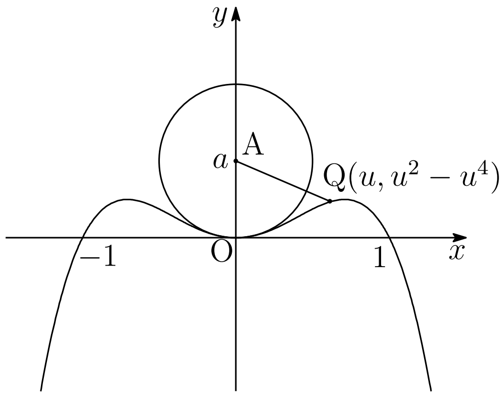


(2) 2点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{Q}(u,\ u^2-u^4)$ について $(a>0)$

$$\mathrm{AQ}^2 = u^2 + (u^2-u^4-a)^2$$

であるから，$t=u^2$，$g(t)=\mathrm{AQ}^2$ とおくと

$$g(t) = t + (t-t^2-a)^2 \quad (t \geqq 0)$$



$g(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= 1 + 2(t-t^2-a)(1-2t) \\ &= 4t^3-6t^2+(4a+2)t+1-2a \end{aligned}$$

条件を満たすとき，$g(t)$ は $t=0$ で最小でなければならないから，$t\to+0$ において $g'(t)\geqq 0$ であることが必要である．

$$1-2a \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0<a\leqq\frac{1}{2}$$

このとき　$$\begin{aligned} g(t) &= t+(t-t^2)^2-2a(t-t^2)+a^2 \\ &= (1-2a)t+2at^2+(t-t^2)^2+a^2 \geqq a^2 = g(0) \end{aligned}$$

上式において，等号が成立するのは，$t=0$ のときに限る．

よって，求める条件は　$\boldsymbol{0<a\leqq\dfrac{1}{2}}$

補足 $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，C は曲線 $y=x^2$ および $y=x^2-x^4$ の原点における接触円 (曲率円) である [5]．これらの曲線は，$x=0$ において，y，y'，y'' がそれぞれ等しく，原点における接触円が一致する．

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf (p.10 を参照)

(3) $y = x^2 - x^4$ より　$y' = 2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2)$

$y = x^2 - x^4$ は y 軸に関して対称であるから，$x \geqq 0$ における増減表は

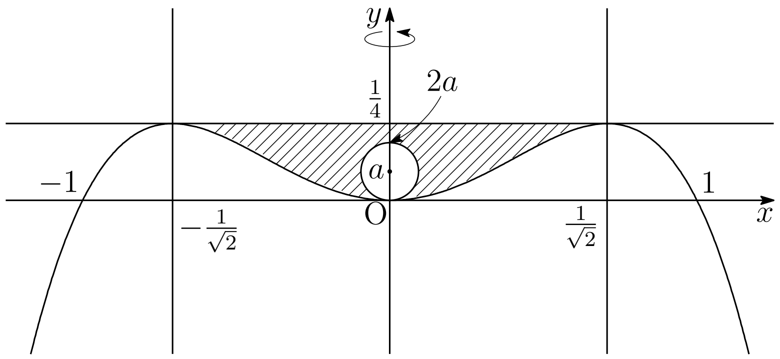
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	0	$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

求める回転体の体積を V，$y = x^2 - x^4$ と $y = \dfrac{1}{4}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積を V_1 とすると

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} x^2\,dy = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 y'\,dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2(2x - 4x^3)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^6 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

(i) $0 < a \leqq \dfrac{1}{8}$ のとき

$$V = V_1 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi}{24} - \frac{4}{3}\pi a^3$$



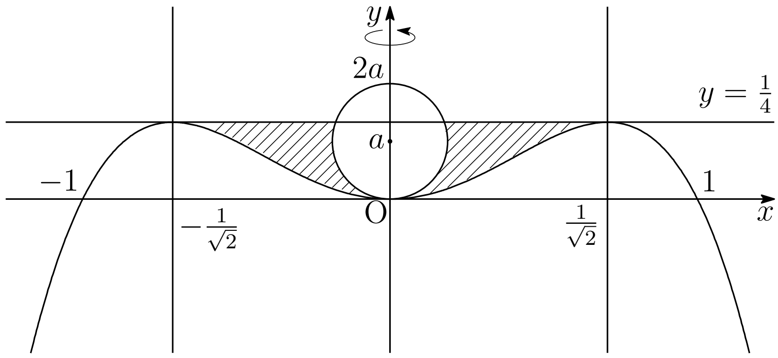
(ii) $\dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$x^2 + (y-a)^2 \leqq a^2$，$y \leqq \dfrac{1}{4}$ を満たす領域を y 軸の周り回転してできる立体の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} x^2\,dy = \pi \int_0^{\frac{1}{4}} (2ay - y^2)\,dy \\ &= \pi \Big[\, ay^2 - \frac{1}{3}y^3 \,\Big]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{\pi}{16}a - \frac{\pi}{192} \end{aligned}$$

したがって

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{24} - \left(\frac{\pi}{16}a - \frac{\pi}{192}\right) = \frac{3}{64}\pi - \frac{\pi}{16}a$$



よって　$\boldsymbol{V = \begin{cases} \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{4}{3}\pi a^3 & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{8}\right) \\ \dfrac{3}{64}\pi - \dfrac{\pi}{16}a & \left(\dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}}$

4.8　2022 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 a, b を実数とし，$f(z) = z^2 + az + b$ とする．a, b が

$$|a| \leqq 1, \quad |b| \leqq 1$$

を満たしながら動くとき，$f(z) = 0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

2 3 つの正の整数 a, b, c の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $a+b+c$, $bc+ca+ab$, abc の最大公約数は 1 であることを示せ．

(2) $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ．

3 α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\angle \mathrm{A} = \alpha$ および $\angle \mathrm{P} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t = \dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする．

(a) 時刻 t での点 A，B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \cos t)$ である．

(b) 点 P は第一象限内にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ．

(2) 時刻 $t=0$ から時刻 $t = \dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ．

(3) xy 平面内において，連立不等式

$$x^2 - x + y^2 < 0, \quad x^2 + y^2 - y < 0$$

により定まる領域を D とする．このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ．

4 a は正の実数とする．複素数 z が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w=\dfrac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) K が円となるための a の条件を求めよ．また，そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ．

(2) a が (1) の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ．

5 a は $0<a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数とし，$f(x)=\dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-ax\right)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の等式 $(*)$ を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ．

$$(*) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

(2) $0 \leqq b < c \leqq 1$ を満たす実数 b, c について，不等式

$$f(b)(c-b) \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の試行を考える．

［試行］n 個の数 $1, 2, \cdots, n$ を出目とする．あるルーレットを k 回まわす．

この［試行］において，各 $i=1, 2, \cdots, n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし，

$$(**) \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k}=\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$$

が成り立つとする．このとき，(1) の等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(4) (3) の［試行］において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし，$A_n=\displaystyle\lim_{k\to\infty}A_{n,k}$ とする．$(**)$ が成り立つとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ $f(z) = z^2 + az + b$ について ($|a| \leqq 1,\ |b| \leqq 1$)，$f(z) = 0$ の解は

$$z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

(i) $a^2 - 4b \geqq 0$ のとき，2 つの実数解を

$$\alpha = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},\ \beta = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

とおく．まず，a を固定すると，$-1 \leqq b \leqq 1$ より

$$\frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} \leqq \alpha \leqq -\frac{a}{2}, \quad -\frac{a}{2} \leqq \beta \leqq \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

これらの解は，閉区間 $\left[\dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2},\ \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right]$ にある．

$-1 \leqq a \leqq 1$ より，閉区間 $\left[\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$ である．

(ii) $a^2 - 4b < 0$ のとき，2 つの虚数解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係から

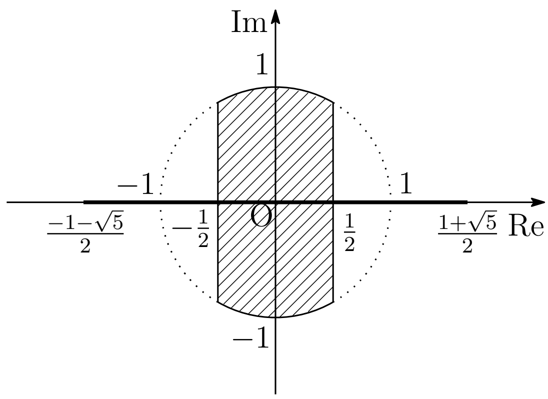
$$\alpha + \overline{\alpha} = -a, \quad \alpha\overline{\alpha} = b \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} = -\frac{a}{2}, \quad |\alpha|^2 = b$$

このとき，$-1 \leqq a \leqq 1$，$0 < b \leqq 1$ に注意して

$$-\frac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}(\alpha) \leqq \frac{1}{2}, \quad |\alpha|^2 \leqq 1 \ \ (|\alpha| \leqq 1)$$

したがって　$-\dfrac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2},\ |z| \leqq 1$

(i)，(ii) より，z のとりうる値の範囲は，次の境界線を含む領域である．



■

2　(1)　$A=a+b+c$，$B=bc+ca+ab$，$C=abc$ とおくと，a, b, c を解とする 3 次方程式は

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0$$

A, B, C が素数 p を因数にもつと仮定する (背理法).

a はこの方程式の解であるから

$$a^3=Aa^2-Ba+C$$

上式の右辺は p を因数にもつから，左辺 a^3 は p を因数にもつ，すなわち，a は p を因数にもつ．同様の議論により，b, c も p を因数にもつ．
これから，p は a, b, c の公約数となり，条件に反する．

別証　$A=a+b+c$，$B=bc+ca+ab$，$C=abc$ とおき，A, B, C が素数 p を因数にもつと仮定する (背理法).

C が p を因数にもつから，a, b, c の少なくとも 1 つが p を因数もつ．
一般性を失うことなく，a が p を因数にもつと

$$b+c=A-a,\quad bc=B-a(b+c)$$

上の 2 式の右辺は，ともに p を因数にもつから，$b+c$, bc は，p を因数もつ．

bc が p を因数にもつと，b, c の一方が p を因数もち，b が p を因数にもつとすれば，$c=(b+c)-b$ より，c も p を因数にもつ．
これから，p は a, b, c の公約数となり，条件に反する．

(2) $D = a^2 + b^2 + c^2$, $E = a^3 + b^3 + c^3$ とおくと

$$\begin{aligned} D &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= A^2 - 2B \\ E &= (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\} + 3abc \\ &= A(A^2 - 3B) + 3C \end{aligned}$$

ゆえに　$(*)$　$2B = A^2 - D$,　$3C = E - A(A^2 - 3B)$

A, D, E が素数 q $(q \geqq 5)$ を因数にもつと仮定すると，$(*)$ の第 1 式から，B は q を因数にもつ．これを $(*)$ の第 2 式に適用すると，C も q を因数にもつ．このとき，A, B, C が素数 q を因数にもち，条件に反する．

したがって，A, D, E の最大公約数は 2^m3^n (m ,n は 0 以上の整数) と表される．$(*)$ より，$2B$, $3C$ は 2^m3^n で割り切れるから，$m \geqq 2$, $n \geqq 2$ のとき，A は 2^m3^n で割り切れ，B は $2^{m-1}3^n$ で割り切れ，C は 2^m3^{n-1} で割り切れる．このことは，A, B, C の最大公約数が 1 であることに反する．

A, D, E の最大公約数を G とすると

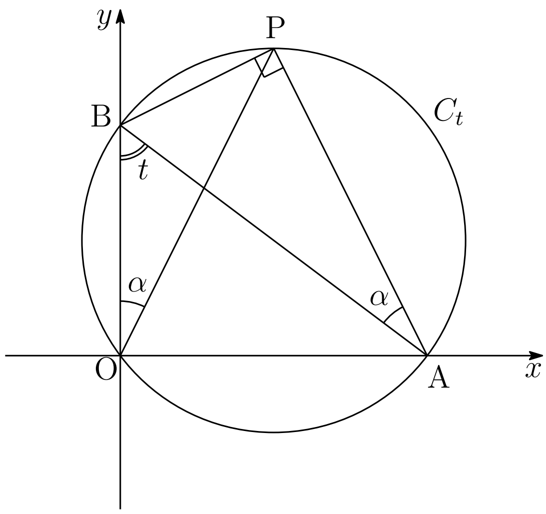
$$G \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$$

に絞られる．これら G の存在をすべて示せば十分である．

a	b	c	A	D	E	G
1	1	1	3	3	3	3
1	1	2	4	6	10	2
1	1	3	5	11	29	1
1	1	4	6	18	66	6

よって，求める最大公約数となる正の整数は　**1，2，3，6**　■

3 (1) AB を直径とする円を C_t とする．



$\angle\mathrm{P} = \dfrac{\pi}{2}$ より，P は C_t 上にある．

円周角の定理により

$$\angle\mathrm{BOP} = \angle\mathrm{BAP}$$

ゆえに　$\angle\mathrm{BOP} = \alpha$

直線 OP の偏角は　$\dfrac{\pi}{2} - \alpha$

直線 OP の方程式は

$$y = x\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

よって　　$\boldsymbol{y = \dfrac{x}{\tan\alpha}}$

(2) $\angle\mathrm{OBP} = t + \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{\pi}{2} - (\alpha - t)$

$\triangle$OBP に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin\angle\mathrm{OBP}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OP} = \sin\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha - t)\right\} = \cos(\alpha - t)$$

$f(t) = \mathrm{OP}$ とおくと，$f(t)$ は $t = 0$ から $t = \alpha$ まで単調増加，
$t = \alpha$ から $t = \dfrac{\pi}{2}$ まで単調減少である．

$$f(0) = \cos\alpha, \quad f(\alpha) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$$

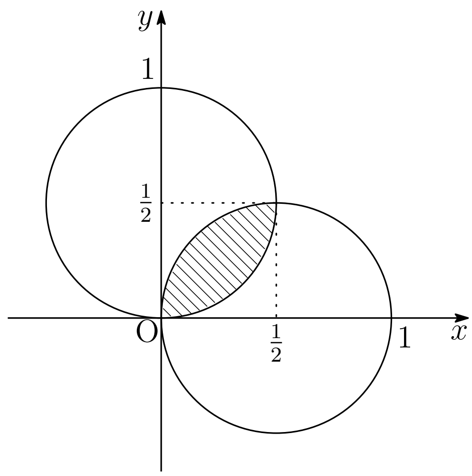
よって，点 P が動く道のりを L とすると

$$\begin{aligned} L &= \{f(\alpha) - f(0)\} + \left\{f(\alpha) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= 1 - \cos\alpha + (1 - \sin\alpha) = \boldsymbol{2 - \sin\alpha - \cos\alpha} \end{aligned}$$

(3) 与えらた連立不等式から

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4},$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

これを満たす領域 D は右の図の斜線部分である (境界線を含まない)．2 点 O，P を通る直線を ℓ とし，ℓ と D の境界線の交点を Q とする．



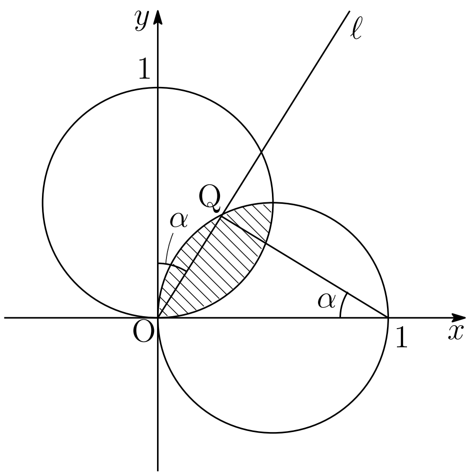
(i) $0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\mathrm{OQ}=\sin\alpha \leqq \cos\alpha = f(0) < f(t) = \mathrm{OP}$$

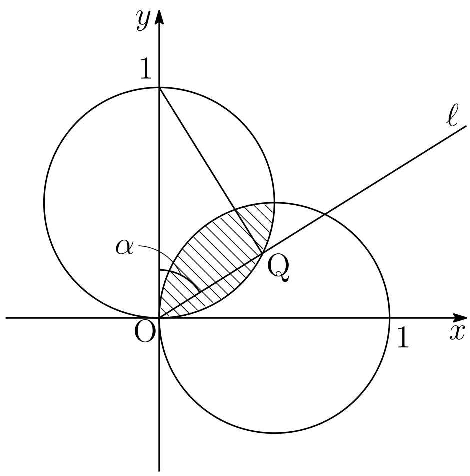
(ii) $\dfrac{\pi}{4} \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\mathrm{OQ}=\cos\alpha \leqq \sin\alpha = f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(t) = \mathrm{OP}$$

(i)，(ii) より，点 P は領域 D には入らない．



$0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$



$\dfrac{\pi}{4} \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

■

$\boxed{4}$ (1) $w = \dfrac{z-3}{1-2z}$ より　$(2w+1)z = w+3$　$w \neq -\dfrac{1}{2}$ であるから　$z = \dfrac{w+3}{2w+1}$

これを $|z-1| = a$ に代入すると

$$\left|\frac{w+3}{2w+1} - 1\right| = a \quad \text{ゆえに} \quad \left|\frac{-w+2}{2w+1}\right| = a \qquad (*)$$

上の第 2 式より　$|w-2|^2 = a^2|2w+1|^2$

$$(4a^2-1)|w|^2 + 2(a^2+1)(w+\overline{w}) + a^2 - 4 = 0$$

$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\mathrm{Re}(w) = \dfrac{w+\overline{w}}{2} = \dfrac{3}{4}$ となり，w は直線を表す．

$a \neq \dfrac{1}{2}$ のとき　$|w|^2 + \dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}(w+\overline{w}) + \dfrac{a^2-4}{4a^2-1} = 0$

$$\left|w + \frac{2(a^2+1)}{4a^2-1}\right|^2 = \frac{25a^2}{(4a^2-1)^2}$$

したがって，K が円である条件は　$\boldsymbol{a \neq \dfrac{1}{2}}$ **かつ** $\boldsymbol{a > 0}$

K の中心 $\boldsymbol{-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{5a}{|4a^2-1|}}$

別解 $a \neq \dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ より　$|w-2| : |w+\frac{1}{2}| = 2a : 1$

$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，K は 2 点 $2, -\dfrac{1}{2}$ の垂直二等分線 $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{3}{4}$

K は 2 点 $2, -\dfrac{1}{2}$ を $2a:1$ に内分および外分する 2 点

$$\frac{1\cdot 2 + 2a\left(-\frac{1}{2}\right)}{2a+1}, \quad \frac{-1\cdot 2 + 2a\left(-\frac{1}{2}\right)}{2a-1}, \quad \text{すなわち} \quad \frac{2-a}{2a+1}, \quad \frac{-2-a}{2a-1}$$

を直径の両端とする円である．

中心は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2-a}{2a+1} + \dfrac{-2-a}{2a-1}\right) = -\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}$

半径は　$\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2-a}{2a+1} - \dfrac{-2-a}{2a-1}\right| = \dfrac{5a}{|4a^2-1|}$

(2) (1) の結果から，2 点 $-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}+\dfrac{5a}{|4a^2-1|}i$，$-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}-\dfrac{5a}{|4a^2-1|}i$ を結ぶ線分が通過する領域である．その領域を表す点を $x+yi$ とすると

$$x=-\frac{2(a^2+1)}{4a^2-1},\quad |y|\leqq\frac{5a}{|4a^2-1|}$$

上の第 1 式から　$a^2=\dfrac{x-2}{2(2x+1)}>0$　ゆえに　$x<-\dfrac{1}{2}$, $2<x$

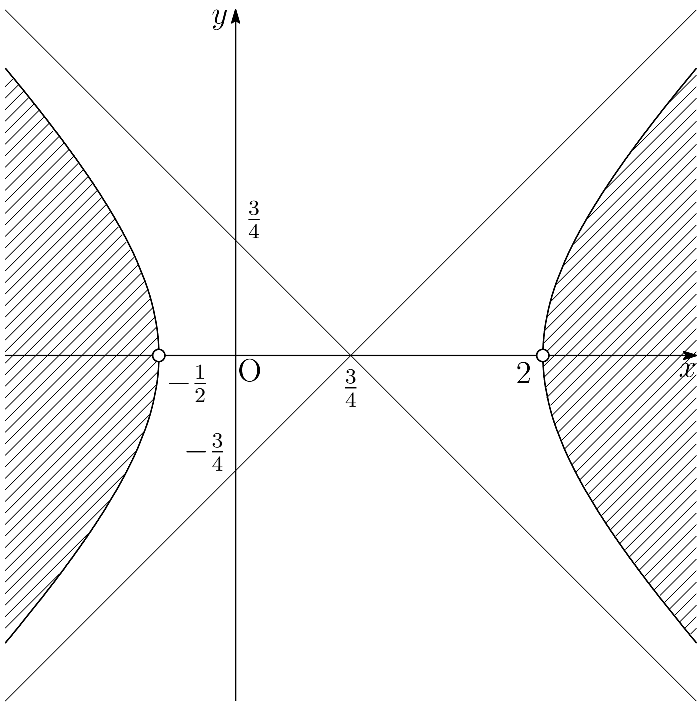
$x+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{4a^2-1}$ より　$-\dfrac{2}{5}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4a^2-1}$，$\dfrac{2}{5}|y|\leqq\dfrac{2a}{4a^2-1}$

$$\left(\frac{2}{5}|y|\right)^2-\left\{\frac{2}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2\leqq\frac{4a^2}{(4a^2-1)^2}-\frac{1}{(4a^2-1)^2}=\frac{1}{4a^2-1}$$

したがって　$\dfrac{4}{25}y^2-\dfrac{4}{25}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq-\dfrac{2}{5}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

以上の結果から　$\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-y^2\geqq\dfrac{25}{16}$，$x\neq-\dfrac{1}{2}$, 2

求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，○は含まない．



■

$\boxed{5}$ (1) $f(x) = \dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - ax\right)$ より　$f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}\sin 2ax$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin 2ax\right)dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{3a}\cos 2ax\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3a}\cos 2a + \frac{1}{3a}\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ が成立するとき

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3a}\cos 2a + \frac{1}{3a} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a + \cos 2a - 1 = 0 \qquad (*)$$

$g(a) = a + \cos 2a - 1$ とおくと　$g'(a) = 1 - 2\sin 2a$

$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ における $g(a)$ の増減表は

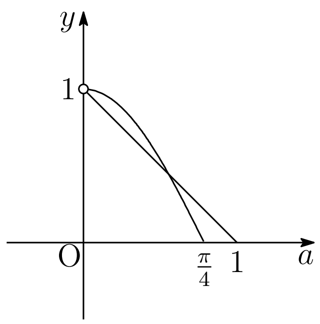
a	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	(0)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{\pi}{4} - 1$

$\dfrac{\pi}{4} - 1 < 0$ であるから，$(*)$ を満たす a がただ 1 つ存在する．

別解　$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において

$$\cos 2a = -a + 1 \qquad \text{(A)}$$

が満たす a がただ 1 つ存在することを示してもよい．$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，$y = \cos 2a$ と $y = -a + 1$ のグラフをかくと，右の図から，(A) を満たす a がただ 1 つ存在する．



(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加であるから，$0 \leqq b < c \leqq 1$ について

$$f(b) \leqq f(x) \leqq f(c) \qquad (b \leqq x \leqq c)$$

$\displaystyle\int_b^c f(b)\,dx \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq \int_b^c f(c)\,dx$ により，次式が成立する．

$$f(b)(c-b) \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq f(c)(c-b)$$

(3) 定義から　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_{n,k,i} = k$　ゆえに　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{S_{n,k,i}}{k} = 1$

上の第 2 式および (∗∗) が成立するとき

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{n,k,i}}{k} = 1$$

(4) $S_{n,k,i}$ を用いて　$\displaystyle A_{n,k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} iS_{n,k,i} = \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{S_{n,k,i}}{k}$

(∗∗) を適用すると

$$A_n = \lim_{k\to\infty} A_{n,k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{S_{n,k,i}}{k} = \sum_{i=1}^{n} i\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \tag{A}$$

ここで，$b = \dfrac{i-1}{n}$，$c = \dfrac{i}{n}$ を (2) に代入した不等式を用いると

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$
$$\frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq i\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

(A) より　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq A_n \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 xf(x)\,dx$ であるから，はさみうちの原理により

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} &= \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin 2ax\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3a}\cos 2ax + \frac{1}{6a^2}\sin 2ax\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3} - \frac{\cos 2a}{3a} + \frac{\sin 2a}{6a^2}}\end{aligned}$$

■

4.9　2023 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 実数 $\displaystyle\int_0^{2023} \frac{2}{x+e^x}\,dx$ の整数部分を求めよ．

2 方程式

$$(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

3 実数が書かれた 3 枚のカード $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{\sqrt{3}}$ から，無作為に 2 枚のカードを順に選び，出た実数を順に実部と虚部にもつ複素数を得る操作を考える．正の整数 n に対して，この操作を n 解繰り返して得られる n 個の複素数の積を z_n で表す．

(1) $|z_n|<5$ となる確率 P_n を求めよ．

(2) ${z_n}^2$ が実数となる確率 Q_n を求めよ．

4 xyz 空間において，x 軸を軸とする半径 2 の円柱から，$|y|<1$ かつ $|z|<1$ で表される角柱の内部を取り除いたものを A とする．また，A を x 軸のまわりに 45° 回転してから z 軸のまわりに 90° 回転したものを B とする．A と B の共通部分の体積を求めよ．

5 xyz 空間の 4 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ 1,-1)$，D$(-1,\ 0,\ 0)$ を考える．

(1) 2 直線 AB，BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ．

(2) 4 直線 AB，BC，CD，DA に共に接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ．

解答例

1 $I=\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx$ とおくと，$0\leqq x\leqq 2023$ のとき，$\dfrac{2}{x+e^x}\leqq\dfrac{2}{e^x}$ より

$$I\leqq\int_0^{2023}\frac{2}{e^x}\,dx=\int_0^{2023}2e^{-x}\,dx=\Big[-2e^{-x}\Big]_0^{2023}=2-\frac{2}{e^{2023}}<2$$

$f(x)=\dfrac{2}{x+e^x}$ とおき $(x\geqq 0)$，$(x+e^x)f(x)=2$ を微分すると

$$(1+e^x)f(x)+(x+e^x)f'(x)=0 \tag{1}$$

これをさらに微分すると

$$e^xf(x)+2(1+e^x)f'(x)+(x+e^x)f''(x)=0 \tag{2}$$

(1)，(2) から $f'(x)$ を消去すると

$$\begin{aligned}(x+e^x)^2f''(x)&=\{e^{2x}+(4-x)e^x+2\}f(x)\\&=\{e^x(e^x-x-1)+5e^x+2\}f(x)>0\end{aligned} \tag{3}$$

$(1+e)f(1)=2$ であるから，$x=1$ を (1) に代入すると

$$2+(1+e)f'(1)=0 \quad ゆえに \quad f'(1)=-\frac{2}{1+e}$$

$C:y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 $\ell:y=g(x)$ の方程式について

$$\begin{aligned}g(x)&=f'(1)(x-1)+f(1)\\&=-\frac{2}{1+e}(x-1)+\frac{2}{1+e}=-\frac{2}{1+e}(x-2)\end{aligned}$$

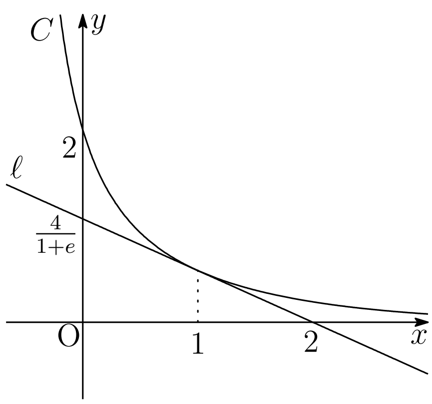
(3) より，$x\geqq 0$ において

$$f(x)\geqq g(x)$$

ℓ と x 軸，y 軸で囲まれ部分の面積から

$$I>\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{1+e}>\frac{1+e}{1+e}=1$$

$1<I<2$ より，I の整数部分は　**1**



別解 $g(x)=\dfrac{x+e^x}{e^x}=xe^{-x}+1$ とおくと　$g'(x)=(1-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$e^{-1}+1$	$\searrow$

これから　$\dfrac{x+e^x}{e^x}\leqq e^{-1}+1$　ゆえに　$x+e^x\leqq(e^{-1}+1)e^x$

$0\leqq x\leqq 2023$ のとき，$e^x\leqq x+e^x\leqq(e^{-1}+1)e^x$ より

$$\frac{2e}{e+1}\int_0^{2023}e^{-x}\,dx\leqq\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx\leqq 2\int_0^{2023}e^{-x}\,dx \qquad (*)$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{2023}e^{-x}\,dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^{2023}=1-e^{-2023}$

$1-e^{-2}<1-e^{-2023}<1$ であるから，上式および $(*)$ より

$$\frac{2e}{e+1}(1-e^{-2})<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx<2\cdot1$$
$$2-\frac{2}{e}<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx<2$$

$1<1+\dfrac{e-2}{e}=2-\dfrac{2}{e}$ より　　$\displaystyle 1<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx<2$

よって，求める整数値は　**1**　■

2 方程式 $(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ より　$(|x|^3-|x|)^2(y^3-y)=2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2$

$f(n)=n^3-n$ とおくと　　$f(|x|)^2f(y)=2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2$　$\cdots(*)$

$f(n)=n^3-n=(n-1)n(n+1)$ であるから，$f(y)\geqq 2{\cdot}3$ より

$$f(|x|)^2\leqq\frac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{2{\cdot}3}\quad\text{ゆえに}\quad f(|x|)\leqq 2^3{\cdot}3{\cdot}5$$

$f(n)\leqq 2^3{\cdot}3{\cdot}5$ を満たす自然数 n で，$f(n)$ が 2，3，5 の因数からなるものは

$$n\geqq 9\text{ のとき}\quad f(n)\geqq f(9)=8{\cdot}9{\cdot}10=2^4{\cdot}3^2{\cdot}5>2^3{\cdot}3{\cdot}5$$

に注意すると，次の 4 つである．$f(6)$，$f(7)$，$f(8)$ は 7 を因数にもつから不適．

n	2	3	4	5
$f(n)$	$2{\cdot}3$	$2^3{\cdot}3$	$2^2{\cdot}3{\cdot}5$	$2^3{\cdot}3{\cdot}5$
$\dfrac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{f(n)^2}$	$2^5{\cdot}3{\cdot}5^2$	$2{\cdot}3{\cdot}5^2$	$2^3{\cdot}3$	$2{\cdot}3$

上の表から　$\dfrac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{f(4)^2}=f(3)$，　$\dfrac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{f(5)^2}=f(2)$

したがって　$f(4)^2f(3)=f(5)^2f(2)=2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2$

$(*)$ を満たす整数 $(x,\ y)$ の組は，$f(y)>0$ であるから，$y\geqq 2$ により

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(\pm 4,\ 3),\ (\pm 5,\ 2)}$$

■

3　(1) 1回の操作で得られる複素数は，次の6通りで同様に確からしい．

$$w_1 = 1,\ w_2 = \sqrt{3},\ w_3 = i,\ w_4 = \sqrt{3}i,\ w_5 = \sqrt{3} + i,\ w_6 = 1 + \sqrt{3}i$$

このとき　$|w_1|^2 = |w_3|^2 = 1$，$|w_2|^2 = |w_4|^2 = 3$，$|w_5|^2 = |w_6|^2 = 4$

また，$3^2 < 3{\cdot}4 < 4^2 < 25 < 3^3$ であるから，$|z_n| < 5$，すなわち，$|z_n|^2 < 25$ となる確率 P_n は，n 回の操作のうち，w_1 または w_3 が $n-2$ 回以上出る確率であるから

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=n-2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \boldsymbol{\frac{2n^2+1}{3^n}} \end{aligned}$$

(2) ${w_1}^2$～${w_6}^2$ の偏角について

$$\arg {w_1}^2 = \arg {w_2}^2 = 0, \quad \arg {w_3}^2 = \arg {w_4}^2 = \pi,$$
$$\arg {w_5}^2 = \frac{\pi}{3}, \quad \arg {w_6}^2 = \frac{2\pi}{3}$$

$\arg {z_n}^2 = \dfrac{\pi}{3} + l\pi$，$\arg {z_n}^2 = \dfrac{3\pi}{3} + m\pi$ となる確率をそれぞれ R_n，S_n とすると (l，m は整数)，次の確率漸化式が成立する (n は正の整数)．

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{4}{6},\ R_1 = S_1 = \frac{1}{6} \\ Q_{n+1} &= \frac{4}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \\ R_{n+1} &= \frac{1}{6}Q_n + \frac{4}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \\ S_{n+1} &= \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{4}{6}S_n \end{aligned}$$

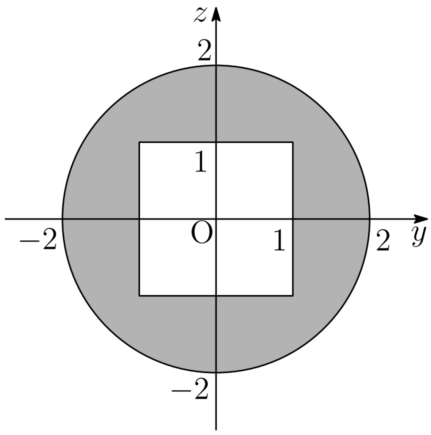
これから　$Q_{n+1} - R_{n+1} = \dfrac{1}{2}(Q_n - R_n)$，$R_{n+1} - S_{n+1} = \dfrac{1}{2}(R_n - S_n)$

ゆえに　$Q_n - R_n = (Q_1 - R_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2^n}$

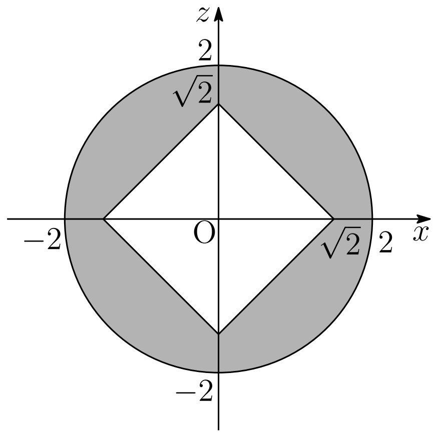
$R_n - S_n = (R_1 - S_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

上の2式と $Q_n + R_n + S_n = 1$ より　　$\boldsymbol{Q_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}$　■

4 A の yz 平面への正射影および B の zx 平面への正射影は次のようになる．



A の yz 平面への正射影



B の zx 平面への正射影

A の表す領域は　$|z| \leqq 1$ のとき　$1 \leqq |y| \leqq \sqrt{4-z^2}$
　　　　　　　　$1 \leqq |z| \leqq 2$ のとき　$|y| \leqq \sqrt{4-z^2}$

B の表す領域は　$|z| \leqq \sqrt{2}$ のとき　$\sqrt{2}-|z| \leqq |x| \leqq \sqrt{4-z^2}$
　　　　　　　　$\sqrt{2} \leqq |z| \leqq 2$ のとき　$|x| \leqq \sqrt{4-z^2}$

これから，関数 $f(z)$，$g(z)$ を

$$f(z) = \begin{cases} 2(\sqrt{4-z^2}-1) & (|z| \leqq 1) \\ 2\sqrt{4-z^2} & (1 \leqq |z| \leqq 2) \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} 2(\sqrt{4-z^2}-\sqrt{2}+|z|) & (|z| \leqq \sqrt{2}) \\ 2\sqrt{4-z^2} & (\sqrt{2} \leqq |z| \leqq 2) \end{cases}$$

求める立体の体積を V とすると，$f(z)$，$g(z)$ が偶関数であることに注意して

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} f(z)g(z)\,dz = 2\int_0^2 f(z)g(z)\,dz \\ &= 8\int_0^1 (\sqrt{4-z^2}-1)(\sqrt{4-z^2}-\sqrt{2}+z)\,dz \\ &\qquad + 8\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4-z^2}(\sqrt{4-z^2}-\sqrt{2}+z)\,dz + 8\int_{\sqrt{2}}^2 (4-z^2)\,dz \\ &= 8\int_0^2 (4-z^2)\,dz + 8\int_0^1 (-\sqrt{4-z^2}+\sqrt{2}-z)\,dz \\ &\qquad + 8\int_0^{\sqrt{2}} (-\sqrt{2}\sqrt{4-z^2}+z\sqrt{4-z^2})\,dz \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^2 (4-z^2)\,dz = \left[\ 4z - \frac{z^3}{3}\ \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^1 (\sqrt{2}-z)\,dz = \left[\ \sqrt{2}z - \frac{z^2}{2}\ \right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} z\sqrt{4-z^2}\,dz = \left[\ -\frac{1}{3}(4-z^2)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，$z = \sin\theta$ とすると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sin\alpha} \sqrt{4-z^2}\,dz &= \int_0^{\alpha} 4\cos^2\theta\,d\theta = \left[\ 2\theta + \sin 2\theta\ \right]_0^{\alpha} \\ &= 2\alpha + \sin 2\alpha\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{4}$ とすると

$$\int_0^1 \sqrt{4-z^2}\,dz = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2} + 1$$

よって

$$\begin{aligned}V &= 8\int_0^2 (4-z^2)\,dz - 8\int_0^1 \sqrt{4-z^2}\,dz + 8\int_0^1 (\sqrt{2}-z)\,dz \\ &\qquad - 8\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-z^2}\,dz + 8\int_0^{\sqrt{2}} z\sqrt{4-z^2}\,dz \\ &= 8\cdot\frac{16}{3} - 8\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 8\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) - 8\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) + 8\left(\frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \\ &= \boldsymbol{60 - \frac{8\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\pi}\end{aligned}$$

■

5 (1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から 2 直線 AB，BC にそれぞれ垂線 $\mathrm{PH_1}$，$\mathrm{PH_2}$ を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(1,\ \frac{y+z}{2},\ \frac{y+z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left(\frac{x+z}{2},\ 1,\ \frac{x+z}{2}\right)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{H_1P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_1}} = \left(x-1,\ \frac{y-z}{2}, -\frac{y-z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{H_2P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_2}} = \left(\frac{x-z}{2},\ y-1, -\frac{x-z}{2}\right)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_2P}}|^2$ であるから

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 &= (y-1)^2 + \frac{1}{2}(x-z)^2 \\ 2\{(x-1)^2-(y-1)^2\} + (y-z)^2 - (x-z)^2 &= 0 \\ 2(x-y)(x+y-2) - (x-y)(x+y-2z) &= 0 \\ (x-y)(x+y+2z-4) &= 0 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

よって　　**2 平面 $\boldsymbol{x-y=0,\ x+y+2z-4=0}$**

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から 2 直線 CD，DA にそれぞれ垂線 $\mathrm{PH_3}$，$\mathrm{PH_4}$ を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \left(-1,\ \frac{y-z}{2}, -\frac{y-z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH_4}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} = (x,\ 0,\ 0)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{H_3P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_3}} = \left(x+1,\ \frac{y+z}{2},\ \frac{y+z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{H_4P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_4}} = (0,\ y,\ z)$$

球面の中心を P，半径を R とすると，次を満たせばよい．

$$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_2P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_4P}}|^2 = R^2 \tag{$*$}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_4P}}|^2$ より　$(x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(y+z)^2 = y^2 + z^2$

$$(\sqrt{2}x + y - z + \sqrt{2})(\sqrt{2}x - y + z + \sqrt{2}) = 0 \quad \cdots ②$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2$ より　$(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}(y-z)^2 = (x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(y+z)^2$

$$x = -\frac{1}{2}yz \quad \cdots ③$$

③ を ①，② にそれぞれ代入することにより

$$y(y-4)(z+2)(z-2) = 0$$
$$(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}) = 0$$

$(*)$ を満たすとき，次を解けばよい．

$$\begin{cases} y(y-4)(z+2)(z-2) = 0 \\ (y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}) = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2}yz \\ R^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$$

上の第 1 式と第 2 式から

$$y = 0,\ 4 \text{ のとき } z = \pm\sqrt{2},\quad y = \pm\sqrt{2} \text{ のとき } z = \pm 2$$

これらを第 3 式と第 4 式に代入して

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{(0,\ 0, \pm\sqrt{2}),\quad R = \sqrt{2}} \\ &\boldsymbol{(\mp 2\sqrt{2},\ 4, \pm\sqrt{2}),\quad R = 3\sqrt{2}} \\ &\boldsymbol{(\mp\sqrt{2}, \pm\sqrt{2},\ 2),\quad R = \sqrt{6}} \\ &\boldsymbol{(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, -2),\quad R = \sqrt{6}} \end{aligned}$$

(複号同順)

■

4.10　2024 年 (180 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5]

[1] xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく．a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする．

(1) 点 P の座標を求めよ．

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

[2] 実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$，$g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする．

$$f'(t)=-f(t)g(t),\quad g'(t)=\{f(t)\}^2,$$
$$f(t)>0,\quad |g(t)|<1,\quad f(0)=1,\quad g(0)=0.$$

このとき，

$$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2,\quad q(t)=\log\frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく．

(1) $p'(t)$ を求めよ．

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)$ を求めよ．

(4) $f(T)=g(T)$ となる正の実数 T に対して，媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ $(0\leqq t\leqq T)$ の長さを求めよ．

[3] xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{C}(-a,\ 0)$ (ただし $0<a<b$) をとる．点 A，B を通る直線を ℓ とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする．さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする．以下，$n=1,2,3,\ldots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする．

(1) 点 A_n，C_n の座標を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}$ を求めよ．

4 n を正の整数とし，$C_1, \ldots, C_n$ を n 枚の硬貨とする．各 $k = 1, \ldots, n$ に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1 - p_k$ とする．この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える．

(1) $p_k = \dfrac{1}{3}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ．

(2) $p_k = \dfrac{1}{2(k+1)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ．

(3) $n = 3m$ (m は正の整数) で，$k = 1, \ldots, 3m$ に対して

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{3m} & (k = 1, \ldots, m) \\ \dfrac{2}{3m} & (k = m+1, \ldots, 2m) \\ \dfrac{1}{m} & (k = 2m+1, \ldots, 3m) \end{cases}$$

とする．このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\displaystyle\lim_{m \to \infty} Z_{3m}$ を求めよ．

5 整数の組 $(a,\ b)$ に対して 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える．方程式 $f(x) = 0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n = 1$ となる正の整数 n が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

解答例

1　(1) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ より　$y' = x$

$\mathrm{T}_a\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ における曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の接ベクトルは　$(1,\ a)$

これを $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた単位法ベクトルは　$\left(-\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$

S_a の中心を P_a，半径を r_a とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{T}_a\mathrm{P}_a} = r_a\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

これから

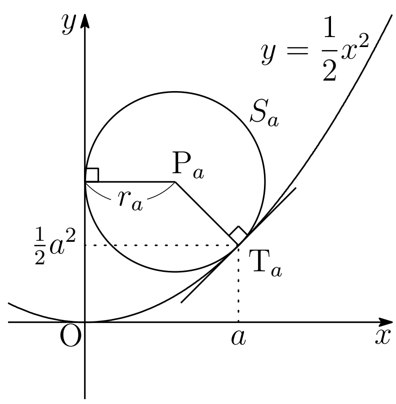
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_a} &= \overrightarrow{\mathrm{OT}_a} + \overrightarrow{\mathrm{T}_a\mathrm{P}_a} \\ &= \left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right) + r_a\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}$ の x 成分は r_a であるから

$$r_a = a + r_a\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\quad \text{ゆえに}\quad r_a = a\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_a} &= \left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right) + a\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right) \\ &= \left(a^3+a-a^2\sqrt{1+a^2},\ a\sqrt{1+a^2}-\frac{1}{2}a^2\right) \qquad (*)\end{aligned}$$



P は $a=1$ のときの P_a であるから，$(*)$ に $a=1$ を代入して

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}},\ \sqrt{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$

(2) $(*)$ から　$C : (x,\ y) = \left(a^3 + a - a^2\sqrt{1+a^2},\ a\sqrt{1+a^2} - \dfrac{1}{2}a^2\right)$

$$\frac{dx}{da} = 3a^2 + 1 - 2a\sqrt{1+a^2} - \frac{a^3}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\frac{dy}{da} = \sqrt{1+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} - a$$

点 P における曲線 C の接ベクトルは，上の 2 式に $a = 1$ を代入して

$$\left(\frac{dx}{da},\ \frac{dy}{da}\right) = \left(4 - \frac{5}{2}\sqrt{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

よって，点 P における曲線 C の接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{da}}{\frac{dx}{da}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1}{4 - \frac{5}{2}\sqrt{2}} = \boldsymbol{1 + \sqrt{2}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) (*)　$f'(t) = -f(t)g(t),\quad g'(t) = f(t)^2$ より

$$2f'(t)f(t) = -2f(t)^2g(t) = -2g'(t)g(t)$$

したがって　$2f(t)f'(t) + 2g(t)g'(t) = 0$

これを t について積分すると

$$f(t)^2 + g(t)^2 = C_1 \qquad (C_1\text{は積分定数})$$

$f(0) = 1$，$g(0) = 0$ より，$C_1 = 1$ であるから

$$(**)\quad p(t) = f(t)^2 + g(t)^2 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p'(t) = 0}$$

(2) $f(t)^2 + g(t)^2 = 1$，$g'(t) = -f(t)^2$ から $f(t)^2$ を消去すると

$$g'(t) = 1 - g(t)^2$$

$|g(t)| < 1$ より，$g(t) \neq \pm 1$ に注意して

$$\frac{g'(t)}{1+g(t)} + \frac{g'(t)}{1-g(t)} = 2$$

両辺を t について積分すると

$$\log\left|\frac{1+g(t)}{1-g(t)}\right| = 2t + C_2 \qquad (C_2\text{は積分定数})$$

$|g(t)| < 1$，$g(0) = 0$ より，$C_2 = 0$ であるから

$$q(t) = \log\frac{1+g(t)}{1-g(t)} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad q'(t) = 2$$

したがって，$q'(t)$ は定数である．

(3) (2) の結果から

$$\frac{1+g(t)}{1-g(t)} = e^{2t} \quad \text{ゆえに} \quad g(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}} = \mathbf{1}$

(4) $f'(t) = -f(t)g(t)$ および (3) で求めた $g(t)$ より

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = 1 - \frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}$$

$f(t) > 0$ に注意して，両辺を t について積分すると

$$\log f(t) = t - \log(1+e^{2t}) + \log C_3 \quad (C_3\text{は積分定数})$$

したがって　$\log f(t) = \log \dfrac{C_3 e^t}{1+e^{2t}}$　ゆえに　$f(t) = \dfrac{C_3 e^t}{1+e^{2t}}$

$f(0) = 1$ より，$C_3 = 2$ であるから　$f(t) = \dfrac{2e^t}{1+e^{2t}}$

$f(T) = g(T)$ とすると　$\dfrac{2e^T}{1+e^{2T}} = \dfrac{1-e^{2T}}{1+e^{2T}}$

$$2e^T = 1 - e^{2T} \quad \text{ゆえに} \quad e^T = 1+\sqrt{2} \quad \cdots ①$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned} f'(t)^2 + g'(t)^2 &= f(t)^2 g(t)^2 + f(t)^4 \\ &= f(t)^2\{g(t)^2 + f(t)^2\} \\ &= f(t)^2 \end{aligned}$$

求める弧長を L とすると，$f(t) > 0$ であるから

$$L = \int_0^T \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = \int_0^T \frac{2e^t}{1+e^{2t}}\,dt$$

$u = e^t$ とおくと　$\dfrac{du}{dt} = e^t$　① により

t	$0 \longrightarrow T$
u	$1 \longrightarrow 1+\sqrt{2}$

$$L = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$u = \tan\theta$ とおくと　$\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

u	$1 \longrightarrow 1+\sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{3}{8}\pi$

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{2}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \Big[\,2\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

■

3 (1) $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$，$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$，$\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}$ とおくと

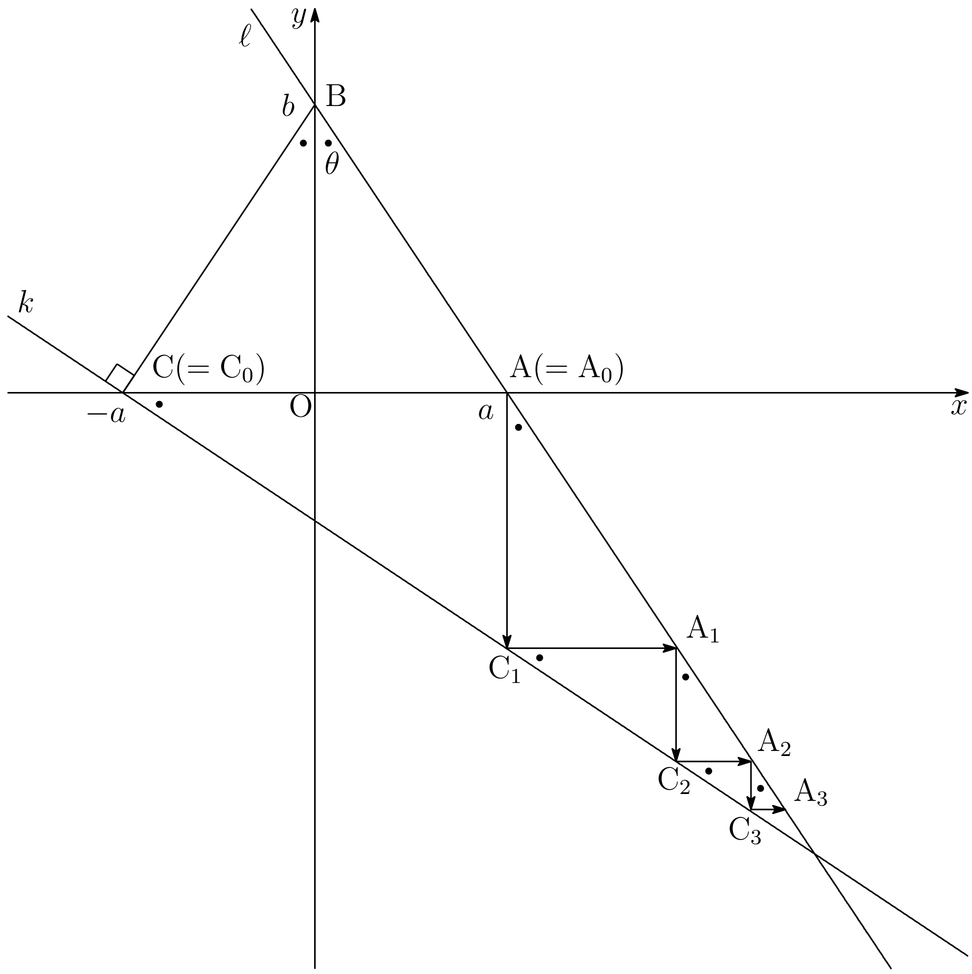
$$\mathrm{C}_0\mathrm{A}_0 = 2a, \qquad \mathrm{A}_0\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_0\mathrm{A}_0 \tan\theta = 2a\tan\theta,$$
$$\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_0\mathrm{C}_1 \tan\theta = 2a\tan^2\theta, \qquad \mathrm{A}_1\mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_1\mathrm{A}_1 \tan\theta = 2a\tan^3\theta$$

これから

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1} = (2a\tan^2\theta, -2a\tan\theta), \qquad \overrightarrow{\mathrm{C}_0\mathrm{C}_1} = (2a, -2a\tan\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} = (\tan^2\theta)\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}} = (\tan^2\theta)\overrightarrow{\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{C}_n}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_0} + \sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}} = (a,\ 0) + \frac{1-\tan^{2n}\theta}{1-\tan^2\theta}(2a\tan^2\theta, -2a\tan\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OC}_0} + \sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{k+1}} = (-a,\ 0) + \frac{1-\tan^{2n}\theta}{1-\tan^2\theta}(2a, -2a\tan\theta)$$



前の 2 式について $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ とすると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}_n} &= (a,\ 0) + \frac{b^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\left(\frac{2a^3}{b^2}, -\frac{2a^2}{b}\right)\\
&= (a,\ 0) + \frac{2a^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}(a, -b)\\
&= \left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right),\\
\overrightarrow{\mathrm{OC}_n} &= (-a,\ 0) + \frac{b^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\left(2a, -\frac{2a^2}{b}\right)\\
&= (-a,\ 0) + \frac{2ab}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}(b, -a)\\
&= \left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right)
\end{aligned}$$

よって，求める座標は

$$\boldsymbol{\mathrm{A}_n\left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right)}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{C}_n\left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right)}$$

(2) 点 A_n の x 座標を x_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n &= \triangle\mathrm{ABC}\times\frac{x_n}{a} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b\times\frac{1}{a}\left\{\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\\
&= \boldsymbol{ab\left\{\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - \frac{2a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}}
\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{BC} = \mathrm{BA}$ であるから

$$\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BA}} = \frac{x_n}{a} = \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - \frac{2a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}$$

$0 < a < b$ より，$0 < \dfrac{a}{b} < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}}$$

■

4　(1) 与えられた条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$X_1=\frac{1}{3},\quad X_{n+1}=\frac{2}{3}X_n+\frac{1}{3}(1-X_n)=\frac{1}{3}X_n+\frac{1}{3}$$

$X_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(X_n-\dfrac{1}{2}\right)$，$X_1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$ より

$$X_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\qquad \text{よって}\quad \boldsymbol{X_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$$

別解 1 成功しない確率を $\overline{X_n}$ とすると

$$X_n=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}{}_n\mathrm{C}_{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2k-1}$$

$$\overline{X_n}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}{}_n\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2k}$$

$$X_n+\overline{X_n}=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^n,\quad -X_n+\overline{X_n}=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^n$$

上の 2 式から　　$\boldsymbol{X_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)}$

別解 2 次の関数を考える．

$$\varphi_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\{p_kx+(1-p_k)\}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $\varphi_n(x)$ の x^j の係数に等しい．

$\varphi_n(x)$ は，偶関数 $\dfrac{\varphi_n(x)+\varphi_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\dfrac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{2}$ の和である．

$$\varphi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)+\varphi_n(-x)}{2}+\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{2}$$

したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\dfrac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$\begin{aligned}X_n&=\frac{\varphi_n(1)-\varphi_n(-1)}{2}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1-2\cdot\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}\end{aligned}$$

(2) 与えられた条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$Y_1=\frac{1}{4},\quad Y_{n+1}=(1-p_{n+1})Y_n+p_{n+1}(1-Y_n)$$

$p_n=\dfrac{1}{2(n+1)}$ であるから

$$Y_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}Y_n+\frac{1}{2(n+2)}\quad \text{ゆえに}\quad (n+2)Y_{n+1}-(n+1)Y_n=\frac{1}{2}$$

$n>1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+2)Y_{k+1}-(k+1)Y_k\}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}$

したがって　$(n+1)Y_n-2Y_1=\dfrac{1}{2}(n-1)$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{Y_n=\dfrac{n}{2(n+1)}}$

別解 次の関数を考える．

$$f_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\{p_kx+(1-p_k)\}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $f_n(x)$ の x^j の係数に等しい．
$f_n(x)$ は，偶関数 $\dfrac{f_n(x)+f_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\dfrac{f_n(x)-f_n(-x)}{2}$ の和である．

$$f_n(x)=\frac{f_n(x)+f_n(-x)}{2}+\frac{f_n(x)-f_n(-x)}{2}$$

したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\dfrac{f_n(x)-f_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$\begin{aligned}Y_n&=\frac{f_n(1)-f_n(-1)}{2}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left\{1-2\cdot\frac{1}{2(k+1)}\right\}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}=\boldsymbol{\frac{n}{2(n+1)}}\end{aligned}$$

(3) 次の関数を考える．

$$
\begin{aligned}
g_n(x) &= \prod_{k=1}^{n} \{p_k x + (1-p_k)\} \\
&= \prod_{k=1}^{m} \left\{ \frac{1}{3m}x + \left(1 - \frac{1}{3m}\right) \right\} \prod_{k=m+1}^{2m} \left\{ \frac{2}{3m}x + \left(1 - \frac{2}{3m}\right) \right\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \prod_{k=2m+1}^{3m} \left\{ \frac{1}{m}x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{3m}x + \left(1 - \frac{1}{3m}\right) \right\}^m \left\{ \frac{2}{3m}x + \left(1 - \frac{2}{3m}\right) \right\}^m \left\{ \frac{1}{m}x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right\}^m
\end{aligned}
$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $g_n(x)$ の x^j の係数に等しい．
$g_n(x)$ は，偶関数 $\dfrac{g_n(x) + g_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\dfrac{g_n(x) - g_n(-x)}{2}$ の和である．
したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\dfrac{g_n(x) - g_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$
\begin{aligned}
Z_{3m} &= \frac{g_n(1) - g_n(-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^m \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^m \left(1 - \frac{2}{m}\right)^m \right\}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^m &= \lim_{m\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^{-\frac{3m}{2}} \right\}^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}} \\
\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^m &= \lim_{m\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^{-\frac{3m}{4}} \right\}^{-\frac{4}{3}} = e^{-\frac{4}{3}} \\
\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{2}{m}\right)^m &= \lim_{m\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{m}\right)^{-\frac{m}{2}} \right\}^{-2} = e^{-2}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\lim_{m\to\infty} Z_{3m} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}} e^{-2}\right) = \boldsymbol{\frac{1 - e^{-4}}{2}}
$$

■

$\boxed{5}$ $f(x) = x^2 + ax + b$

$f(x) = 0$ のすべて解 α について，$\alpha^n = 1$ より (n は整数)

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n = 1 \quad ゆえに \quad |\alpha| = 1$$

(i) $f(x) = 0$ が実数解をもつとき，$f(x) = 0$ の解 $\alpha,\ \beta$ は

$$\alpha = \pm 1,\ \beta = \pm 1 \quad (複号任意)$$

解と係数の関係により　$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b$

したがって　$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (-2,\ 1),\ (0, -1)$

(ii) $f(x) = 0$ が虚数解 $\alpha,\ \overline{\alpha}$ をもつとき，解と係数の関係により

$$\alpha + \overline{\alpha} = -a, \quad \alpha\overline{\alpha} = b \quad ゆえに \quad \mathrm{Re}(\alpha) = -\frac{a}{2}, \quad |\alpha|^2 = b$$

$|\alpha| = 1,\ -1 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ であるから

$$b = 1, \quad -1 < -\frac{a}{2} < 1$$

a は整数であるから　$a = -1,\ 0,\ 1$

- $(a,\ b) = (-1,\ 1)$ のとき，$x^2 - x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

- $(a,\ b) = (0,\ 1)$ のとき，$x^2 + 1 = 0$ を解いて

$$x = \pm i = \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}$$

- $(a,\ b) = (1,\ 1)$ のとき，$x^2 + x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi \pm i\sin\frac{2}{3}\pi$$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{(a,\ b) = (\pm 2,\ 1),\ (\pm 1,\ 1),\ (0, \pm 1)}$ ■

4.11　2025 年 (180 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 関数 $f(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $f(x) = x\log(1+x)$ と定める．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\log(1+x)\,dx$ を求めよ．

(2) $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ の逆関数を $y = g(x)$ $(x \geqq 0)$ とする．また a，b を $g(a) = 1$，$g(b) = 2$ となる実数とする．このとき定積分

$$I = \int_a^b g(x)\,dx$$

の値を求めよ．

(3) 関数 $P(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $P(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+f(t)}\,dt$ と定める．このとき $y = P(x)$ について，定義域を $x \geqq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい．関数 $R(x)$ を $x \geqq 0$ に対して

$$R(x) = \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)}\,dv$$

と定めるとき，$R(x)$ を求めよ．

2 空間の点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り $(1, -1,\ 0)$ を方向ベクトルとする直線を ℓ とし，点 $(1,\ 0,\ 3)$ を通り $(0,\ 1, -2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする．

(1) P を ℓ 上の点とし，Q を m 上の点とする．また直線 PQ は直線 ℓ と直線 m に垂直であるとする．このとき P と Q の座標，および線分 PQ の長さを求めよ．

(2) ℓ 上に 2 点

$$\mathrm{A} = (t, -t,\ 1)$$
$$\mathrm{B} = (2+t+\sin t, -2-t-\sin t,\ 1)$$

があり，m 上に 2 点

$$\mathrm{C} = (1,\ t,\ 3-2t)$$
$$\mathrm{D} = (1,\ 2+t+\cos t, -1-2t-2\cos t)$$

があるとする．ただし，t は実数とする．四面体 ABCD の体積を $V(t)$ とする．$V(0)$ を求めよ．

(3) t が $t \geqq 0$ を動くとき，$V(t)$ の最大値と最小値を求めよ．

3 $0 < p < 1$ とする．表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ である 1 枚のコインを使って次のゲームを行う．

- ゲームの開始段階で点数は 0 点．
- コインを投げ続け，表が出るごとに 1 点加算し，裏が出たときは点数はそのまま．
- 2 回続けて裏が出たらゲームは終了．

0 以上の整数 n に対し，ゲームが終わったときに n 点となっている確率を Q_n とする．

(1) Q_1，Q_2 を p を用いて表せ．

(2) Q_n を n と p を用いて表せ．

(3) $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対して次式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

必要ならば $0 < x < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ であることを証明なしで使ってもよい．

(4) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n$ を p を用いて表せ．

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

により定め，数列 $\{b_n\}$ を

$$\tan b_n = \frac{1}{a_n}$$

により定める．ただし，$0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$ であるものとする．

(1) $n \geqq 2$ に対して，$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2$ を求めよ．

(2) $m \geqq 1$ (m は整数) に対して，$a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2})$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$ を求めよ．

5 (1) 関数

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3} \quad (t \neq 0)$$

の増減を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) 実数 x，y，z が，条件

$$\begin{cases} x < y < z \\ xyz \neq 0 \\ x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3 \\ y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3 \end{cases}$$

を満たしながら動くとき，x が取り得る値の範囲を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $$\int x\log(1+x)\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-1)'\log(x+1)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{2}\int (x^2-1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)\,dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + C}$$

別解 $t=\log(x+1)$ とおくと $x+1=e^t$, $\dfrac{dx}{dt}=e^t$

$$\int x\log(1+x)\,dx = \int (e^t-1)te^t\,dt = \int t(e^{2t}-e^t)\,dt$$
$$= \int t\left(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t\right)'\,dt$$
$$= t\left(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t\right) - \left(\frac{1}{4}e^{2t}-e^t\right) + C$$
$$= \left\{\frac{1}{2}(x+1)^2-(x+1)\right\}\log(x+1)$$
$$-\frac{1}{4}(x+1)^2+(x+1)+C$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)(x-3) + C}$$

(2) $g^{-1}(x)=f(x)=x\log(1+x)$ であるから，$g(a)=1$，$g(b)=2$ より

$$a=f(1)=\log 2,\quad b=f(2)=2\log 3$$

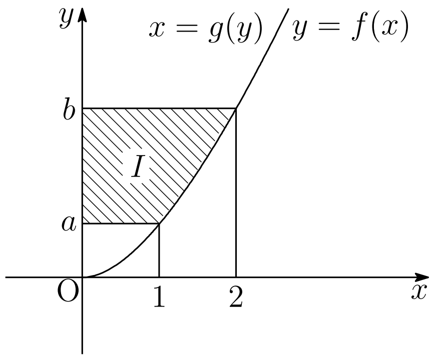
$x=f(y)$ とおくと，$\dfrac{dx}{dy}=f'(y)$，$g(f(y))=y$ であるから

$$I=\int_a^b g(x)\,dx = \int_{f(1)}^{f(2)} g(x)\,dx$$
$$= \int_1^2 g(f(y))f'(y)\,dy = \int_1^2 yf'(y)\,dy$$
$$= \Big[\, yf(y) \,\Big]_1^2 - \int_1^2 f(y)\,dy$$
$$= 2f(2)-f(1) - \left[\,\frac{1}{2}(y^2-1)\log(y+1) - \frac{1}{4}(y-1)^2\,\right]_1^2$$
$$= 2\cdot 2\log 3 - \log 2 - \left(\frac{3}{2}\log 3 - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{2}\log 3 - \log 2 + \frac{1}{4}}$$

別解 $I=\displaystyle\int_a^b g(y)\,dy$ とする．$x>0$ において，$f'(x)=\log(1+x)+\dfrac{x}{1+x}>0$

$x>0$ において $f(x)$ は単調増加であるから，下の図から

$$\begin{aligned}I &= 2\cdot b-1\cdot a-\int_1^2 f(x)\,dx\\&=2f(2)-f(1)-\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)-\frac{1}{4}(x-1)^2\right]_1^2\\&=\boldsymbol{\frac{5}{2}\log 3-\log 2+\frac{1}{4}}\end{aligned}$$



(3) $P(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+f(t)}\,dt$ より

$$P(0)=0,\quad P'(x)=\sqrt{1+f(x)}$$

$v=P(u)$ とおくと，$Q(P(u))=u$ であるから

$$Q'(P(u))P'(u)=1\quad ゆえに\quad \frac{1}{Q'(v)}=P'(u)$$

$\dfrac{dv}{du}=P'(u)$ であるから，(1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}R(x)&=\int_0^{P(x)}\frac{1}{Q'(v)}\,dv=\int_{P(0)}^{P(x)}\frac{1}{Q'(v)}\,dv\\&=\int_0^x P'(u)\cdot P'(u)\,du=\int_0^x P'(u)^2\,du\\&=\int_0^x\{1+f(u)\}\,du=x+\int_0^x f(u)\,du\\&=x+\left[\frac{1}{2}(u^2-1)\log(u+1)-\frac{1}{4}(u-1)^2\right]_0^x\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x}\end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 2 点 P，Q を定数 p，q を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ 0,\ 1)+p(1,-1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,\ 0,\ 3)+q(0,\ 1,-2)$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1,\ 0,\ 2)-p(1,-1,\ 0)+q(0,\ 1,-2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp(1,-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp(0,\ 1,-2)$ であるから

$$1-2p-q=0,\quad -4+p+5q=0$$

これを解いて　$p=\dfrac{1}{9}$，$q=\dfrac{7}{9}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ 0,\ 1)+\dfrac{1}{9}(1,-1,\ 0)=\left(\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{9},\ 1\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,\ 0,\ 3)+\frac{7}{9}(0,\ 1,-2)=\left(1,\ \frac{7}{9},\ \frac{13}{9}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{8}{9},\ \frac{8}{9},\ \frac{4}{9}\right)$$

よって　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}},-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}},\ \mathbf{1}\right)$，$\mathbf{Q}\left(\mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{9}},\ \dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{9}}\right)$，$\mathrm{PQ}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$

(2) 与えられた 4 点 A，B，C，D から

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(2+\sin t,-2-\sin t,\ 0)=(2+\sin t)(1,-1,\ 0)\\
\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(1-t,\ 2t,\ 2-2t)\\
\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=(1-t,\ 2+2t+\cos t,-2-2t-2\cos t)\\
&=(1-t,\ 2t,\ 2-2t)+(0,\ 2+\cos t,-4-2\cos t)\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(2+\cos t)(0,\ 1,-2)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(2+\sin t)(2t-2,\ 2t-2,\ t+1)\\
(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=-4(2+\sin t)(2+\cos t)\\
V(t)&=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\frac{2}{3}(2+\sin t)(2+\cos t)
\end{aligned}$$

よって　$V(0)=\dfrac{2}{3}\cdot 2\cdot 3=\mathbf{4}$

(3) $\dfrac{3}{2}V(t) = (2+\sin t)(2+\cos t)$ より

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}V'(t) &= \cos t(2+\cos t) + (2+\sin t)(-\sin t)\\ &= 2(\cos t - \sin t) + \cos^2 t - \sin^2 t\\ &= (\cos t - \sin t)(2+\cos t+\sin t)\\ &= -\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\left\{2+\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\end{aligned}$$

$V(t)$ の最大値・最小値は，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ について調べればよいから

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$V'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$V(t)$	4	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	4

したがって

$$\begin{aligned}V\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3+\frac{4}{3}\sqrt{2}\\ V\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= \frac{2}{3}\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3-\frac{4}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　**最大値** $3+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$，**最小値** $3-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

別解 (2) の結果から

$$\begin{aligned}3V(t) &= 2(2+\sin t)(2+\cos t)\\ &= 2\sin t\cos t + 4(\sin t+\cos t) + 8\\ &= (\sin t+\cos t)^2 + 4(\sin t+\cos t) + 7\\ &= (\sin t+\cos t+2)^2 + 3\end{aligned}$$

したがって　$V(t) = \dfrac{1}{3}\left\{\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\right\}^2 + 1$

よって　最大値 $V\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{3}(\sqrt{2}+2)^2+1 = \mathbf{3+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}}$

最小値 $V\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{3}(-\sqrt{2}+2)^2+1 = \mathbf{3-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}}$

■

外積 (ベクトル積)

2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積 (ベクトル積)** と言い，$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b}}$ で表し (内積をスカラー積とも言う)，その成分は

$$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2\end{aligned}$$

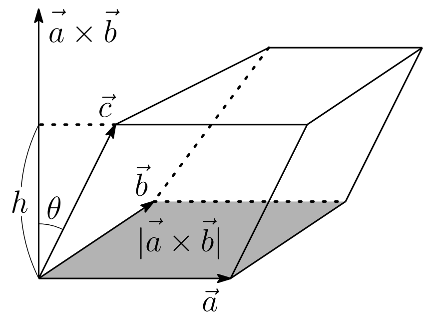
であるから，$\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は $\quad \boldsymbol{V = \dfrac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$ が成り立つ．

3 (1) ゲームが終わったときに 1 点となる得点の推移は

$$100,\quad 0100$$

であるから，その確率は

$$\begin{aligned} Q_1 &= p(1-p)^2 + p(1-p)^3 \\ &= p(1-p)^2\{1+(1-p)\} = \boldsymbol{p(1-p)^2(2-p)} \end{aligned}$$

ゲームが終わったときに 2 点となるとき，得点の推移は

$$1100,\quad 10100,\quad 01100,\quad 010100$$

であるから，その確率は

$$\begin{aligned} Q_2 &= p^2(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 + p^2(1-p)^4 \\ &= p^2(1-p)^2\{1+2(1-p)+(1-p)^2\} = \boldsymbol{p^2(1-p)^2(2-p)^2} \end{aligned}$$

(2) ゲームが終わったときに n 点となる得点の推移は，n 個仕切り (|) から 0 を置く k 個の選び方に対応する $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

$$|1|1|\cdots|1|100$$

したがって，その確率は

$$\begin{aligned} Q_n &= (1-p)^2 p^n \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (1-p)^k \\ &= (1-p)^2 p^n \{1+(1-p)\}^n \\ &= \boldsymbol{(1-p)^2\{p(2-p)\}^n} \end{aligned}$$

別解 得点が n になる並びについて，最初の得点が 0 ときはその手前に 1 または 01，最初の得点が 1 のときはその手前に 1 または 10 を配置することにより，得点が $n+1$ になる並びが得られるから，次の漸化式が成立する.

$$Q_{n+1} = \{p + p(1-p)\}Q_n = p(2-p)Q_n$$

$\{Q_n\}$ は，初項 $Q_1 = (1-p)^2 p(2-p)$，公比 $p(2-p)$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} Q_n &= (1-p)^2 p(2-p)\{p(2-p)\}^{n-1} \\ &= \boldsymbol{(1-p)^2\{p(2-p)\}^n} \end{aligned}$$

(3)　$0 < x < 1$ とし，初項 x，公比 x の無限等比級数を $f(x)$ とすると

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

これを微分すると

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(4)　(3) の結論から

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (0 < x < 1) \qquad (*)$$

$p(2-p) = -(p-1)^2 + 1$，$0 < p < 1$ より　$0 < p(2-p) < 1$

$(*)$ を利用すると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n &= \sum_{n=1}^{\infty} nQ_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^2\{p(2-p)\}^n \\
&= (1-p)^2 p(2-p) \sum_{n=1}^{\infty} n\{p(2-p)\}^{n-1} \\
&= (1-p)^2 p(2-p) \cdot \frac{1}{\{1-p(2-p)\}^2} \\
&= (1-p)^2 p(2-p) \cdot \frac{1}{(1-p)^4} \\
&= \boldsymbol{\frac{p(2-p)}{(1-p)^2}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ より $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_n - {a_{n+1}}^2 &= (a_{n+1} + a_n)a_n - a_{n+1}(a_n + a_{n-1}) \quad (n \geqq 2) \\ &= -(a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2) \end{aligned}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 1$ より，$a_3 = a_1 + a_2 = 2$ であるから　$a_3a_1 - {a_2}^2 = 1$

$\{a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2\}$ は公比 -1 の等比数列であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 = (a_3a_1 - {a_2}^2)\cdot(-1)^{n-2} = 1\cdot(-1)^{n-2} = \boldsymbol{(-1)^n}$$

参考 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix}$

$a_0 = a_2 - a_1 = 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} = A^n$$

よって　$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 = \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix} = |A^n| = |A|^n = (-1)^n$

(2) $\tan b_n = \dfrac{1}{a_n}$ であるから

$$\begin{aligned} \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) &= \frac{\tan b_{2m+1} + \tan b_{2m+2}}{1 - \tan b_{2m+1}\tan b_{2m+2}} = \frac{\dfrac{1}{a_{2m+1}} + \dfrac{1}{a_{2m+2}}}{1 - \dfrac{1}{a_{2m+1}}\cdot\dfrac{1}{a_{2m+2}}} \\ &= \frac{a_{2m+1} + a_{2m+2}}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \end{aligned}$$

(1) の結果から，$a_{2m+2}a_{2m} - {a_{2m+1}}^2 = (-1)^{2m+1} = -1$ を利用すると

$$\begin{aligned} a_{2m}\cdot\tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) &= \frac{a_{2m+1}a_{2m} + a_{2m+2}a_{2m}}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \\ &= \frac{a_{2m+1}a_{2m} + {a_{2m+1}}^2 - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \\ &= \frac{a_{2m+1}(a_{2m} + a_{2m+1}) - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \\ &= \frac{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

(3) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ を定義域とする関数 $f(x) = \tan x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域 $0 \leqq x < \infty$ に対し，その値域は $0 \leqq f^{-1}(x) < \dfrac{\pi}{2}$ で定められる．

$\tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = \dfrac{1}{a_{2m}}$ より　$b_{2m+1} + b_{2m+2} = f^{-1}\left(\dfrac{1}{a_{2m}}\right)$

また，$b_{2m+2} = f^{-1}\left(\dfrac{1}{a_{2m+2}}\right)$ であるから

$$b_{2m+1} = f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m}}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m+2}}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} &= b_1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m+1} \\ &= f^{-1}\left(\frac{1}{a_1}\right) + \lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N}\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m}}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m+2}}\right)\right\} \\ &= f^{-1}\left(\frac{1}{a_1}\right) + \lim_{N\to\infty}\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{a_2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2N+2}}\right)\right\}\end{aligned}$$

$a_1 = a_2 = 1$，$\{a_n\}$ は漸化式より自然数からなる単調増加列であるから

$$\lim_{N\to\infty} a_{2N+2} = \infty$$

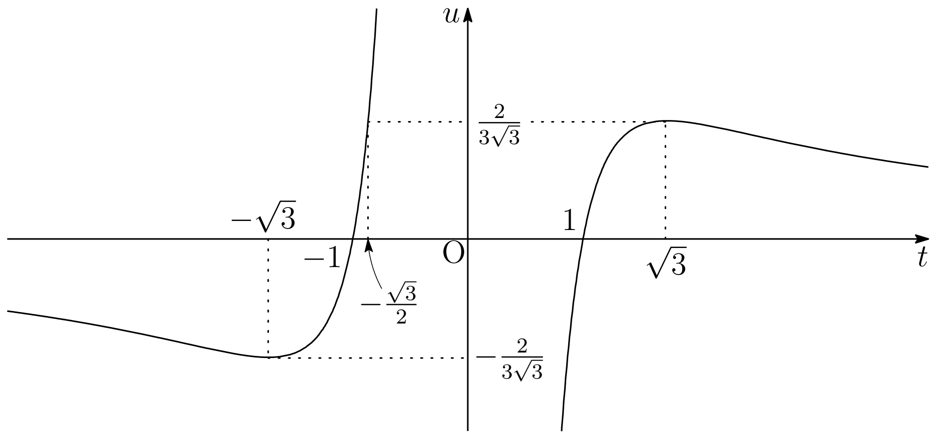
よって　$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} = 2f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ ■

5　(1) $f(t) = \dfrac{t^2-1}{t^3} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^3}$ より　$f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{3}{t^4} = \dfrac{-t^2+3}{t^4}$

t	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$

$f(t) = \dfrac{1}{t}\left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right)$ より　$\displaystyle\lim_{t\to-0} f(t) = \infty$，$\displaystyle\lim_{t\to+0} f(t) = -\infty$

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) = 0$$



(2) $x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3$ $(xyz \neq 0)$ より　$x^3(y^2-1) = y^3(x^2-1)$

$$\frac{y^2-1}{y^3} = \frac{x^2-1}{x^3} \quad \text{ゆえに} \quad f(y) = f(x)$$

$y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3$ $(xyz \neq 0)$ より，同様に　$f(z) = f(y)$

$x < y < z$，$f(x) = f(y) = f(z)$ を満たす x，y，z が存在する x の値の範囲を求めればよい．$f(t) = f(\sqrt{3})$ を満たす t $(t \neq \sqrt{3})$ を求めると

$$\frac{t^2-1}{t^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{整理すると} \quad 2t^3 - 3\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3} = 0$$

上の第 2 式は $(t-\sqrt{3})^2$ を因数にもつことに注意して

$$(t-\sqrt{3})^2(2t+\sqrt{3}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f(\sqrt{3})$$

よって，(1) のグラフより　$\boldsymbol{x < -\sqrt{3},\ -1 < x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$　■

第 5 章　名古屋大学

出題分野 (2015-2025) 150 分

◀	名古屋大学	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	数と式											
I	2 次関数		1									
	図形と計量											
	データの分析											
	式と証明											
	複素数と方程式	2										
II	図形と方程式											
	三角関数											
	指数関数と対数関数							2				
	微分法と積分法							1	1			
	関数											
	極限									2		
III	微分法とその応用	1	2		2		1			3	1	1
	積分法				1		3		4		4	
	積分法の応用	3		1		1·4						3
	場合の数と確率					4	4	3	2			4
A	整数の性質		4		3	3	2					2
	図形の性質											
B	数列	4	3	2	4			4		4		
	確率分布と統計											
	平面上のベクトル											
C	空間のベクトル			3		2					3	
	複素数平面			4					3	1	2	
	式と曲線						1					

5.1　2015 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4

1 次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x) = x^{-2}\,2^x$ $(x \neq 0)$ について，$f'(x) > 0$ となるための x に関する条件を求めよ．

(2) 方程式 $2^x = x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ．

(3) 方程式 $2^x = x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ．

2 次の問に答えよ．

(1) $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ．

(2) 8 つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9+2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

(ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる) の中で，(1) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ．

(3) (2) で求めた $f(x) = 0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ．

3 e を自然対数の底とし，t を $t > e$ となる実数とする．このとき，曲線 $C : y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha < \beta)$ とする．また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，

曲線 C，x 軸および 2 つの直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，

曲線 C および 2 つの直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を S_2

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ．

(2) $\alpha < \dfrac{e}{t}$，$\beta < 2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．必要ならば，$x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい．

$\boxed{4}$ 数直線上にある 1，2，3，4，5 の 5 つの点と 1 つの石を考える．石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k=2,3,4) \text{ にあるならば，} \\ \qquad\qquad \text{確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k-1 \text{ に，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う．石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す．また，石が移動した先の点に印をつけていく (点 1 には初めから印がついているものとする)．このとき，次の問に答えよ．

(1) 試行を 6 回繰り返した後に，石が点 k $(k=1,2,3,4,5)$ にある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ．

(3) 試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x) = x^{-2}\,2^x$ を微分すると

$$f'(x) = -2x^{-3}\,2^x + x^{-2}\,2^x\log 2 = x^{-3}\,2^x(-2 + x\log 2)$$
$$= \frac{2^x}{x^2}\cdot\frac{x\log 2 - 2}{x}$$

$\dfrac{2^x}{x^2} > 0$ であるから，$f'(x) > 0$ となるのは

$$\frac{x\log 2 - 2}{x} > 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x < 0,\ \frac{2}{\log 2} < x}$$

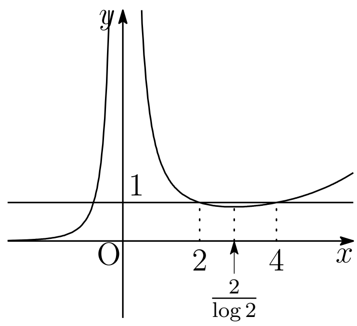
(2) $f(x) = 1$ が異なる 3 つの実数解をもつことを示せばよい．

(1) の結果により，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$2 < e < 4$ より，$\log 2 < 1 < 2\log 2$ であるから

$$2 < \frac{2}{\log 2} < 4$$



$f(2) = f(4) = 1$ であるから $f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right) < 1$

また $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x) = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

補足 直接 $f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right) < 1$ を示すこともできる．

$$f\left(\frac{2}{\log 2}\right) = \left(\frac{2}{\log 2}\right)^{-2} 2^{\frac{2}{\log 2}} = \left(\frac{\log 2}{2}\right)^2 e^2 = \left(\frac{e\log 2}{2}\right)^2$$

ここで，$g(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと $g'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

$2 < x < e$ において $g'(x) > 0$ であるから，$g(2) < g(e)$ より

$$\frac{\log 2}{2} < \frac{\log e}{e} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \frac{e\log 2}{2} < 1 \quad \text{よって} \quad f\left(\frac{2}{\log 2}\right) < 1$$

(3) (2) の結果から，$2^x = x^2$ が負の有理数 $-\dfrac{p}{q}$ (p，q は正の整数で互いに素) をもつと仮定すると

$$2^{-\frac{p}{q}} = \left(-\frac{p}{q}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

さらに両辺を q 乗すると　$2^p = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{2q}$

上式の右辺は整数であるから　$p = 1$　ゆえに　$2 = q^{2q}$

これを満たす正の整数 q は存在しない．

よって，(2) の結果から，求める有理数の解は　**2，4**　■

$\boxed{2}$ (1) $p = \sqrt{9 + 2\sqrt{17}}$，$q = \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$ とおくと

$$p^2 + q^2 = 18, \quad pq = \sqrt{13}$$

であるから，$\alpha = pq + p + q$ より

$$(\alpha - pq)^2 = (p + q)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 - 2pq\alpha + (pq)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

したがって　$\alpha^2 - 2\sqrt{13}\alpha + 13 = 18 + 2\sqrt{13}$

$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{13}(\alpha + 1)$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2 - 5)^2 = 52(\alpha + 1)^2 \quad \text{すなわち} \quad \alpha^4 - 62\alpha^2 - 104\alpha - 27 = 0$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27}$

(2) (1) の式変形に注意すると，$f(x) = 0$ は　$(x^2 - 5)^2 = 52(x + 1)^2$

(i) $x^2 - 5 = 2\sqrt{13}(x + 1)$ のとき

$$x^2 - 2\sqrt{13}x + 13 = 18 + 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x - pq)^2 = (p + q)^2$$

したがって　$x - pq = \pm(p + q)$　すなわち　$x = pq + p + q,\ pq - p - q$

(ii) $x^2 - 5 = -2\sqrt{13}(x + 1)$ のとき

$$x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = 18 - 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x + pq)^2 = (p - q)^2$$

したがって　$x + pq = \pm(p - q)$　すなわち　$x = -pq + p - q, -pq - p + q$

(i)，(ii) から，$f(x)=0$ の解は

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

(3)　(2) で求めた解を

$$\alpha=pq+p+q,\quad \beta=-pq+p-q,$$
$$\gamma=pq-p-q,\quad \delta=-pq-p+q$$

とおく．ここで　$p=\sqrt{9+2\sqrt{17}}>\sqrt{9+2\sqrt{16}}=\sqrt{17},$

$$q=\sqrt{9-2\sqrt{17}}<\sqrt{9-2\sqrt{16}}=1$$

したがって　$\alpha-\beta=2pq+2q=2q(p+1)>0$

$$\beta-\gamma=2p-2pq=2p(1-q)>0$$
$$\gamma-\delta=2pq-2q=2q(p-1)>0$$

上の3式から，$\alpha>\beta>\gamma>\delta$ となる．よって，大きい順に

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

解説　4次方程式 $x^4-62x^2-104x-27=0\cdots(*)$ が

$$(x^2-5)^2=52(x+1)^2$$

と変形できることを利用して (フェラーリの方法)，解を求めている．

本題 (1) はこの変形につながる設問となっている．

手がかりになしに，方程式 $(*)$ を解くとすると

$$x^4-62x^2-104x-27=(x^2+k)^2-(px+q)^2$$

とおき ($k,\ p,\ q$ は定数)，上式の右辺を展開して整理すると

$$x^4-62x^2-104x-27=x^4+(2k-p^2)x^2-2pqx+k^2-q^2$$

同じ次数の項の係数を比較すると　$p^2 = 2k + 62$，$pq = 52$，$q^2 = k^2 + 27$

これらの 3 式から，p，q を消去すると　$(2k + 62)(k^2 + 27) = 52^2$

整理すると　　$k^3 + 31k^2 + 27k - 515 = 0$　$\cdots(**)$

因数定理により　　$(k + 5)(k^2 + 26k - 103) = 0$

$k = -5$ とすると，$p = q = \pm 2\sqrt{13}$ となり，$(*)$ の解が求まる．

余談だが，3 次方程式 $(**)$ を一般的な方法 (カルダノの方法) で解いてみる．

$k = t - \dfrac{31}{3} \cdots$ ① とおいて，$(**)$ に代入すると

$$\left(t - \frac{31}{3}\right)^3 + 31\left(t - \frac{31}{3}\right)^2 + 27\left(t - \frac{31}{3}\right) - 515 = 0$$

整理すると　　$t^3 - \dfrac{880}{3}t + \dfrac{38144}{27} = 0$

$t = u + v$ とおいて，これに代入すると

$$(u + v)^3 - \frac{880}{3}(u + v) + \frac{38144}{27} = 0$$
$$3(u + v)\left(uv - \frac{880}{9}\right) + u^3 + v^3 + \frac{38144}{27} = 0$$

$uv = \dfrac{880}{9}$，$u^3 + v^3 = -\dfrac{38144}{27}$ とし，u^3，v^3 を解とする 2 次方程式

$$X^2 + \frac{38144}{27}X + \left(\frac{880}{9}\right)^3 = 0$$

これを解くと　$X = \dfrac{64}{27}(-298 \pm 39\sqrt{51}i) = \left\{\dfrac{4}{3}(2 \mp \sqrt{51}i)\right\}^3$　(複号同順)

$z = \dfrac{4}{3}(2 + \sqrt{51}i)$，$w = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ とおくと，uv は実数であるから

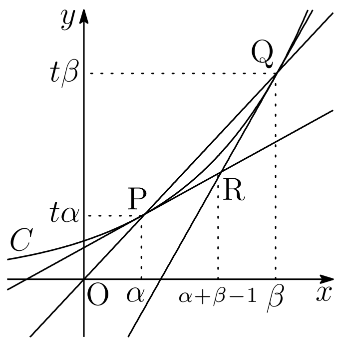
$$\begin{aligned} t &= z + \overline{z}, \quad zw + \overline{z}\,\overline{w}, \quad z\overline{w} + \overline{z}w \\ &= \frac{16}{3}, \ -\frac{8}{3} - 4\sqrt{17}, \ -\frac{8}{3} + 4\sqrt{17} \end{aligned}$$

① より　　$k = -5, \ -13 - 4\sqrt{17}, \ -13 + 4\sqrt{17}$

一般に，4 次方程式 $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ は，$x = y - \dfrac{a_3}{4}$ おくことにより，$y^4 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$ と変形でき，フェラーリの方法が適用できる．フェラーリの方法の中で，3 次方程式を解く必要があり，3 次方程式の一般的な解法がカルダノの方法である．さらにカルダノの方法の中で 2 次方程式の解の公式を用いている．■

3　(1) $y = e^x$ を微分すると　$y' = e^x$

C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ e^\alpha)$ および $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta)$ における接線の方程式は，それぞれ



$$\begin{cases} y - e^\alpha = e^\alpha(x-\alpha) \\ y - e^\beta = e^\beta(x-\beta) \end{cases}$$

$e^\alpha = t\alpha$，$e^\beta = t\beta$ であるから，上の 2 式は

$$\begin{cases} y = t\alpha(x+1-\alpha) \\ y = t\beta(x+1-\beta) \end{cases}$$　これを解いて　$\mathrm{R}(\alpha+\beta-1,\ t\alpha\beta)$

$$S_1 = \int_\alpha^\beta e^x\,dx = \Big[\ e^x\ \Big]_\alpha^\beta = e^\beta - e^\alpha = t\beta - t\alpha = t(\beta-\alpha)$$

3 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ t\alpha)$，$\mathrm{R}(\alpha+\beta-1,\ t\alpha\beta)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ t\beta)$ から x 軸にそれぞれ垂線 $\mathrm{PP'}$，$\mathrm{RR'}$，$\mathrm{QQ'}$ を引くと，$\mathrm{P'R'} = \beta - 1$，$\mathrm{R'Q'} = 1-\alpha$ より

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 - (\text{台形 PP}'\text{R}'\text{R の面積}) - (\text{台形 RR}'\text{Q}'\text{Q の面積}) \\ &= t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}(\beta-1)(t\alpha+t\alpha\beta) - \frac{1}{2}(1-\alpha)(t\alpha\beta+t\beta) \\ &= t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}t\alpha(\beta-1)(\beta+1) - \frac{1}{2}t\beta(1-\alpha)(1+\alpha) \\ &= t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}t\alpha(\beta^2-1) - \frac{1}{2}t\beta(1-\alpha^2) \\ &= t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}t\alpha\beta(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}t(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta) \end{aligned}$$

よって　$$\boldsymbol{\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}(1-\alpha\beta)}$$

(2) C 上の点 P における接線の傾きは　e^{α}

これと直線 PQ の傾き t との大小関係により　$e^{\alpha} < t$

このとき，$e^{\alpha} = t\alpha$ であるから　$t\alpha < t$

$t > 0$ であるから　$\alpha < 1$　ゆえに　$t\alpha = e^{\alpha} < e$　よって　$\alpha < \dfrac{e}{t}$

また，$e^{\beta} > \beta^2$ $(\beta > 0)$ であるから　$t\beta = e^{\beta} > \beta^2$ より　$t > \beta$

ゆえに　$t^2 > t\beta = e^{\beta}$　したがって　$\log t^2 > \beta$　よって　$\beta < 2\log t$

$0 < \alpha < \dfrac{e}{t}$，$0 < \beta < 2\log t$ より　　$0 < \alpha\beta < 2e\cdot\dfrac{\log t}{t}$　$\cdots$①

ここで，$t = e^u$ とおくと　$0 < \dfrac{\log t}{t} = \dfrac{u}{e^u} < \dfrac{u}{u^2} = \dfrac{1}{u}$

$t \longrightarrow \infty$ のとき，$u \longrightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{t}{\log t} = 0$$

① より　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\alpha\beta = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}(1-\alpha\beta) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

補足 $C : y = e^x$ 上の点 $(1,\ e)$ における接線の方程式は　$y = ex$

$$e^x > x^2 \quad \cdots(*)$$

(i) $0 < x < 1$ のとき，$e^x > 1 > x^2$　よって，$(*)$ は成立する．

(ii) $x = 1$ のとき，明らかに $(*)$ は成立する．

(iii) $x > 1$ のとき，$e^x - ex > 0$ であるから ($y = e^x$ と $y = ex$ のグラフ)

$$\int_1^x (e^t - et)\,dt = \left[\,e^t - \frac{e}{2}t^2\,\right]_1^x = e^x - e - \frac{e}{2}(x^2-1)$$
$$= e^x - \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{2} > 0$$

したがって　$e^x > \dfrac{e}{2}x^2 + \dfrac{e}{2} > x^2$　よって，$(*)$ は成立する．

(i)〜(iii) から，$x > 0$ のとき，$(*)$ は成立する．■

$\boxed{4}$ (1) n 回繰り返した後に，石が点 k にある確率を $P_n(k)$ とする $(k=1,2,3,4,5)$.

n が奇数のとき　$P_n(1)=P_n(3)=P_n(5)=0$

n が偶数のとき　$P_n(2)=P_n(4)=0$

n が奇数のとき，石は点 2 または 4 にある．このとき

$$P_{2j+1}(2)=p_{2j-1}(2)\times\left(\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+P_{2j-1}(4)\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$P_{2j+1}(4)=P_{2j-1}(2)\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+P_{2j-1}(4)\times\left(\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

したがって，j を自然数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1(2)=1,\ P_1(4)=0$$
$$(*)\begin{cases} P_{2j+1}(2)=\dfrac{3}{4}P_{2j-1}(2)+\dfrac{1}{4}P_{2j-1}(4) \\ P_{2j+1}(4)=\dfrac{1}{4}P_{2j-1}(2)+\dfrac{3}{4}P_{2j-1}(4) \end{cases}$$

$(*)$ に $j=1$ を代入すると

$$P_3(2)=\frac{3}{4}\cdot1+\frac{1}{4}\cdot0=\frac{3}{4},\quad P_3(4)=\frac{1}{4}\cdot1+\frac{3}{4}\cdot0=\frac{1}{4}$$

さらに，$(*)$ に $j=2$ を代入すると

$$P_5(2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{8},\quad P_5(4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

したがって

$$P_6(1)=P_5(2)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{5}{16}}$$
$$P_6(3)=P_5(2)\times\frac{1}{2}+P_5(4)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$P_6(5)=P_5(4)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{3}{16}}$$
$$P_6(2)=P_6(4)=\mathbf{0}$$

別解 $(*)$ より，自然数 j について

$$\begin{aligned}P_{2j+1}(2)+P_{2j+1}(4)&=P_{2j-1}(2)+P_{2j-1}(4)\\&=1+0=1,\\P_{2j+1}(2)-P_{2j+1}(4)&=\frac{1}{2}\left(P_{2j-1}(2)-P_{2j-1}(4)\right)\\&=\frac{1}{2^j}(P_1(2)-P_1(4))=\frac{1}{2^j}\end{aligned}$$

$P_{2j-1}(2)+P_{2j-1}(4)=1$ および $P_{2j-1}(2)-P_{2j-1}(4)=\dfrac{1}{2^{j-1}}$ から

$$P_{2j-1}(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^j},\quad P_{2j-1}(4)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^j}$$

したがって
$$\begin{aligned}P_{2j}(1)&=\frac{1}{2}P_{2j-1}(2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{j+1}},\\P_{2j}(3)&=\frac{1}{2}P_{2j-1}(2)+\frac{1}{2}P_{2j-1}(4)=\frac{1}{2},\\P_{2j}(5)&=\frac{1}{2}P_{2j-1}(4)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{j+1}}\end{aligned}$$

上式に，$j=3$ を代入すると　$P_6(1)=\boldsymbol{\dfrac{5}{16}}$，$P_6(3)=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$P_6(5)=\boldsymbol{\dfrac{3}{16}}$

また　$P_6(2)=P_6(4)=\mathbf{0}$

補足 n が奇数のとき，$P_n(1)=P_n(3)=P_n(5)=0$

$$P_n(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}},\quad P_n(4)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

n が偶数のとき，$P_n(2)=P_n(4)=0$

$$P_n(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}},\quad P_n(3)=\frac{1}{2},\quad P_n(5)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}$$

(2) 4 回繰り返した後に，点 5，点 3 にある確率は

$$\begin{aligned}&P_4(5)=P_3(4)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\\&P_4(3)=P_3(2)\times\frac{1}{2}+P_3(4)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がつく確率は

$$P_4(5)+P_4(3)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 試行により，石が点 1，点 2，点 3 のいずれかを移動するとき，奇数回目の試行の後に石は，点 2 にある．$2j-1$ 回目の試行の後に石が点 2 にある確率を x_{2j-1} とすると

$$x_{2j+1}=x_{2j-1}\times\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

したがって，次の確率漸化式が成立する．

$$x_1=1,\quad x_{2j+1}=\frac{3}{4}x_{2j-1}$$

これを解いて　$x_{2j-1}=\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}\quad(j\geqq 1)$

このとき，$2j$ 回目の試行の後に石が点 1 または点 3 にある確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}$

試行により，石が点 1，点 2 のいずれかを移動するとき，奇数回目の試行の後に石は，点 2 にある．$2j-1$ 回目の試行の後に石が点 2 にある確率を y_{2j-1} とすると

$$y_{2j+1}=y_{2j-1}\times\frac{1}{2}\cdot 1$$

したがって，次の確率漸化式が成立する．

$$y_1=1,\quad y_{2j+1}=\frac{1}{2}y_{2j-1}$$

これを解いて　$y_{2j-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\quad(j\geqq 1)$

このとき，$2j$ 回目の試行の後に石が点 1 にある確率は　$y_{2j-1}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{j}$

以上の結果から

(i) $n=2j-1$ のとき，求める確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$

(ii) $n=2j$ のとき，求める確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{j}$

(i)，(ii) から　$\boldsymbol{n}$ **が奇数のとき**　$\boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$

$\boldsymbol{n}$ **が偶数のとき**　$\boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}$

■

5.2　2016 年 (150 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4]

1 曲線 $y = x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる．ただし $b > -2$ とする．このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ．

条件：$y = x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2 < t < b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する．

2 2 つの円 $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ と $D : (x+2)^2 + y^2 = 7^2$ を考える．また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする．このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ．

(2) (1) でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積が最大となるときの Q の座標を θ を用いて表せ．

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ．ただし (2)，(3) においては，3 点 O，P，Q が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 0 であるとする．

3 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする．A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $k = 0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ．

(2) $k = 0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ．

4 次の問に答えよ．ただし2次方程式の重解は2つと数える．

(1) 次の条件 $(*)$ を満たす整数 a，b，c，d，e，f の組をすべて求めよ．

$$(*)\begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の 2 つの解が } c,\ d \text{ である．} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の 2 つの解が } e,\ f \text{ である．} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の 2 つの解が } a,\ b \text{ である．} \end{cases}$$

(2) 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件 $(**)$ を満たすとする．

$(**)$ すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2次方程式

$$x^2+a_nx+b_n=0$$

の2つの解が a_{n+1}，b_{n+1} である．

このとき

(i) 正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ．

(ii) 条件 $(**)$ を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組をすべて求めよ．

解答例

1 直線 AT の傾きは $\dfrac{t^2-4}{t+2}=t-2,$　　直線 BT の傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-2)t-2b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ が，$-2<t<b$ に解をもつ条件を求めればよい．ここで

$$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\frac{b-2}{2}\right)^2-\frac{b^2+4b}{4} \quad (-2 \leqq t \leqq b)$$

の最大値を M，最小値を m とすると

$$M=\begin{cases} f(-2) & (-2<b<2) \\ f(b) & (2 \leqq b) \end{cases}, \quad m=\begin{cases} f(b) & (-2<b<\frac{2}{3}) \\ f\left(\frac{2-b}{2}\right) & (\frac{2}{3} \leqq b \leqq 6) \\ f(-2) & (6<b) \end{cases}$$

$$f(-2)=-4b+9, \quad f(b)=2b^2-4b+1, \quad f\left(\frac{2-b}{2}\right)=-\frac{b^2+4b}{4}$$

方程式 $(*)$ が $-2<t<b$ に解をもつことから

(i) $-2<b<\dfrac{2}{3}$ のとき $\begin{cases} -4b+9>0 \\ 2b^2-4b+1<0 \end{cases}$ 　ゆえに $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2}{3}$

(ii) $\dfrac{2}{3} \leqq b<2$ のとき $\begin{cases} -4b+9>0 \\ -\dfrac{b^2+4b}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに $\dfrac{2}{3} \leqq b<2$

(iii) $2 \leqq b \leqq 6$ のとき $\begin{cases} 2b^2-4b+1>0 \\ -\dfrac{b^2+4b}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに $2 \leqq b \leqq 6$

(iv) $6<b$ のとき $\begin{cases} 2b^2-4b+1>0 \\ -4b+9<0 \end{cases}$ 　ゆえに $6<b$

(i)〜(iv) より　　$\boldsymbol{b>\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

別解1　直線 AT の傾きは　$\dfrac{t^2-4}{t+2}=t-2$,　　直線 BT の傾きは　$\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-2)t-2b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ は，実数解をもつから

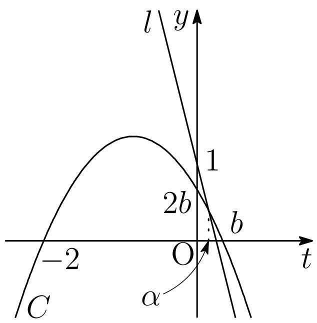
$$(b-2)^2-4\cdot1(-2b+1)\geqq0 \quad \text{ゆえに} \quad b(b+4)\geqq0$$

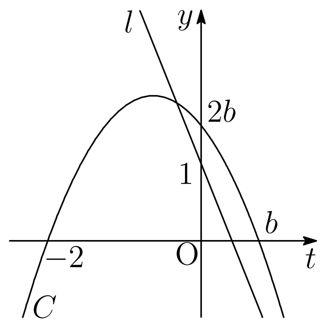
$b>-2$ に注意すると，$b\geqq0$ の範囲について調べればよい．

$(*)$ を変形すると　　$2(b-2)t+1=-(t+2)(t-b)$

直線 $l:y=2(b-2)t+1$ と放物線 $C:y=-(t+2)(t-b)$ が $-2<t<b$ で共有点をもつ b の値の範囲を求めればよい．

$0\leqq b<\frac{1}{2}$ のとき　　　$\frac{1}{2}\leqq b$ のとき





(i)　$0\leqq b<\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ を解いて　$t=\dfrac{2-b\pm\sqrt{b^2+4b}}{2}$

$\alpha=\dfrac{2-b-\sqrt{b^2+4b}}{2}$ とおく．l の傾きは負であるから，$0<\alpha<b$ より

$$\frac{2-b-\sqrt{b^2+4b}}{2}<b \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{b^2+4b}>2-3b$$

$2-3b>0$ であるから，両辺を平方して整理すると　$2b^2-4b+1<0$

$0\leqq b<\dfrac{1}{2}$ に注意して，これを解くと　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{1}{2}$

(ii)　$\dfrac{1}{2}\leqq b$ のとき，C および l が y 軸とそれぞれ $2b$，1 で交わるので，このとき，C と l は常に $-2<t<b$ に共有点をもつ．

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{b\geqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

別解 2 直線 AT の傾きは $\dfrac{t^2-4}{t+2}=t-2,$　　直線 BT の傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b)=-1 \quad \text{ゆえに} \quad b=-t-\frac{1}{t-2} \qquad \cdots(*)$$

$-2<t<b$ より　$t<-t-\dfrac{1}{t-2}$　ゆえに　$\dfrac{2t^2-4t+1}{t-2}<0$

t の範囲に注意して　$-2<t<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<t<2 \quad \cdots(**)$

$f(t)=-t-\dfrac{1}{t-2}$ とおくと

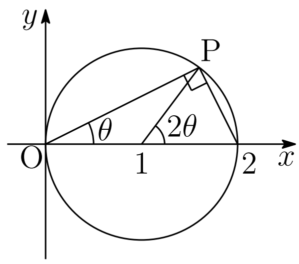
$$f'(t)=-1+\frac{1}{(t-2)^2}=-\frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2}$$

$f(t)$ は $-2<t<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ で単調減少，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<t<2$ で単調増加.

$$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \quad f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \quad \lim_{t\to 2-0}f(t)=\infty$$

したがって，$(**)$ において，$(*)$ を満たす b の値の範囲は　$\boldsymbol{b>\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$ ■

2　(1)　$\mathbf{OP = 2\cos\theta}$**.**　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

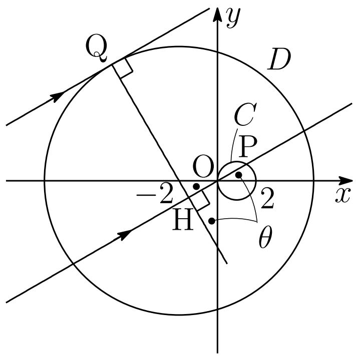


$$x = \mathrm{OP}\cos\theta = 2\cos\theta \cdot \cos\theta = 2\cos^2\theta$$
$$y = \mathrm{OP}\sin\theta = 2\cos\theta \cdot \sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\mathbf{P(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)}$

別解　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1,\ 0) + (\cos 2\theta,\ \sin 2\theta) = (1 + \cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

(2)　右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (-2,\ 0) + 7\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)$$
$$= (-2,\ 0) + 7(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$
$$= (-2 - 7\sin\theta,\ 7\cos\theta)$$

よって　$\mathbf{Q(-2 - 7\sin\theta,\ 7\cos\theta)}$

(3)　Q から直線 OP に垂線 QH を引くと　$\mathrm{QH} = 7 + 2\sin\theta$
$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を $f(\theta)$ とすると

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{QH} = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta(7 + 2\sin\theta)$$
$$= \cos\theta(7 + 2\sin\theta) = 7\cos\theta + \sin 2\theta,$$
$$f'(\theta) = -7\sin\theta + 2\cos 2\theta = -7\sin\theta + 2(1 - 2\sin^2\theta)$$
$$= -(4\sin^2\theta + 7\sin\theta - 2) = -(\sin\theta + 2)(4\sin\theta - 1)$$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{4}\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

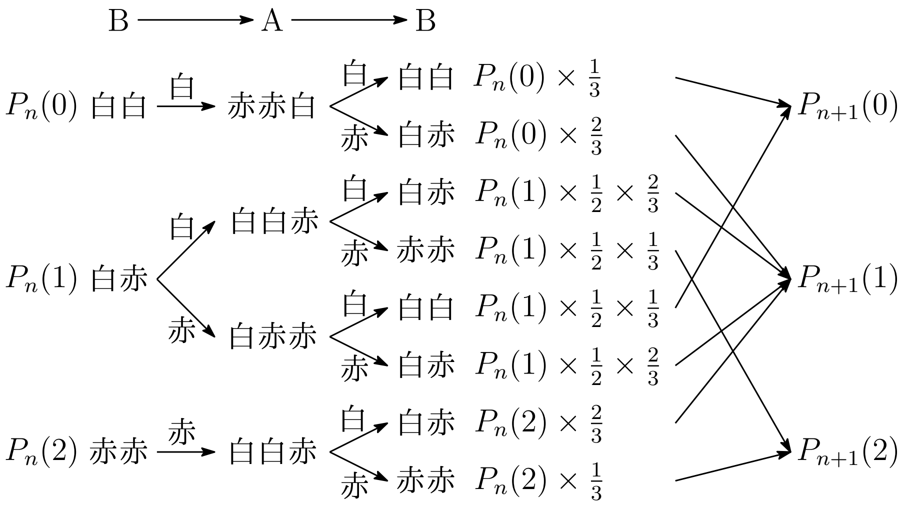
よって，求める最大値は

$$f(\alpha) = \cos\alpha(7 + 2\sin\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}\left(7 + 2 \times \frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{15\sqrt{15}}{8}}$$

■

3 (1) 定められた操作により，次の確率漸化式 $(*)$ を得る．

$$(*)\begin{cases} P_{n+1}(0)=\dfrac{1}{3}P_n(0)+\dfrac{1}{6}P_n(1) & \cdots ① \\ P_{n+1}(1)=\dfrac{2}{3}P_n(0)+\dfrac{2}{3}P_n(1)+\dfrac{2}{3}P_n(2) & \cdots ② \\ P_{n+1}(2)=\dfrac{1}{6}P_n(1)+\dfrac{1}{3}P_n(2) & \cdots ③ \end{cases}$$



$P_0(0)=1$，$P_0(1)=0$，$P_0(2)=0$ として，$(*)$ に $n=0$ を代入すると

$$\boldsymbol{P_1(0)=\frac{1}{3},\quad P_1(1)=\frac{2}{3},\quad P_1(2)=0}$$

(2) ①，③ より
$$P_{n+1}(0)+P_{n+1}(2)=\frac{1}{3}\{P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)\}$$
$$P_{n+1}(0)-P_{n+1}(2)=\frac{1}{3}\{P_n(0)-P_n(2)\}$$

したがって
$$P_n(0)+P_n(2)=\frac{1}{3}\qquad(n\geqq 1)$$
$$P_n(0)-P_n(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\qquad(n\geqq 1)$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{P_n(0)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$，$\boldsymbol{P_n(2)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$

② より　$P_{n+1}(1)=\dfrac{2}{3}\{P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)\}$　　よって　$\boldsymbol{P_n(1)=\dfrac{2}{3}}$

補足 $P_{n+1}(0)$，$P_{n+1}(1)$，$P_{n+1}(2)$ が $P_n(0)$，$P_n(1)$，$P_n(2)$ によって定まる確率過程 (1 つ前の時点だけで決定する) をマルコフ連鎖 (Markov chain) という．

■

$\boxed{4}$ (1) 条件 $(*)$ に解と係数の関係を適用すると

$$(\mathrm{A})\begin{cases} c+d=-a \\ e+f=-c \\ a+b=-e \end{cases} \qquad (\mathrm{B})\begin{cases} cd=b \\ ef=d \\ ab=f \end{cases}$$

(B) の 3 式の辺々を掛けると

$$cd\cdot ef\cdot ab=b\cdot d\cdot f \quad ゆえに \quad bdf(ace-1)=0$$

i) $b=0$ のとき (B) の第 3 式から $f=0$ 第 2 式から $d=0$
このとき (A) は

$$(\mathrm{A})\begin{cases} c=-a \\ e=-c \\ a=-e \end{cases} \quad これを解いて \quad a=c=e=0$$

$a=b=c=d=e=f=0$ は (B) を満たす.

ii) $d=0$ または $f=0$ のとき (i) と同様にして

$$a=b=c=d=e=f=0$$

iii) $a=c=e=1$ のとき，(A)，(B) は

$$(\mathrm{A})\begin{cases} 1+d=-1 \\ 1+f=-1 \\ 1+b=-1 \end{cases} \qquad (\mathrm{B})\begin{cases} d=b \\ f=d \\ b=f \end{cases}$$

上の (A) を解いて $b=d=f=-2$ これは (B) を満たす.

iv) $(a,\ c,\ e)=(1,-1,-1)$ のとき，(A)，(B) は

$$(\mathrm{A})\begin{cases} -1+d=-1 \\ -1+f=1 \\ 1+b=1 \end{cases} \qquad (\mathrm{B})\begin{cases} -d=b \\ -f=d \\ b=f \end{cases}$$

上の (A) を解いて $b=d=0,\ f=2$ これは (B) を満たさない.

v) $(a,\ c,\ e)=(-1,\ 1,-1),\ (-1,-1,\ 1)$ のとき，(iv) と同様に (A) から得られる $b,\ d,\ f$ は (B) を満たさない.

i)〜v) から $\quad \boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),}$
$\boldsymbol{(1,-2,\ 1,-2,\ 1,-2)}$

(2)　(i) 2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} であるから，解と係数の関係により，次の漸化式が成立する．

$$①\begin{cases} a_{n+1}+b_{n+1}=-a_n \\ a_{n+1}b_{n+1}=b_n \end{cases}$$

(a) $a_k=0$ となる自然数 k が存在するとき

$$(\mathrm{C})\begin{cases} a_{k+1}+b_{k+1}=-a_k=0 \\ a_{k+2}+b_{k+2}=-a_{k+1} \\ a_{k+2}b_{k+2}=b_{k+1} \end{cases}$$

(C) から a_{k+1}，b_{k+1} を消去すると　$(a_{k+2}-1)(b_{k+2}-1)=1$

これを解いて　　$(a_{k+2},\ b_{k+2})=(0,\ 0),\ (2,\ 2)$

2 次方程式 $x^2+a_{k+2}x+b_{k+2}=0$ は実数解をもつから

$$a_{k+2}{}^2-4b_{k+2}\geqq 0$$

上式を満たすのは　　$(a_{k+2},\ b_{k+2})=(0,\ 0)$

これを (C) の第 2 式，第 3 式に代入すると　$a_{k+1}=b_{k+1}=0$

さらに，$a_{k+1}b_{k+1}=b_k$ より　　$b_k=0$

$a_k=b_k=0$ のとき，$a_{k+1}=b_{k+1}=0$ であるから

$$a_n=b_n=0 \quad (n\geqq k)$$

また，漸化式 ① から，$a_k=b_k=0$ のとき

$$a_n=b_n=0 \quad (1\leqq n\leqq k)$$

したがって，すべての自然数 n について　$a_n=b_n=0$

よって　　$|b_1|=|b_2|=|b_3|=\cdots=0$

(b) すべての自然数について，$a_n\neq 0$ のとき，漸化式により

$$|a_{n+1}b_{n+1}|=|b_n| \quad \text{ゆえに} \quad |b_{n+1}|\leqq|b_n|$$

数列 $\{|b_n|\}$ は正の整数からなる下に有界な単調減少列であるから，

$$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$$

となる正の整数 m が存在する．

(a)，(b) より，題意は示された．

(ii) (i) の結果から

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \cdots = N$$

とおく (N は正の整数).

(a) $N = 0$ のとき

$$b_m = b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$$

漸化式 ① の第2式より，$b_{n+1} = 0$ のとき $b_n = 0$ である．$b_m = 0$ であるから

$$b_n = 0 \quad (1 \leqq n < m)$$

したがって，すべての自然数 n について　$b_n = 0$

$b_{n+1} = 0$ を漸化式 ① の第1式に代入すると　$a_{n+1} = -a_n$

数列 $\{a_n\}$ は公比 -1 の等比数列であるから，初項を a とすると

$$a_n = a(-1)^{n-1}$$

(b) $N \geqq 1$ のとき

$|b_n| = N \ (n \geqq m)$ であるから，$|a_{n+1}||b_{n+1}| = |b_n|$ より

$$|a_{n+1}|N = N \quad \text{すなわち} \quad |a_{n+1}| = 1$$

2次方程式 $x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1} = 0$ は実数解をもつから

$$a_{n+1}{}^2 - 4b_{n+1} = 1 - 4b_{n+1} \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} \leqq \frac{1}{4}$$

$|b_n| = N \geqq 1 \ (n \geqq m)$ であるから　$b_n = -N \ (n \geqq m)$

$a_{n+1}b_{n+1} = b_n$ により

$$a_{n+1}(-N) = -N \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = 1 \ (n \geqq m)$$

$a_{n+2} + b_{n+2} = -a_{n+1}$ により

$$1 + b_{n+2} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+2} = -2$$

したがって　$a_n = 1, \ \ b_n = -2 \ \ (n \geqq m+2)$

$a_{m+2} = 1$，$b_{m+2} = -2$ であるから，漸化式 ① より

$$a_n = 1, \ \ b_n = -2 \ \ (n \leqq m+2)$$

よって，すべての自然数 n について　$a_n = 1, \ \ b_n = -2$

(a)，(b) より　$\boldsymbol{(a_n, \ b_n) = (a(-1)^{n-1}, \ 0), \ (1, -2)}$ **($\boldsymbol{a}$ は整数)** ■

5.3 2017 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4

1 不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C : y = a - 1 - \log x \ (x > 0)$ を考える．s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a - 1 - \log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$ とする．このとき，次の問に答えよ．必要があれば，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を証明なしで使ってよい．

(1) 関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ．

(2) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ．

(3) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

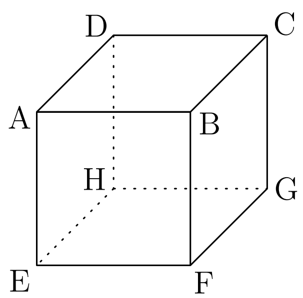
2 下図のような立方体を考える．この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する．時刻 0 では点 P は頂点 A にいる．時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる．自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ．

(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ．

(4) 自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする．このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ．



3 xyz 空間の 2 点 A$(0,\ 0,\ 2)$，P$(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする．また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) l 上に点 Q がある．実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を a，b，t を使って表せ．

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

4 n を自然数とする．0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (I)，(II)，(III) を満たしている．

(I) 集合 M は n 個の要素からなる．

(II) 集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である．

(III) 集合 M の要素 z，w に対して，その積 zw は集合 M の要素である．ただし，$z=w$ の場合も含める．

このとき，次の問に答えよ．

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ．

(2) n は偶数であることを示せ．

(3) $n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

(4) $n=6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

解答例

1 (1) $y = a - 1 - \log x$ を微分すると　$y' = -\dfrac{1}{x}$

C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a - 1 - \log s)$ における接線の方程式は

$$y - (a - 1 - \log s) = -\frac{1}{s}(x - s) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{x}{s} + a - \log s$$

$y = 0$ を代入すると　$x = s(a - \log s)$　ゆえに　$\boldsymbol{u(s) = s(a - \log s)}$

$x = 0$ を代入すると　$y = a - \log s$　ゆえに　$\boldsymbol{v(s) = a - \log s}$

(2) $u(s) = s(a - \log s)$ より　$u'(s) = a - 1 - \log s$，$u''(s) = -\dfrac{1}{s}$

s	(0)	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$
$u'(s)$		$+$	0	$-$
$u''(s)$		$-$	$-$	$-$
$u(s)$		$\nearrow$	極大 e^{a-1}	$\searrow$

$$\lim_{s \to +0} u(s) = \lim_{s \to +0}(sa - s\log s) = 0,\quad \lim_{s \to \infty} u(s) = \lim_{s \to \infty} s(a - \log s) = -\infty$$

$v(s) = a - \log s$ より　$v'(s) = -\dfrac{1}{s}$，　$v''(s) = \dfrac{1}{s^2} > 0$

したがって，$v(s)$ は下に凸で単調減少．

$t = u(s)$，$t = v(s)$ から t を消去すると

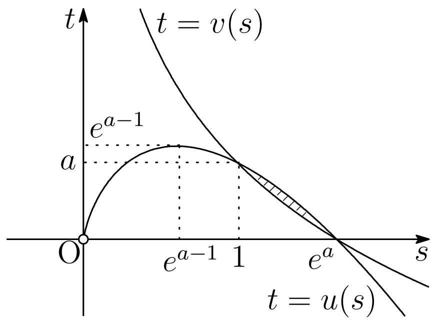
$$s(a - \log s) = a - \log s$$

ゆえに　$(s - 1)(a - \log s) = 0$

これを解いて　$s = 1,\ e^a$

2 曲線 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の交点の座標は

$$(1,\ a),\ (e^a,\ 0)$$



$0 < a < 1$ より，$t = u(s)$，$t = v(s)$ のグラフは，右の図のようになる．

(3) 求める立体の体積を V とすると，(2) のグラフから

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_1^{e^a} s\{u(s)-v(s)\}\,ds = \int_1^{e^a} s(s-1)(a-\log s)\,ds \\ &= \int_1^{e^a} \left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{s}\right)'(a-\log s)\,ds \\ &= \left[\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{2}\right)(a-\log s)\right]_1^{e^a} - \int_1^{e^a}\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{s}\right)ds \\ &= \frac{a}{6}+\left[\ \frac{s^3}{9}-\frac{s^2}{4}\ \right]_1^{e^a} = \frac{1}{9}e^{3a}-\frac{1}{4}e^{2a}+\frac{5}{36}+\frac{a}{6}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi}{18}(4e^{3a}-9e^{2a}+6a+5)}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

補足　まず，$0<x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す.

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0<x\leqq 1)$ とおくと

$$0<x<1 \text{ のとき}\quad g'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1)=2$ であるから

$$g(x)>0 \quad \text{ゆえに}\quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

すなわち　　$0<x<1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0<x<1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

■

2 (1) 与えられた規則により，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1 = 1,\ q_1 = 0,\ r_1 = 0$$

$$(*)\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1} = \dfrac{2}{3}p_n + r_n \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{3}q_n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = \mathbf{0}, \quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \mathbf{\frac{2}{3}}, \quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = \mathbf{0}$$

$(*)$ に $n = 2$ を代入すると，上の結果により

$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \mathbf{\frac{4}{9}}, \quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = \mathbf{0}, \quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) $(*)$ の第 2 式から　$q_{n+2} = \dfrac{2}{3}p_{n+1} + r_{n+1}$

これに $(*)$ の第 1 式，第 3 式を代入すると

$$q_{n+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_n + \frac{1}{3}q_n \quad \text{すなわち} \quad q_{n+2} = \frac{7}{9}q_n$$

(i) n が奇数のとき $(n \geqq 1)$　$q_n = q_1\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 0$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = 0, \quad r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = 0$$

(ii) n が偶数のとき $(n \geqq 2)$　$q_n = q_2\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(i)，(ii) の結果から

n が偶数のとき　$\boldsymbol{p_n = 0,\ q_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}},\ r_n = 0}$

n が奇数のとき　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}},\ q_n = 0,\ r_n = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n \neq 1)}$

(3) $s_m=\dfrac{1}{3}p_{2m-1}$ であるから

$$s_1=\frac{1}{3}p_1=\mathbf{\frac{1}{3}},$$

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{(2m-1)-3}{2}}=\mathbf{\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}}\quad \boldsymbol{(m\geqq 2)}$$

(4) 点 P が時刻 $2k$ $(1\leqq k\leqq m-1)$ および $2m$ のときに限り点 A に戻る確率であるから，$a=\dfrac{4}{27}$，$b=\dfrac{7}{9}$ とおくと，$s_m=ab^{m-2}$ より

$$\begin{aligned}t_m&=\sum_{k=1}^{m-1}s_ks_{m-k}=2s_1s_{m-1}+\sum_{k=2}^{m-2}s_ks_{m-k}\\&=2\cdot\frac{1}{3}\cdot ab^{m-3}+\sum_{k=2}^{m-2}ab^{k-2}ab^{m-k-2}\\&=\frac{2}{3}ab^{m-3}+\sum_{k=2}^{m-2}a^2b^{m-4}=\frac{2}{3}ab^{m-3}+(m-3)a^2b^{m-4}\end{aligned}$$

$t_m<s_m$ より　$\dfrac{2}{3}ab^{m-3}+(m-3)a^2b^{m-4}<ab^{m-2}$

$$\frac{2}{3}+(m-3)\frac{a}{b}<b\quad \text{ゆえに}\quad \frac{2}{3}+\frac{4}{21}(m-3)<\frac{7}{9}$$

整理すると　$m<3+\dfrac{7}{12}$　　条件 $m\geqq 2$ に注意して　$\boldsymbol{m=2,\ 3}$　■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(0,\ 0,\ 2)+t(a,\ b,\ -2)=(at,\ bt,\ 2-2t)$

よって　　$\mathbf{Q}\boldsymbol{(at,\ bt,\ 2-2t)}$

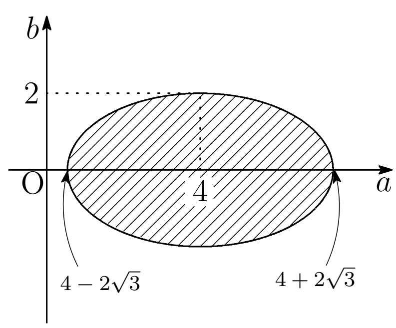
(2) S の方程式は　$(x-2)^2+y^2+z^2=2$

Q が S 上にあるとき　$(at-2)^2+(bt)^2+(2-2t)^2=2$

$$(a^2+b^2+4)t^2-2(2a+4)t+6=0$$

この t に関する 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつので，係数について

$$\begin{aligned}(2a+4)^2-6(a^2+b^2+4)&>0\\a^2-8a+3b^2+4&<0\\(a-4)^2+3b^2&<12\end{aligned}$$



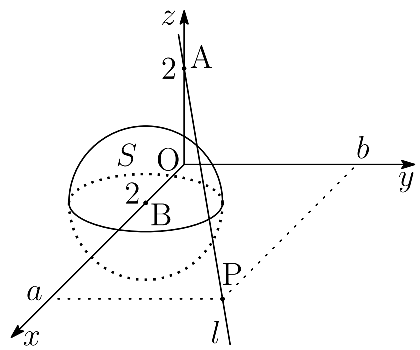
よって　　$\boldsymbol{\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}<1}$

不等式の表す領域は，右の楕円の内部で境界線を含まない．

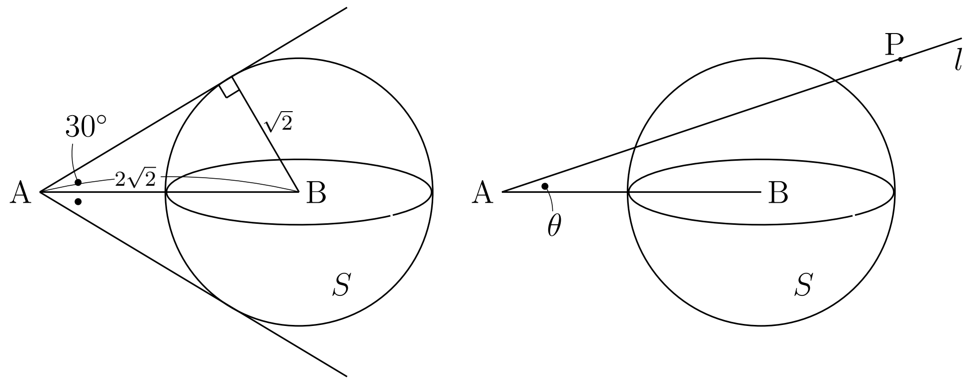
別解　S の中心を B$(2,\ 0,\ 0)$ とおくと

$$\mathrm{AB} = 2\sqrt{2}$$

S の半径は $\sqrt{2}$ であるから，l と S が接するとき，直線 AB と l のなす角は 30°．l と S が異なる 2 点で交わるとき，l と AB のなす角を θ とすると



$$|\cos\theta| \geqq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots (*)$$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 0, -2)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (a,\ b,\ -2)$ のなす角が θ であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} = \frac{2a+4}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+4}}$$

$(*)$ より　$\dfrac{|a+2|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+4}} \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに　$\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+4} \geqq \sqrt{2}|a+2|$

この両辺を平方して整理すると

$$a^2 - 8a + 3b^2 + 4 < 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{(a-4)^2}{12} + \frac{b^2}{4} < 1$$

補足　A を頂点，軸 (中心軸) を AB とし，母線と軸のなす角が 30° である円錐面の内部を R$(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AR}}|} > \cos 30^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2x-2(z-2)}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

平方して整理すると　$x^2 + 3y^2 + z^2 + 4zx - 8x - 4z + 4 < 0$

上式が円錐面の内部を表す領域である．

とくに，平面 $z = 0$ 上における領域が　$x^2 + 3y^2 - 8x + 4 < 0$

(3) Q の z 座標が正であるとき　$2-2t>0$　すなわち　$t<1$

2 次方程式 $(a^2+b^2+4)t^2-2(2a+4)t+6=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{2(2a+4)}{a^2+b^2+4},\quad \alpha\beta=\frac{6}{a^2+b^2+4}$$

$\alpha<1$，$\beta<1$ であるから，$\alpha-1<0$，$\beta-1<0$ より

$$(\alpha-1)+(\beta-1)<0,\quad (\alpha-1)(\beta-1)>0$$

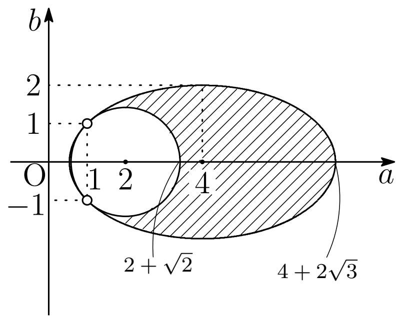
したがって　　$\alpha+\beta-2<0$，$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

$$\frac{2(2a+4)}{a^2+b^2+4}-2<0,\quad \frac{6}{a^2+b^2+4}-\frac{2(2a+4)}{a^2+b^2+4}+1>0$$

すなわち　　$(a-1)^2+b^2>1$，$(a-2)^2+b^2>2$

これと，(1) の結果により

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}<1} \\ \boldsymbol{(a-1)^2+b^2>1} \\ \boldsymbol{(a-2)^2+b^2>2} \end{cases}$$



不等式の表す領域は，右の図斜線部分で境界線を含まない．

別解 l と T が相異なる2点で交わるとき，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ は楕円 $x^2+3y^2-8x+4=0\cdots$① の内部で，円 $(x-2)^2+y^2=2\cdots$② の外部にあるから

$$a^2+3b^2-8a+4<0, \quad (a-2)^2+b^2>2$$

①，② から y を消去すると

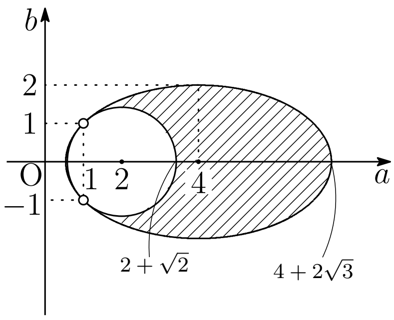
$$x^2+3\{2-(x-2)^2\}-8x+4=0 \quad ゆえに \quad (x-1)^2=0$$

$x=1$ のとき　$y=\pm 1$

①，② は，点 $(1, \pm 1,\ 0)$ で接する．

ゆえに，点Pの x 座標について　$a>1$

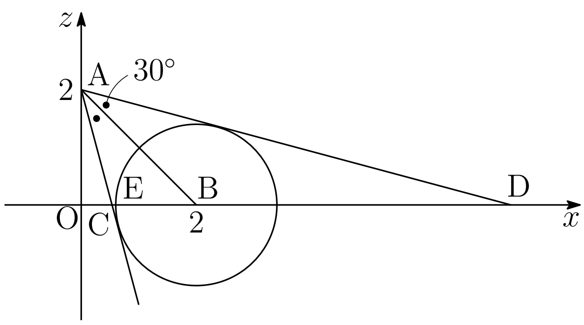
よって　$\begin{cases} \boldsymbol{a>1} \\ \boldsymbol{(a-4)^2+3b^2<12} \\ \boldsymbol{(a-2)^2+b^2>2} \end{cases}$



不等式の表す領域は，右の図斜線部分で境界線を含まない．

注意 楕円 $x^2+3y^2-8x+4=0$ の長軸上の頂点をC，Dとすると，$\angle\mathrm{OAC}=15^\circ$，$\angle\mathrm{OAD}=75^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{OC} &= \mathrm{OA}\tan 15^\circ = 2(2-\sqrt{3}) \\ \mathrm{OD} &= \mathrm{OA}\tan 75^\circ = 2(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$



x 軸上の2点C，Eの x 座標は，それぞれ $4-2\sqrt{3}$，$2-\sqrt{2}$ であり，直線ACと直線AEの間を l が通過するとき(不適)，第2式，第3式を満たすので，$a>1$ が必要となる．■

4 (1) $z \in M$ のとき，$\dfrac{1}{z} \in M$ であるから，この積は $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1 \in M$
さらに，$1 \in M$ に対して $-1 \in M$

(2) $M = \{z_1,\ z_2, \cdots,\ z_n\}$ とすると $M = \{-z_1, -z_2, \cdots, -z_n\}$
それぞれの要素の積は

$$z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n$$

$z_k \neq 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ であるから $(-1)^n = 1$ よって n は偶数

(3) (1) の結果から，$1 \in M$，$-1 \in M$
$z \neq \pm 1$ について $z \in M$ とすると，$\dfrac{1}{z} \in M$，$-z \in M$
$\dfrac{1}{z} \in M$ に対して $-\dfrac{1}{z} \in M$
したがって $M = \left\{1, -1,\ z, -z,\ \dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{z}\right\}$
$z \neq 0, \pm 1$ であるから，$z \neq -z$，$z \neq \dfrac{1}{z}$ に注意すると
$n = 4$ のとき $z = -\dfrac{1}{z}$, $-z = \dfrac{1}{z}$
これを解いて $z = \pm i$ よって $\boldsymbol{M = \{1, -1,\ i, -i\}}$

(4) (3) と同様に，$M = \left\{1, -1,\ z, -z,\ \dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{z}\right\} \cdots (*)$ とおくと
これらの要素に z を掛けて $\{z, -z, z^2, -z^2, 1, -1\}$

(i) $z^2 = \dfrac{1}{z}$ $\left(-z^2 = -\dfrac{1}{z}\right)$ のとき

$$z^3 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (z-1)(z^2+z+1) = 0$$

$z \neq 1$ であるから $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$(*)$ より $M = \left\{1, -1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

(ii) $z^2 = -\dfrac{1}{z}$ $\left(-z^2 = \dfrac{1}{z}\right)$ のとき

$$z^3 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (z+1)(z^2-z+1) = 0$$

$z \neq -1$ であるから $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$(*)$ より $M = \left\{1, -1,\ \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{M = \left\{1, -1,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}}$$

解説 $M = \{z_1,\ z_2, \cdots,\ z_n\}$，$w \in M$ とすると　$M = \{wz_1, wz_2, \cdots, wz_n\}$
それぞれの要素の積は

$$z_1 z_2 \cdots z_n = w^n z_1 z_2 \cdots z_n$$

$z_k \neq 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ であるから　$w^n = 1$
M のそれぞれの要素は異なるから，$z_k \in M$ を次のようにとればよい．

$$z_k = \cos\frac{2k}{n}\pi + i\sin\frac{2k}{n}\pi \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

これに $n = 4,\ 6$ をそれぞれ代入すると，(3)，(4) の結果を得る．　■

5.4　2018年(150分)

出題分野 1 2 3 4

1 自然数 n に対し，定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$ を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(2) $0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ．

(4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする．このとき (1)，(2) を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

2 a を1より大きい実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y = x$ 上にあることを示せ．

(2) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は2個以下であることを示せ．

(3) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は1個であるとする．このときの共有点の座標と a の値を求めよ．

3 p を素数，a，b を整数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れることを示せ．

(2) $(a+2)^p - a^p$ は偶数であることを示せ．

(3) $(a+2)^p - a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ．

4 図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える．2 点 P，Q が 6 個の頂点 A，B，C，D，E，F を以下の規則 (a)，(b) に従って移動する．

(a) 時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる．

(b) 点 P，Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．

時刻 n まで 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す．また時刻 n まで 2 点 P，Q が同時に同じに頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P，Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 時刻 1 での点 P，Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ．

(2) a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ．

(3) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ．

(4) $p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ．

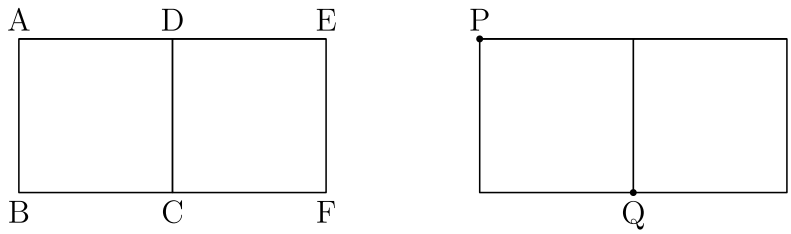


図 1　　図 2

解答例

$\boxed{1}$ (1) $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$ より

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$0 \leqq \dfrac{x^{n+1}}{x^2+1} \leqq \dfrac{x^n}{x^2+1} \leqq x^n$ より

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx$$

よって　　$0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$

(3) $I_{n+2} \leqq I_n$ であるから，(1) の結果から　$2I_{n+2} \leqq I_n + I_{n+2} \leqq 2I_n$

$$2I_{n+2} \leqq \frac{1}{n+1} \leqq 2I_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{2(n+1)} \leqq nI_n \leqq \frac{n}{2(n-1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(4) (1) の結果から，自然数 k に対して，$I_{2k-1} + I_{2k+1} = \dfrac{1}{2k}$ であるから

$$(-1)^{k-1}I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$$

ゆえに　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{k-1}I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1}\} = I_1 - I_{2n-1}$

(2) の結果より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_{2n-1} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点を $(p,\ q)$ とすると

$$\begin{cases} q = a^p \\ q = \log_a p \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} q = a^p \\ p = a^q \end{cases}$$

上の第 2 式から　　$q - p = a^p - a^q = a^q(a^{p-q} - 1) \quad \cdots (*)$

$p - q > 0$ と仮定すると，$a > 1$ より $a^{p-q} - 1 > 0$ であるから，
$(*)$ より，$q - p > 0$ となり，矛盾．

また，$p - q < 0$ と仮定すると，$a > 1$ より $a^{p-q} - 1 < 0$ であるから，
$(*)$ より，$q - p < 0$ となり，矛盾．
したがって，$p - q = 0$．よって，共有点は直線 $y = x$ 上にある．

(2) $y = e^x$ とすると　$y' = e^x$
曲線 $y = e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$$y - e^t = e^t(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = e^t x + (1 - t)e^t$$

この接線が原点を通るとき

$$(1 - t)e^t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1 \quad \text{接点は } (1,\ e)$$

したがって，原点を通る直線で曲線 $y = e^x$ に接する直線は　$y = ex$

曲線 $y = e^x$ を y 軸を元に x 軸方向に e 倍だけ拡大した曲線 $y = e^{\frac{x}{e}}$ は，直線 $y = x$ と点 $(e,\ e)$ で接する．このことから，曲線 $y = a^x$ は

- $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ のとき，直線 $y = x$ と 2 点で交わる．
- $a = e^{\frac{1}{e}}$ のとき，直線 $y = x$ と点 $(e,\ e)$ で接する．
- $e^{\frac{1}{e}} < a$ のとき，直線 $y = x$ と共有点を持たない．

(1) の結論から，2 曲線 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ の共有点は直線 $y = x$ 上にあるから，この 2 曲線の共有点は 2 個以下である．

(3) (2) の結果から，共有点は $\boldsymbol{(e,\ e)}$，$\boldsymbol{a = e^{\frac{1}{e}}}$　■

3 (1) 二項定理により $(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k a^{p-k} b^k$

$1 \leqq k \leqq p-1$ のとき ${}_p\mathrm{C}_k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = p \cdot \dfrac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$

素数 p は $1, 2, \cdots, p-1$ で割り切れないから，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる．

よって $(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k a^{p-k} b^k \equiv 0 \pmod{p}$

(2) $(a+2)^p - a^p = 2\sum_{k=1}^{p}(a+2)^{p-k}a^{k-1}$ よって $(a+2)^p - a^p \equiv 0 \pmod{2}$

補足 $x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1}$

(3) (1) の結果に $b=2$ を代入することにより

$$(a+2)^p - a^p \equiv 2^p \pmod{p}$$

(1) の結果に $a=b=1$ を代入することにより

$$2^p \equiv 2 \pmod{p}$$

上の 2 式から $(a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{p}$

したがって $(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod{p}$ $\cdots$①

(2) の結果から $(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod{2}$ $\cdots$②

(i) $p \neq 2$ のとき，①，② より

$$(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{2p}$$

(ii) $p=2$ のとき，$2p=4$ であるから

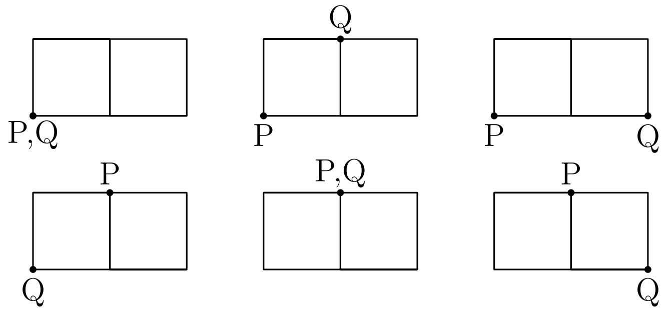
$$(a+2)^p - a^p = (a+2)^2 - a^2 = 4(a+1) \equiv 0 \pmod{2p}$$

(i)，(ii) より，求める余りは

$p \neq 2$ のとき 2， $p=2$ のとき 0

■

4 (1) 時刻 1 で動点 P，Q の可能な配置は，次の 6 通り



(2) (1) の 6 通りの配置は同様に確からしい．

a_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある，すなわち，

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q})=(\mathrm{B},\mathrm{D}),\ (\mathrm{D},\mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\mathrm{F})$$

にある確率であるから　$a_1=\dfrac{3}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

b_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上にない，すなわち，$(\mathrm{P},\mathrm{Q})=(\mathrm{B},\mathrm{F})$ にある確率であるから　$b_1=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

動点 P，Q が頂点 B，D，F 上にあるのは偶数時刻で，頂点 A，C，E 上にあるのは奇数時刻である．動点 P，Q が時刻 n まで同じ頂点にないという条件を満たしながら時刻 n において，動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある確率 a_n，動点 P，Q が A と E または B と F にある確率 b_n について次の確率漸化式が成立する．

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n,\quad b_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{4}b_n\quad\cdots(*)$$

したがって　$a_2=\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{1}{2}b_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$$b_2=\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{4}b_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

(3) $(*)$ より　$\boldsymbol{a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n,\quad b_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{4}b_n}$

(4) $a_0=1$，$b_0=0$，$(*)$ より，$a_n\geqq 0$，$b_n\geqq 0$ であるから

$$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{3}{4}b_n\leqq\frac{3}{4}(a_n+b_n)$$

ゆえに　$p_0=1$，$p_{n+1}\leqq\dfrac{3}{4}p_n$　よって　$p_n\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n p_0=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$　■

5.5 2019年(150分)

出題分野 1 2 3 4

1 正の整数 n に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n\theta}$$

とする．

(1) I_1 を求めよ．必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい．

(2) $n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ．

(3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径1の円板を D とする．D を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を C とする．C を平面 $x = \dfrac{1}{2}$ で2つの部分に切断したとき，小さい方を S とする．z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ．

2 空間内に $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある．点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している．点 B，C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B′，C′ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}} = 0$ を示せ．

(2) $\angle\mathrm{B'AC'} > \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(3) P 上の三角形 AB′C′ の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった．このとき，辺 AB の長さを求めよ．

3 正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを10進数で表すと，小数第1位は0であり，第2位は0以外の数であるとする．

(1) このような n の中で最小のものを求めよ．

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに10番目にくるものを求めよ．

$\boxed{4}$ 正の整数 n に対して $1,\ 2, \cdots, n$ を一列に並べた順列を考える．そのような順列は $n!$ 個ある．このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1,\ a_2, \cdots, a_n)$ とする．この $(a_1,\ a_2, \cdots, a_n)$ に対し，各添字 $i = 1, 2, \cdots, n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \to a_j = k$ と書くことにする．ここで $a_i = j \to a_j = k \to a_k = l \to \cdots$ のようにたどり，それを続けていく．例えば $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7) = (2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき，

(i) $a_1 = 2 \to a_2 = 5 \to a_5 = 4 \to a_4 = 1 \to a_1 = 2$

(ii) $a_3 = 6 \to a_6 = 3 \to a_3 = 6$

(iii) $a_7 = 7 \to a_7 = 7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する．この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ．上の (i)，(ii)，(iii) は長さがそれぞれ 4，2，1 のサイクルになっている．

(1) $n = 3$ とする．選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ．

(2) $n = 4$ とする．長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ．

(3) n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ．

(4) n を奇数とする．選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ \log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\mathbf{\log(2+\sqrt{3})}$$

(2) $n\geqq 3$ のとき

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\tan\theta)'(\cos\theta)^{-n+2}\,d\theta$$
$$=\Big[\ \tan\theta(\cos\theta)^{-n+2}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\cdot(-n+2)(\cos\theta)^{-n+1}(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$=2^{n-2}\sqrt{3}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^{n-1}\theta}\,d\theta$$
$$=2^{n-2}\sqrt{3}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^n\theta}\,d\theta=2^{n-2}\sqrt{3}-(n-2)(I_n-I_{n-2})$$

ゆえに　$(n-1)I_n=(n-2)I_{n-2}+2^{n-2}\sqrt{3}$

よって　$\boldsymbol{I_n=\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\dfrac{2^{n-2}\sqrt{3}}{n-1}}$

補足 $m\geqq 3$ に対して，$J_m=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^m\theta\,d\theta$ とすると

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin\theta)'\cos^{m-1}\theta\,d\theta$$
$$=\Big[\ \sin\theta\cos^{m-1}\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta(m-1)\cos^{m-2}\theta(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2^m}-(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos^2\theta-1)\cos^{m-2}\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{2^m}-(m-1)(J_m-J_{m-2})$$

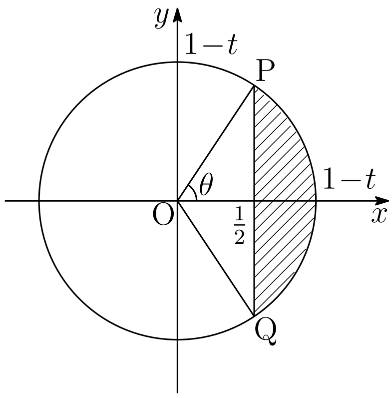
ゆえに　$mJ_m=(m-1)J_{m-2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2^m}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は負の整数 m についても成立する．

実際，$m=-n+2$ $(n\geqq 3)$ とすると，$J_{-n}=I_n$ に注意して

$(-n+2)I_{n-2}=(-n+1)I_n+2^{n-2}\sqrt{3}$　よって　$I_n=\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\dfrac{2^{n-2}\sqrt{3}}{n-1}$

(3) 円錐 $C : x^2+y^2=(z-1)^2$ と S の z 軸に垂直な平面 $z=t$ による断面は，右の図の線分 PQ および $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ で囲まれた斜線部分で，$\angle\mathrm{POQ}=2\theta$ とすると，$\mathrm{OP}=1-t$ より



$$(1-t)\cos\theta=\frac{1}{2}\quad ゆえに\quad 1-t=\frac{1}{2\cos\theta}$$

その面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned}
S(t)&=\frac{1}{2}(1-t)^2(2\theta-\sin 2\theta)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2(2\theta-2\sin\theta\cos\theta)\\
&=\frac{\theta}{4\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}
\end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$，$1-t=\dfrac{1}{2\cos\theta}$ より

t	$0\longrightarrow\frac{1}{2}$
θ	$\frac{\pi}{3}\longrightarrow 0$

$$\frac{dt}{d\theta}=-\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}$$

よって，求める体積を V とすると，(1)，(2) の結果に注意して

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{\frac{1}{2}}S(t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left(\frac{\theta}{4\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}\right)d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\theta\sin\theta}{8\cos^4\theta}-\frac{\sin^2\theta}{8\cos^3\theta}\right)d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\frac{\theta}{24}\left(\frac{1}{\cos^3\theta}\right)'-\frac{1}{8\cos^3\theta}+\frac{1}{8\cos\theta}\right\}d\theta\\
&=\left[\frac{\theta}{24\cos^3\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta\\
&=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{24}I_3-\frac{1}{8}I_3+\frac{1}{8}I_1=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}I_3+\frac{1}{8}I_1\\
&=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}I_1+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{8}I_1=\frac{\pi}{9}+\frac{1}{24}I_1-\frac{\sqrt{3}}{6}\\
&=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}+\frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{6}}
\end{aligned}$$

補足 $C : x^2+y^2=(z-1)^2$ の z 軸に垂直な平面による断面は円であるから，積分は，楕円型関数，すなわち，三角関数を用いる．円錐 C の x 軸に垂直な平面を考えると，その断面は双曲線となり，双曲線関数

$$\frac{a}{2}(e^t+e^{-t})\quad または\quad \frac{a}{2}(e^t-e^{-t})$$

を用いる．特に母線と平行な断面は放物線となる [1]．C の方程式から

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

x 軸に垂直な平面による断面積を $S(x)$ とすると $(\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1)$

$$S(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} z\,dy = 2\int_0^{\sqrt{1-x^2}} z\,dy$$

$y = \dfrac{x}{2}(e^t - e^{-t})$ とおくと

y	$0 \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$
t	$0 \longrightarrow \log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$\begin{aligned}
S(x) &= 2\int_0^{\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \left\{1 - \frac{x}{2}(e^t + e^{-t})\right\} \cdot \frac{x}{2}(e^t + e^{-t})\,dt \\
&= x\int_0^{\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \left\{e^t + e^{-t} - \frac{x}{2}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) - x\right\} dt \\
&= x\left[\, e^t - e^{-t} - \frac{x}{4}(e^{2t} - e^{2t}) - xt\,\right]_0^{\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \\
&= \sqrt{1-x^2} - x^2\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\frac{1}{2}}^1 S(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - x^2\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) dx \\
&= \left[\,\frac{2}{3}x\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{3}\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\,\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{\pi}{9} + \frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

なお，$\displaystyle\int \sqrt{A+y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{A+y^2} + \frac{A}{2}\log(y + \sqrt{A+y^2}) + C$ を用いると

$$\begin{aligned}
S(x) &= 2\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - \sqrt{x^2+y^2})\,dy \\
&= 2\left[\, y - \frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{2}\log(y + \sqrt{x^2+y^2})\,\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \sqrt{1-x^2} - x^2\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2018.pdf $\boxed{5}$ 参照

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC'}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AB'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{BB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ は P 上のベクトル，$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ は P に垂直なベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}=0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$

(2) P の法線ベクトルを $\vec{n}$ とし

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+\beta\vec{n},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\gamma\vec{n}$$

とおく．点 B と点 C は P に関して同じ側にあるから，$\beta\gamma>0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\beta\gamma|\vec{n}|^2=0 \quad ゆえに\quad \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=-\beta\gamma|\vec{n}|^2<0$$

よって　$\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とし，$\mathrm{AB'}=\sqrt{21}$，$\mathrm{AC'}=4$ とすると

$$\mathrm{BC}=\sqrt{2}x,\quad \mathrm{BB'}=\sqrt{x^2-21},\quad \mathrm{CC'}=\sqrt{x^2-16}$$

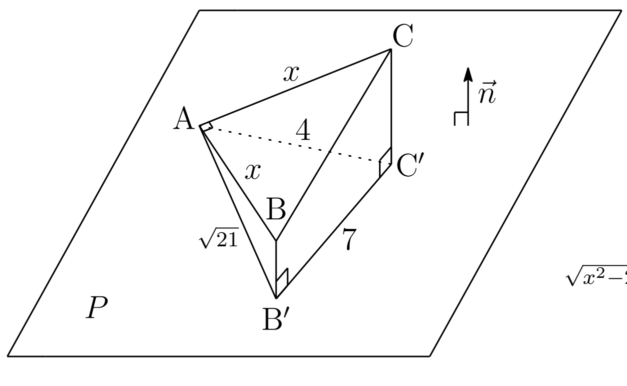
点 B から線分 CC′ に垂線 BH を引き，△BCH に三平方の定理を適用すると

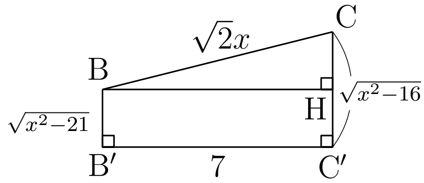
$$(\sqrt{x^2-16}-\sqrt{x^2-21})^2+7^2=(\sqrt{2}x)^2$$

整理すると　$\sqrt{x^2-16}\sqrt{x^2-21}=6$　ゆえに　$x^4-37x^2+300=0$

したがって　$(x^2-12)(x^2-25)=0$

$x>\sqrt{21}$ に注意してこれを解くと　$x=5$　よって　$\mathbf{AB=5}$





$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\sqrt{n}$ の整数部分を A，小数部分を h とすると

$$\sqrt{n} = A + h \quad \text{ゆえに} \quad n - A^2 = 2Ah + h^2$$

上の第 2 式の両辺は整数であるから，これを m とすると (m は整数)

$$m = 2Ah + h^2 \quad \text{ゆえに} \quad A^2 + m = (A+h)^2$$

h について解くと　$h = \sqrt{A^2+m} - A = \dfrac{m}{\sqrt{A^2+m}+A}$

条件により，$\dfrac{1}{100} \leqq h < \dfrac{1}{10}$ であるから

$$\frac{1}{100} \leqq \frac{m}{\sqrt{A^2+m}+A} < \frac{1}{10}$$

$$10 < \frac{\sqrt{A^2+m}+A}{m} \leqq 100 \quad \cdots(*)$$

$n = A^2 + m$ であるから，これを満たす最小の n は $m = 1$ のとき

$$10 < \sqrt{A^2+1} + A \leqq 100$$

n を最小にする整数 A, m は　$A = 5$，$m = 1$　よって　$\boldsymbol{n = 26}$

(2) (i) $m = 1$ のとき，$(*)$ より

$$10 < \sqrt{A^2+1} + A \leqq 100 \quad \text{ゆえに} \quad 5 \leqq A < 50$$

(ii) $m = 2$ のとき，$(*)$ より

$$20 < \sqrt{A^2+2} + A \leqq 200 \quad \text{ゆえに} \quad 10 \leqq A < 100$$

(i)，(ii) の結果により，$n = A^2 + m$ を小さい順に 10 個並べると

$$5^2+1,\ 6^2+1,\ 7^2+1,\ 8^2+1,\ 9^2+1,$$
$$10^2+1,\ 10^2+2,\ 11^2+1,\ 11^2+2,\ 12^2+1$$

よって，求める 10 番目の数 n は　$12^2 + 1 = \mathbf{145}$　■

$\boxed{4}$ (1) $a_k = k$ となる k $(k = 1, 2, 3)$ が存在する次の 4 通りである．

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 3)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{3!} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) 4 個の数字 1, 2, 3, 4 を円形 (サイクル) に並べる円順列の総数は次の 3! 通りある．(1 を起点とすると)

$$1 \to 2 \to 3 \to 4,\quad 1 \to 2 \to 4 \to 3,\quad 1 \to 3 \to 2 \to 4,$$
$$1 \to 3 \to 4 \to 2,\quad 1 \to 4 \to 2 \to 3,\quad 1 \to 4 \to 3 \to 2$$

よって，$n = 4$ のとき長さ 4 のサイクルは，次の 6 通りある．

$$\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = (2,\ 3,\ 4,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 3),\ (3,\ 4,\ 2,\ 1),}$$
$$\boldsymbol{(3,\ 1,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 1,\ 2),\ (4,\ 1,\ 2,\ 3)}$$

(3) j を正の整数とすると　$\dfrac{1}{j} > \displaystyle\int_j^{j+1} \frac{dx}{x}$

よって，n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \sum_{j=k}^{n} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x} = \int_k^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) - \log k$$

(4) 1 から n までの n 個 (n は奇数) の順列に長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルがあれば，他のサイクルは $\dfrac{n-1}{2}$ 以下である．n 個から選んだ順列の長さ j のサイクルは，n 個から j 個取り出して並べた円順列であり，その総数は $\dfrac{{}_n\mathrm{P}_j}{j}$ 通りで，残りの $(n-j)$ 個の並べ方は $(n-j)!$ 通りである．
したがって，$\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は

$$p = \frac{1}{n!} \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{{}_n\mathrm{P}_j}{j} \cdot (n-j)! = \frac{1}{n!} \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{n!}{j} = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{1}{j}$$

よって，(3) の結果により

$$p = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log\frac{n+1}{2} = \log 2$$

■

5.6 2020 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4

1 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の $x > 0$ の部分を C_1，$x < 0$ の部分を C_2 とする．以下の問に答えよ．

(1) 直線 $ax - by = 1$ が C_1，C_2 の両方と 1 点ずつで交わるための a，b の条件を求めよ．

(2) a，b は (1) で求めた条件をみたすものとする．点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとり，直線 $ax - by = 1$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ P，Q とする．このとき $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を a，b を用いて表せ．

(3) 面積 S の最小値を求めよ．また，その最小値をとるための a，b の条件を求めよ．

2 3 つの数 2，$m^2 + 1$，$m^4 + 1$ が相異なる素数となる正の整数 m が 1 つ固定されているものとする．以下の問に答えよ．

(1) 3 つの数 2，$m^2 + 1$，$m^4 + 1$ のうち，1 つを a とし，残りの 2 つを b，c とする．このとき $a^2 < bc$ となる a をすべて求めよ．

(2) 正の整数 x，y が $(x + y)(x^2 + 2y^2 + 2xy) = 2(m^2 + 1)(m^4 + 1)$ をみたしているとき x，y を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x) > 0$ をみたしているとする．区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$$

と定義するとき，区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(2) $f(x)$ を (1) の関数とするとき

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

を示せ．

(3) 関数 $g(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x) < 0$ をみたしているとする．このとき，

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

を示せ．

4 2 名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う．

(i) 正方形の 4 つの頂点を反時計回りに A，B，C，D とする．両者はコマを 1 つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマは A, 後攻の持ちゴマは C に置いてあるとする．

(ii) 先攻から始めて，交互にサイコロを振る．ただしサイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．出た目を 3 で割った余りが 0 のときコマは動かさない．また余りが 1 のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが 2 のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす．もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする．

ちょうど n 回サイコロが振られてときに勝敗が決まる確率を p_n とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

(3) このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち 2 以上の任意の整数 N に対して

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

が成り立つことを示せ．ただし正の実数 a に対し $[a]$ は，その整数部分 ($k \leqq a < k+1$ となる整数 k) を表す．

解答例

1 (1) 直線 $ax-by=1$ は，$b=0$ のとき，直線 $ax=1$ は y 軸と平行であり，C_1 と C_2 の両方で共有点をもつことはない．$b \neq 0$ より，直線 $y=\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$ と双曲線 $x^2-y^2=1$ から y を消去すると

$$x^2-\left(\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\right)^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2-b^2)x^2-2ax+b^2+1=0 \qquad (*)$$

(i) $a^2-b^2=0$ のとき，方程式 $(*)$ の解は1個となり，不適.

(ii) $a^2-b^2 \neq 0$ のとき，2次方程式 $(*)$ の解を $p,\ q$ とすると $(p<q)$，条件より，2数の解の積が負であるから，解と係数の関係により

$$pq=\frac{b^2+1}{a^2-b^2}<0 \quad \text{ゆえに} \quad b^2>a^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{|b|>|a|}$$

(2) 2次方程式 $(*)$ の解が $p,\ q$ であるから $(p<q)$

$$\begin{aligned} q-p &= \frac{-a+|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}-\frac{-a-|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2} \\ &= \frac{2|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2} \end{aligned}$$

直線 $ax-by=1$ と C_1，C_2 との交点をそれぞれ P，Q とすると

$$\mathrm{P}\left(p,\ \frac{ap-1}{b}\right),\quad \mathrm{Q}\left(q,\ \frac{aq-1}{b}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{PQ}=\frac{(q-p)\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$$

したがって $\qquad \mathrm{PQ}=\dfrac{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$

点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ から直線 $ax-by-1=0$ までの距離を d とすると

$$d=\frac{|a^2-b^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\triangle$APQ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot d=\boldsymbol{\frac{(b^2-a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{b^2-a^2}}$$

(3) $t = b^2 - a^2$ とすると $(t > 0)$　　$S = \dfrac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t}$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{3}{2}(t+1)^{\frac{1}{2}}t - (t+1)^{\frac{3}{2}}}{t^2} = \frac{(t-2)\sqrt{t+1}}{2t^2}$$

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$\frac{dS}{dt}$		$-$	0	$+$
S		$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

$t = 2$，すなわち，$\boldsymbol{b^2 - a^2 = 2}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ となる．

別解 $S = \dfrac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t} = \left(\dfrac{t+1}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(t^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$t > 0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

よって　　$S \geqq \left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

上式において，等号が成立するとき

$$\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} \quad \text{すなわち} \quad t = 2$$

■

$\boxed{2}$ (1) 3 つの数 $2,\ m^2+1,\ m^4+1$ が相異なる素数であるから (m は正の整数)

$$m \neq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2 < m^2 + 1 < m^4 + 1$$

(i) $a = 2$ のとき

$$bc = (m^2+1)(m^4+1) \geqq (2^2+1)(2^4+1) > 2^2$$

したがって　　$a^2 < bc$

(ii) $a = m^2 + 1$ のとき

$$bc - a^2 = 2(m^4+1) - (m^2+1)^2 = (m^2-1)^2 > 0$$

したがって　　$a^2 < bc$

(iii) $a = m^4 + 1$ のとき

$$\begin{aligned} bc - a^2 &= 2(m^2+1) - (m^4+1)^2 \\ &< 2(m^4+1) - (m^4+1)^2 = (m^4+1)(1-m^4) < 0 \end{aligned}$$

したがって　$a^2 > bc$

(i)〜(iii) より，$a^2 < bc$ を満たす a は　$\boldsymbol{a = 2,\ m^2 + 1}$

(2) 与えられた条件から，正の整数 x，y に対して

$$(x+y)\{(x+y)^2 + y^2\} = 2(m^2+1)(m^4+1) \quad \cdots (*)$$

をみたすとき，$(*)$ の右辺が3つ相異なる素数の積であること

$$x + y < (x+y)^2 + y^2, \quad 2(m^2+1) < m^4 + 1$$

に注意して場合分けを行う．

(i) $x + y = 2$，$(x+y)^2 + y^2 = (m^2+1)(m^4+1)$ のとき
$x = y = 1$ であるから，これを $(*)$ に代入すると

$$2{\cdot}5 = 2(m^2+1)(m^4+1) \quad ゆえに \quad 5 = (m^2+1)(m^4+1)$$

$m^2 + 1 \geqq 5$，$m^4 + 1 \geqq 17$ より，上式をみたす正の整数 m はない．

(ii) $x + y = m^2 + 1$，$(x+y)^2 + y^2 = 2(m^4+1)$ のとき

$$(m^2+1)^2 + y^2 = 2(m^4+1) \quad ゆえに \quad y^2 = (m^2-1)^2$$

したがって　$y = m^2 - 1$　このとき　$x = 2$

(iii) $x + y = 2(m^2+1)$，$(x+y)^2 + y^2 = m^4 + 1$ のとき

$$4(m^2+1)^2 + y^2 = m^4 + 1 \quad ゆえに \quad y^2 = -3m^4 - 8m^2 - 3 < 0$$

これを満たす正の整数 y は存在しない．

(i)〜(iii) から　$\boldsymbol{x = 2,\ \ y = m^2 - 1}$　■

3　(1) $F(x)=f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x)$ より $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)+f'(\pi-x)-f'(\pi+x)-f'(2\pi-x)\\&=-\{f'(\pi+x)-f'(x)\}-\{f'(2\pi-x)-f'(\pi-x)\}\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$f''(x)>0$ であるから

$$f'(\pi+x)>f'(x),\quad f'(2\pi-x)>f'(\pi-x)$$

したがって　$f'(\pi+x)-f'(x)>0$，$f'(2\pi-x)-f'(\pi-x)>0$

上の 2 式と $F'(x)$ により　$F'(x)<0$　また，$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ であるから

$$\text{区間 } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{ において}\quad F(x) \geqq 0$$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$ について，$x=\pi-t$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-t)\cos(\pi-t)(-dt)\\&=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-x)\cos x\,dx\end{aligned}\tag{A}$$

$\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$ について，$x=\pi+t$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi+t)\cos(\pi+t)\,dt\\&=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi+x)\cos x\,dx\end{aligned}\tag{B}$$

$\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ について，$x=2\pi-t$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi-t)\cos(2\pi-t)(-dt)\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi-x)\cos x\,dx\end{aligned}\tag{C}$$

(A)〜(C) および $F(x)$ の定義式により

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx \\
&\qquad + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - x)\cos x\,dx \\
&\qquad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + x)\cos x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi - x)\cos x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx
\end{aligned}$$

(1) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$F(x) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^{2x} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

(3) $g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx &= \int_0^{2\pi} G'(x)\sin x\,dx \\
&= \Big[\, G(x)\sin x \,\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \{-G(x)\}\cos x\,dx
\end{aligned}$$

$\{-G(x)\}'' = -g'(x) > 0$ であるから，(1),(2) の結果に適用すると

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

補足 $f(x) = -G(x)$ と考えると $f''(x) = -g'(x) > 0$ である．

$\boxed{4}$ (1) n 秒後，P から Q をみて時計回りの隣の頂点，対角の頂点，反時計回りの隣の頂点にある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}z_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

また，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{cases} x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ z_0 = 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}z_n \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}z_n \end{cases}$$

$x_{n+1} - z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(x_n - z_n)$，$x_0 - z_0 = 0$ より　$x_n - z_n = 0$

したがって　$$(*) \begin{cases} x_0 = 0,\ y_0 = 1, \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n \\ p_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n \end{cases}$$

$(*)$ の $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ に順次，$n = 0,\ 1$ を代入すると

$$x_1 = \frac{1}{3},\ y_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{9},\ y_2 = \frac{1}{3},$$

よって　$p_2 = \dfrac{2}{3}x_1 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$，　$p_3 = \dfrac{2}{3}x_2 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{9} = \boldsymbol{\dfrac{4}{27}}$

(2) $(*)$ より

$$x_{n+1} + ky_{n+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2k}{3}\right)x_n + \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{3}\right)y_n$$

とし (k は定数)，k が次式をみたすとき

$$1 : k = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3} : \frac{1}{3} + \frac{k}{3} \quad \text{これを解くと} \quad k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

このとき

$$x_{n+1} \pm \frac{y_{n+1}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3}\left(x_n \pm \frac{y_n}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

したがって

$$x_n+\frac{y_n}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n,\quad x_n-\frac{y_n}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

上の2式の辺々を加えると

$$2x_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n\right\}$$

よって，$n\geqq 1$ のとき

$$p_n=\frac{2}{3}x_{n-1}=\boldsymbol{\frac{1}{3\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}}$$

(3) (2)の結果について，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$ とおくと

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{9},\quad \alpha-1=\sqrt{2}\beta,\quad \beta-1=-\sqrt{2}\alpha$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}3\sqrt{2}(p_n-p_{n+1})&=(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})-(\alpha^n-\beta^n)\\&=-\alpha^{n-1}(\alpha-1)+\beta^{n-1}(\beta-1)\\&=-\sqrt{2}\alpha\beta\alpha^{n-2}-\sqrt{2}\alpha\beta\beta^{n-2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{9}\alpha^{n-2}+\frac{\sqrt{2}}{9}\beta^{n-2}\\27(p_n-p_{n+1})&=\alpha^{n-2}\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}\right\}\end{aligned}$$

このとき　$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ より　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<1$

$$27(p_n-p_{n+1})=\alpha^{n-2}\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}\right\}>0$$ ゆえに　$p_n>p_{n+1}$

$n\geqq 2$ において，$\{p_n\}$ は，単調減少列である．ただし，$p_1=0$

(i) $\left[\frac{N}{2}\right] = \frac{N}{2}$ のとき，$\left[\frac{N+1}{2}\right] = \frac{N}{2}$ より，$p_1 = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m} - \sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} &= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} p_{2m} - \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} p_{2m-1} \\
&= \left(p_N + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} p_{2m}\right) - \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} p_{2m+1} \\
&= p_N + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} (p_{2m} - p_{2m+1}) > 0
\end{aligned}$$

(ii) $\left[\frac{N+1}{2}\right] = \frac{N+1}{2}$ のとき，$\left[\frac{N}{2}\right] = \frac{N-1}{2}$ より，$p_1 = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m} - \sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} &= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} p_{2m} - \sum_{m=1}^{\frac{N+1}{2}} p_{2m-1} \\
&= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} p_{2m} - \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} p_{2m+1} \\
&= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} (p_{2m} - p_{2m+1}) > 0
\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，2 以上の任意の整数 N に対して，次式が成立する．

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

■

5.7　2021年(150分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ a の正の実数とする．放物線 $y=x^2$ を C_1，放物線 $y=-x^2+4ax-4a^2+4a^4$ を C_2 とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式を求めよ．

(2) C_1 と C_2 が異なる2つの共通接線 $\ell,\ \ell'$ を持つような a の範囲を求めよ．ただし C_1 と C_2 の共通接線とは，C_1 と C_2 の両方に接する直線のことである．

以下，a は(2)で求めた範囲にあるとし，$\ell,\ \ell'$ を C_1 と C_2 の異なる2つの共通接線とする．

(3) $\ell,\ \ell'$ の交点の座標を求めよ．

(4) C_1 と $\ell,\ \ell'$ で囲まれた領域を D_1 とし，不等式 $x \leqq a$ の表す領域を D_2 とする．D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ．

(5) $S(a)$ を(4)の通りとする．a が(2)で求めた範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 4つの実数を $\alpha=\log_2 3,\ \beta=\log_3 5,\ \gamma=\log_5 2,\ \delta=\dfrac{3}{2}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha\beta\gamma=1$ を示せ．

(2) $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ を小さい順に並べよ．

(3) $p=\alpha+\beta+\gamma$，$q=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ とし，$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ とする．このとき $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-1)$ および $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ．

3 1 から 12 までの数字が下の図のように並べて書かれている．以下のルール (a), (b) と (終了条件) を用いたゲームを行う．ゲームを開始すると最初に (a) を行い，(終了条件) が満たされたならゲームを終了する．そうでなければ (終了条件) が満たされるまで (b) の操作を繰り返す．ただし，(a) と (b) における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする．

(a) 1 から 12 までの数字のどれか 1 つを等しい確率で選び，下の図において選んだ数字を丸で囲み，その上に石を置く．

(b) 石が置かれた位置の水平右側または垂直下側の位置にある数字のどれか 1 つを等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く．例えば，石が 6 の位置に置かれているときは，その水平右側または垂直下側の位置にある数字 7，8，9，10，12 のどれか 1 つの数字を等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く．

(終了条件) 5，9，11，12 の数字のどれか 1 つが丸で囲まれ石が置かれている．

ゲームの終了時に数字 j が丸で囲まれている確率を p_j とする．以下の問に答えよ．

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

(1) 確率 p_2 を求めよ．

(2) 確率 p_5 と p_{11} を求めよ．

(3) 確率 p_5，p_9，p_{11}，p_{12} のうち最も大きいものの値を求めよ．

4 $0 \leqq a < 1$ を満たす実数 a に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 3\left[a_n + \frac{1}{2}\right] - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

という漸化式で定める．ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．以下の問に答えよ．

(1) a が $0 \leqq a < 1$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y) = (a_1,\ a_2)$ の軌跡を xy 平面上に図示せよ．

(2) $a_n - [a_n] \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$a_n < a_{n+1}$ であることを示せ．

(3) $a_n > a_{n+1}$ ならば，$a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n$ かつ $[a_{n+1}] = [a_n] - 1$ であることを示せ．

(4) ある 2 以上の自然数 k に対して，$a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ が成り立つとする．このとき a_k を a の式で表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $C_1 : y = x^2$ より　$y' = 2x$
C_1 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2tx - t^2}$$

(2) (1) で求めた接線と $C_2 : y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$ から y を消去すると

$$2tx - t^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$$

これを x について整理すると

$$x^2 + 2(t - 2a)x + 4a^2 - 4a^4 - t^2 = 0$$

このとき，上の x の 2 次方程式は重解をもつから，係数について

$$D/4 = (t - 2a)^2 - (4a^2 - 4a^4 - t^2) = 0$$

これを t について整理すると　$t^2 - 2at + 2a^4 = 0 \quad \cdots (*)$

C_1 と C_2 が異なる 2 つの共通接線 $\ell,\ \ell'$ をもつとき，その 2 つの接点の x 座標，すなわち，2 次方程式 $(*)$ の解が異なる 2 つの実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 2a^4 = a^2(1 - 2a^2) > 0$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) 2 次方程式 $(*)$ の異なる 2 つの実数解 $p,\ q$ と係数の関係により

$$(**) \quad p + q = 2a, \quad pq = 2a^4$$

C_1 上の 2 点 $(p,\ p^2)$, $(q,\ q^2)$ における接線をそれぞれ $\ell,\ \ell'$ とすると，(1) の結果から

$$\ell : y = 2px - p^2, \quad \ell' : y = 2qx - q^2$$

$\ell,\ \ell'$ の交点の座標は　$\left(\dfrac{p+q}{2},\ pq\right)$　すなわち　$\boldsymbol{(a,\ 2a^4)}$

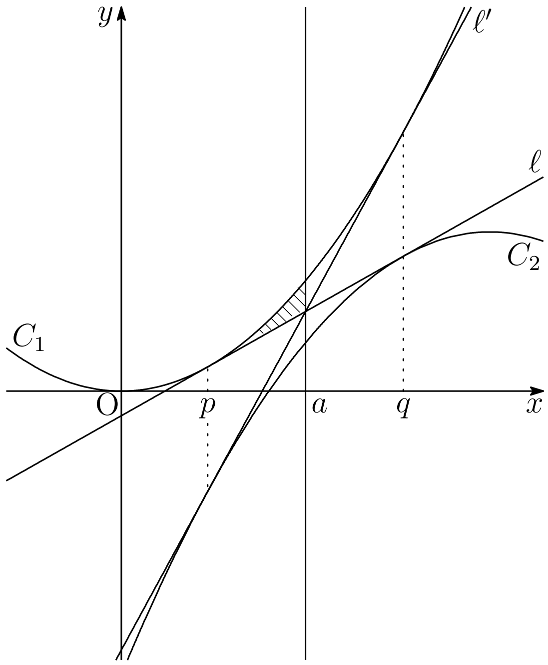
(4) $p<q$ とすると，D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\int_p^a\{x^2-(2px-p^2)\}dx=\int_p^a(x-p)^2\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\Big[\,(x-p)^3\,\Big]_p^a=\frac{1}{3}(a-p)^3$$

$2a=p+q$ より　　$S(a)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{q-p}{2}\right)^3$

$(**)$ より　$(q-p)^2=(p+q)^2-4pq=(2a)^2-4\cdot2a^4=4(a^2-2a^4)$

$p<q$ より　$\dfrac{q-p}{2}=\sqrt{a^2-2a^4}$　　よって　$\boldsymbol{S(a)=\dfrac{1}{3}(a^2-2a^4)^{\frac{3}{2}}}$



(5) (4) の結果から　$S=\dfrac{1}{3}\left\{-2\left(a^2-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}\right\}^{\frac{3}{2}}$

(2) の結果に注意すると，$S(a)$ の最大値は

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{48\sqrt{2}}}$$

補足 D_1 と $x\leqq a$ の共通部分の面積と D_1 と $x\geqq a$ の共通部分の面積は等しい．また，C_1 上の2点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ を結ぶ直線 PQ と C_1 で囲まれた部分の面積は $4S(a)$ に等しい[2]． ■

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 参照)

2 (1) $\alpha = \log_2 3,\ \beta = \log_3 5,\ \gamma = \log_5 2$ より

$$\alpha\beta\gamma = \log_2 3 \log_3 5 \log_5 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = 1$$

補足 積における真数の交換法則 $\log_a A \log_b B = \log_a B \log_b A$ を用いると

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma &= \log_2 3 \log_3 5 \log_5 2 = \log_2 5 \log_3 3 \log_5 2 \\ &= \log_2 5 \log_5 2 = \log_2 2 \log_5 5 = 1\end{aligned}$$

(2) $\alpha = \log_2 3,\ \beta = \log_3 5,\ \gamma = \log_5 2,\ \delta = \dfrac{3}{2}$ より

$$\log_5 2 < 1 < \log_3 5 < \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2} = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 3$$

よって　$\boldsymbol{\gamma < \beta < \delta < \alpha}$

(3) (1) の結果から

$$q = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \qquad (*)$$

また，$p = \alpha + \beta + \gamma$，$\alpha\beta\gamma = 1$ であるから

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 + px^2 + qx + 1 \\ &= x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma \\ &= (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) \qquad (**)\end{aligned}$$

$\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \dfrac{1}{2}$ および $(*)$ から　$\gamma < \dfrac{1}{2} < 1 < \beta < \dfrac{3}{2} < \alpha$

$$-\alpha < -\frac{3}{2} < -\beta < -1 < -\frac{1}{2} < -\gamma$$

$(**)$ より　$\boldsymbol{f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0,\ \ f(-1) < 0,\ \ f\left(-\frac{3}{2}\right) > 0}$ ■

3 $i=1,2,3,4,6,7,8,10$ とし，i の位置にある石が移動可能なそれぞれの位置に移動する確率を q_i とすると

$$q_1=\frac{1}{7},\quad q_2=q_6=\frac{1}{5},\quad q_3=q_7=\frac{1}{3},\quad q_4=\frac{1}{2},\quad q_8=1,\quad q_{10}=\frac{1}{2}$$

(1) $p_1=\dfrac{1}{12}$ であるから，求める確率 p_2 は

$$p_2=p_1q_1+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{12}=\boldsymbol{\frac{2}{21}}$$

(2) (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}p_3&=p_1q_1+p_2q_2+\frac{1}{12}=p_2+p_2q_2=p_2(1+q_2)\\&=\frac{2}{21}\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{35}\\p_4&=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+\frac{1}{12}=p_3+p_3q_3=p_3(1+q_3)\\&=\frac{4}{35}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{105}\\p_5&=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+p_4q_4+\frac{1}{12}=p_4+p_4q_4=p_4(1+q_4)\\&=\frac{16}{105}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{8}{35}}\\p_6&=p_1q_1+\frac{1}{12}=p_2\\p_7&=p_2q_2+p_6q_6+\frac{1}{12}=p_2q_2+p_2q_2+\frac{1}{12}=2p_2q_2+\frac{1}{12}\\&=2\cdot\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{12}=\frac{17}{140}\\p_{10}&=p_1q_1+p_6q_6+\frac{1}{12}=p_1q_1+p_2q_2+\frac{1}{12}=p_3=\frac{4}{35}\\p_{11}&=p_2q_2+p_7q_7+p_{10}q_{10}+\frac{1}{12}\\&=\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{5}+\frac{17}{140}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{35}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

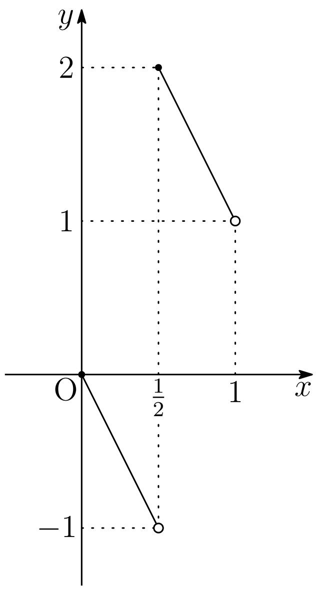
(3) (1),(2) の結果から

$$p_{12}=p_1q_1+p_6q_6+p_{10}q_{10}+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{35}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{6}{35}$$

また　$p_9=1-(p_5+p_{11}+p_{12})=1-\left(\dfrac{8}{35}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{6}{35}\right)=\dfrac{2}{5}$

以上の結果から，最大は　$\boldsymbol{p_9=\dfrac{2}{5}}$ ■

4 (1) 与えられた漸化式から，$0 \leqq a < 1$ のとき



$$
\begin{aligned}
a_1 &= a, \\
a_2 &= 3\left[\, a_1 + \frac{1}{2} \,\right] - 2a_1 \\
&= 3\left[\, a + \frac{1}{2} \,\right] - 2a \\
&= \begin{cases} -2a & \left(0 \leqq a < \dfrac{1}{2}\right) \\ -2a + 3 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq a < 1\right) \end{cases}
\end{aligned}
$$

よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡は右の図のとおり．

$$
y = \begin{cases} -2x & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2}\right) \\ -2x + 3 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x < 1\right) \end{cases}
$$

(2) $s_n = a_n - [a_n]$ とおくと，$a_n = [a_n] + s_n$，$\dfrac{1}{2} \leqq s_n < 1$ より

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 3\left[\, a_n + \frac{1}{2} \,\right] - 2a_n = 3\left[\, [a_n] + s_n + \frac{1}{2} \,\right] - 2([a_n] + s_n) \\
&= 3\left[\, [a_n] + 1 + \left(s_n - \frac{1}{2}\right) \,\right] - 2([a_n] + s_n) \\
&= 3([a_n] + 1) - 2([a_n] + s_n) = [a_n] + 3 - 2s_n \\
&= [a_n] + s_n + 3(1 - s_n) = a_n + 3(1 - s_n) > a_n
\end{aligned}
$$

(3) (2) の結論の対偶により　$a_n \geqq a_{n+1} \implies a_n - [a_n] < \dfrac{1}{2}$

$a_n > a_{n+1} \implies a_n \geqq a_{n+1}$ であるから

$$a_n > a_{n+1} \implies a_n - [a_n] < \frac{1}{2}$$

このとき，$0 \leqq s_n < \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3\left[\,a_n + \frac{1}{2}\,\right] - 2a_n = 3\left[\,[a_n] + s_n + \frac{1}{2}\,\right] - 2a_n \\ &= 3[a_n] - 2a_n \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

ここで，$s_n = 0$ と仮定すると，$[a_n] = a_n$ であるから，上式より，$a_{n+1} = a_n$ となり，条件に反する．したがって，$s_n \neq 0$ より，$0 < s_n < \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3[a_n] - 2([a_n] + s_n) \\ &= [a_n] - 1 + (1 - 2s_n) \qquad (0 < 1 - 2s_n < 1) \end{aligned}$$

よって　　$[a_{n+1}] = [a_n] - 1 \quad \cdots(**)$

(4) $a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ であるから，$(*)$，$(**)$ が $n = 1, 2, \cdots, k$ について成立する．$0 \leqq a < 1$ より，$[a] = 0$ であるから，$(**)$ により

$$[a_n] = -n + 1$$

これを $(*)$ に代入すると　$a_{n+1} = 3(-n+1) - 2a_n$

$$a_{n+1} + (n+1) - \frac{4}{3} = -2\left(a_n + n - \frac{4}{3}\right)$$

$\left\{a_n + n - \dfrac{4}{3}\right\}$ は，初項 $a - \dfrac{1}{3}$，公比 -2 の等比数列であるから $(n = 1, 2, \cdots, k)$

$$a_n + n - \frac{4}{3} = \left(a - \frac{1}{3}\right)(-2)^{n-1}$$

よって　　$\boldsymbol{a_k = \left(a - \dfrac{1}{3}\right)(-2)^{k-1} - k + \dfrac{4}{3}}$　■

5.8　2022 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4

1 a，b を実数とする．

(1) 整式 x^3 を 2 次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) 実数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x+b$ とする．b の値に応じて，このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ．

2 1 つのサイコロを 3 回投げる．1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．なおサイコロは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする．

(1) $ab+2c \geqq abc$ となる確率を求めよ．

(2) $ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ．

3 複素数平面上に，原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 OABCDE が与えられている．ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O，A，B，C，D，E とする．互いに異なる 0 でない複素数 α，β，γ が，

$$0 \leqq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leqq \pi, \quad 4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0,$$
$$2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$$

を満たし，α，β，γ のそれぞれが正六角形 OABCDE の頂点のいずれかであるとする．

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求め，α，β がそれぞれどの頂点か答えよ．

(2) 組 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ をすべて求め，それぞれの組について正六角形 OABCDE を複素数平面上に図示せよ．

4 関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0) = 1$ を満たすとする．ただし $f(x)$ が区間 $x \geqq 0$ における増加関数であるとは，区間内の任意の実数 x_1，x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つときをいう．以下，n は正の整数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = \infty$ を示せ．

(2) 区間 $y > 2$ において関数 $F_n(y)$ を $F_n(y) = \displaystyle\int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}\,dx$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty$ を示せ．また $2 + \dfrac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = 0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ．

(3) (2) の a_n について，不等式 $a_n < 4$ がすべての n に対して成り立つことを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x^3 = (x-a)^2(x+2a) + 3a^2x - 2a^3$ より，求める余りは　$\boldsymbol{3a^2x - 2a^3}$

(2) $x^3 = (x^2 + \alpha x + \beta)(x - \alpha) + (\alpha^2 - \beta)x + \alpha\beta$

x^3 を $x^2 + \alpha x + \beta$ で割った余りが $3x + b$ であるから

$$\alpha^2 - \beta = 3, \quad \alpha\beta = b \qquad (*)$$

上の 2 式から β を消去すると　$b = \alpha^3 - 3\alpha$

$g(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha$ とすると

$$g'(\alpha) = 3\alpha^2 - 3 = 3(\alpha+1)(\alpha-1)$$

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$(*)$ の第 1 式から，α の値により，一意的に β が決定するから，$f(x)$ の個数は，方程式 $b = g(\alpha)$ の解の個数と一致する．よって

$\boldsymbol{-2 < b < 2}$ **のとき　3 個**
$\boldsymbol{b = \pm 2}$ **のとき　2 個**
$\boldsymbol{b < -2,\ 2 < b}$ **のとき　1 個**

■

2　(1) $ab+2c \geqq abc$ より，$(ab-2)c \leqq ab$ であるから，$ab \leqq 2$ のとき，c は任意．

$ab \geqq 3$ のとき　$c \leqq \dfrac{ab}{ab-2} = 1+\dfrac{2}{ab-2}$　$\cdots(*)$

とくに，$ab \geqq 5$ のとき　$c<2$　ゆえに　$c=1$

(i) $ab \leqq 2$，すなわち，$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ のとき

$$c=1,2,3,4,5,6$$

(ii) $ab=3$，すなわち，$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ のとき，$(*)$ より

$$c \leqq 3 \quad \text{ゆえに} \quad c=1,\ 2,\ 3$$

(iii) $ab=4$，すなわち，$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ のとき，$(*)$ より

$$c \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad c=1,\ 2$$

(iv) $ab \geqq 5$ のとき，$c=1$ で，$(a,\ b)$ の組は，(i)〜(iii) を除いた

$$6^2-(3+2+3)=28 \text{ 通り}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は

$$\frac{3\cdot6+2\cdot3+3\cdot2+28\cdot1}{6^3}=\frac{58}{216}=\mathbf{\frac{29}{108}}$$

(2) まず「$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素」であることは「ab と $2c$ が互いに素」であるための必要十分条件であることを示す．

$(\Longrightarrow)$ ab と $2c$ が素数 p を因数にもつならば，$ab+2c$ および $2abc(=ab\cdot2c)$ は素数 p を因数にもち，$ab+2c$ と $2abc$ はともに p を因数にもつ．

$(\Longleftarrow)$ $ab+2c$ と $2abc(=ab\cdot2c)$ が素数 q を因数にもつならば，$ab\cdot2c$ が素数 q を因数にもつから，ab または $2c$ が素数 q を因数にもつ．

$$2c=(ab+2c)-ab, \quad ab=(ab+2c)-2c$$

ab が素数 q を因数にもつとき上の第1式から $2c$ も q を因数にもち，$2c$ が素数 q を因数にもつとき上の第2式から ab も素数 q を因数にもつ．(証終)

したがって，ab と $2c$ が互いに素となる確率を求めればよい．

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ のとき　$c=1,2,3,4,5,6$

$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3)$ のとき　$c=1,2,4,5$

$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5)$ のとき　$c=1,2,3,4,6$

$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)$ のとき　$c=1,2,4$

よって，求める確率は

$$\frac{1\cdot6+3\cdot4+3\cdot5+2\cdot3}{6^3}=\frac{39}{216}=\boldsymbol{\frac{13}{72}}$$

■

$\boxed{3}$ (1) $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ より $(\alpha\neq0)$　$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+4=0$

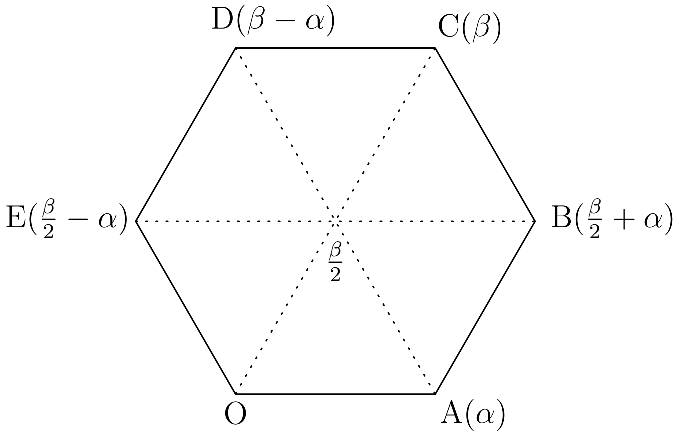
$0\leqq\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\leqq\pi$ に注意して　$\boldsymbol{\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i}$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$|\beta|=2|\alpha|,\quad \angle\alpha0\beta=\frac{\pi}{3}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\alpha}\ \textbf{は A},\ \ \boldsymbol{\beta}\ \textbf{は C}$$

(2) (1) の結果から，点 B，D，E を $\alpha,\ \beta$ を用いて表すと

$$\mathrm{B}\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right),\quad \mathrm{D}\left(\beta-\alpha\right),\quad \mathrm{E}\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)$$



$2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$ より

$$(2\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-1)=0$$

A(α)，C(β) の中点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ は γ ではないから　$\gamma=\alpha+1$

(i) γ が点 B であるとき，(1) の結果を用いて

$$\gamma = \alpha + 1 = \frac{\beta}{2} + \alpha, \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$$

上の第 1 式から $\beta = 2$ これを第 2 式に代入して $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

また第 1 式から $\gamma = \dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}$

(ii) γ が点 D であるとき，(1) の結果を用いて

$$\gamma = \alpha + 1 = \beta - \alpha, \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$$

上の第 1 式から $\beta = 2\alpha + 1$ これを第 2 式に代入して

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\alpha} = -1 + \sqrt{3}i$$

$\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{4}$ であるから $\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $\gamma = \dfrac{3-\sqrt{3}i}{4}$

(iii) γ が点 E であるとき，(1) の結果を用いて

$$\gamma = \alpha + 1 = \frac{\beta}{2} - \alpha, \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$$

上の第 1 式から $\beta = 4\alpha + 2$ これを第 2 式に代入して

$$\frac{4\alpha+2}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{\alpha} = -3 + \sqrt{3}i$$

$\alpha = \dfrac{-3-\sqrt{3}i}{6}$ であるから $\beta = -\dfrac{2\sqrt{3}i}{3}$, $\gamma = \dfrac{3-\sqrt{3}i}{6}$

(i)～(iii) より

$$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ 2,\ \frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right),}$$
$$\boldsymbol{\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{4},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{3-\sqrt{3}i}{4}\right),}$$
$$\boldsymbol{\left(\frac{-3-\sqrt{3}i}{6}, -\frac{2\sqrt{3}i}{3},\ \frac{3-\sqrt{3}i}{6}\right)}$$

■

4 (1) 関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0)=1$ であるから，区間 $0 \leqq x \leqq 2-\dfrac{1}{n}$ において (n は正の整数)

$$\frac{f(x)}{2-x} \geqq \frac{f(0)}{2-x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{f(x)}{2-x} \geqq \frac{1}{2-x}$$

したがって

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx \geqq \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{2-x}\,dx = -\Big[\ \log(2-x)\ \Big]_0^{2-\frac{1}{n}} = \log 2n$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log 2n = \infty$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = \infty$

(2) (1) と同様に，$2+\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq y$ において，$\dfrac{f(x)}{x-2} > \dfrac{1}{x-2}$ より

$$F_n(y) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}\,dx > \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{1}{x-2}\,dx$$
$$= \Big[\ \log(x-2)\ \Big]_{2+\frac{1}{n}}^{y} = \log n(y-2)$$

$\displaystyle\lim_{y\to\infty} \log n(y-2) = \infty$ より　$\displaystyle\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty$

与えられた等式 (A) $\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = 0$ より

$$\int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{x-2}\,dx = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx \quad \text{ゆえに} \quad F_n(a_n) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx \qquad (*)$$

$F_n'(y) = \dfrac{f(y)}{y-2}$ より，$y>2$ において　$F_n'(y) > 0$

$F_n(y)$ から　$F_n\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 0.$　$(*)$ より　$F_n\left(2+\dfrac{1}{n}\right) < F_n(a_n)$

$$F_n(4) - F_n(a_n) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{x-2}\,dx - \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx$ について，$x = 4-t$ とおくと

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = \int_4^{2+\frac{1}{n}} \frac{f(4-t)}{t-2}\,(-dt) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(4-x)}{x-2}\,dx$$

$2+\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 4$ において $4-x<x$ で，$f(x)$ が増加関数であるから

$$f(x)-f(4-x)>0$$

が成立する．これから

$$\begin{aligned} F_n(4)-F_n(a_n) &= \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{x-2}\,dx - \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(4-x)}{x-2}\,dx \\ &= \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)-f(4-x)}{x-2}\,dx > 0 \end{aligned}$$

したがって

$$F_n\left(2+\frac{1}{n}\right) < F_n(a_n) < F_n(4) \qquad (**)$$

$F_n(y)$ は単調増加なので，$(**)$，すなわち，(A) を満たす a_n はただ 1 つ存在する．

(3) $F_n(y)$ は単調増加なので，$(**)$ より，すべての n について，不等式

$$a_n < 4$$

が成立する．■

5.9　2023 年 (150 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数係数の 4 次方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ は相異なる複素数 $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ を解に持ち，それらは全て複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする．ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ $\alpha,\ \beta$ と共役な複素数を表す．

(1) $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ を示せ．

(2) $t=\alpha+\overline{\alpha}$，$u=\beta+\overline{\beta}$ とおく．$p,\ q,\ r,\ s$ をそれぞれ t と u で表せ．

(3) 座標平面において，点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $0<b<a$ とする．xy 平面において，原点を中心とする半径 r の円 C と点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 b の円 D が 2 点で交わっている．

(1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ．

(2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする．P の x 座標 $h(r)$ を求めよ．

(3) 点 $\mathrm{Q}(r,\ 0)$ と点 $\mathrm{R}(a-b,\ 0)$ をとる．D の内部にある C の弧 PQ，線分 QR，および線分 RP で囲まれる図形を A とする．xyz 空間において A を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ．ただし，答えに $h(r)$ を用いてもよい．

(4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ．また，その r を $r(a)$ とおいたとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(r(a)-a)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 方程式 $e^x=\dfrac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ．

(2) $y=x(x^2-3)$ と $y=e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点の個数を求めよ．

(3) a を正の実数とし，関数 $f(x)=x(x^2-a)$ を考える．$y=f(x)$ と $y=e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点は 1 個のみであるとする．このような a がただ 1 つ存在することを示せ．

4 n を正の整数とし，n 次の整式 $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して $P_n(x) = \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m x^m$ と表す．

(1) 等式 $\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m = n!$ を示せ．

(2) 等式

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^{n} ({}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_m x^m)$$

を示せ．ただし，${}_m\mathrm{C}_0$，${}_m\mathrm{C}_1$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_m$ は二項係数である．

(3) $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，等式 $\sum_{j=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_j \cdot {}_j\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ を示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) α は点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるから

$$|\alpha - 1|^2 = 1 \qquad \text{ゆえに} \qquad \alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$$

(2) $t = \alpha + \overline{\alpha}$，$u = \beta + \overline{\beta}$ より，(1) の結果から

$$\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha} = t, \quad \beta + \overline{\beta} = \beta\overline{\beta} = u$$

したがって，$\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ を解とする 4 次方程式は

$$\begin{aligned} (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta}) &= 0 \\ \{x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}\}\{x^2 - (\beta+\overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}\} &= 0 \\ (x^2 - tx + t)(x^2 - ux + u) &= 0 \qquad \text{(A)} \\ x^4 - (t+u)x^3 + (t+u+tu)x^2 - 2tux + tu &= 0 \end{aligned}$$

これが 4 次方程式 $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ と一致するから，同じ次数の項の係数を比較すると

$$\boldsymbol{p = t + u, \quad q = t + u + tu, \quad r = 2tu, \quad s = tu}$$

(3) $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ は，異なる 4 つの虚数であるから，(A) より　$t \neq u$

$$t^2 - 4t < 0, \quad u^2 - 4u < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < u < 4,\ 0 < t < 4\ (t \neq u)$$

(2) の結果から，$t,\ u$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - (t+u)x + tu = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - px + s = 0$$

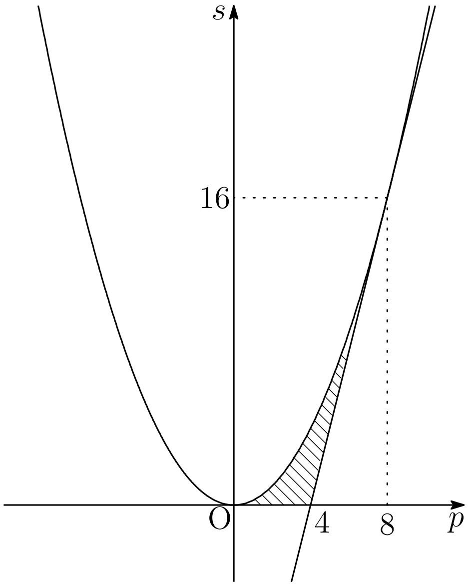
$f(x) = x^2 - px + s$ とすると　$f(x) = \left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{p^2 - 4s}{4}$

2 次方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < 4$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つから

$$0 < \frac{p}{2} < 4, \quad f\left(\frac{p}{2}\right) < 0, \quad f(0) > 0, \quad f(4) > 0$$

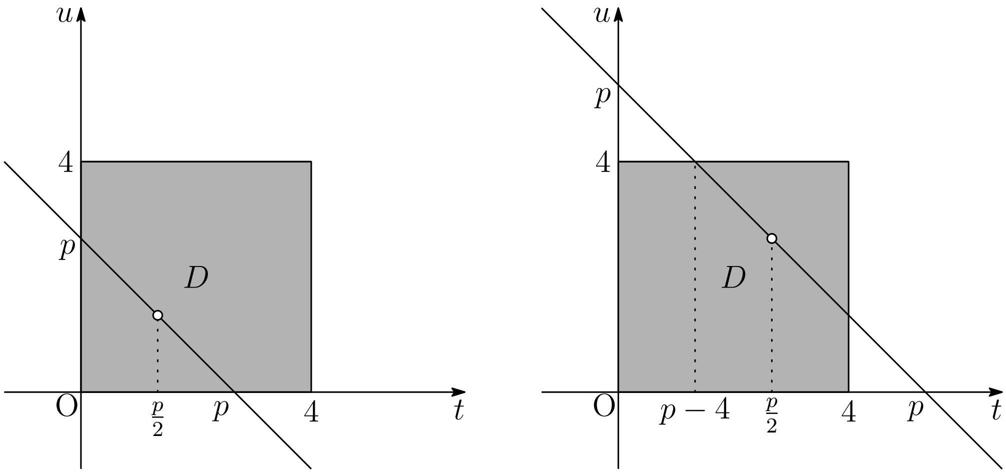
したがって　$0<p<8,\quad p^2-4s>0,\quad s>0,\quad -4p+s+16>0$

点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．

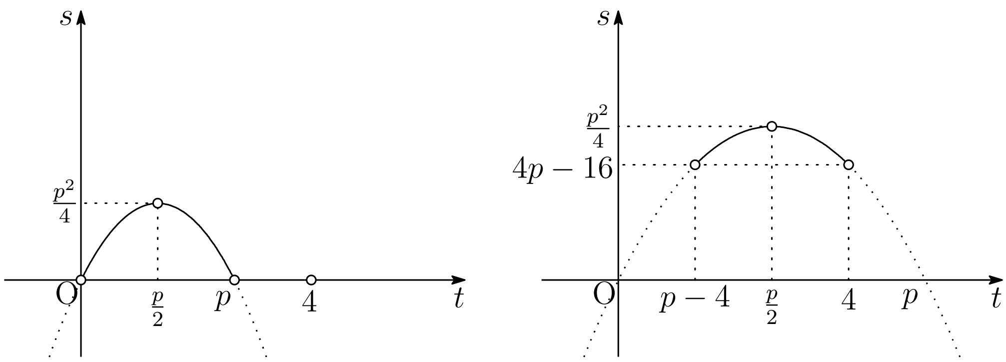


別解　$D = \{(t,\ u)\,|\,0 < t < 4,\ 0 < u < 4\}$ とし，直線 $t+u=p$ 上の点 $(t,\ u) \in D$ における $s = tu$ のとる値の範囲を求める．$t = 2\mathrm{Re}(\alpha)$，$u = 2\mathrm{Re}(\beta)$，$\mathrm{Re}(\alpha) \neq \mathrm{Re}(\beta)$ であるから，$t \neq u$ より，$t \neq \dfrac{p}{2}$

$$s = t(p-t) = -\left(t - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4}$$



(i) $0 < p \leqq 4$　　(ii) $4 \leqq p < 8$



したがって

(i)　$0 < p \leqq 4$ のとき　$0 < s < \dfrac{s^2}{4}$

(ii)　$4 \leqq p < 8$ のとき　$4p - 16 < s < \dfrac{s^2}{4}$

(i)，(ii) より，前ページと同じ領域を得る．

類題　広島大学 2018 年文系 1 番を参照[3]．

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2018.pdf $\boxed{1}$ (4)

東大 1954 年理科文科

点 $(x,\ y)$ が原点を中心とする半径 1 の円の内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲を図示せよ．

解答 $s=x+y$，$t=xy$ とすると

$$s^2-2t=(x+y)^2-2xy=x^2+y^2<1 \quad ゆえに \quad t>\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

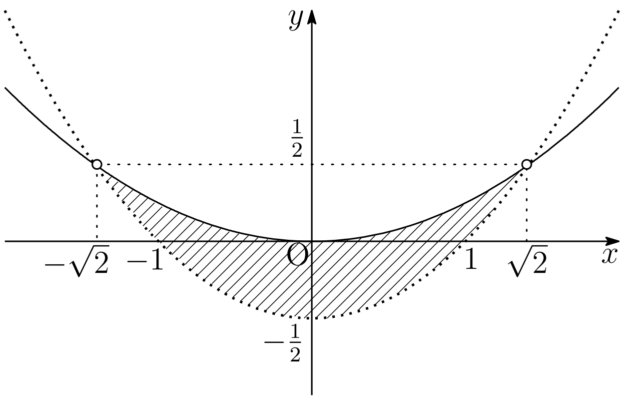
$x,\ y$ を解とする 2 次方程式は　$X^2-sX+t=0$

この方程式は，実数解をもつから，係数について

$$s^2-4t \geqq 0 \quad ゆえに \quad t \leqq \frac{s^2}{4} \quad \cdots ②$$

①，② より　　$y>\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$，$y \leqq \dfrac{x^2}{4}$

求める領域は，下の図の斜線部分で，点線および ∘ を含まない．

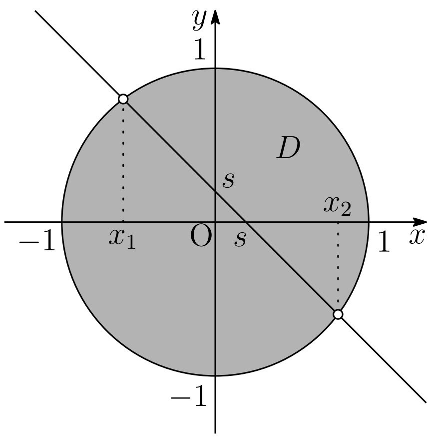


別解　$D = \{(x,\ y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ とし，直線 $x + y = s$ 上の点 $(x,\ y) \in D$ における $t = xy$ のとる値の範囲を求める．

$$s^2 = (x+y)^2 \leqq (1^2 + 1^2)(x^2 + y^2) < 2$$

直線 $x + y = s$ $(-\sqrt{2} < s < \sqrt{2})$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の共有点の x 座標を $x_1,\ x_2$ とすると $(x_1 < x_2)$

$$x_1 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 2}}{2}, \quad x_2 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 2}}{2}$$



$t = xy = x(s - x)$ より，$f(x) = x(s - x)$ $(x_1 < x < x_2)$ とおくと

$$f(x) = -\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s^2}{4}$$

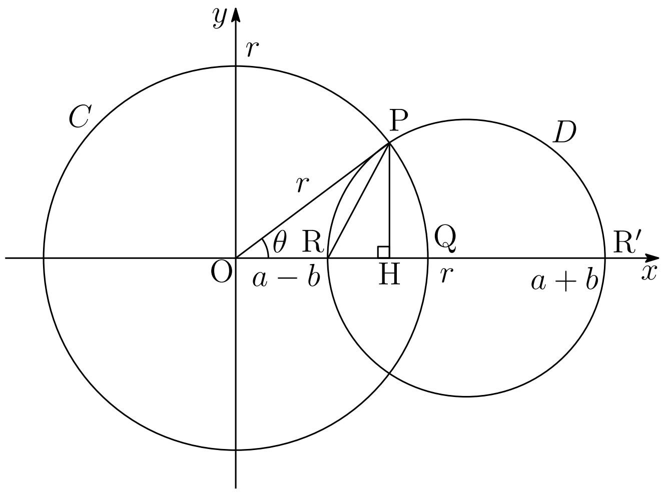
$f(x_1) = f(x_2) = \dfrac{s^2}{2} - \dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{s}{2}\right) = \dfrac{s^2}{4}$ であるから，t の範囲について

$$\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2} < t \leqq \frac{s^2}{4} \quad (-\sqrt{2} < s < \sqrt{2})$$

この不等式の表す領域は，前ページの図のとおりである．■

$\boxed{2}$ (1) D の x 軸の 2 交点を $\mathrm{R}(a-b,\ 0)$，$\mathrm{R}'(a+b,\ 0)$ とすると，C 上の点 $\mathrm{Q}(r,\ 0)$ は線分 RR' の両端を除く線分上にあるから

$$\boldsymbol{a-b<r<a+b}$$



(2) $C: x^2+y^2=r^2$，$D: (x-a)^2+y^2=b^2$ の辺々の差をとると

$$2ax-a^2=r^2-b^2 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{r^2+a^2-b^2}{2a}$$

よって　$$\boldsymbol{h(r)=\frac{r^2+a^2-b^2}{2a}}$$

(3) $h(r)=h$ とし，$\mathrm{H}(h,\ 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{3}\pi \mathrm{PH}^2\cdot\mathrm{RH}+\pi\int_h^r (r^2-x^2)\,dx \\ &= \frac{\pi}{3}(r^2-h^2)\{h-(a-b)\}+\pi\left[\,r^2x-\frac{x^3}{3}\,\right]_h^r \\ &= \frac{2\pi}{3}r^2(r-h)-\frac{\pi}{3}(a-b)(r^2-h^2) \\ &= \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}r^2\{r-h(r)\}-\frac{\pi}{3}(a-b)\{r^2-h(r)^2\}} \end{aligned}$$

別解 $\theta = \angle\mathrm{POQ}$ とすると，$\triangle\mathrm{POR}$ の面積は

$$\triangle\mathrm{POR} = \frac{1}{2}(a-b)r\sin\theta$$

$\triangle\mathrm{POR}$ の重心の y 座標は $\dfrac{1}{3}r\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
V(r) &= \frac{2\pi}{3}\int_0^\theta r^3\sin\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}(a-b)r\sin\theta\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}r\sin\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}r^3(1-\cos\theta) - \frac{\pi}{3}r^2(a-b)(1-\cos^2\theta) \\
&= \frac{2\pi}{3}r^2(r - r\cos\theta) - \frac{\pi}{3}(a-b)(r^2 - r^2\cos^2\theta) \\
&= \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}r^2\{r-h(r)\} - \frac{\pi}{3}(a-b)\{r^2-h(r)^2\}}
\end{aligned}$$

(4) (2) の結果から　$\dfrac{dh}{dr} = \dfrac{r}{a}$

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{3}{\pi}V(r)\right\}' &= 2\left(3r^2 - 2rh - r^2\cdot\frac{r}{a}\right) - (a-b)\left(2r - 2h\cdot\frac{r}{a}\right) \\
&= 6r^2 - \frac{2(a+b)}{a}rh - \frac{2}{a}r^3 - 2(a-b)r \\
&= 6r^2 - \frac{2(a+b)}{a}r\cdot\frac{r^2+a^2-b^2}{2a} - \frac{2}{a}r^3 - 2(a-b)r \\
&= -\frac{3a+b}{a^2}r^3 + 6r^2 - \frac{(a-b)(3a^2+2ab+b^2)}{a^2}r \\
&= -\frac{r}{a^2}\{r-(a-b)\}\{(3a+b)r - (3a^2+2ab+b^2)\}
\end{aligned}$$

$p = \dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$ とおくと　$r-(a-b) > 0$

$$(a+b) - p = \frac{2ab}{3a+b} > 0, \quad p - (a-b) = \frac{4ab+2b^2}{3a+b} > 0$$

r	$a-b$	$\cdots$	p	$\cdots$	$a+b$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって　$\boldsymbol{r = \dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}\{r(a)-a\} &= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b} - a\right) \\
&= \lim_{a\to\infty}\frac{ab+b^2}{3a+b} = \lim_{a\to\infty}\frac{b+\frac{b^2}{a}}{3+\frac{b}{a}} = \boldsymbol{\frac{b}{3}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $e^x = \dfrac{2x^3}{x-1}$ の実数解は，$2x^3-(x-1)e^x=0$ の解と一致する．
$g(x)=2x^3-(x-1)e^x$ とおくと

$$g'(x)=6x^2-xe^x=x(6x-e^x)$$

$x<0$ において，常に $g'(x)>0$ であるから，$x<0$ において単調増加．

$$g(-1)=\frac{2}{e}-2<0,\quad g(0)=1>0$$

よって，$g(x)=0$ を満たす $c<0$ $(-1<c<0)$ が，ただ一つ存在する．

(2) $y=x(x^2-3)$ と $y=e^x$ のグラフの共有点の x 座標は，$y=x^2-\dfrac{e^x}{x}$ と $y=3$ のグラフの共有点の x 座標と一致する．$h(x)=x^2-\dfrac{e^x}{x}$ とすると

$$h'(x)=2x-\frac{(x-1)e^x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

(1) の結果から

x	$\cdots$	c	$\cdots$	0
$h'(x)$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$h(-1)>h(c)$，$h(-1)=1+\dfrac{1}{e}<3$ より　$h(c)<3$

$$\lim_{h\to-\infty}h(x)=\infty,\quad \lim_{h\to-0}h(x)=\infty$$

よって，求める共有点の個数は　**2 個**

(3) $y=f(x)$ と $y=e^x$ の共有点の x 座標は，$y=h(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の x 座標と一致する．この共有点が 1 個のみであるから，(2) の結果から，$a=h(c)$ のただ 1 つ存在する．■

4 (1) $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m x^m \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $x=1$ を代入すると　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m = n!$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned} P_n(x+1) &= \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m (1+x)^m \\ &= \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m ({}_m\mathrm{C}_0 + {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_m\mathrm{C}_m x^m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} ({}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_m x^m) \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$P_n(x+1) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k x^k$

$P_{n+1}(x) = xP_n(x+1)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{B}_m x^m &= x\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{m=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k x^{k+1} \end{aligned}$$

上式の x^{k+1} の項の係数を比較すると

$${}_{n+1}B_{k+1} = \sum_{m=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k \quad \text{よって} \quad \sum_{j=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_j \cdot {}_j\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$$

第1種スターリング数

${}_n\mathrm{B}_m$ は第1種スターリング数 (Stirling numbers of the first kind) である．

$0 \leqq m \leqq n$ について

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x+n-1)P_{n-1}(x) = (x+n-1)\sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{B}_m x^m \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{B}_m x^{m+1} + (n-1)\sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{B}_m x^m \end{aligned}$$

上式の x^m の項の係数を比較すると，次式を得る．

$$ {}_n\mathrm{B}_m = {}_{n-1}\mathrm{B}_{m-1} + (n-1)_{n-1}\mathrm{B}_m \qquad (*)$$

また，便宜上，${}_0\mathrm{B}_0 = 1$ と定義する．正の整数 n について次が成り立つ．

$$ {}_n\mathrm{B}_0 = 0, \quad {}_n\mathrm{B}_n = 1 \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ から ${}_n\mathrm{B}_m$ は順次求めることもできる．

$n \backslash m$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

例えば，$p_1(k)=k$，$p_2(k)=k(k+1)$，$p_3(k)=k(k+1)(k+2)$ について

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} p_1(k) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-(k-1)k\} = \frac{1}{2}n(n+1)\\
\sum_{k=1}^{n} p_2(k) &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\
\sum_{k=1}^{n} p_3(k) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-k\} = \sum_{k=1}^{n}\{p_2(k)-p_1(k)\}\\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-3k(k+1)+k\}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\{p_3(k)-3p_2(k)+p_1(k)\}\\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3\cdot\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1)\\
&= \frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)-4(n+2)+2\}\\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

補足 k^m は $p_j(k)$ $(1 \leqq j \leqq m)$ の線形結合で表されるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m$ は $n(n+1)$ を因数にもつ．

参考 第 2 種スターリング数および数列のべき乗和については，大分大学 2014 年 8 番を参照[4]．■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf $\boxed{8}$

5.10 2024年(150分)

出題分野 1 2 3 4

1 関数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ から C にちょうど2本の接線を引くことができるとする．そのような実数 t の値の範囲を求めよ．

(3) (2) において，C の2つの接点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とする．$\alpha,\ \beta$ がともに整数であるような組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ．

2 c を1より大きい実数とする．また，i を虚数単位として，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく．複素数 z に対して，

$$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c,\quad Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c$$

と定める．

(1) 方程式 $P(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ．

(2) 方程式 $Q(z)=0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ．

(3) 複素数 z についての2つの方程式 $P(z)=0,\ Q(z)=0$ が共通解 β を持つとする．そのときの c の値と β を求めよ．

3 座標空間の3点 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{C}(4,\ 0,\ 1)$ の定める平面を H とする．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad(s,\ t\ \text{は非負の実数})$$

を満たすすべての点Pからなる領域を K とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ から平面 H に下した垂線の足をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

(3) 領域 K 上の点Pに対して，線分QP上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (r は非負の実数) を満たす点Rが存在することを示せ．

(4) 領域 K において原点Oからの距離が最小となる点Sの座標を求めよ．

4 袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている．すべての玉に対する赤玉の割合を p $(0 \leqq p \leqq 1)$ とする．袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す操作を行う．試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく．

(1) $n \geqq 2$ に対して，$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ．

(2) $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して，等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を示せ．

(3) 自然数 k に対して，定積分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k (1-x)^k\,dx$$

を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{-x+6}{4x^2\sqrt{x}}$$

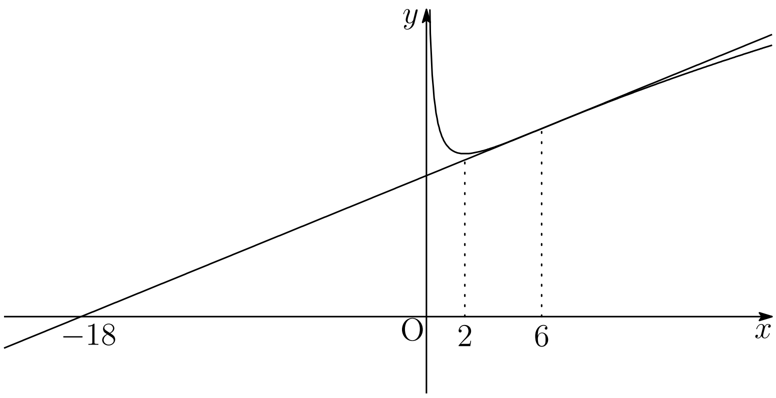
x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{8}{\sqrt{6}}$	$\nearrow$

よって，**極小値 $\boldsymbol{f(2)=2\sqrt{2}}$** をとる．

(2) (1) の結果から，$y=f(x)$ 上の変曲点 $(6,\ f(6))$ における接線の方程式は

$$y-\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{1}{3\sqrt{6}}(x-2)\quad すなわち\quad y=\frac{1}{3\sqrt{6}}(x+18)$$

$y=f(x)$ のグラフの凹凸から，t の値の範囲は　$\boldsymbol{t<-18}$



別解 (3) の 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ がともに正であるから

$$D=(t+6)^2-4\cdot1\cdot(-2t)=t^2+20t+36=(t+18)(t+2)>0,$$
$$\alpha+\beta=-(t+6)>0,\quad \alpha\beta=-2t>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{t<-18}$

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y=\frac{\alpha-2}{2\alpha\sqrt{\alpha}}(x-\alpha)+\sqrt{\alpha}+\frac{2}{\alpha}\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{(\alpha-2)x+\alpha^2+6\alpha}{2\alpha\sqrt{\alpha}}$$

この直線が点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ を通るから

$$(\alpha-2)t+\alpha^2+6\alpha=0\quad \text{ゆえに}\quad \alpha^2+(t+6)\alpha-2t=0$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(\beta,\ f(\beta))$ における接線についても，同様の結果を得る．2 次方程式

$$x^2+(t+6)x-2t=0 \qquad (*)$$

の解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-(t+6),\quad \text{ゆえに}\quad t=-(\alpha+\beta+6)$$

$\alpha,\ \beta$ がともに整数であるから，t は整数である．$(*)$ より

$$(x-2)t=-x^2-6x$$

上式から，$x\neq 2$ であることに注意して

$$t=\frac{-x^2-6x}{x-2}=-x-8-\frac{16}{x-2}$$

$x,\ t$ は整数であるから $(x>0)$

x	1	3	4	6	10	18
t	7	-27	-20	-18	-20	-27

$t<-18,\ \alpha<\beta$ であることに注意して

$$t=-27 \text{ のとき}\quad (\alpha,\ \beta)=(3,\ 18)$$
$$t=-20 \text{ のとき}\quad (\alpha,\ \beta)=(4,\ 10)$$

よって　　$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(3,\ 18),\ (4,\ 10)}$

補足 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-(t+6),\quad \alpha\beta=-2t$
上の 2 式から t を消去して整理すると

$$\alpha\beta-2(\alpha+\beta)-12=0\quad \text{ゆえに}\quad (\alpha-2)(\beta-2)=16$$

$0<\alpha<\beta$ を満たす整数 $(\alpha,\ \beta)$ は

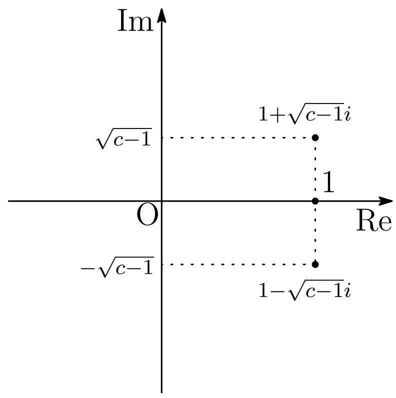
$$(\alpha-2,\ \beta-2)=(1,\ 16),\ (2,\ 8)$$

よって　　$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(3,\ 18),\ (4,\ 10)}$　■

2 (1)

$$\begin{aligned}P(z) &= z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c \\ &= z(z^2 - 3z + 2) + c(z-1) \\ &= z(z-1)(z-2) + c(z-1) \\ &= (z-1)\{z(z-2) + c\} \\ &= (z-1)(z^2 - 2z + c)\end{aligned}$$

$P(z) = 0$ とすると $(c > 1)$ $\quad \boldsymbol{z = 1,\ 1 \pm \sqrt{c-1}\,i}$



(2) $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ より，$\alpha^4 = -1$ であるから

$$\begin{aligned}Q(z) &= -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c \\ &= \alpha^3 z^3 - 3\alpha^2 z^2 + (c+2)\alpha z - c \\ &= P(\alpha z)\end{aligned}$$

$Q(z) = 0$ より，$P(\alpha z) = 0$ であるから，(1) の結果を利用して

$$\alpha z = 1,\ 1 \pm \sqrt{c-1}\,i \quad \text{ゆえに} \quad z = \overline{\alpha},\ \overline{\alpha}(1 \pm \sqrt{c-1}\,i)$$

これを計算すると

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \\ \overline{\alpha}(1 \pm \sqrt{c-1}\,i) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(1 \pm \sqrt{c-1}\,i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \mp \sqrt{c-1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{c-1})i\end{aligned}$$

(複号同順)

よって，$Q(z) = 0$ の解のうち実部が最大のものは

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i}$$

(3) (2) で示したように，$Q(z)=0$ の解は，$P(z)=0$ の解を複素数平面上で原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものであるから，これらの共通解 β は

$$\beta = 1+\sqrt{c-1}i = \frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i$$

したがって　$1 = \dfrac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}$，　$\sqrt{c-1} = \dfrac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}$

ゆえに　　$\sqrt{c-1} = \sqrt{2}-1$　すなわち　$\boldsymbol{c = 4-2\sqrt{2}}$

$$\boldsymbol{\beta = 1+(\sqrt{2}-1)i}$$

別解　$\beta = 1+\sqrt{c-1}i$，$\arg\beta = \dfrac{\pi}{8}$ であるから

$$\frac{\mathrm{Im}(\beta)}{\mathrm{Re}(\beta)} = \sqrt{c-1} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1 \quad よって \quad \boldsymbol{c = 4-2\sqrt{2}}$$

■

3　(1)　A(3, 1, 3)，B(4, 2, 2)，C(4, 0, 1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 1, -1), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1, -1, -2)$$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2,\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0$$

(1) の結果および $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -4$ より

$$1 + 3s + 2t = 0, \quad -4 + 2s + 6t = 0$$

これを解いて　$s = -1,\ t = 1$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および (2) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) - (-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= (s+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

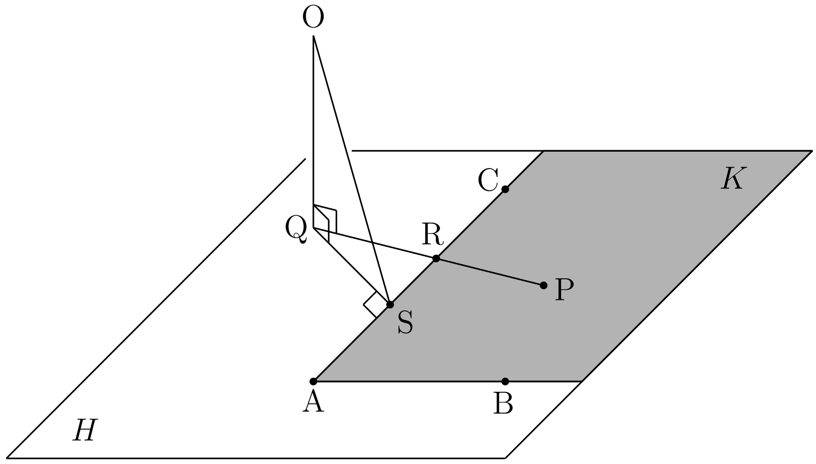
線分 QP 上の点を R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = k\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であるから $(0 \leqq k \leqq 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}} &= \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + k\overrightarrow{\mathrm{QP}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + k\{(s+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\} \\ &= \{k(s+1)-1\}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \{k(t-1)+1\}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

R が直線 AC 上にあるとき，$k = \dfrac{1}{s+1}$ に注意して $(0 \leqq k \leqq 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{s+t}{s+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$r = \dfrac{s+t}{s+1}$ であるから ($s,\ t$ は非負の実数)，r は非負の実数である．



(4) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = -2+6 = 4, \\ &\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{4}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \\ &\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &\quad = (3,\ 1,\ 3) + \frac{2}{3}(1, -1, -2) = \left(\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{S}\left(\boldsymbol{\frac{11}{3}},\ \boldsymbol{\frac{1}{3}},\ \boldsymbol{\frac{5}{3}}\right)$

別解　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $(s \geqq 0,\ t \geqq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + s^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + t^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\
&\qquad + 2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 2st\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= 19 + 3s^2 + 6t^2 + 2s - 8t + 4st \\
&= 6t^2 + 4(s-2)t + 3s^2 + 2s + 19 \\
&= 6\left\{t + \frac{1}{3}(s-2)\right\}^2 + \frac{7}{3}(s+1)^2 + 14
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるとき

$$t + \frac{1}{3}(s-2) = 0, \quad s = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3}$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

よって　$\mathbf{S}\left(\boldsymbol{\frac{11}{3}},\ \boldsymbol{\frac{1}{3}},\ \boldsymbol{\frac{5}{3}}\right)$ ■

$\boxed{4}$ (1) n 回の試行で赤玉を k 回取り出す確率を $P_n(k)$ とすると

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - P_n(0) = \mathbf{1 - (1-p)^n} \\ f(2) &= 1 - P_n(0) - P_n(1) = \mathbf{1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}} \end{aligned}$$

(2) 等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を変形すると $(k = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\int_0^p (x^k)'(1-x)^{n-k}\,dx \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\Big[\,x^k(1-x)^{n-k}\,\Big]_0^p \\ &\qquad - \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}(-1)\,dx \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} + \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}\,dx \\ &= P_n(k) + f(k+1) \end{aligned}$$

$f(k) - f(k+1) = P_n(k)$ が成立するから $(k = 1, 2, \cdots n-1)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1}\{f(j) - f(j+1)\} &= \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j) \\ f(1) - f(k) &= \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j) \\ 1 - P_n(0) - f(k) &= \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j) \\ 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) &= f(k) \end{aligned}$$

$k = n$ のときも成立するから　$f(k) = 1 - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$

(3) (2) で示した結果において，$f(k)$ を $f_n(k)$ とおくと

$$f_n(k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

上式において，n，k をそれぞれ $2k+1$，$k+1$ とおくと，$p = \dfrac{1}{2}$ のとき，
$f_{2k+1}(k+1) = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2} = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx$$

よって $$\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{2(2k+1)!}}$$

別解 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)\,dx$ において，$x = 1-y$ とおくと $\dfrac{dy}{dx} = -1$

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$
y	$1 \longrightarrow \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\frac{1}{2}} (1-y)^k y^k(-1)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 y^k(1-y)^k\,dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k(1-x)^k\,dx \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k(1-x)^k\,dx \\ &= \int_0^1 x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{2(2k+1)!}}$$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[5]．

■

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

5.11 2025 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4

1 以下の問に答えよ．

(1) 実数 x を変数とする関数 $f(x)$ が導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち，すべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすとする．さらに以下の極限値 $a,\ b\ (a < b)$ が存在すると仮定する．

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = b$$

このとき，$a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し，関数 $g(x) = cx - f(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在することを示せ．

(2) 実数 x を変数とする関数

$$f(x) = \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

はすべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ．また，この f に対し (1) の極限値 $a,\ b$ を求めよ．

(3) (2) の関数 f および極限値 $a,\ b$ を考える．$a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し (1) の x_0 および $g(x_0)$ を c を用いて表せ．

2 整数 $a,\ b,\ c$ に対し次の条件を考える．

$$(*) \quad a \geqq b \geqq 0 \ \text{ かつ } \ a^2 - b^2 = c$$

以下の問に答えよ．

(1) $c = 24,\ 25,\ 26$ それぞれの場合に条件 $(*)$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(2) p は 3 以上の素数，n は正の整数，$c = 4p^{2n}$ とする．このとき，条件 $(*)$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 実数 r, α は $0 < r \leqq 1$，$0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする．xy 平面内で，点 $(1,\ 0)$ を中心にもつ半径 r の円周およびその内部を C とする．C を原点 $(0,\ 0)$ を中心に反時計まわりに角度 α だけ回転させるとき，C が通過する領域の面積を求めよ．

(2) 実数 R, α は $0 < R \leqq 1$，$0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする．xyz 空間内で，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心にもつ半径 R の球面およびその内部を B とする．B を z 軸のまわりに角度 α だけ回転させるとき，B が通過する領域の体積を求めよ．ただし，回転の向きは回転後の B の中心が $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$ になるように選ぶものとする．

4 コイン ①, $\cdots$, ⑥ が下図のようにマス目の中に置かれている．

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び，選んだコインはそのままにし，そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える．例えば，① を選べば，②，④ を裏返し，② を選べば，①，③，⑤ を裏返す．最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする．正の整数 n に対し，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき，以下の問に答えよ．

(1) p_2 を求めよ．

(2) コイン ①, $\cdots$, ⑥ をグループ A，B に分けることによって，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる．

> n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ，B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる．

どのようにグループ分けすればよいかを答えよ．

(3) p_4 を求めよ．

解答例

1　(1) $f''(x) > 0$ より，$f'(x)$ は単調増加であるから

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = b, \quad a < c < b$$

をみたす c について，$c = f'(x_0)$ となる x_0 がただひとつ存在する．

$$g(x) = cx - f(x) = f'(x_0)x - f(x) \quad \text{ゆえに} \quad g'(x) = f'(x_0) - f'(x)$$

$g'(x)$ は単調減少であるから，$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	x_0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$g(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在する．

(2) $f(x) = \log\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Bigg/ \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

したがって

$$f''(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

$$a = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \mathbf{-1}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \mathbf{1}$$

別解　$e^{f(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ を微分し，$e^{f(x)}f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ をさらに微分すると

$$e^{f(x)}f'(x)^2 + e^{f(x)}f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^{f(x)} \quad \text{ゆえに} \quad f'(x)^2 + f''(x) = 1$$

$-1 < f'(x) < 1$ であるから　$f''(x) = 1 - f'(x)^2 > 0$

(3)　$c = f'(x_0)$ であるから，$k = e^{x_0}$ とおくと $(k > 0)$

$$c = \frac{e^{x_0} - e^{-x_0}}{e^{x_0} + e^{-x_0}} = \frac{k - k^{-1}}{k + k^{-1}} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$$

$a < c < b$ および (2) の結果から，$-1 < c < 1$ に注意して

$$(1-c)k^2 = 1 + c \quad \text{ゆえに} \quad k = \sqrt{\frac{1+c}{1-c}}$$

$e^{x_0} = \sqrt{\dfrac{1+c}{1-c}}$ より　　$x_0 = \log\sqrt{\dfrac{1+c}{1-c}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+c}{1-c}}$

$f(x_0) = \log\left(\dfrac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{k + k^{-1}}{2}\right)^2$ であるから

$$\begin{aligned}\left(\frac{k + k^{-1}}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}(k^2 + 2 + k^{-2}) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1+c}{1-c} + 2 + \frac{1-c}{1+c}\right) = \frac{1}{1-c^2}\end{aligned}$$

ゆえに　　$f(x_0) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{1-c^2}$

したがって

$$\begin{aligned}g(x_0) &= cx_0 - f(x_0) \\ &= c\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1+c}{1-c} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-c^2} \\ &= \frac{c}{2}\log\frac{1+c}{1-c} + \frac{1}{2}\log(1+c)(1-c) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\{(1+c)\log(1+c) + (1-c)\log(1-c)\}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $(a+b)-(a-b)=2b$ ($a,\ b$ は整数)

したがって，$a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致する

- $\underline{c=24 \text{ のとき}}$

$$(a+b)(a-b)=24$$

このとき，$a+b,\ a-b$ はともに偶数であるから

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}=6$$

$a \geqq b \geqq 0$ より　$\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a-b}{2}\right)=(6,\ 1),\ (3,\ 2)$

これを解いて　　$\boldsymbol{(a,\ b)=(7,\ 5),\ (5,\ 1)}$

- $\underline{c=25 \text{ のとき}}$

$$(a+b)(a-b)=25$$

このとき，$a+b,\ a-b$ はともに奇数であるから，$a \geqq b \geqq 0$ より

$$(a+b,\ a-b)=(25,\ 1),\ (5,\ 5)$$

これを解いて　　$\boldsymbol{(a,\ b)=(13,\ 12),\ (5,\ 0)}$

- $\underline{c=26 \text{ のとき}}$

$$(a+b)(a-b)=26$$

このとき，$a+b,\ a-b$ はともに偶数であるから

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}=\frac{13}{2}$$

$\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a-b}{2}$ はともに整数であるから，上式を満たさない．

よって，条件を満たす $\boldsymbol{(a,\ b)}$ の組は存在しない．

(2) $(a+b)(a-b)=4p^{2n}$ より，$a+b,\ a-b$ はともに偶数であるから $(a \geqq b \geqq 0)$

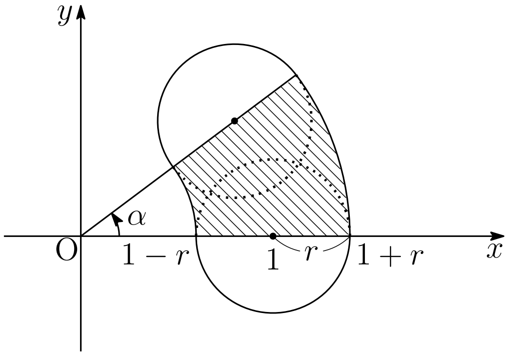
$\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a-b}{2}=p^{2n}$　ゆえに　$\dfrac{a+b}{2}=p^{2n-k},\ \dfrac{a-b}{2}=p^k$　$(k=0,1,\cdots,n)$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(p^{2n-k}+p^k,\ p^{2n-k}-p^k)\quad (k=0,1,2,\cdots,n)}$ ■

3 (1) 下の図の斜線部分の面積は，中心角が α で半径 $1+r$ と $1-r$ の 2 つの扇形で挟まれた部分の面積であるから

$$\frac{1}{2}(1+r)^2\alpha-\frac{1}{2}(1-r)^2\alpha=2r\alpha$$

求める面積は，これに半径 r の面積 πr^2 を加えて　$\boldsymbol{2r\alpha+\pi r^2}$

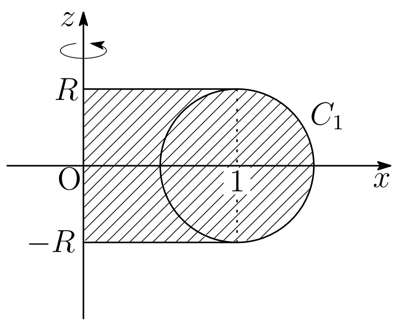


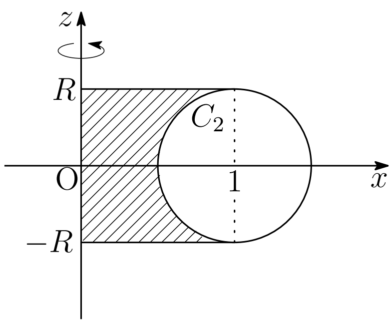
(2) 中心 $(1,\ 0,\ 0)$，半径 R の球面 $(x-1)^2+y^2+z^2=R^2$ の zx 平面による断面は，円 $(x-1)^2+z^2=R^2$ であるから

$$x=1\pm\sqrt{R^2-z^2}$$

$f(z)=1+\sqrt{R^2-z^2}$，$g(z)=1-\sqrt{R^2-z^2}$ とし，$-R\leqq z\leqq R$ において，2 曲線 $C_1: x=f(z)$，$C_2: x=g(z)$ で囲まれた部分を z 軸のまわりに 1 回転した立体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_{-R}^{R}\{f(z)^2-g(z)^2\}dz=\pi\int_{-R}^{R}\{f(z)+g(z)\}\{f(z)-g(z)\}\,dz$$
$$=2\pi\int_{-R}^{R}\{f(z)-g(z)\}\,dz=2\pi\cdot\pi R^2=2\pi^2R^2$$





よって，求める体積は　$\dfrac{\alpha}{2\pi}V+\dfrac{4}{3}\pi R^3=\boldsymbol{\pi\alpha R^2+\dfrac{4}{3}\pi R^3}$

補足 領域 B を xy 平面に射影した図形が (1) である (r を R とする)． ■

4 (1) 2 回の操作終了時点ですべてのコインが裏向きになるのは，② と ⑤ が 1 回ずつ選ばれる場合であるから

$$p_2 = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{18}}$$

(2) n 回の操作終了時点で，コイン ⓚ が選ばれた回数を N_k とすると，①〜⑥ のコインが裏返った回数は，すべて奇数回であるから $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$，法 2 に関して

$$(*) \begin{cases} \text{コイン ① が裏返った回数は} & N_2 + N_4 \equiv 1 \\ \text{コイン ② が裏返った回数は} & N_1 + (N_3 + N_5) \equiv 1 \\ \text{コイン ③ が裏返った回数は} & N_2 + N_6 \equiv 1 \\ \text{コイン ④ が裏返った回数は} & N_1 + N_5 \equiv 1 \\ \text{コイン ⑤ が裏返った回数は} & (N_2 + N_4) + N_6 \equiv 1 \\ \text{コイン ⑥ が裏返った回数は} & N_3 + N_5 \equiv 1 \end{cases}$$

$(*)$ の第 2 式と第 6 式より $N_1 \equiv 0$,　$(*)$ の第 1 式と第 5 式より $N_6 \equiv 0$
$N_1 \equiv 0$ と $(*)$ の第 4 式より $N_5 \equiv 1$，$N_6 \equiv 0$ と $(*)$ の第 3 式より $N_2 \equiv 1$，
$N_5 \equiv 1$ と $(*)$ の第 6 式より $N_3 \equiv 0$，$N_2 \equiv 1$ と $(*)$ の第 1 式より $N_4 \equiv 0$
以上から　$N_2 \equiv N_5 \equiv 1$，$N_1 \equiv N_3 \equiv N_4 \equiv N_6 \equiv 0$
よって　$A = \{$**②**, **⑤**$\}$，$B = \{$**①**, **③**, **④**, **⑥**$\}$

(3) (2) の結果から，4 回の操作終了時点で，すべてのコインが裏向きであるのは，次の場合である．ここで $p = \dfrac{1}{6}$ とおく．

(i) $N_2 = 3$，$N_5 = 1$ のとき　$\dfrac{4!}{3!1!}p^4 = 4p^4$

(ii) $N_2 = 1$，$N_5 = 3$ のとき　$\dfrac{4!}{1!3!}p^4 = 4p^4$

(iii) $N_2 = 1$，$N_5 = 1$，$N_j = 2$ のとき $(j = 1, 3, 4, 6)$

$$\frac{4!}{1!1!2!}p^4 \times 4 = 48p^4$$

(i)〜(iii) より　$p_4 = 4p^4 + 4p^4 + 48p^4 = 56p^4 = 56\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \boldsymbol{\dfrac{7}{162}}$ ■

第 6 章　京都大学

出題分野 (2015-2025) 150 分

◀	京都大学	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
I	数と式											
	2 次関数											
	図形と計量											
	データの分析											
II	式と証明	5				5						
	複素数と方程式		6			6				1		
	図形と方程式				1							
	三角関数	2		3·4	3	1				6		
	指数関数と対数関数								1			
	微分法と積分法											
III	関数											
	極限						2				1·6	
	微分法とその応用	3·4	1					2·6		4		3
	積分法					1				1		1
	積分法の応用	1	4	5	5	3	6	4	5	5	5	
A	場合の数と確率	6				4	5	1	2	3		
	整数の性質		2		2	2	4		3			2
	図形の性質		3		6							
B	数列		5	6	4				6		4	6
	確率分布と統計											
C	平面上のベクトル							5				
	空間のベクトル			2			3	1	4	2	3	4
	複素数平面			1			1	3			2	1
	式と曲線											5

6.1　2015 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 2 つの関数 $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y = \sin 2x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．
ただし，$x = 0$ と $x = \dfrac{\pi}{2}$ は領域を含む線とは考えない．

2 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ．

(a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である．

(b) 半径 1 の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう．

3 (1) a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) $a_1 = 1$ として，$n = 1, 2, \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$ を求めよ．

4 一辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．

5 a，b，c，d，e を正の実数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$g(x) = dx + e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

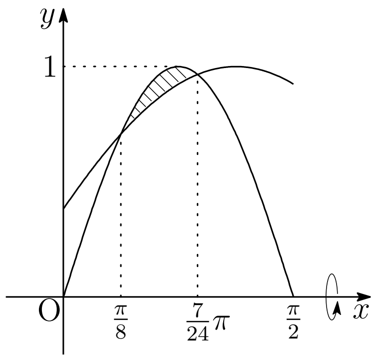
6 2 つの関数を

$$f_0(x) = \frac{x}{2}, \quad f_1(x) = \frac{x+1}{2}$$

とおく．$x_0 = \dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n = 1, 2, \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n = f_0(x_{n-1})$ または $x_n = f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n < \dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $\sin 2x - \sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\cos\dfrac{24x+\pi}{16}\sin\dfrac{8x-\pi}{16}$



$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{\pi}{16} < \dfrac{24x+\pi}{16} < \dfrac{13\pi}{16}$

$$-\frac{\pi}{16} < \frac{8x-\pi}{16} < \frac{3\pi}{16}$$

$y = \sin 2x$ と $y = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ の交点の x 座標は

$$\frac{24x+\pi}{16} = \frac{\pi}{2},\quad \frac{8x-\pi}{16} = 0$$

すなわち　$x = \dfrac{7}{24}\pi,\ \dfrac{\pi}{8}$

$\dfrac{\pi}{8} < x < \dfrac{7}{24}\pi$ において　$\cos\dfrac{24x+\pi}{16} > 0$，$\sin\dfrac{8x-\pi}{16} > 0$

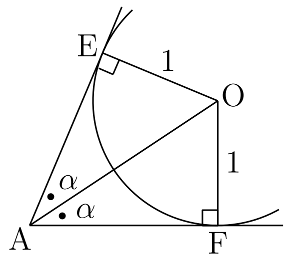
したがって　$\sin 2x > \sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\sin^2 2x - \sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}dx\\ &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{-\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx\\ &= \left[-\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi}{16}}$ ■

2 右の図の四角形 OEAF について



$$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

四角形 OEAF の面積は　$\dfrac{1}{\tan\alpha}$

条件 (a)，(b) を満たす四角形の 4 つの角の大きさを 2α，2β，2γ，2δ とし，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\delta} \quad \cdots (*)$$

一般性を失うことなく　$2\gamma = 2\delta = 90^\circ$，$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

上の 2 式から　$\beta = 90^\circ - \alpha$，$\gamma = \delta = 45^\circ$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} + \frac{1}{\tan 45^\circ} + \frac{1}{\tan 45^\circ} \\ &= \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} + 2 = \frac{(\tan\alpha - 1)^2}{\tan\alpha} + 4 \geqq 4 \end{aligned}$$

よって，S は $\alpha = 45^\circ$，すなわち，四角形 ABCD が正方形のとき，最小値　**4**

■

3　(1) $y = e^x + 1$ を微分すると　$y' = e^x$

曲線 $y = e^x + 1$ の上の点 $(t,\ e^t + 1)$ における接線の方程式は

$$y - (e^t + 1) = e^t(x - t)$$

これが点 $(a,\ 0)$ を通るから

$$-(e^t + 1) = e^t(a - t)\quad \text{ゆえに}\quad a = t - e^{-t} - 1\quad \cdots(*)$$

$f(t) = t - e^{-t} - 1$ とおくと　$f'(t) = 1 + e^{-t} > 0$

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty,\quad \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$$

したがって，$f(t) = a$ を満たす t はただ 1 つ存在する．

よって，$(a,\ 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線はただ 1 つ存在する．

(2) $a = a_n$，$t = a_{n+1}$ を $(*)$ に代入すると

$$a_n = a_{n+1} - e^{-a_{n+1}} - 1\quad \text{ゆえに}\quad a_{n+1} - a_n = 1 + e^{-a_{n+1}}\quad \cdots ①$$

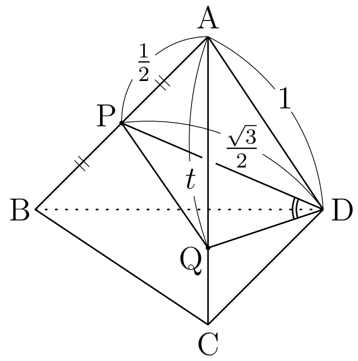
上式より，$a_{n+1} - a_n > 1$ であるから

$n > 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) > \sum_{k=1}^{n-1}$

ゆえに　$a_n > n$　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

上式に注意すると，① から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \mathbf{1}$　■

$\boxed{4}$ $\mathrm{AQ} = t$ とおいて，△APQ および △AQD に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + t^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot t\cos 60^\circ \\ &= t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}, \\ \mathrm{QD}^2 &= t^2 + 1^2 - 2\cdot t\cdot 1\cos 60^\circ \\ &= t^2 - t + 1\end{aligned}$$

△PQD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{PDQ} &= \frac{\mathrm{PD}^2 + \mathrm{QD}^2 - \mathrm{PQ}^2}{2\mathrm{PD}\cdot\mathrm{QD}} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + (t^2 - t + 1) - \left(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{t^2 - t + 1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3 - t}{\sqrt{t^2 - t + 1}}\end{aligned}$$

ここで，$f(t) = \dfrac{3 - t}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{-1\cdot\sqrt{t^2 - t + 1} - (3 - t)\cdot\dfrac{2t - 1}{2\sqrt{t^2 - t + 1}}}{t^2 - t + 1} \\ &= \frac{-2(t^2 - t + 1) + (t - 3)(2t - 1)}{(t^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - 5t}{(t^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{21}}{3}$	$\searrow$	

よって，求める最大値は　$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2\sqrt{21}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$ ■

5 $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $px+q$，余りを $r \neq 0$ とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px + q + \frac{r}{g(x)}, \quad p = \frac{a}{d} > 0$$

2 以上の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}
\frac{f(n-1)}{g(n-1)} &= p(n-1) + q + \frac{r}{g(n)-d} \\
\frac{f(n)}{g(n)} &= pn + q + \frac{r}{g(n)} \\
\frac{f(n+1)}{g(n+1)} &= p(n+1) + q + \frac{r}{g(n)+d}
\end{aligned}$$

上の 3 式から

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(n-1)}{g(n-1)} + \frac{f(n+1)}{g(n+1)} - 2\cdot\frac{f(n)}{g(n)}\right| &= \left|\frac{r}{g(n)-d} + \frac{r}{g(n)+d} - \frac{2r}{g(n)}\right| \\
&= \left|\frac{2rd^2}{g(n)\{g(n)+d\}\{g(n)-d\}}\right| \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

$d > 0$ より $g(n) = dn + e$ は，いくらでも大きくなるので，このとき

$$0 < \left|\frac{2rd^2}{g(n)\{g(n)+d\}\{g(n)-d\}}\right| < 1$$

となり，$(*)$ の左辺が整数であることに反する．

よって，$r = 0$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる．■

$\boxed{6}$ 条件により

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}, \\ x_1 &= \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}, \\ x_2 &= \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8} \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

これから　$x_n = \dfrac{1}{2^{n+1}},\ \dfrac{3}{2^{n+1}}, \cdots,\ \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$

と推測し，それぞれの確率は $\dfrac{1}{2^n}$ であることを示す．

実際，$x_n = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$ のとき $(k = 1, 2, 3, \cdots 2^n)$，$\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{1}{2}$ の確率で

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} = \frac{2k-1}{2^{n+2}} \quad \cdots①$$

また，$x_n = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$ のとき $(k = 1, 2, 3, \cdots 2^n)$，$\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{1}{2}$ の確率で

$$x_{n+1} = \frac{x_n+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} + 1\right) = \frac{2^{n+1}+2k-1}{2^{n+2}} \quad \cdots②$$

①，② より　$x_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+2}},\ \dfrac{3}{2^{n+2}}, \cdots,\ \dfrac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}$

であり，それぞれの確率は $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ である．

$n = 0$ のときは，自明であるから，数学的帰納法により示された．

したがって，x_n の要素は 2^n 個あり，$\dfrac{2N-1}{2^{n+1}} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{2N+1}{2^{n+1}}$ とすると

これを満たす自然数 N は　$\dfrac{2^{n+1}}{3} - \dfrac{1}{2} < N < \dfrac{2^{n+1}}{3} + \dfrac{1}{2}$

$[x]$ を x を超えない最大の整数とすると　$N = \left[\dfrac{2^{n+1}}{3} + \dfrac{1}{2}\right]$

ここで，$2 \equiv -1 \pmod 3$ であるから，$2^{n+1} + (-1)^n \equiv 0 \pmod 3$ より

$$N = \left[\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3} + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{3}\right] = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$$

よって　$P_n = \dfrac{N}{2^n} = \dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\cdot 2^n} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}$

別解　$f_0(x) = \dfrac{x}{2}$，$f_1(x) = \dfrac{1+x}{2}$ より

$$\begin{aligned}
&0 < x < \frac{1}{3} \text{ のとき，} \quad 0 < f_0(x) < \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2} < f_1(x) < \frac{2}{3} \\
&\frac{1}{3} \leqq x < \frac{2}{3} \text{ のとき，} \quad \frac{1}{6} \leqq f_0(x) < \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \leqq f_1(x) < \frac{5}{6} \\
&\frac{2}{3} \leqq x < 1 \text{ のとき，} \quad \frac{1}{3} \leqq f_0(x) < \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{6} \leqq f_1(x) < 1
\end{aligned}$$

$0 < x_n < \dfrac{1}{3}$ である確率を a_n，$\dfrac{1}{3} \leqq x_n < \dfrac{2}{3}$ である確率を b_n，$\dfrac{2}{3} \leqq x_n < 1$ である確率を c_n とすると

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, \quad b_0 = 1, \quad c_0 = 0 \\
&a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad \cdots ① \\
&b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) \qquad \cdots ② \\
&c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n) \qquad \cdots ③
\end{aligned}$$

① + ② + ③ より　　$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \cdots ④$

これを ② に代入して

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_0 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots ⑤$$

① − ③ より　$a_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - c_n) = 0$　ゆえに　$a_n = c_n \quad \cdots ⑥$

④，⑥ から　　$a_n = c_n = \dfrac{1 - b_n}{2}$

よって，求める確率 P_n は

$$\begin{aligned}
P_n &= a_n + b_n = \frac{1 - b_n}{2} + b_n \\
&= \frac{1 + b_n}{2} = \boldsymbol{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}
\end{aligned}$$

■

6.2　2016 年 (150 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5] [6]

1 (1) n を 2 以上の自然数とするとき，関数

$$f_n(\theta) = (1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$$

の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ．

2 素数 p，q を用いて $p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ．

3 四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る．

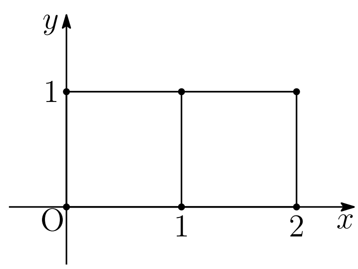
ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう．

4 xyz 空間において，平面 $y = z$ の中で

$$|x| \leqq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leqq y \leqq \log a$$

で与えられる図形 D を考える．ただし a は 1 より大きい定数とする．この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

5 xy 平面上の 6 個の点 $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている．動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する．



規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する．

例えば，X が $(2,\ 0)$ にいるときは，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．また X が $(1,\ 1)$ にいるときは，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．時刻 0 で動点 X が $\mathrm{O} = (0,\ 0)$ から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ．ただし n は 0 以上の整数とする．

6 複素数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し，次の条件を考える．

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる．

(ロ) $f(x)$ の係数 a，b の少なくとも一方は虚数である．

この 2 つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)
$$f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta=(1+\cos\theta)(1-\cos^2\theta)^{\frac{n-1}{2}}$$
$$=(1+\cos\theta)^{\frac{n+1}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{n-1}{2}}$$

$x=\cos\theta$，$g_n(x)=f_n(\theta)$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より

$$g_n(x)=(1+x)^{\frac{n+1}{2}}(1-x)^{\frac{n-1}{2}}\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

両辺の自然対数をとって微分すると

$$\frac{g_n'(x)}{g_n(x)}=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{(n+1)(1-x)-(n-1)(1+x)}{2(1+x)(1-x)}=\frac{1-nx}{(1+x)(1-x)}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	1
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	↗	極大	↘	0

よって　$M_n=g_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\boldsymbol{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$

(2) (1) の結果から

$$M_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$(M_n)^n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(M_n)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{e^{\frac{1}{2}}}$$

■

2 素数 p，q の偶奇が一致するならば，p^q+q^p は 2 でない偶数となるから，p^q+q^p が素数であるとき，p と q の偶奇は異なる．すなわち，p^q+q^p が素数であるとき，素数 p，q の一方は 2 であるから

$$p^2+2^p \text{ が素数 } (p \text{ は奇素数}) \quad \cdots (*)$$

を求めればよい．

(i) $p=3$ のとき，$3^2+2^3=17$ は，$(*)$ を満たす

(ii) $p \geqq 5$，$p \equiv \pm 1 \pmod 3$ のとき

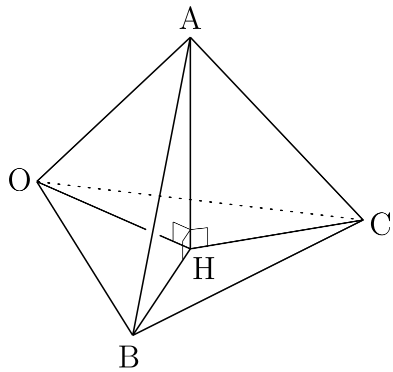
$$p^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1, \quad 2^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod 3$$

したがって　$p^2+2^p \equiv 1+(-1) \equiv 0 \pmod 3$

このとき，$(*)$ を満たす素数 p は存在しない．

(i)，(ii) より，求める素数は　**17**　■

3 △OBC の外心を H とすると



$$\mathrm{HO}=\mathrm{HB}=\mathrm{HC}$$

A から △OBC に下ろした垂線が H を通るから

$$\mathrm{AH}^2+\mathrm{HO}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{HB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{HC}^2$$

ゆえに　$\mathrm{AO}^2=\mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}^2$

同様に，B，C から対面に下ろした垂線により

$$\mathrm{BO}^2=\mathrm{BC}^2=\mathrm{BA}^2,$$
$$\mathrm{CO}^2=\mathrm{CA}^2=\mathrm{CB}^2$$

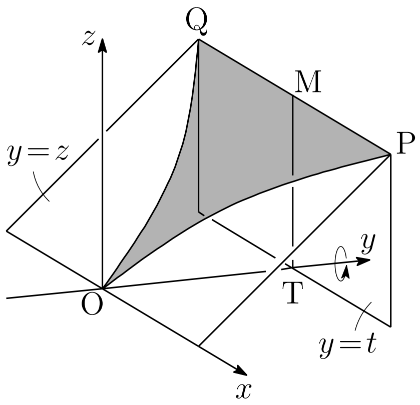
すなわち　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$

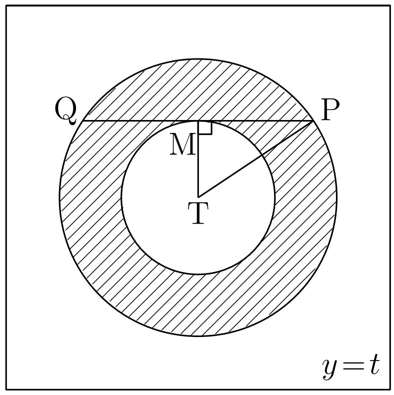
よって，四面体 OABC は正四面体である．　■

4 図形 D は

$$y = z,\quad -\frac{e^y+e^{-y}}{2}+1 \leqq x \leqq \frac{e^y+e^{-y}}{2}-1,\quad 0 \leqq y \leqq \log a$$

図形 D と平面 $y=t\ (0 \leqq t \leqq \log a)$ との共有部分は，2 点 $\mathrm{P}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1,\ t,\ t\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\frac{e^t+e^{-t}}{2}+1,\ t,\ t\right)$ を結ぶ線分 PQ で，線分 PQ の中点を M とする．





PQ を点 $\mathrm{T}(0,\ t,\ 0)$ を中心に y 軸の周りに回転させた図形の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \pi(\mathrm{TP}^2-\mathrm{TM}^2) = \pi\mathrm{MP}^2 = \pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2$$

よって，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\log a} S(t)\,dt = \pi\int_0^{\log a}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2 dt \\
&= \pi\int_0^{\log a}\left(\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-e^t-e^{-t}+\frac{3}{2}\right)dt \\
&= \pi\left[\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{8}e^{-2t}-e^t+e^{-t}+\frac{3}{2}t\right]_0^{\log a} \\
&= \boldsymbol{\pi\left\{\frac{1}{8}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)-a+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\log a\right\}}
\end{aligned}$$

■

5 n 秒後にXの x 座標が0，1，2である確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とすると，$a_0=1$，$b_0=0$，$c_0=0$

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n & \cdots ① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n & \cdots ② \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n & \cdots ③ \end{cases}$$

①〜③の辺々を加えると　$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n$

ゆえに　$a_n+b_n+c_n=a_0+b_0+c_0=1$　$\cdots$④

②，④から c_n を消去すると

$$b_{n+1}=-\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(b_n-\frac{3}{7}\right)$$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{3}{7}\right\}$ は初項が $b_0-\dfrac{3}{7}$，公比が $-\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{3}{7}=\left(b_0-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad b_n=\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\} \quad \cdots ⑤$$

①−③より　$a_{n+1}-c_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-c_n)$

数列 $\{a_n-c_n\}$ は初項が a_0-b_0，公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-c_n=(a_0-c_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots ⑥$$

④−⑤+⑥より　$2a_n=1-\dfrac{3}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

補足 同様の計算により

$$b_n=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad c_n=\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

■

$\boxed{6}$ 2 次方程式 $f(x)=0$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$a=-(\alpha+\beta),\quad b=\alpha\beta \quad \cdots(*)$$

したがって　$f(x)=x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$

$g(x)=f(x^3)$ とおくと　$g(x)=(x^3-\alpha)(x^3-\beta)$

$g(x)$ が $f(x)$ で割り切れるとき，$g(x)$ は $x-\alpha$ および $x-\beta$ で割り切れるから，$g(\alpha)=0$，$g(\beta)=0$ より

$$(\alpha^3-\alpha)(\alpha^3-\beta)=0 \quad \text{かつ} \quad (\beta^3-\alpha)(\beta^3-\beta)=0$$

上の 2 式の α，β の対称性により，次の場合分けを行う．

(i) $\alpha^3-\alpha=0$，$\beta^3-\beta=0$ の場合
α，β は実数であるから，$(*)$ より，a，b はともに実数となり，不適．

(ii) $\alpha^3-\alpha=0$，$\beta^3-\alpha=0$ の場合
$\alpha=\beta=0$ のとき，$(*)$ により，a，b がともに実数となり，不適
$\alpha=\beta^3=\pm1$ のとき，β が実数のとき，$(*)$ により，a，b がともに実数となるから，β は虚数であることに注意して

$$(\alpha,\ \beta)=\left(1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right),\ \left(-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$

ゆえに　$(a,\ b)=\left(\dfrac{-1\mp\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right),\ \left(\dfrac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

(複号同順)

(iii) $\alpha^3-\beta=0$，$\beta^3-\alpha=0$ の場合
β を消去すると　$\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha^2+1)(\alpha^4+1)=0$
α が実数とき，β は実数となるから，a，b はともに実数となり，不適．
$\alpha=\pm i$ のとき，$\beta=\alpha^3=\mp i$ より (複号同順)，$a=0,\ b=1$ となり，不適．
$\alpha=\dfrac{\pm1+i}{\sqrt{2}}$ のとき，$\beta=\dfrac{\mp1+i}{\sqrt{2}}$ となり (複号同順)，$a=-\sqrt{2}\,i$，$b=-1$
$\alpha=\dfrac{\mp1-i}{\sqrt{2}}$ のとき，$\beta=\dfrac{\pm1-i}{\sqrt{2}}$ となり (複号同順)，$a=\sqrt{2}\,i$，$b=-1$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}x+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \\ x^2+\dfrac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2}x+\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2} \\ x^2\pm\sqrt{2}\,ix-1 \end{cases}}$　**(複号同順)**

■

6.3　2017 年 (150 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ w を 0 でない複素数，x，y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする．

(1) 実数 R は $R>1$ を満たす定数とする．w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(2) 実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 四面体 OABC を考える．点 D，E，F，G，H，I は，それぞれ辺 OA，AB，BC，CO，OB，AC 上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$ であることを示せ．

(2) D，E，F，G，H，I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ p，q を自然数，α，β を

$$\tan\alpha=\frac{1}{p},\quad \tan\beta=\frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha+2\beta)=2$$

を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形であり，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．また $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径は 1 であるとする．

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心を P とするとき，$\angle\mathrm{BPC}$ を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $a\geqq 0$ とする．$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y=xe^{-x}$，直線 $y=ax$，直線 $x=\sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

(ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする．)

$\boxed{\mathbf{6}}$ n を自然数とする．n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている．各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る．このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\theta = \arg w$ とすると，$R = |w|$ より

$$w = R(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{R}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$x + yi = w + \dfrac{1}{w}$ より

$$x = \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\theta, \quad y = \left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\theta \qquad \cdots(*)$$

$R > 1$ より，$R + \dfrac{1}{R} \neq 0$，$R - \dfrac{1}{R} \neq 0$ であるから

$$\frac{x}{R + \frac{1}{R}} = \cos\theta, \quad \frac{y}{R - \frac{1}{R}} = \sin\theta$$

上の 2 式から，θ を消去することにより，求める軌跡は，次の楕円である．

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1}$$

(2) $r = |w|$ とすると，$\alpha = \arg w$ より，$(*)$ と同様に

$$x = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha, \quad y = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\alpha \neq 0$，$\sin\alpha \neq 0$ より

$$\frac{x}{\cos\alpha} = r + \frac{1}{r}, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = r - \frac{1}{r} \qquad \cdots(**)$$

$(**)$ の第 1 式から

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 + 2 \geqq 2$$

$(**)$ の 2 式から，r を消去すると

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin\alpha}\right)^2 = \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 4$$

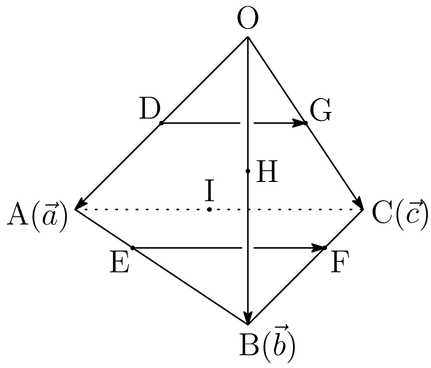
したがって，求める軌跡は，次の双曲線の一部である．

$$\boldsymbol{\left(\frac{x}{2\cos\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{2\sin\alpha}\right)^2 = 1 \qquad (x \geqq 2\cos\alpha)}$$

■

2 (1) $0 < d, e, f, g < 1$ とし

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = d\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}} = g\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = e\vec{a} + (1-e)\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = f\vec{c} + (1-f)\vec{b}$$



とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}} = -d\vec{a} + g\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -e\vec{a} + (e-f)\vec{b} + f\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = k\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ であるから (k は 0 でない定数)

$$-e\vec{a} + (e-f)\vec{b} + f\vec{c} = k(-d\vec{a} + g\vec{c})$$

整理すると　$(kd-e)\vec{a} + (e-f)\vec{b} + (f-kg)\vec{c} = \vec{0} \quad \cdots (*)$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$kd - e = 0, \quad e - f = 0, \quad f - kg = 0 \quad \text{すなわち} \quad d = g, \quad e = f$$

$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 1 - e : e$，$\mathrm{CF} : \mathrm{FB} = 1 - f : f$ であるから，$e = f$ より

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = \mathrm{CF} : \mathrm{FB}$$

(2) 条件を満たすとき，$(*)$ に $k = 1$ を代入して (辺 AC に注目)

$$d = e = f = g$$

したがって　$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = \mathrm{CF} : \mathrm{FB} = \mathrm{AD} : \mathrm{DO} = \mathrm{CG} : \mathrm{GO} \quad \cdots ①$

また，同様に，$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{IF}}$ より (辺 AB に注目)

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DO} = \mathrm{BH} : \mathrm{HO} = \mathrm{AI} : \mathrm{IC} = \mathrm{BF} : \mathrm{FC} \quad \cdots ②$$

① より　$\mathrm{CF} : \mathrm{FB} = \mathrm{AD} : \mathrm{DO}$，　② より　$\mathrm{AD} : \mathrm{DO} = \mathrm{BF} : \mathrm{FC}$

上の 2 式より，$\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = 1 : 1$ である．

したがって，①，② より，D，E，F，G，H，I は各辺の中点である．

中点連結定理により　$\mathrm{OA} = 2\mathrm{HE}, \quad \mathrm{OB} = 2\mathrm{DE}, \quad \mathrm{OC} = 2\mathrm{HF},$

$\mathrm{AB} = 2\mathrm{DH}, \quad \mathrm{BC} = 2\mathrm{HG}, \quad \mathrm{CA} = 2\mathrm{GD}$

このとき，これらの辺の長さは等しいので，OABC は正四面体である．■

$\boxed{3}$ $\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ より，$q=1$ のとき，$\beta = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ (n は整数) であるから

$$\tan(\alpha+2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -p\ (\neq 2)$$

したがって　$q \neq 1$

$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ $(q\neq 1)$ より　$\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{2\cdot\dfrac{1}{q}}{1-\dfrac{1}{q^2}} = \dfrac{2q}{q^2-1}$

正接の加法定理により

$$\tan\alpha = \tan\{(\alpha+2\beta)-2\beta\} = \frac{\tan(\alpha+2\beta)-\tan 2\beta}{1+\tan(\alpha+2\beta)\tan 2\beta}$$

条件により　$\dfrac{1}{p} = \dfrac{2-\dfrac{2q}{q^2-1}}{1+2\cdot\dfrac{2q}{q^2-1}} = \dfrac{2(q^2-q-1)}{q^2+4q-1}$　ゆえに　$2p-1 = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$

$2p-1$ は正の奇数，$q^2-q-1 = q(q-2)+q-1>0$ より $(q \geqq 2)$

$$\frac{5q}{q^2-q-1} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad q^2-6q-1 \leqq 0$$

したがって　　$|q-3| \leqq \sqrt{10}$

これを満たす自然数 q は　$q = 2, 3, 4, 5, 6$

ここで，$f(q) = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$ とすると

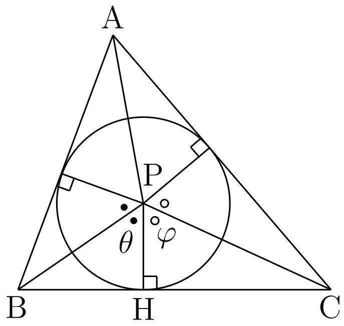
$$f(2)=10,\quad f(3)=3,\quad f(4)=\frac{20}{11},\quad f(5)=\frac{25}{19},\quad f(6)=\frac{30}{29}$$

よって，$f(q)$ が奇数となるのは，$q=3$ のとき

$$2p-1=3 \quad \text{これを解いて} \quad p=2$$

よって，求める組は　　$\boldsymbol{(p,\ q) = (2,\ 3)}$　■

$\boxed{4}$ (1) 内心Pから辺BCに垂線PHを引き，$\angle\mathrm{BPH} = \theta$，$\angle\mathrm{CPH} = \varphi$ とすると



$$\angle\mathrm{B} = \pi - 2\theta, \quad \angle\mathrm{C} = \pi - 2\varphi \quad \cdots ①$$

$\angle\mathrm{A} = \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi$ より

$$\frac{\pi}{3} + (\pi - 2\theta) + (\pi - 2\varphi) = \pi$$

したがって　$\theta + \varphi = \dfrac{2}{3}\pi$　よって　$\angle\mathrm{BPC} = \theta + \varphi = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ に正弦定理 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$ を適用すると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\cdot 1 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{BC} = \sqrt{3}$$

$r = \mathrm{PH}$ であるから，$\mathrm{BH} = r\tan\theta$，$\mathrm{HC} = r\tan\varphi$，$\mathrm{BH} + \mathrm{HC} = \mathrm{BC}$ より

$$\begin{aligned} r\tan\theta + r\tan\varphi &= \sqrt{3} \\ r(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) &= \sqrt{3}\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin(\theta+\varphi) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\{\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi)\} \end{aligned}$$

これに (1) の結果を代入すると

$$\frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{-\frac{1}{2} + \cos(\theta-\varphi)\right\} \quad \text{ゆえに} \quad r = \cos(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}$$

$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi - \theta$ であるから　$r = \cos\left(2\theta - \dfrac{2}{3}\pi\right) - \dfrac{1}{2}$　$\cdots(*)$

① より　$\angle\mathrm{C} = \pi - 2\varphi = \pi - 2\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right) = 2\theta - \dfrac{\pi}{3}$

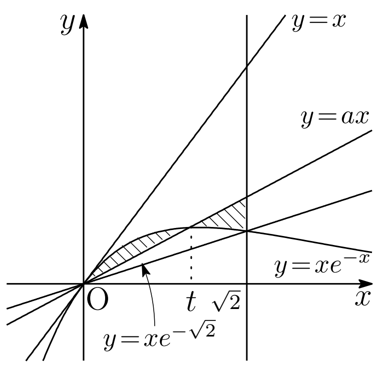
$\triangle\mathrm{ABC}$ は，鋭角三角形であるから，$\angle\mathrm{B}$，$\angle\mathrm{C}$ について

$$0 < \pi - 2\theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 < 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{5}{12}\pi$　ゆえに　$-\dfrac{\pi}{6} < 2\theta - \dfrac{2}{3}\pi < \dfrac{\pi}{6}$　$\cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ より　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} < r \leqq \dfrac{1}{2}}$　■

5 $y = xe^{-x}$ より，$y' = (1-x)e^{-x}$，$y'' = (x-2)e^{-x}$



x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	0	↗	極大	↘	$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$

$y = xe^{-x}$ のグラフは，右の図のようなる．

$x = 0$ のとき，$y' = 1$ であるから，曲線 $y = xe^{-x}$ 上の原点 O における接線の傾きは　1

曲線 $y = xe^{-x}$ と直線 $x = \sqrt{2}$ の交点は $(\sqrt{2},\ \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$ であるから，原点とこの交点を通る直線の傾きは　$e^{-\sqrt{2}}$

上の図から，$0 \leqq a < e^{-\sqrt{2}}$ のとき，$S(a)$ は単調減少である．$1 < a$ のとき，$S(a)$ は単調増加である．したがって，これらの区間においては，$S(a)$ は最小値をもたないので，$e^{-\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ において，$S(a)$ の最小値を求めればよい．

曲線 $y = xe^{-x}$ と直線 $y = ax$ の交点の x 座標を t とすると $(0 < t < \sqrt{2})$

$$te^{-t} = at \quad \text{すなわち} \quad a = e^{-t}\ (t = -\log a)$$

関数 $f(x) = xe^{-x} - ax$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -(x+1)e^{-x} - \dfrac{a}{2}x^2$ とすると

$$S(a) = \int_0^t f(x)\,dx - \int_t^{\sqrt{2}} f(x)\,dx = 2F(t) - F(0) - F(\sqrt{2})$$

このとき　$F(t) = -(t+1)e^{-t} - \dfrac{a}{2}t^2 = -\left(\dfrac{t^2}{2} + t + 1\right)e^{-t}$，$F(0) = -1$，

$F(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} - a = -e^{-t} - (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$

したがって　$S(a) = -(t+1)^2e^{-t} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$

$S(a) = g(t)$ とすると　$g'(t) = (t+1)(t-1)e^{-t}$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘	極小	↗	

よって，$t = 1$，すなわち，$a = e^{-1}$ のとき，$S(a)$ は最小となる．

最小値 $S(e^{-1}) = g(1) = \boldsymbol{-4e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1}$

■

6 n 桁の数 X が，3 で割り切れる確率を a_n，3 で割って 1 余る確率を b_n，3 で割って 2 余る確率を c_n とすると，次の確率漸化式が成り立つ．

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n, \\ b_{n+1} &= \frac{2}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n, \\ c_{n+1} &= \frac{2}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n, \\ a_1 &= \frac{1}{5},\ b_1 = \frac{2}{5},\ c_1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

第 1 式から第 3 式の辺々を加えると　$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$

ゆえに　$a_n + b_n + c_n = a_1 + b_1 + c_1 = 1$

$b_n + c_n = 1 - a_n$ であるから，第 1 式は

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(b_n + c_n) = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(1 - a_n) = -\frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}$$

したがって　$a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1 - \frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(a_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n}$

補足 第 2 式および第 3 式から

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}(a_n + c_n) = \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}(1 - b_n) = -\frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}, \\ c_{n+1} &= \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}(a_n + b_n) = \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}(1 - c_n) = -\frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

同様にして　$b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$　■

6.4 2018 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 0 でない実数 a，b，c は次の条件 (i) と (ii) を満たしながら動くものとする．

(i) $1+c^2 \leqq 2a$.

(ii) 2 つの放物線 $C_1 : y = ax^2$ と $C_2 : y = b(x-1)^2 + c$ は接している．

ただし，2 つの曲線が接するとは，ある共有点において共通の接線をもつことであり，その共有点を接点という．

(1) C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ．

(2) C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め，その範囲を図示せよ．

2 $n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

3 α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える．

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する．

(ii) $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DAB} = \alpha$.

条件 (i) と (ii) を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積

$$k = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$$

が最大となるものについて，k の値を求めよ．

4 コインを n 回投げて複素数 z_1, z_2, $\cdots$, z_n を次のように定める．

(i) 1 回目に表が出れば $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とし，裏が出れば $z_1 = 1$ とする．

(ii) $k = 2, 3, \cdots, n$ のとき，k 回目に表が出れば $z_k = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} z_{k-1}$ とし，裏が出れば $z_k = \overline{z_{k-1}}$ とする．ただし，$\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である．

このとき，$z_n = 1$ となる確率を求めよ．

5 曲線 $y = \log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ における法線上に，点 B を $\mathrm{AB} = 1$ となるようにとる．ただし B の x 座標は t より大きいとする．

(1) 点 B の座標 $(u(t),\ v(t))$ を求めよ．また $\left(\dfrac{du}{dt},\ \dfrac{dv}{dt}\right)$ を求めよ．

(2) 実数 r は $0 < r < 1$ を満たすとし，t が r から 1 まで動くときに点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r)$，$L_2(r)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{r \to +0}(L_1(r) - L_2(r))$ を求めよ．

6 四面体 ABCD は $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$，$\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする．

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ．

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ．

解答例

1　(1)　$f(x)=ax^2$，$g(x)=b(x-1)^2+c$ とおくと

$$f'(x)=2ax,\quad g'(x)=2b(x-1)$$

C_1，C_2 の共有点の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ より

$$(*)\begin{cases} at^2=b(t-1)^2+c \\ 2at=2b(t-1) \end{cases}$$

$(*)$ の第 2 式から　$at=b(t-1)$　$\cdots$ ①

$a\neq 0$，$b\neq 0$ であるから，① より　$t\neq 0,\ 1$

① と $(*)$ の第 1 式から b を消去すると

$$at^2=at(t-1)+c \quad ゆえに \quad t=\frac{c}{a}$$

したがって　$f\left(\dfrac{c}{a}\right)=a\left(\dfrac{c}{a}\right)^2=\dfrac{c^2}{a}$　よって，接点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{c}{a},\ \dfrac{c^2}{a}\right)}$

(2)　(1) の結果から，接点の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{c}{a},\quad y=\frac{c^2}{a}\quad (x\neq 0,\ 1)$$

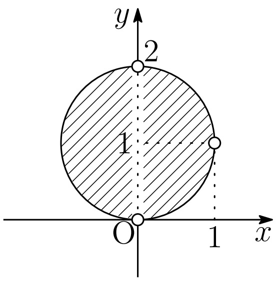
上の 2 式から　$a=\left(\dfrac{a}{c}\right)^2\dfrac{c^2}{a}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 y=\dfrac{y}{x^2}$，　$c=\dfrac{c^2}{a}\cdot\dfrac{a}{c}=y\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{y}{x}$

これらを $1+c^2\leqq 2a$ に代入すると

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\leqq 2\cdot\frac{y}{x^2}$$

よって　$x^2+(y-1)^2\leqq 1$　$(x\neq 0,\ 1)$

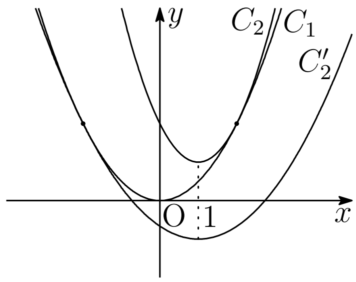
この不等式の表す領域は，右の図の斜線部分で，y 軸および点 $(1,\ 1)$ は含まない．



補足　右の図から，C_1 と C_2 の接点の x 座標は

$$x\neq 0,\ 1$$

であることがわかる．



別解 $1+c^2 \leqq 2a$ より，$a>0$ であるから，$k=\dfrac{1+c^2}{2a}$ とおくと　$0<k\leqq 1$

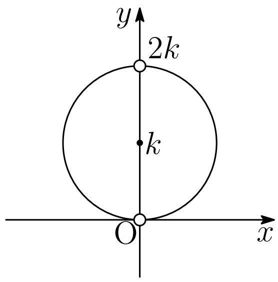
接点の座標を $(x,\ y)$ とおくと，(1) の結果から

$$x=\frac{c}{a}=\frac{2kc}{1+c^2},\quad y=\frac{c^2}{a}=\frac{2kc^2}{1+c^2}$$

$c\neq 0$ であるから，$c=\tan\theta\ (-\frac{\pi}{2}<\theta<0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと

$$x=k\sin 2\theta,\quad y=k(1-\cos 2\theta)$$

これは，右の図のように，y 軸上の点を除く，中心 $(0,\ k)$，半径 k の円である．接点の x 座標は，$x\neq 0,\ 1$ であるから，k が $0<k\leqq 1$ の範囲を動くとき，(2) で求めた図形が得られる．



■

2 与えらえた整式を変形すると

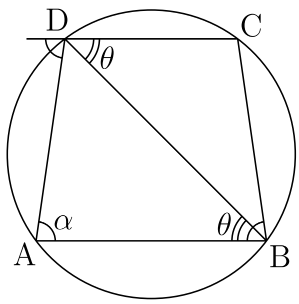
$$n^3-7n+9=(n-1)n(n+1)-3(2n-3)\quad\cdots(*)$$

連続する 3 整数の積 $(n-1)n(n+1)$ は 3 の倍数であるから，$(*)$ は 3 の倍数である．これが素数であるとき，その値は 3 であるから

$$n^3-7n+9=3\quad ゆえに\quad (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

よって，求める整数 n は　$\boldsymbol{n=1,\ 2,\ -3}$ ■

3 $\theta=\angle\mathrm{ABD}$ とおくと



$$\angle\mathrm{DBC}=\alpha-\theta,\ \angle\mathrm{ADB}=\pi-\alpha-\theta$$

外接円の半径が 1 であるから，正弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=2\sin(\pi-\alpha-\theta)=2\sin(\alpha+\theta),\\ \mathrm{BC}&=\mathrm{DA}=2\sin\theta,\\ \mathrm{CD}&=2\sin(\alpha-\theta)\end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned}k&=\mathrm{AB{\cdot}BC{\cdot}CD{\cdot}DA}=16\sin^2\theta\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)\\ &=8\sin^2\theta(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)=16\sin^2\theta(-\sin^2\theta+\sin^2\alpha)\\ &=-16\left(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^2+4\sin^4\alpha\end{aligned}$$

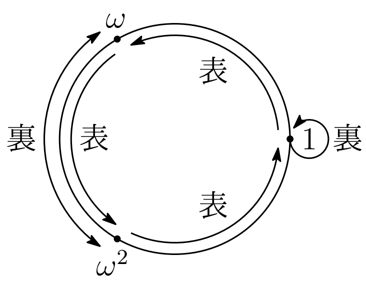
よって，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$ のとき，k は最大値 $\boldsymbol{4\sin^4\alpha}$ をとる． ■

4 n を自然数，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると　$z_n \in \{1,\ \omega,\ \omega^2\}$

$z_n = 1$，$z_n = \omega$，$z_n = \omega^2$ となる確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1 = \frac{1}{2},\ q_1 = \frac{1}{2},\ r_1 = 0$$

$$(*)\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = q_n \end{cases}$$



$(*)$ の第 1 式と第 2 式から

$$p_{n+1} - q_{n+1} = 0,\quad p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + r_n$$

このとき，$p_n = q_n$ であるから，$p_n + q_n + r_n = 1$ により　$r_n = 1 - 2p_n$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

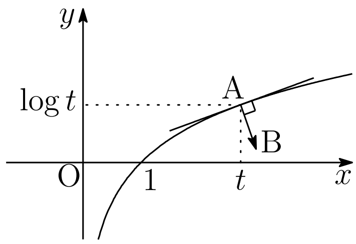
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}(1-2p_n)\quad \text{ゆえに}\quad p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項が $p_1 - \dfrac{1}{3}$，公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad \text{すなわち}\quad p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$ ■

5 (1) $y = \log x$ より　$y' = \dfrac{1}{x}$



曲線 $y = \log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ における接線の傾きが $\dfrac{1}{t}$ であるから，この曲線の点 A における法線の傾きは $-t$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ はベクトル $(1, -t)$ に平行である．

$\mathrm{AB} = 1$ で，B の x 座標は A の x 座標 t より大きいから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, -t)$$

よって

$$\begin{aligned}(u(t),\ v(t)) &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (t,\ \log t) + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, -t) \\ &= \boldsymbol{\left(t + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \log t - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)}\end{aligned}$$

上式から　$$\boldsymbol{\left(\frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\right) = \left(1 - \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}$$

(2) $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ より，$\dfrac{d}{dt}\log t = \dfrac{1}{t}$ であるから

$$L_1(r) = \int_r^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt = \int_r^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt$$

(1) の結果から　$$\left(\frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(t,\ 1)$$

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{t^2+1} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$L_2(r) = \int_r^1 \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

したがって　$$L_1(r) - L_2(r) = \int_r^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$t = \tan\varphi$ とおくと，$t \to +0$ のとき，$\varphi \to +0$ に注意して

$$\lim_{r\to+0}(L_1(r) - L_2(r)) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

補足　不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt$ について，$t=\dfrac{1}{u}$ とおくと

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt &= \int\sqrt{1+u^2}\left(\frac{1}{u}\right)'du\\ &= \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}-\int\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}-\log(u+\sqrt{1+u^2})+C\end{aligned}$$

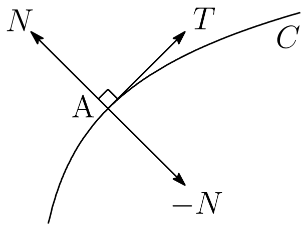
よって　$$\int\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt=\sqrt{1+t^2}-\log\left(\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)+C$$

これから，$L_1(r)$ および $L_2(r)$ を求めることもできるが，本題では不要．

発展　本題では曲線の曲率 κ が[1]，$|\kappa|<1$ となる曲線 $C: y=f(x)$ を設定している．

C の弧長

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$



を変数とし，C 上の点 X を $X(s)=(x(s),\ y(s))$ で定めると　$X'(s)=(x'(s),\ y'(s))$

$$s-s_0=\int_{s_0}^{s}|X'(s)|\,ds \qquad \left(|X'(s)|=\sqrt{\{x'(s)\}^2+\{y'(s)\}^2}\right)$$

これを s で微分することにより　$|X'(s)|=1$

$T=X'(s)$ とおくと，T は $\mathrm{A}(x(s),\ y(s))$ における C の単位接ベクトルである．

また，T を反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転されたベクトル

$$N=(-y'(s),\ x'(s)) \tag{6.1}$$

を単位法ベクトルという．

$|X'(s)|^2=1$ より　　$\{x'(s)\}^2+\{y'(s)\}^2=1 \quad \cdots(*)$

これを s で微分すると

$$2x'(s)x''(s)+2y'(s)y''(s)=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x''(s),\ y''(s))\perp T$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf $\boxed{3}$ を参照

したがって，実数 κ を用いて

$$(x''(s),\ y''(s)) = \kappa N = \kappa(-y'(s),\ x'(s)) \tag{6.2}$$

これと (∗) から　　$\kappa = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$

T の x 軸の正の向きとなす角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{y'(s)}{x'(s)}$

これを s で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{\{x'(s)\}^2}$$

ここで　　$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left\{\dfrac{y'(s)}{x'(s)}\right\}^2 = \dfrac{1}{\{x'(s)\}^2}$

よって　　$\kappa = \dfrac{d\theta}{ds} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$

また，(6.1) を s で微分すると，(6.2) に注意して

$$N' = (-y''(s),\ x''(s)) = (-\kappa x'(x), -\kappa y'(s)) = -\kappa T$$

本題において，点 A が $X(s)$ であるとき，点 B は $X(s) - N$ である．

$$\frac{d}{ds}(X(s) - N) = X'(s) - N' = T + \kappa T = (1+\kappa)T$$

曲線 $y = \log x$ の曲率 κ は

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$1+\kappa > 0$ であるから　$|(1+\kappa)T| = 1+\kappa$

$r \to +0$ のとき $\theta \to \dfrac{\pi}{2} - 0$，$x = 1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+0}(L_1(r) - L_2(r)) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \{1 - (1+\kappa)\}\,ds \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (-\kappa)\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

■

6　(1) △ACD と △BDC について

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD},\ \mathrm{AD} = \mathrm{BC},\ \mathrm{CD}\text{ は共通}$$

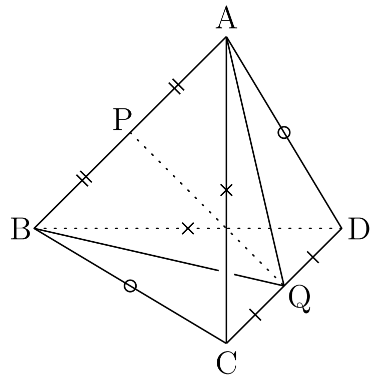
3 辺相等により　$\triangle\mathrm{ACD} \equiv \triangle\mathrm{BDC}$

したがって　$\angle\mathrm{ACQ} = \angle\mathrm{BDQ}$

△ACQ と △BDQ について，2 辺夾角相等により　$\triangle\mathrm{ACQ} \equiv \triangle\mathrm{BDQ}$

したがって　$\mathrm{AQ} = \mathrm{BQ}$

よって，PQ は二等辺三角形 ABQ の中線であるから　$\mathrm{AB} \perp \mathrm{PQ}$



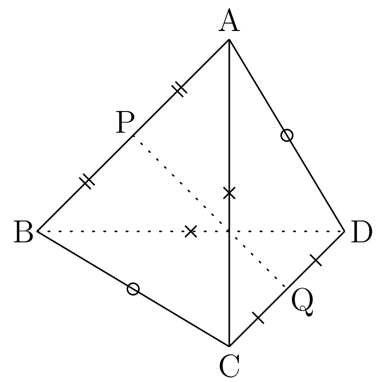
別解

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{0}$ に注意して，上の 2 式の辺々を加えて 2 倍すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}$$



したがって

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) + (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}})\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0\quad\text{よって}\quad\mathrm{AB}\perp\mathrm{PQ}$$

補足　同様にして

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} + (\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) + (\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}})\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0\quad\text{よって}\quad\mathrm{CD}\perp\mathrm{PQ}$$

(2) △ABC と △ABD について

$$AC = BD,\ BC = AD,\ AB \text{ は共通}$$

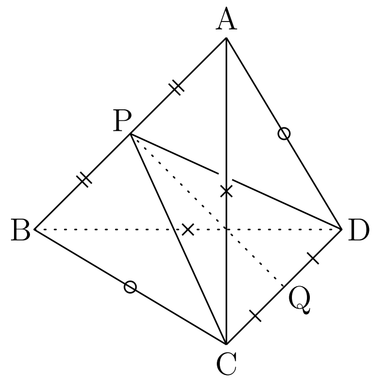
3 辺相等により　$\triangle ABC \equiv \triangle BAD$

したがって　$\angle CAP = \angle DBP$

△CAP と △DBP について，2 辺夾角相等により　$\triangle CAP \equiv \triangle DBP$

したがって　$CP = DP$

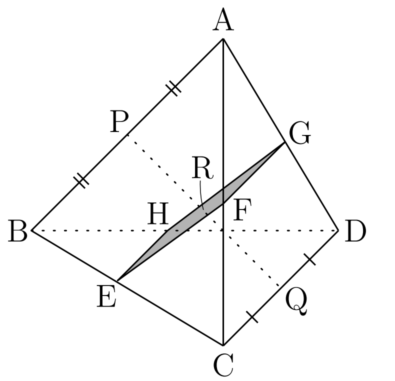
よって，PQ は二等辺三角形 CDP の中線であるから　$CD \perp PQ$

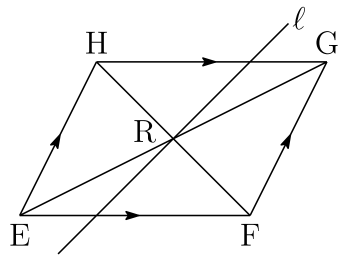


線分 PQ 上に点 R とり，R を通り線分 PQ に垂直な平面と辺 BC，AC，AD，BD との交点を，それぞれ，E，F，G，H とすると

$$BA /\!/ EF,\quad BA /\!/ HG,\quad CD /\!/ EH,\quad CD /\!/ FG$$

ゆえに　$EF /\!/ HG$，$EH /\!/ FG$　すなわち　四角形 EFGH は平行四辺形





PQ を含む平面 α と平行四辺形 EFGH との交線を ℓ とすると，ℓ によって平行四辺形 EFGH の面積は二等分される．

よって，α によって，四面体 ABCD の体積は二等分される．　■

6.5　2019 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 次の各問に答えよ．

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ．ただし，p が素数のとき，$\sqrt{p}$ が有理数でないことは証明なしに用いてよい．

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

2 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ とする．$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ．

3 鋭角三角形 ABC を考え，その面積を S とする．$0 < t < 1$ をみたす実数 t に対し，線分 AC を $t : 1-t$ に内分する点を Q，線分 BQ を $t : 1-t$ に内分する点を P とする．実数 t がこの範囲を動くときに点 P の描く曲線と，線分 BC によって囲まれる部分の面積を，S を用いて表せ．

4 1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，$X_2, \cdots, X_n$ とする．このとき次の条件をみたす確率を n を用いて表せ．ただし $X_0 = 0$ としておく．

条件：$1 \leqq k \leqq n$ をみたす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである．

5 半径 1 の球面上の 5 点 A，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{B_3}$，$\mathrm{B_4}$ は，正方形 $\mathrm{B_1B_2B_3B_4}$ を底面とする四角錐をなしている．この 5 点が球面上を動くとき，四角錐 $\mathrm{AB_1B_2B_3B_4}$ の体積の最大値を求めよ．

6 i は虚数単位とする．$(1+i)^n + (1-i)^n > 10^{10}$ をみたす最小の正の整数 n を求めよ．

常用対数表は次ページにある．

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している．

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3) = \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)$

$2\cos 2\theta - 1 \neq 0$ とすると，上式より

$$\cos\theta = \frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1}$$

$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ が有理数であるから，右辺は有理数で，左辺が無理数であることに反する．したがって

$$2\cos 2\theta - 1 = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して，これを解くと　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

実際　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}$，$\cos 3\theta = 0$　　よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$

(2) (i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)'\,dx = \Big[\, x\tan x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

$$= \frac{\pi}{4} + \Big[\, \log\cos x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[\, \log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \boldsymbol{\log(\sqrt{2}+1)}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ n と $n+1$ の一方は，偶数であるから，それを $2k$ とすると (k は整数)

$$f(2k) = (2k)^3 + 2(2k)^2 + 2 = 2(4k^3 + 4k^2 + 1)$$

$|f(2k)|$ が素数であるとき　　$4k^3 + 4k^2 + 1 = \pm 1$

ゆえに　$k^2(k+1) = 0$　または　$2k^2(k+1) + 1 = 0$　すなわち　$k = -1,\ 0$

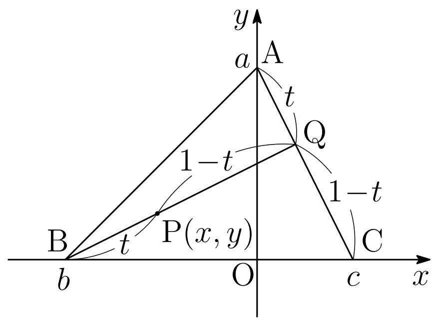
したがって，$k \leqq -2$，$1 \leqq k$ の場合は $|f(2k)|$ は合成数である．

これより，次を調べればよい．

n	-3	-2	-1	0	1
$\lvert f(n)\rvert$	7	2	3	2	5

よって　　$\boldsymbol{n = -3, -2, -1,\ 0}$　■

3 (1) 座標平面上に 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$ をとる $(a>0,\ b<0<c)$．
線分 AC を $t:1-t$ に内分する点 Q の位置ベクトルは



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

したがって，線分 BQ を $t:1-t$ に内分する点 P の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\\&=t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(c,\ 0)$ より

$$x=b(1-t)+ct^2,\quad y=at(1-t)$$

このとき

t	$0\longrightarrow 1$
x	$b\longrightarrow c$

$y\geqq 0$，$\dfrac{dx}{dt}=-b+2ct$

$S=\dfrac{1}{2}(c-b)a$ に注意すると，点 P と線分 BC で囲まれる部分の面積は，

$$\begin{aligned}\int_b^c y\,dx&=\int_0^1 y\frac{dx}{dt}\,dt=\int_0^1 at(1-t)(-b+2ct)\,dt\\&=-ab\int_0^1 t(1-t)\,dt+2ac\int_0^1 t^2(1-t)\,dt\\&=-ab\cdot\frac{1}{6}+2ac\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}(c-b)a\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(c-b)a=\boldsymbol{\frac{1}{3}S}\end{aligned}$$

■

4 連続して i 回 4 以下の事象を A_i，連続して j 回 5 以上の事象を B_j とすると，$A_iB_jA_k$ の順に起きる確率であるから $(i,k\geqq 0,\ j\geqq 1,\ i+j+k=n)$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,k\geqq 0,j\geqq 1,\\ i+j+k=n}}\left(\frac{2}{3}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^k&=\sum_{\substack{i\geqq 0,k\geqq 0,\\ i+k\leqq n-1}}\frac{2^{i+k}}{3^n}=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1}2^k\sum_{i=0}^{n-k-1}2^i\\&=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1}2^k(2^{n-k}-1)=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)\\&=\frac{1}{3^n}\{n\cdot 2^n-(2^n-1)\}=\boldsymbol{\frac{(n-1)\cdot 2^n+1}{3^n}}\end{aligned}$$

■

5 原点 O を中心とする球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上に 4 点 $(\pm a, \pm a,\ b)$ および点 $(0,\ 0,\ 1)$ の 5 点を頂点とする四角錐の体積 V とすると $(a>0)$

$$2a^2+b^2=1,\quad V=\frac{1}{3}(2a)^2(1-b)=\frac{4}{3}a^2(1-b)$$

a を消去すると　$V=\dfrac{2}{3}(1-b^2)(1-b)=\dfrac{2}{3}(1+b)(1-b)^2\quad\cdots①$

$-1<b<1$ であるから，3 正数 $2(1+b)$，$1-b$，$1-b$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2(1+b)+(1-b)+(1-b)}{3}\geqq\sqrt[3]{2(1+b)(1-b)^2}$$

したがって　　$(1+b)(1-b)^2\leqq\dfrac{32}{27}\quad\cdots②$

② で等号が成立するとき　$2(1+b)=1-b$　すなわち　$b=-\dfrac{1}{3}$

①，② より　$V\leqq\dfrac{64}{81}$　　よって，最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$　■

6 $1\pm i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\pm i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ より (復号同順)

$$\begin{aligned}(1+i)^n+(1-i)^n&=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\&=2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}>10^{10}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

$\cos\dfrac{n\pi}{4}>0$ を満たす n は　$n\equiv 0,\ \pm 1\pmod 8$

(i) $n=8k$ のとき，$(*)$ は　$2(\sqrt{2})^{8k}>10^{10}$　ゆえに　$2^{4k+1}>10^{10}$

$$4k+1>\frac{10}{\log_{10}2}\quad ゆえに\quad k>\frac{5}{\log_{10}4}-0.25$$

(ii) $n=8k\pm1$ のとき，$(*)$ は　$2(\sqrt{2})^{8k\pm1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}>10^{10}$　ゆえに　$2^{\frac{8k+1\pm1}{2}}>10^{10}$

$$\frac{8k+1\pm1}{2}>\frac{10}{\log_{10}2}\quad ゆえに\quad k>\frac{5}{\log_{10}4}-\frac{1\pm1}{8}$$

常用対数表により，$0.60205\leqq\log_{10}4<0.60215$ であるから，(i)，(ii) において

$$\frac{5}{\log_{10}4}>\frac{5}{0.60215}>8.3,\quad 0\geqq-\frac{1\pm1}{8}\geqq-0.25\quad ゆえに\quad k\geqq 9$$

したがって，$n\geqq 8\cdot 9-1=71$　よって，求める最小の整数 n は　**71**　■

6.6　2020 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 a，b は実数で，$a>0$ とする．z に関する方程式

$$z^3+3az^2+bz+1=0 \qquad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち，それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする．このとき，a，b と $(*)$ の 3 つの解を求めよ．

2 p を正の整数とする．α，β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ．

3 k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A，B，C，D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k.$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

4 正の整数 a に対して，

$$a = 3^b c \quad (b,\ c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき，$B(a) = b$ と定める．例えば，$B(3^2 \cdot 5) = 2$ である．
m，n は整数で，次の条件を満たすとする．

(i) $1 \leqq m \leqq 30$.

(ii) $1 \leqq n \leqq 30$.

(iii) n は 3 で割り切れない．

このような $(m,\ n)$ について

$$f(m,\ n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき，

$$A(m,\ n) = B(f(m,\ n))$$

の最大値を求めよ．また，$A(m,\ n)$ の最大値を与えるような $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

5 縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

6 x，y，z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする．この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする．このとき，V の体積を求めよ．

解答例

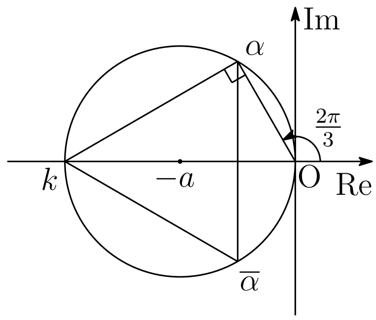
1 3 次方程式 $z^3+3az^2+bz+1=0$ は実数を係数とするから，その解を α, $\overline{\alpha}$, k とすると (k は実数)，解と係数の関係により

$$\alpha+\overline{\alpha}+k=-3a,\quad \alpha\overline{\alpha}+k\alpha+k\overline{\alpha}=b,\quad \alpha\overline{\alpha}k=|\alpha|^2k=-1 \qquad \cdots(**)$$

上の第 1 式から　$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+k}{3}=-a$　ゆえに　正三角形の重心 (外心) は　$-a$

正三角形の一辺の長さが $\sqrt{3}a$ であるから，外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\frac{\sqrt{3}a}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R \quad ゆえに \quad R=a$$



三角形の 3 頂点の 1 つは実軸上で，他の 2 頂点は，実軸に対して対称である．実数解 k は中心 $-a$，半径 a の円周上にあり，$(**)$ の第 3 式に注意すると，$k\neq 0$ であるから

$$k=-2a$$

右の図から，$|\alpha-0|=a$ より，$|\alpha|=a$．これらを $(**)$ の第 3 式に代入すると

$$a^2\cdot(-2a)=-1 \quad ゆえに \quad a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad k=-2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{4}$$

$$\arg\alpha=\frac{2\pi}{3} \text{ より}\quad \alpha=a\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$\overline{\alpha}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$(**)$ の第 2 式から　$b=|\alpha|^2+k(\alpha+\overline{\alpha})$
$$=a^2+(-2a)(-a)=3a^2=3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\ b=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}}$　解は　$\boldsymbol{-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$ ■

2 (1) 方程式 $x^2-2px-1=0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2p,\quad \alpha\beta=-1$$

また　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2=2(2p^2+1)$

$q_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくと，p は整数であるから，q_1，q_2 は偶数である．

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$ であるから

$$q_{n+2}=2pq_{n+1}+q_n \qquad \cdots(*)$$

q_1，q_2 は偶数の整数であるから，$(*)$ より，$\{q_n\}$ は整数である．
さらに，法 2 について

$$q_{n+2}\equiv q_n \pmod 2$$

したがって，$\{q_n\}$ は偶数，すなわち，$\alpha^n+\beta^n$ は偶数である．

(2) $\alpha\beta=-1$，$|\alpha|>1$ より，$0<|\beta|=\dfrac{1}{|\alpha|}<1$．(1) の結果を用いて

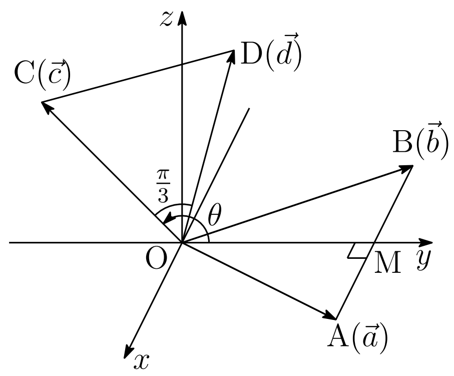
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n\sin\{(\alpha^n+\beta^n)\pi-\beta^n\pi\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(-\beta^n\pi)}{\beta^n}=\lim_{n\to\infty}(-\pi)\cdot\frac{\sin\beta^n\pi}{\beta^n\pi}=\boldsymbol{-\pi}\end{aligned}$$

■

3 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$

とおくと $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{d} = \frac{1}{2}$$



$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2$$
$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 1,$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2 = |\vec{d} - \vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{d} + |\vec{c}|^2$$
$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 1$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}| = 1$ より，△OAB，△OCD は，正三角形である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

A，B を xy 平面上の点とすると，C，D は yz 平面上の点である．

辺 AB の中点を M とすると，$\mathrm{OM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は $\dfrac{3\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の内積は $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{d} = \dfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d}) = k > 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は，鋭角であるから $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{12}$

よって $k = \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = |\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}}$

別解 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく．

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ より，2 つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ は垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ より

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2\pm 1 \quad (\text{複号同順})$$

直交する 2 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$ を次のようにおく．

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \vec{f}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\vec{a}-\vec{b}$$

$\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}-(\vec{c}\cdot\vec{f})\vec{f}$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ より

$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\vec{e}&=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \vec{c}\cdot\vec{f}&=\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\end{aligned}$$

したがって，ベクトル $\vec{c}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．

$$\left|\sqrt{2}\vec{c}+\vec{e}\right|^2=2|\vec{c}|^2+2\sqrt{2}\,\vec{c}\cdot\vec{e}+|\vec{e}|^2=2+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1=1$$

$\vec{g}=\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e}$ とおくと，3 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$，$\vec{g}$ は互いに直交する．

$$\begin{aligned}&\vec{d}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{d}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{\sqrt{3}}k,\quad \vec{d}\cdot\vec{f}=\vec{d}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\\ &\vec{d}\cdot\vec{g}=\vec{d}\cdot(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}k\end{aligned}$$

$\vec{d}=(\vec{d}\cdot\vec{e})\vec{e}+(\vec{d}\cdot\vec{f})\vec{f}+(\vec{d}\cdot\vec{g})\vec{g}$ より　$\vec{d}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\vec{e}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)\vec{g}$

$|\vec{d}|^2=1$ であるから　$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2=1$

整理すると　$8k^2+2\sqrt{6}k-\dfrac{3}{2}=0$　これを解いて　$k=\dfrac{-\sqrt{6}\pm 3\sqrt{2}}{8}$

条件より，$k>0$ であるから　$\boldsymbol{k=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$ ■

$\boxed{4}$ 法 3 について　$m \equiv 0 \Longrightarrow m^3 \equiv 0$,　$m \equiv \pm 1 \Longrightarrow m^3 \equiv \pm 1$　(複号同順)

したがって　$m^3 \equiv 0 \Longleftrightarrow m \equiv 0$,　$m^3 \equiv \pm 1 \Longleftrightarrow m \equiv \pm 1$　(複号同順)

条件より，n は 3 で割り切れないから　$n \equiv \pm 1 \pmod 3$

- $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$n^2+n+3 \equiv 2 \pmod 3$ である．

$$(*)\quad f(m,\ n) = m^3+n^2+n+3$$

$(*)$ が 3 で割りれるとき　$m^3 \equiv 1$　すなわち　$m \equiv 1 \pmod 3$

$$f(m,\ n) = (m-1)^3+3(m-1)^2+3(m-1)+(n-1)^2+3(n-1)+6$$

$(m-1)^3$，$3(m-1)^2$ は 27 で割り切れ，$3(m-1)$，$(n-1)^2$，$3(n-1)$ は 9 で割り切れる．このとき，$f(m,\ n)$ は 3 で割り切れるが，3^2 では割り切れない．

- $n \equiv -1 \pmod 3$ のとき，$n^2+n+3 \equiv 0 \pmod 3$ である．

$(*)$ が 3 で割り切れるとき　$m^3 \equiv 0$　すなわち　$m \equiv 0 \pmod 3$

$(*)$ より　$f(m,\ n) = m^3+(n+1)^2-(n+1)+3 \quad \cdots ①$

m^3 は 27 で割り切れ，$(n+1)^2$ は 9 で割り切れる．① が 9 で割り切れるとき

$$-(n+1)+3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n+1 \equiv 3 \pmod 9$$

$n+1 = 9N+3 \cdots ②$ とおくと (k は整数)

$$\begin{aligned} f(m,\ n) &= m^3+(9N+3)^2-(9N+3)+3 \\ &= m^3+81N^2+9(5N+1) \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

m^3 は 27 で割り切れ，$81N^2$ は 81 で割り切れるから，③ が 27 で割り切れるとき

$$5N+1 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad N \equiv 1 \pmod 3$$

これと ② を $1 \leqq n \leqq 30$ に適用すると　$N=1$，$n=11$

$m=3M$ とおくと (M は整数)，③ は

$$f(m,\ n) = 27M^3+135 = 27(M^3+5)$$

$M^3+5 \equiv 0$，すなわち，$M \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$A(m,\ n)$ は最大値 **4** をとる．
このとき，$\boldsymbol{(m,\ n) = (3,\ 11),\ (12,\ 11),\ (21,\ 11),\ (30,\ 11)}$ ■

5 1 行目に A，B，C，D を固定し，本題の条件を満たすように，2 行目〜4 行目を並べたとき，行ごと入れ替えても，条件は満たされる．そこで，第 2 行第 1 列目から第 4 行第 1 列目までを上から順に，B，C，D とすると，第 2 行第 2 列に配置する文字 X (X = A，C，D) の場合に分けてその総数を求める．

A	B	C	D
2 行 目			
3 行 目			
4 行 目			

A	B	C	D
B	**X**		
C			
D			

第 2 行第 2 列に配置される A，C，D の場合の数は，それぞれ，2, 1, 1 通りある．

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

A	B	C	D
B	**C**	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

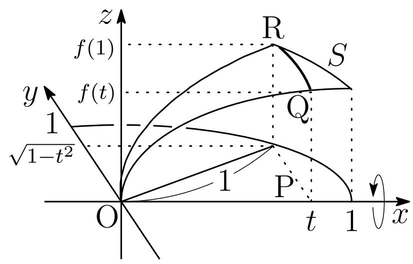
A	B	C	D
B	**D**	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

1，2，3，4 を A，B，C，D に 1 対 1 に対応させる (全単射) 場合の数は 4! 通り．
2 行目〜4 行目までの入れ替えの総数は 3! 通り．これと場合分けの総数により

$$4! \times 3! \times (2 + 1 + 1) = \mathbf{576}\ (\text{通り})$$

■

6 $f(x) = \sqrt{\log(1+x)}\ (0 \leqq x \leqq 1)$ とおく．
S の平面 $x=t$ 上に 3 点



$$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{Q}(t,\ 0,\ f(t)),$$
$$\mathrm{R}(t,\ \sqrt{1-t^2},\ f(1))$$

をとると

$$\begin{aligned}\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2 &= \{(\sqrt{1-t^2})^2 + f(1)^2\} - f(t)^2 \\ &= 1 - t^2 + \log 2 - \log(1+t)\end{aligned}$$

求める立体の体積 V は，yz 平面に関して対称であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_0^1 (\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2)\,dt \\ &= \int_0^1 \{1 - t^2 + \log 2 - \log(1+t)\}\,dt \\ &= \left[2t - \frac{t^3}{3} + t\log 2 - (1+t)\log(1+t)\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3} - \log 2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = 2\pi\left(\dfrac{5}{3} - \log 2\right)}$ ■

6.7　2021 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 次の各問に答えよ．

(1) xyz 空間の 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, −1, 0)，C(0, 0, 2) を通る平面 α に関して点 P(1, 1, 1) と対称な点 Q の座標を求めよ．ただし，点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは，線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり，直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである．

(2) 赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある．よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す．この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ．ただし n は 4 以上の整数とする．

2 曲線 $y = \dfrac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし，その交点を Q とおく．線分 PQ の長さを L とするとき，L が取りうる値の最小値を求めよ．

3 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ．

4 曲線 $y = \log(1+\cos x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ．

5 xy 平面において，2 点 B$(-\sqrt{3}, -1)$，C$(\sqrt{3}, -1)$ に対し，点 A は次の条件 $(*)$ を満たすとする．

$(*)$ $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正．

次の各問に答えよ．

(1) △ABC の外心の座標を求めよ．

(2) 点 A が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，△ABC の垂心の軌跡を求めよ．

6 次の各問に答えよ．

(1) n を 2 以上の整数とする．$3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数であることを示せ．

(2) a を 1 より大きい定数とする．微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a) = af(1)$ を満たすとき，曲線 $y = f(x)$ の接線で原点 (0, 0) を通るものが存在することを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0, -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面 α の方程式は

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha : 2x-2y+z=2$$

α の法線ベクトルを $\vec{n}=(2, -2,\ 1)$ とし，PQ の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=k\vec{n} \quad (k \text{ は定数}) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\vec{n}$$

M の座標を $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とおくと

$$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(1, 1, 1)+k(2, -2,\ 1)=(1+2k,\ 1-2k,\ 1+k)$$

M は平面 α 上の点であるから

$$2(1+2k)-2(1-2k)+1+k=2 \quad \text{これを解いて} \quad k=\frac{1}{9}$$

P と Q は平面 α に関して対称であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=2k\vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2k\vec{n}=(1, 1, 1)+\frac{2}{9}(2, -2,\ 1)=\left(\frac{13}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{11}{9}\right)$$

よって　　$\mathbf{Q}\left(\mathbf{\frac{13}{9}},\ \mathbf{\frac{5}{9}},\ \mathbf{\frac{11}{9}}\right)$

(2) $n-1$ 回目まで赤玉以外の 1 色である場合の数は　3 (通り)
$n-1$ 回目まで赤玉以外の 2 色である場合の数は

$$_3\mathrm{C}_2(2^{n-1}-2)=3(2^{n-1}-2) \ \text{(通り)}$$

$n-1$ 回目まで赤玉以外の 3 色である場合の数は

$$3^{n-1}-3(2^{n-1}-2)-3=3^{n-1}-3{\cdot}2^{n-1}+3$$

よって，求める確率は

$$\frac{3^{n-1}-3{\cdot}2^{n-1}+3}{4^{n-1}}\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3^{n-1}-3{\cdot}2^{n-1}+3}{4^n}}$$

■

2 $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ を微分すると　$y'=x$

曲線 $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}(t^2+1)\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}(t^2+1)=t\,(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=tx+\frac{1}{2}(1-t^2)$$

$t\neq 0$ のとき，この接線は x 軸と交点 Q があり，その x 座標は

$$0=tx+\frac{1}{2}(1-t^2)\quad \text{これを解いて}\quad x=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}$$

$\mathrm{Q}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2t},\ 0\right)$ であるから，PQ の長さ L は

$$\begin{aligned}L^2&=\left\{\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}\right)-t\right\}^2+\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{4}(t^2+1)^2\\&=\frac{1}{4}\left(t^4+3t^2+3+\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

$s=t^2$，$f(s)=L^2$ とおくと $(s>0)$

$$\begin{aligned}f(s)&=\frac{1}{4}\left(s^2+3s+3+\frac{1}{s}\right),\\f'(s)&=\frac{1}{4}\left(2s+3-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{4s^2}(2s^3+3s^2-1)\\&=\frac{1}{4s^2}(s+1)^2(2s-1)\end{aligned}$$

したがって，$f(s)$ の増減表は

s	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(s)$		$-$	0	$+$
$f(s)$		$\searrow$	$\frac{27}{16}$	$\nearrow$

よって，$s=\frac{1}{2}$，すなわち，$t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，L は最小値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ をとる．■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right) = 0$$

$z \neq 1$ より　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$　ゆえに　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$　$\cdots(*)$

$z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{1}{4}(\sqrt{3} + i)$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{4}{4-4z} = \frac{4}{4-\sqrt{3}-i} \\ &= \frac{4(4-\sqrt{3}+i)}{(4-\sqrt{3})^2+1} = \frac{4-\sqrt{3}+i}{5-2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(4-\sqrt{3})(5+2\sqrt{3}) + (5+2\sqrt{3})i}{13} \\ &= \frac{14+3\sqrt{3}}{13} + \frac{5+2\sqrt{3}}{13}i\end{aligned}$$

$(*)$ の実部を比較すると　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{14+3\sqrt{3}}{13}}$

補足　$(*)$ の虚部を比較すると　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{6} = \frac{5+2\sqrt{3}}{13}$　■

$\boxed{4}$ $y = \log(1+\cos x)$ より $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$$\begin{aligned}1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1+\left(-\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2\\ &= \frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{2}{1+\cos x} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

求める弧長を L とすると

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos\frac{x}{2}}$$

$t = \sin\dfrac{x}{2}$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

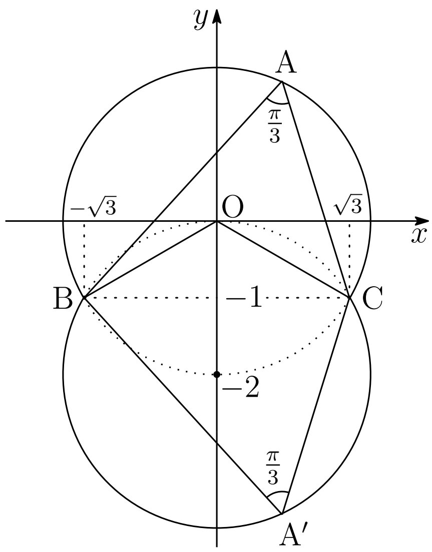
したがって

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt\\ &= \left[\ \log\frac{1+t}{1-t}\ \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \mathbf{2\log(\sqrt{2}+1)}\end{aligned}$$

■

5 (1) $\mathrm{B}(-\sqrt{3}, -1)$，$\mathrm{C}(\sqrt{3}, -1)$ より

$$\mathrm{BC} = 2\sqrt{3}$$



△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

△ABC の外心を O とすると，O は BC の垂直二等分線，すなわち，y 軸にあるから，その座標を $(0,\ k)$ とすると

$\sqrt{3 + (k+1)^2} = 2$　ゆえに　$k = 0, -2$

これらの k について，$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ となるのは，A が図の円周上の実線部分にあるときで，その A の y 座標が正であるから

$$k = 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{O(0,\ 0)}$$

(2) (1) の結果から，A は O を中心とする半径 2 の円周上の y 座標が正である点であるから，A の座標を次のように定める．

$$\mathrm{A}(s,\ t), \quad s^2 + t^2 = 4, \quad t > 0 \qquad (*)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 0$$

上の結果から，H は △ABC の垂心で，$\mathrm{H}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t-2 \end{pmatrix}$$

$s = x$，$t = y + 2$ を $(*)$ に代入すると

$$x^2 + (y+2)^2 = 4, \quad y + 2 > 0$$

求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{x^2 + (y+2)^2 = 4,\ \ y > -2}$

補足 外心 O，重心 G，垂心 H は同一直線 (オイラー線) 上にあり[2]，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$.

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2020.pdf $\boxed{4}$

$\boxed{6}$ (1) $n = pq$ とすると ($p,\ q$ は 1 以外の自然数)

$$3^n - 2^n = (3^p)^q - (2^p)^q = (3^p - 2^p)\sum_{k=1}^{q}(3^p)^{q-k}(2^p)^{k-1}$$

このとき，$3^p - 2^p > 1$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{q}(3^p)^{q-k}(2^p)^{k-1} > 1$ であるから

$$3^n - 2^n$$

は合成数であるから，$3^n - 2^n$ が素数ならば，n は素数である．

(2) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ とおくと　$g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$f(a) = af(1)$ より　$\dfrac{f(1)}{1} = \dfrac{f(a)}{a}$　ゆえに　$g(1) = g(a)$

平均値の定理により，次式を満たす c $(1 < c < a)$ が存在する

$$g'(c) = 0 \quad \text{すなわち} \quad cf'(c) - f(c) = 0$$

したがって，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(c,\ f(c))$ における接線の方程式は

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \quad \text{すなわち} \quad y = f'(c)x$$

よって，この接線は原点 $(0,\ 0)$ を通る．■

6.8 2022年(150分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5] [6]

1 $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

2 箱の中に1からnまでの番号がついたn枚の札がある．ただし$n \geqq 5$とし，同じ番号の札はないとする．この箱から3枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順にX, Y, Zとする．このとき，$Y - X \geqq 2$かつ$Z - Y \geqq 2$となる確率を求めよ．

3 nを自然数とする．3つの整数n^2+2，n^4+2，n^6+2の最大公約数A_nを求めよ．

4 四面体OABCが

$$\mathrm{OA} = 4, \quad \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 3, \quad \mathrm{OC} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．Pを辺BC上の点とし，△OAPの重心をGとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) Pが辺BC上を動くとき，PGの最小値を求めよ．

5 曲線 $C : y = \cos^3 x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$軸および$y$軸で囲まれる図形の面積を$S$とする．$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C上の点$\mathrm{Q}(t,\ \cos^3 t)$と原点O，および$\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ \cos^3 t)$を頂点にもつ長方形OPQRの面積を$f(t)$とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) Sを求めよ．

(2) $f(t)$は最大値をただ1つのtでとることを示せ．そのときのtをαとすると，$f(\alpha) = \dfrac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S} < \dfrac{9}{16}$ を示せ．

6 数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$を次の式

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$y_{3m+1} = 3m, \quad y_{3m+2} = 3m+2, \quad y_{3m+3} = 3m+4 \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

により定める．このとき，数列$\{x_n - y_n\}$の一般項を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2000 < 2022 < 2048$ より

$$\log_4 2022 < \log_4 2048 = \log_4 2^{11} = 5.5,$$
$$\log_4 2022 > \log_4 2000 = \frac{\log_{10} 2000}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2 + 3}{2\log_{10} 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\log_{10} 2}$$
$$> \frac{1}{2} + \frac{3}{2{\cdot}0.3011} = 0.5 + 4.98\cdots > 5.4$$

よって　　$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ n 枚から 3 枚取り出す場合の総数は

$$_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad \text{(通り)}$$

$n-2$ 個の石を横 1 列に並べ，その中から 3 つ選び，選んだ 3 つの石を左から X, Y, Z とする．このとき，X と Y および Y と Z の間にそれぞれ石を 1 個ずつ追加する操作を考える．これら n 個並んだ石の配置について，X, Y, Z を左から数えた順番とすればよいから，その場合の総数は

$$_{n-2}\mathrm{C}_3 = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} \quad \text{(通り)}$$

よって，求める確率は

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} \Bigg/ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}}$$

■

3 2 つの正の整数 $X,\ Y$ の最大公約数を $(X,\ Y)$ と表記することにする．

$$n^4+2=(n^2+2)(n^2-2)+6,$$
$$n^6+2=(n^2+2)(n^4-2n^2+4)-6$$

ユークリッドの互除法により

$$(n^4+2,\ n^2+2)=(n^2+2,\ 6),$$
$$(n^6+2,\ n^2+2)=(n^2+2,\ 6)$$

したがって，3 つの整数 $n^2+2,\ n^4+2,\ n^6+2$ の最大公約数 A_n は，

$$A_n=(n^2+2,\ 6)$$

$A_n\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ となるから，法 6 について

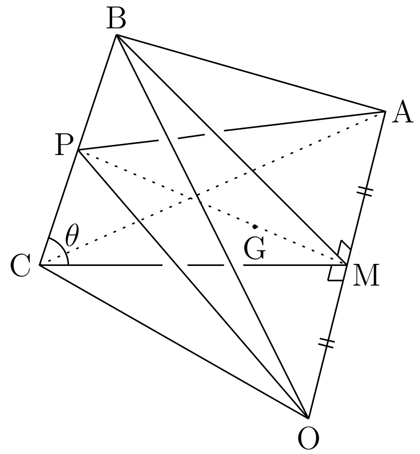
$$\begin{array}{llll} n\equiv 0 \text{ のとき} & n^2+2\equiv 2 & \text{ゆえに} & A_n=2 \pmod 6 \\ n\equiv \pm 1 \text{ のとき} & n^2+2\equiv 3 & \text{ゆえに} & A_n=3 \pmod 6 \\ n\equiv \pm 2 \text{ のとき} & n^2+2\equiv 0 & \text{ゆえに} & A_n=6 \pmod 6 \\ n\equiv 3 \text{ のとき} & n^2+2\equiv 5 & \text{ゆえに} & A_n=1 \pmod 6 \end{array}$$

よって　$$\boldsymbol{A_n=\begin{cases} 2 & (n\equiv 0) \\ 3 & (n\equiv \pm 1) \\ 6 & (n\equiv \pm 2) \\ 1 & (n\equiv 3) \end{cases} \pmod 6}$$ ■

4 (1) OA の中点を M とすると，G は線分 PM を $2:1$ に内分する点で，2 点 P, G は平面 MBC 上の点である．このとき，$\mathrm{BO}=\mathrm{AB}$，$\mathrm{OC}=\mathrm{AC}$ より

$$\triangle\mathrm{ABM}\equiv\triangle\mathrm{OBM},\quad \triangle\mathrm{ACM}\equiv\triangle\mathrm{OCM}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{MB}\perp\mathrm{OA},\ \ \mathrm{MC}\perp\mathrm{OA}$$

したがって　平面 $\mathrm{MBC}\perp\mathrm{OA}$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$



(2) (1) の結果から

$$\mathrm{MB}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$
$$\mathrm{CM}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$$

$\theta=\angle\mathrm{BCM}$ とおき，$\triangle\mathrm{BCM}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CM}^2-\mathrm{MB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CM}}=\frac{9+8-5}{2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

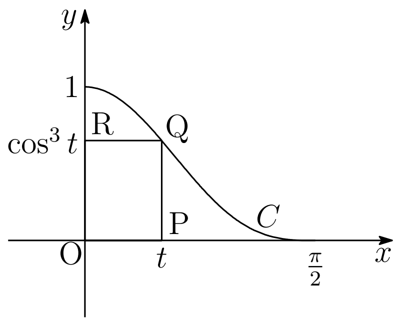
これから　　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

PG が最小となるとき，$\mathrm{MP}\perp\mathrm{BC}$ であるから，求める最小値は

$$\frac{2}{3}\mathrm{MP}=\frac{2}{3}\mathrm{CM}\sin\theta=\frac{2}{3}\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

■

5 (1) 求める面積 S は



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$= \left[\,\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(2) $f(t) = t\cos^3 t$ であるから，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において

$$f'(t) = \cos^3 t + t{\cdot}3\cos^2 t(-\sin t) = \cos^3 t(1 - 3t\tan t)$$

$g(t) = 1 - 3t\tan t \ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$g(t)$ は単調減少で

$$g(0) = 1, \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} = -\infty$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において，$g(t) = 0$ をみたす $t = \alpha$ がただ1つ存在する．
$f'(t) = g(t)\cos^3 t$ より，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$g(\alpha) = 0$ より　$1 - 3\alpha\tan\alpha = 0$　ゆえに　$\alpha = \dfrac{1}{3\tan\alpha}$

したがって　$f(\alpha) = \alpha\cos^3\alpha = \dfrac{1}{3\tan\alpha}{\cdot}\cos^3\alpha = \dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$

(3) $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 - 3{\cdot}\dfrac{\pi}{6}\tan\dfrac{\pi}{6} = 1 - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}} > 0$ より　$\dfrac{\pi}{6} < \alpha$

関数 $\dfrac{\cos^4 t}{3\sin t}\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は単調減少であるから

$$\frac{\cos^4\frac{\pi}{6}}{3\sin\frac{\pi}{6}} > \frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{8} > f(\alpha)$$

上の第2式および (1) の結果から

$$\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{3}{8}\Big/\frac{2}{3} = \frac{9}{16}$$

■

6　「0 以上のすべての整数 m について，x_{3m+1}，x_{3m+2}，x_{3m+3} は

$$x_{3m+1} \equiv 0, \quad x_{3m+2} \equiv 0, \quad x_{3m+3} \equiv 1 \pmod 3$$

を満たす整数である」を (A) とする．

［1］$m = 0$ のとき

$$x_1 = 0,\ x_2 = x_1 + 1 + 2\cos\frac{2\pi x_1}{3} = 3,\ x_3 = x_2 + 2 + 2\cos\frac{2\pi x_2}{3} = 7$$

したがって，$m = 0$ のとき (A) は成立する．

［2］$m = k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると　$x_{3k+3} \equiv 1 \pmod 3$

$$\begin{aligned} x_{3k+4} &= x_{3k+3} + 3k + 3 + 2\cos\frac{2\pi x_{3k+3}}{3} \equiv 0 \pmod 3 \\ x_{3k+5} &= x_{3k+4} + 3k + 4 + 2\cos\frac{2\pi x_{3k+4}}{3} \equiv 0 \pmod 3 \\ x_{3k+6} &= x_{3k+5} + 3k + 5 + 2\cos\frac{2\pi x_{3k+5}}{3} \equiv 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

したがって，$m = k + 1$ のときも (A) は成立する．

［1］,［2］より，すべての 0 以上の整数 m について (A) が成立する．

(A) の結論から

$$x_{n+1} - x_n - n = 2\cos\frac{2\pi x_n}{3} = \begin{cases} 2 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases} \qquad (*)$$

$y_{3m+1} = 3m$,　$y_{3m+2} = 3m + 2$,　$y_{3m+3} = 3m + 4$　　$(m = 0, 1, 2, \cdots)$ により

$$y_{n+1} - y_n = \begin{cases} 2 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$x_{n+1} - x_n - n = y_{n+1} - y_n$　ゆえに　$x_{n+1} - y_{n+1} - (x_n - y_n) = n$

$x_1 = y_1 = 0$ より，$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{x_{k+1} - y_{k+1} - (x_k - y_k)\} = \sum_{k=1}^{n-1} k$

$n = 1$ のときも成立することに注意して　　$\boldsymbol{x_n - y_n = \dfrac{1}{2}n(n-1)}$

補足 $\left\{\cos\dfrac{2n\pi}{3}\right\}$ の周期性に注目すると

$$2\cos\frac{2n\pi}{3}=\begin{cases}-1 & (n\equiv 1 \pmod 3)\\ -1 & (n\equiv 2 \pmod 3)\\ 2 & (n\equiv 0 \pmod 3)\end{cases}$$

上式および $(*)$，$(**)$ の右辺に注目して

$$a_n=1-2\cos\frac{2n\pi}{3}=\begin{cases}2 & (n\equiv 1 \pmod 3)\\ 2 & (n\equiv 2 \pmod 3)\\ -1 & (n\equiv 0 \pmod 3)\end{cases}$$

とおくと，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}a_k&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-2\cos\frac{2k\pi}{3}\right)\\&=n-1-\frac{4}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\\&=n-1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{2k-1}{3}\pi-\sin\frac{2k+1}{3}\pi\right)\\&=n-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n-1}{3}\pi\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ および $x_1=y_1=0$ より

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k-k)=\sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1}-y_k)=\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$

したがって　　$x_n-\dfrac{1}{2}n(n-1)=y_n=n-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2n-1}{3}\pi$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n-1}{3}\pi,\\y_n&=n-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n-1}{3}\pi\end{aligned}$$

■

6.9 2023年 (150分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 次の各問に答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx$ の値を求めよ．

(2) 整式 $x^{2023}-1$ を整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ．

2 空間内の4点O，A，B，Cは同一平面上にないとする．点D，P，Qを次のように定める．点Dは $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点Pは線分OAを $1:2$ に内分し，点Qは線分OBの中点である．さらに，直線OD上の点Rを，直線QRと直線PCが交点を持つように定める．このとき，線分ORの長さと線分RDの長さの比 OR : RD を求めよ．

3 n を自然数とする．1個のさいころを n 回投げ，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とし，n 個の数の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を Y とする．

(1) Y が5で割り切れる確率を求めよ．

(2) Y が15で割り切れる確率を求めよ．

4 次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{1}{e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ただし，e は自然対数の底であり，その値は $e = 2.71\cdots$ である．

5 O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている．

(a) 点 P は x 軸上にある．

(b) 点 Q は yz 平面上にある．

(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である．

点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ．

6 p を 3 以上の素数とする．また，θ を実数とする．

(1) $\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ．

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 m，n が存在するか否かを理由を付けて判定せよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx &= \frac{4}{3}\int_1^4 (x^{\frac{3}{2}})'\log x\,dx \\ &= \frac{4}{3}\Big[\,x^{\frac{3}{2}}\log x\,\Big]_1^4 - \frac{4}{3}\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{64}{3}\log 2 - \frac{8}{9}\Big[\,x^{\frac{3}{2}}\,\Big]_1^4 = \boldsymbol{\frac{64}{3}\log 2 - \frac{56}{9}}\end{aligned}$$

(2) $x^4+x^3+x^2+x+1$ に関する合同式を考えると

$$x^4+x^3+x^2+x+1 \equiv 0$$

したがって　　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\equiv 0$

$x^5\equiv 1$ であるから　　$x^{2023}-1=(x^5)^{404}x^3-1\equiv x^3-1$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{x^3-1}$

■

2 R は直線 OD 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

直線 QR 上の点の位置ベクトルは，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-t)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + tk(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= 3tk\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left\{\frac{1}{2}(1-t) + 2tk\right\}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3tk\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

これが直線 PC 上の点で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が 1 次独立および $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から

$$3tk + 3tk = 1, \quad \frac{1}{2}(1-t) + 2tk = 0$$

これを解いて　$t = \frac{5}{3}$, $k = \frac{1}{10}$　　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

よって　**OR : RD = 1 : 9**

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{10}$$

$(*)$ $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると，R は平面 PQC 上の点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{10}(\overrightarrow{\mathrm{QP}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}}}{2}$$

確かに，直線 QR は線分 PC の中点を通る．$(*)$ より　**OR : RD = 1 : 9**　■

3 (1) Y が 5 で割り切れる事象を A とすると　$P(\overline{A}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

求める確率は　$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \boldsymbol{1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n}$

(2) Y が 3 で割り切れる事象を B とすると

$$P(\overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad P(\overline{A \cup B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\} \\ &= 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A \cup B}) \\ &= \boldsymbol{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

■

4 $f(x)$ の最大値と最小値は，関数

$$F(t)=e^{-t}+\frac{1}{4}t+1+\frac{1}{e^{-t}+\frac{1}{4}t+1}\qquad(0\leqq t\leqq 1)$$

の最大値と最小値に等しい．$p(u)=u+\dfrac{1}{u}$，$q(t)=e^{-t}+\dfrac{1}{4}t+1$ とおくと

$$F(t)=p(u),\quad u=q(t)\quad(0\leqq t\leqq 1)$$

$q(t)$ を微分すると　$q'(t)=-e^{-t}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{-4+e^t}{4e^t}<0\quad(0<t<1)$

$q(t)$ は単調減少であるから

$$q(1)\leqq q(t)\leqq q(0)\quad\text{すなわち}\quad\frac{1}{e}+\frac{5}{4}\leqq u\leqq 2\quad\cdots①$$

$p(u)$ を微分すると　$p'(u)=1-\dfrac{1}{u^2}$

① において，$p(u)$ は単調増加である．

よって　最大値　$p(2)=2+\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

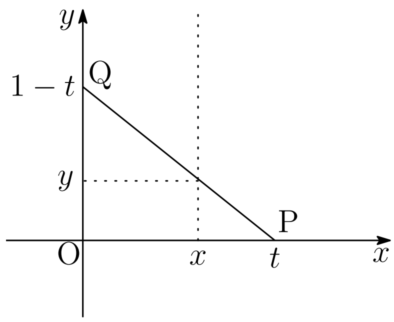
最小値　$p\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{5e+4}{4e}+\dfrac{4e}{5e+4}=\boldsymbol{\dfrac{41e^2+40e+16}{4e(5e+4)}}$

■

5 P$(t,\ 0)$，Q$(0,\ 1-t)$ とするとき $(0 \leqq t \leqq 1)$，PQ の包絡線 (PQ の通過する領域と通過しない領域の境界線) を求める．

PQ 上の点 $(x,\ y)$ について

$$y = \left(1 - \frac{1}{t}\right)x + 1 - t \quad \cdots(*)$$



が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{t^2} - 1$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = \sqrt{x}$

これを $(*)$ に代入すると

$$y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)x + 1 - \sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2$$

求める回転体の体積を V とすると，y 軸に関する対称性に注意して

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^1 y^2\,dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}\,)^4\,dx$$

$u = 1 - \sqrt{x}$ とおくと　$x = (1-u)^2$　ゆえに　$\dfrac{dx}{du} = -2(1-u)$

x	0	$\longrightarrow$	1
u	1	$\longrightarrow$	0

したがって　$\dfrac{V}{2\pi} = \displaystyle\int_1^0 u^4\cdot\{-2(1-u)\}\,du = 2\int_0^1 u^4(1-u)\,du$

$$= 2\int_0^1 (u^4 - u^5)\,du = 2\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

よって　　$V = \boldsymbol{\dfrac{2}{15}\pi}$

別解[3]　$\dfrac{V}{2\pi} = \displaystyle\int_1^0 u^4\cdot\{-2(1-u)\}\,du = 2\int_0^1 u^4(1-u)\,du = 2\cdot\frac{4!1!}{6!}(1-0)^6 = \frac{1}{15}$　■

[3]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{6}$ (1) 加法定理により

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta$$
$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

したがって $\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $n=1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \quad \cdots ①$$
$$\cos 3\theta = 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta \quad \cdots ②$$
$$\cos 4\theta = 2\cos\theta\cos 3\theta - \cos 2\theta \quad \cdots ③$$

① を ② に代入すると

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta \\ &= \boldsymbol{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}\end{aligned}$$

上式と ① を ③ に代入すると

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 2\cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - (2\cos^2\theta - 1) \\ &= \boldsymbol{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1}\end{aligned}$$

(2) $(*)$ から，$x = \cos\theta$，$f_n(x) = \cos n\theta$ とおける．$f_n(x)$ は x の n 次式で最高次の係数は 2^{n-1} である．したがって

$$f_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 \qquad (**)$$

とおける．なお，$a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$ は整数.

$\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 $m,\ n$ が存在すると仮定すると，$n\theta = m\pi$ より

$$\cos n\theta = (-1)^m$$

このとき，$x = \dfrac{1}{p}$，$f_n(x) = (-1)^n$ を $(**)$ に代入すると

$$(-1)^m = \frac{2^{n-1}}{p^n} + \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{p^{n-2}} + \cdots + a_0$$

両辺に p^{n-1} を掛けて整理すると

$$-\frac{2^{n-1}}{p} = a_{n-1} + a_{n-2}p + \cdots + \{a_0 - (-1)^m\}p^{n-1}$$

上式の右辺は整数であるが，p が 3 以上の素数であるから，左辺は整数ではない．よって，与えられた条件を満たす整数 $m,\ n$ は存在しない．

補足　$f_n(x)$ は，n が奇数のときは奇関数，n が偶数のときは偶関数である．■

6.10　2024年(150分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_4 を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)| = 3$ を満たす複素数 y に対して，$z = \dfrac{x+y}{2}$ とする．このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標空間の4点O，A，B，Cは同一平面上にないとする．線分OAの中点をP，線分ABの中点をQとする．実数 x，y に対して，直線OC上の点Xと，直線BC上の点Yを次のように定める．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BY}} = y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線QYと直線PXがねじれの位置にあるための x，y に関する必要十分条件を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 a_0，a_1，a_2，$\cdots$ を次のように定める．

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) a_0，a_1，a_2，a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

(2) a_0，a_1，$\cdots$，a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

5 a は $a \geqq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geqq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y, \quad y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leqq a$$

次の問いに答えよ．

(1) D_a の面積 S_a を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} S_a$ を求めよ．

6 自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする．n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする．また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする．次を求めよ．

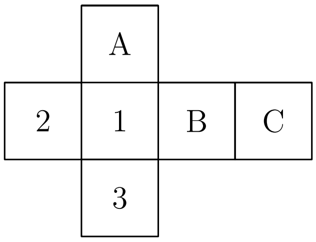
$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{N_n}$$

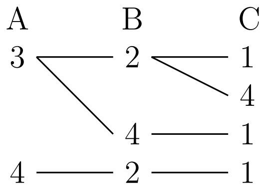
ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である．

解答例

1 (1) 次の立方体の展開図において，1，2，3 の面を異なる色で塗り，残りの A，B，C の面を順番に塗るとき，次の規則に従う．

- A は 1，2 以外の色で塗る．
- B は 1，3，A 以外の色で塗る．
- C は 2，3，A，B 以外の色で塗る．





1〜4 の色で展開図の面を塗る方法は上の樹形図で示した 4 通あり，4 色を 1〜4 に対応させる方法が 4! 通りあるから，求める確率は

$$\frac{4 \cdot 4!}{4^6} = \mathbf{\frac{3}{128}}$$

(2) n 個の色で 6 面をすべて異なる色で塗る確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} = \prod_{k=1}^{5}\left(1 - \frac{k}{n}\right) \qquad \text{(A)}$$

この確率と p_n の大小関係について

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} \leqq p_n \leqq 1 \qquad \text{(B)}$$

(A) から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{5}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = 1 \qquad \text{(C)}$$

(B)，(C) からはさみうちの原理により $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = 1}$ ■

2 $|w| = 1$ とすると，$|y - (8+6i)| = 3$ より　$y = 8 + 6i + 3w$

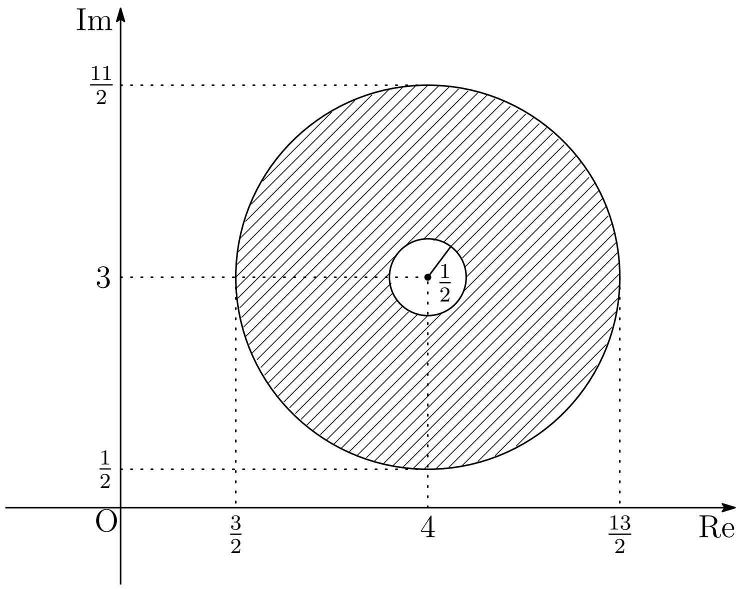
上式を $z = \dfrac{x+y}{2}$ に代入すると　$z = 4 + 3i + \dfrac{3}{2}w + \dfrac{x}{2}$

$|x| \leqq 2$ より，$\left|\dfrac{x}{2}\right| \leqq 1$ であるから

$$\frac{1}{2} \leqq \left|\frac{3}{2}w\right| - \left|\frac{x}{2}\right| \leqq \left|\frac{3}{2}w + \frac{x}{2}\right| \leqq \left|\frac{3}{2}w\right| + \left|\frac{x}{2}\right| \leqq \frac{5}{2}$$

したがって，z の方程式および表す領域は，図の斜線部分で境界を含む．

$$z = 4 + 3i + rw \quad \left(\frac{1}{2} \leqq r \leqq \frac{5}{2}\right)$$



また，領域の表す面積は

$$\pi\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \boldsymbol{6\pi}$$

■

3 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BY}} = y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OY}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = y(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = (1-y)\vec{b} + y\vec{c}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{QY}} &= \overrightarrow{\mathrm{OY}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-y)\vec{b} + y\vec{c} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - y\right)\vec{b} + y\vec{c}, \\
\overrightarrow{\mathrm{PX}} &= \overrightarrow{\mathrm{OX}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}, \\
\overrightarrow{\mathrm{QY}} \times \overrightarrow{\mathrm{PX}} &= \left\{-\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - y\right)\vec{b} + y\vec{c}\right\} \times \left(x\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}y\right)\vec{a} \times \vec{b} + x\left(\frac{1}{2} - y\right)\vec{b} \times \vec{c} + \frac{1}{2}(x-y)\vec{c} \times \vec{a}, \\
\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}
\end{aligned}$$

直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x，y に関する必要十分条件は

$$(\overrightarrow{\mathrm{QY}} \times \overrightarrow{\mathrm{PX}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}(x-y)(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \neq 0$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立であるから，$(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \neq 0$ に注意して

$$\frac{1}{2}(x-y) \neq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x \neq y}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 条件を満たすとき，$n = 0, 1, 2$ について

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{2}$$

が成立するから　$a_{n+1} + 1 = \dfrac{3}{2}(a_n + 1)$

$$a_n = (a_0 + 1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \qquad (n = 0, 1, 2, 3) \qquad (*)$$

$(a_0 + 1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0 + 1 = 2^4 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_0 = 15}$$

(2) $(*)$ と同様に，条件を満たすとき

$$a_n = (a_0 + 1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \qquad (n = 0, 1, \cdots, 10)$$

$(a_0 + 1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0 + 1 = 2^{11} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_0 = 2047}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ に $y=a$ を代入すると $(a \geqq 1)$

$$a=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^x)^2-2ae^x+1=0$$

$a \geqq 1$ に注意して，e^x について解くと　　$e^x=a\pm\sqrt{a^2-1}$

$x \geqq 0$ のとき，$e^x \geqq 1$ であるから，$(a+\sqrt{a^2-1})(a-\sqrt{a^2-1})=1$ より

$$e^x=a+\sqrt{a^2-1} \quad \text{ゆえに} \quad x=\log(a+\sqrt{a^2-1})$$

$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ に $y=a$ を代入すると $(a \geqq 1)$

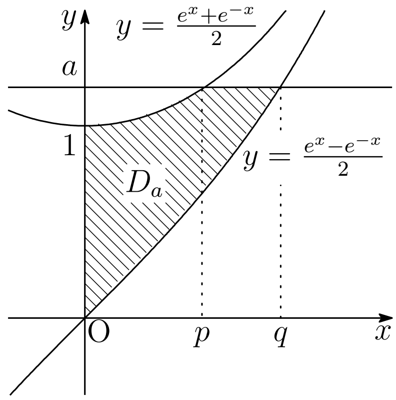
$$a=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^x)^2-2ae^x-1=0$$

$e^x>0$ に注意して，x について解くと

$$e^x=a+\sqrt{a^2+1} \quad \text{ゆえに} \quad x=\log(a+\sqrt{a^2+1})$$

$p=\log(a+\sqrt{a^2-1})$，$q=\log(a+\sqrt{a^2+1})$ とおくと

$$e^p=a+\sqrt{a^2-1}, \quad e^{-p}=a-\sqrt{a^2-1}$$
$$e^q=a+\sqrt{a^2+1}, \quad e^{-q}=-a+\sqrt{a^2+1}$$



したがって，D_a の面積 S_a は

$$\begin{aligned}
S_a &= \int_0^p \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx+\int_p^q \left(a-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx \\
&= \Big[-e^{-x}\Big]_0^p+\left[ax-\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]_p^q \\
&= 1+a(q-p)+\frac{e^p-e^{-p}}{2}-\frac{e^q+e^{-q}}{2} \\
&= \mathbf{1+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1}}
\end{aligned}$$

(2) まず

$$\lim_{a\to\infty}(\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1})=\lim_{a\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2+1}}=0 \qquad \text{(A)}$$

$\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\dfrac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\dfrac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2-1}}$ より

$$1<\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2-1}}$$

したがって

$$0<a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\frac{a}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2-1} \qquad (*)$$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\frac{a}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2-1}&=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{a^2-1}\log\left(1+\frac{2}{a^2-1}\right)^{\frac{a^2-1}{2}}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a-\frac{1}{a}}=0 \qquad (**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{a\to\infty}a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=0 \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) から

$$\lim_{a\to\infty}S_a=\lim_{a\to\infty}\left(1+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1}\right)=\mathbf{1}$$

■

6 $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ について a_k の整数部分が n 桁であるとき

$$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$$

上式の辺々の常用対数をとると　$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < n$

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \leqq k < \left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2$$

$[x]$ を x を超えない最大の整数とすると，整数 k の範囲は

$$\left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right] + 1 \leqq k \leqq \left[\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2\right]$$

したがって

$$N_n = \left[\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$$

a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が1であるとき

$$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 2\times 10^{n-1}$$

上式の辺々の常用対数をとると　$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < \log_{10}2 + n - 1$

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \leqq k < \left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2$$

このとき，整数 k の範囲は

$$\left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right] + 1 \leqq k \leqq \left[\left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$$

したがって

$$L_n = \left[\left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$$

$x-1 < [x] \leqq x$ であるから，$x-y-1 < [x]-[y] < x-y+1$ より

$$\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - 1 < N_n < \left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 + 1,$$
$$\left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - 1 < L_n < \left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 + 1$$

前の 2 式をそれぞれ整理すると

$$\frac{2n-1}{(\log_{10}2)^2}-1<N_n<\frac{2n-1}{(\log_{10}2)^2}+1,$$
$$\frac{2n-2}{\log_{10}2}<L_n<\frac{2n-2}{\log_{10}2}+2$$

上の 2 式をそれぞれ $2n$ で割ると

$$\frac{1-\frac{1}{2n}}{(\log_{10}2)^2}-\frac{1}{2n}<\frac{N_n}{2n}<\frac{1-\frac{1}{2n}}{(\log_{10}2)^2}+\frac{1}{2n},$$
$$\frac{1-\frac{1}{n}}{\log_{10}2}<\frac{L_n}{2n}<\frac{1-\frac{1}{n}}{\log_{10}2}+\frac{1}{n}$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{2n}=\frac{1}{(\log_{10}2)^2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{2n}=\frac{1}{\log_{10}2}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{2n}\cdot\frac{2n}{N_n}=\frac{1}{\log_{10}2}\cdot(\log_{10}2)^2=\mathbf{\log_{10}2}$$

■

6.11　2025 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5 6

1 次の各問に答えよ．

(1) i は虚数単位とする．複素数 z が，絶対値が 2 である複素数全体を動くとき，$\left|z - \dfrac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx$

2 正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ．

3 e は自然対数の底とする．$x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x)$，$g(x)$ を考える．

$$f(x) = x^2 \log x$$
$$g(x) = x^2 \log x - \frac{1}{1+2\log x}$$

実数 t は $t > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線に垂直で，点 $(t,\ g(t))$ を通る直線を l_t とする．直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする．t が $\dfrac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ の範囲を動くとき，$p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ．

4 座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．s, t, u は 0 でない実数とする．直線 OA 上の点 L，直線 OB 上の点 M，直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる．

(1) s, t, u が $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 L，M，N の定める平面 LMN は，s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ．さらに，そのような点 P はただ一つ定まることを示せ．

(2) 四面体 OABC の体積を V とする．(1) における点 P について，四面体 PABC の体積を V を用いて表せ．

5 θ は実数とする．xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき，その交点を Q とする．θ が $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め，その軌跡を xy 平面上に図示せよ．

6 n は 2 以上の整数とする．1 枚の硬貨を続けて n 回投げる．このとき，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に表が出たら $X_k = 1$，裏が出たら $X_k = 0$ として，X_1, X_2, $\cdots$, X_n を定める．

$$Y_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$$

とするとき，Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $|z|=2$ より $z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$\begin{aligned} z-\frac{i}{z} &= 2(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{i}{2(\cos\theta+i\sin\theta)} \\ &= 2(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{i}{2}(\cos\theta-i\sin\theta) \\ &= \left(2\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)+i\left(2\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \left|z-\frac{i}{z}\right|^2 &= \left(2\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(2\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 \\ &= \frac{17}{4}-4\sin\theta\cos\theta=\frac{17}{4}-2\sin 2\theta \end{aligned}$$

$\dfrac{9}{4} \leqq \dfrac{17}{4}-2\sin 2\theta \leqq \dfrac{25}{4}$ であるから　$\dfrac{3}{2} \leqq \left|z-\dfrac{i}{z}\right| \leqq \dfrac{5}{2}$

したがって　最大値 $\mathbf{\dfrac{5}{2}}$，最小値 $\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

別解 $|z|=2$ より　$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|=\dfrac{|z^2-i|}{|z|}=\dfrac{|z^2-i|}{2}$

$|z|^2-|i| \leqq |z^2-i| \leqq |z|^2+|i|$ であるから

$$2^2-1 \leqq |z^2-i| \leqq 2^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{2} \leqq \left|z-\frac{i}{z}\right| \leqq \frac{5}{2}$$

したがって　最大値 $\mathbf{\dfrac{5}{2}}$，最小値 $\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

補足 $|z^2-i|$ は 2 点 z^2，i の距離であるから，$z^2=-4i$ のとき最大，$z^2=4i$ のとき最小となる．

(2)　(i)　$I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}\,dx$ とおくと

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\
&=\Big[\ \sqrt{x^2+1}+x^2-\log(x^2+1)\ \Big]_0^{\sqrt{3}}+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\,dx\\
&=4-2\log 2+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\,dx
\end{aligned}
$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

$$
\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{3}
$$

よって　　$I=\boldsymbol{4-2\log 2+\dfrac{\pi}{3}}$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx\\
&=-\Big[\ \log(1+\cos x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\log 2}
\end{aligned}
$$

別解

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\,dx\\
&=-2\Big[\ \log\cos\frac{\pi}{2}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\log 2}
\end{aligned}
$$

■

2 整数 $a,\ b$ が $a^2+b^2\equiv 0 \pmod 3$ を満たすとき，$a\equiv b\equiv 0 \pmod 3$ であるから

$$N=9z^2=(x^3)^2+(y^2)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^3\equiv y^2\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 3)$$

$x\equiv 0,\ y\equiv 0 \pmod 3$ であるから，$x=3p,\ y=3q$ とおくと ($p,\ q$ は整数)

$$9z^2=(3p)^6+(3q)^4 \quad \text{ゆえに} \quad z^2=9(9p^6+q^4)$$

$z\equiv 0 \pmod 3$ であるから，$z=3r$ とおくと (r は整数)

$$(3r)^2=9(9p^6+q^4) \quad \text{ゆえに} \quad r^2=9p^6+q^4$$

$(p,\ q)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ について，上の第 2 式を満たすのは

$$(p,\ q)=(1,\ 2) \quad \text{ゆえに} \quad r=5 \quad \text{すなわち} \quad z=15$$

よって，求める N の最小値は　　$N=9z^2=9\cdot 15^2=\mathbf{2025}$

■

3 l_t は点 $(t,\ g(t))$ を通り，ベクトル $(1,\ f'(t))$ に垂直であるから

$$1(x-t)+f'(t)\{y-g(t)\}=0$$

これが点 $(p(t),\ 0)$ を通るから

$$p(t)-t-f'(t)g(t)=0 \quad \text{ゆえに} \quad p(t)=t+f'(t)g(t)$$

$f(x)=x^2\log x$ を微分すると　$f'(x)=x(1+2\log x)$

$f'(t)=t(1+2\log t)$，$g(t)=t^2\log t-\dfrac{1}{1+2\log t}$ より

$$\begin{aligned} p(t)&=t+t(1+2\log t)\left(t^2\log t-\frac{1}{1+2\log t}\right)\\ &=t^3\{2(\log t)^2+\log t\},\\ p'(t)&=t^2\{6(\log t)^2+7\log t+1\}\\ &=t^2(\log t+1)(6\log t+1)\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{e}}<t\leqq e$ における $p(t)$ の増減表は

t	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{6}}$	$\cdots$	e
$p'(t)$		$-$	0	$+$	
$p(t)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{1}{9\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$3e^3$

よって，$\dfrac{1}{\sqrt{e}}<t\leqq e$ の範囲を動くとき　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{9\sqrt{e}}\leqq p(t)\leqq 3e^3}$　■

$\boxed{4}$ (1) $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ より，$\dfrac{1}{4s}+\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{4u}=1$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{1}{4s}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{3}{4u}\overrightarrow{\mathrm{ON}} \qquad (*)$$

とすると，点 X は平面 LMN 上の点である．

$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $(*)$ の右辺に代入し，これを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad (**)$$

とすると，点 P は，$s,\ t,\ u$ の値と無関係な平面 LMN の定点である．

点 P と異なる点 P′ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma)\neq\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

とおき，これも $s,\ t,\ u$ の値に関係なく，$(*)$ を満たすと仮定すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{4s}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{3}{4u}\overrightarrow{\mathrm{ON}}&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{\alpha}{s}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\frac{\beta}{t}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{\gamma}{u}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\end{aligned}$$

整理すると　$\left(\dfrac{1}{4s}-\dfrac{\alpha}{s}\right)\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\left(\dfrac{1}{2t}-\dfrac{\beta}{t}\right)\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\left(\dfrac{3}{4u}-\dfrac{\gamma}{u}\right)\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{OL}},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は 1 次独立 (線形独立) であるから

$$\frac{1}{4s}-\frac{\alpha}{s}=\frac{1}{2t}-\frac{\beta}{t}=\frac{3}{4u}-\frac{\gamma}{u}=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

これは仮定に反する．したがって，$(**)$ によって定まる点 P は，$s,\ t,\ u$ の値に関係なく，平面 LMN を通る唯一の点である

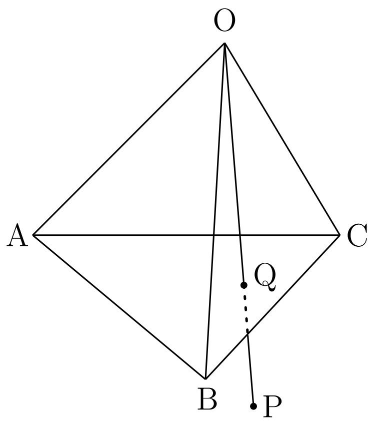
(2) $(**)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}$ とおくと，Q は平面 ABC 上の点であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

となるから　OQ : QP = 2 : 1

したがって，四面体 PABC の体積は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}V}$



別解 $(**)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}$$
$$|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}|$$

よって，求める体積は　$\boldsymbol{\dfrac{V}{2}}$

補足 四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}|$$

など始点を揃えて求めることができる． ■

5 2 点 A$\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$，P$\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP の方程式を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= \left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + t\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\end{aligned}$$

直線 AP と xy 平面との交点 Q における z 座標について

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + t\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (1-\sqrt{2}\cos\theta)t = 1$$

$-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$1-\sqrt{2}\cos\theta \neq 0$ であるから　$t = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta}$

したがって，点 Q の x 座標と y 座標は

$$x = \frac{\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta}, \quad y = \frac{\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta}$$

上の 2 式から，$x \neq 0$ に注意して

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}x+1}{x} \tag{$*$}$$

これを $1+\tan^2\theta = \left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$ に代入すると

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}x+1}{x}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+\sqrt{2})^2 - y^2 = 1$$

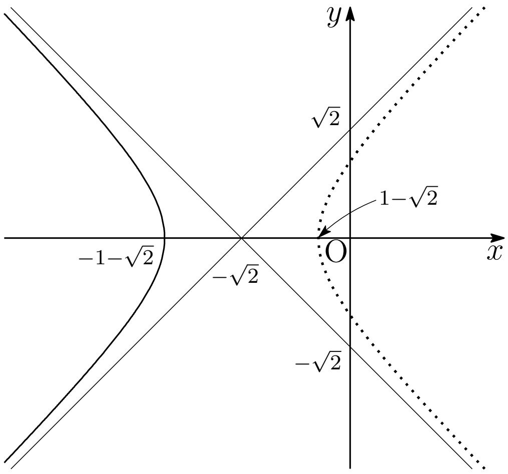
$-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$1 \leqq \dfrac{1}{\cos\theta} < \sqrt{2}$ であるから，$(*)$ の第 2 式により

$$1 \leqq \sqrt{2} + \frac{1}{x} < \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad x \leqq -1-\sqrt{2}$$

よって，求める Q の軌跡の方程式は

$$(x+\sqrt{2})^2 - y^2 = 1, \quad x \leqq -1-\sqrt{2}$$

Q の軌跡は，下の図の実線部分である．



■

$\boxed{6}$ 2 以上の整数 n について

「$X_n = 1$ かつ Y_n が奇数」
「$X_n = 0$ かつ Y_n が奇数」
「$X_n = 1$ かつ Y_n が偶数」
「$X_n = 0$ かつ Y_n が偶数」

となる事象の確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とおくと，次が成立する．

X_1	X_2	Y_2	確率
1	1	1	$a_2 = \frac{1}{4}$
$*$	0	0	$b_2 = 0,\ d_2 = \frac{1}{2}$
0	1	0	$c_2 = \frac{1}{4}$

($*$ は 0 または 1)

X_{n+1}	Y_{n+1}	確率
1	奇数	$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$
0	奇数	$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$
1	偶数	$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}d_n$
0	偶数	$d_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n$

表の第 1 式と第 3 式の辺々を加えると

$$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad c_n = \frac{1}{2} - a_n$$

これを表の第 1 式に代入すると

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a_n\right) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}$$

また，$a_2 = \dfrac{1}{4}$, $b_2 = 0$ および表の第 2 式から

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{4} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n \end{cases}$$

$x_n = a_n - \dfrac{1}{4}$, $y_n = b_n - \dfrac{1}{4}$ とおくと $(n \geqq 2)$ $\quad x_2 = 0,\ y_2 = -\dfrac{1}{4}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2}y_n \end{cases}$$

ここで定数 λ を用いて

$$x_{n+1} + \lambda y_{n+1} = \frac{1}{2}(-1+\lambda)\,x_n + \frac{1}{2}(1+\lambda)y_n$$

係数について $\quad 1 : \lambda = \dfrac{1}{2}(-1+\lambda) : \dfrac{1}{2}(1+\lambda)$

整理すると $\quad \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ $\quad$ これを解いて $\quad \lambda = 1 \pm \sqrt{2}$

したがって $\quad x_{n+1} + (1+\sqrt{2})y_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{x_n + (1+\sqrt{2})y_n\}$

$$x_{n+1} + (1-\sqrt{2})y_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\{x_n + (1-\sqrt{2})y_n\}$$

$\{x_n + (1\pm\sqrt{2})y_n\}$ は公比 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列であるから (複号同順)

$$\begin{aligned} x_n + (1\pm\sqrt{2})y_n &= \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}\{x_2 + (1\pm\sqrt{2})y_2\} \\ &= -\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{2})\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} \\ &= -(1\pm\sqrt{2})\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

$x_n + (1+\sqrt{2})y_n$ と $x_n + (1-\sqrt{2})y_n$ の 2 式の辺々の和をとると

$$\begin{aligned} 2(x_n + y_n) &= -(1+\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} - (1-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2}\{(1+\sqrt{2}) + (-1)^n(1-\sqrt{2})\} \\ x_n + y_n &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2}\left\{\frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{2}\sqrt{2}\right\} \end{aligned}$$

求める確率は $p_n = a_n + b_n = x_n + y_n + \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2}\left\{\frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{2}\sqrt{2}\right\}}$$

補足　自然数 n を偶奇にわけて次のように解答してもよい.

- n が偶数のとき

$$p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}}$$

- n が奇数のとき

$$p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

■

第 7 章　大阪大学

出題分野 (2015-2025) 150 分

◀	大阪大学	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	数と式											
I	2 次関数											
	図形と計量											
	データの分析											
	式と証明	2	2									
	複素数と方程式				2							
II	図形と方程式								3			
	三角関数								2			
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法			4				4				2
	関数											
	極限		5				4		4	1	1	
III	微分法とその応用				1		1	1·5		3		3
	積分法	1				1		3				4
	積分法の応用	4	3	5	3	3	5		5		4	
	場合の数と確率	5				2	2			5		
A	整数の性質	3	4	3		4		4			5	
	図形の性質											
B	数列		1		5		3	2				5
	確率分布と統計											
	平面上のベクトル			1						2		1
C	空間のベクトル				4	5				4	3	
	複素数平面			2		2			1		2	
	式と曲線											

7.1　2015年(150分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\quad(x\geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ．

(2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n=\int_0^n f_n(x)\,dx$$

で定める．$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\log(1+x)\leqq\log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてよい．

2 実数 x，y が $|x|\leqq 1$ と $|y|\leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq 1$$

が成り立つことを示せ．

3 以下の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ．

(2) p，q，$\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする．そのとき，$p=q=0$ であることを示せ．

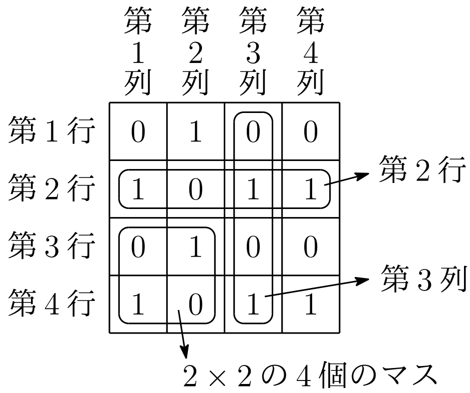
4 座標空間の x 軸上に動点 P，Q がある．P，Q は時刻 0 において，原点を出発する．P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く．その後，ともに時刻 1 で停止する．点 P，Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A，B とし，空間で $x\geqq -1$ の部分を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 t $(0\leqq t\leqq 1)$ における立体 $(A\cup B)\cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ．

5 n を 2 以上の整数とする．正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる．マスは上から第 1 行，第 2 行，$\cdots$，左から第 1 列，第 2 列，$\cdots$，と数える．数字の入れ方についての次の条件 p を考える．

条件 p : 1 から $n-1$ までの整数 i，j についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る．



($n=4$ の場合の入れ方の例)

(1) 条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ．

(2) 条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\int_0^n \frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$ において，$\dfrac{x}{n}=t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=n \qquad \begin{array}{c||c} x & 0 \longrightarrow n \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$$

したがって
$$\begin{aligned}\int_0^n f_n(x)\,dx &= \int_0^n \frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx \\ &= \int_0^1 \frac{nt}{n(1+nt)}\log(1+t)\cdot n\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{nx}{1+nx}\log(1+x)\,dx\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq \dfrac{nx}{1+nx} < 1$，$\log(1+x) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(1+x)\,dx - I_n &= \int_0^1 \log(1+x)\,dx - \int_0^1 \frac{nx}{1+nx}\log(1+x)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{1+nx} > 0$，$0 \leqq \log(1+x) \leqq \log 2$ であるから

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x) \leqq (\log 2)\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} \quad \cdots ②$$

ここで
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} &= \left[\frac{\log(1+nx)}{n}\right]_0^1 \\ &= \frac{\log(1+n)}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{n+1}\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{n+1} = 0$

はさみうちの原理により，② から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx = 0$

① より
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n &= \int_0^1 \log(1+x)\,dx \\ &= \Big[(1+x)\log(1+x) - x\Big]_0^1 = \mathbf{2\log 2 - 1}\end{aligned}$$

補足 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき}\quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに}\quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

すなわち　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+0} x\log\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0}(-x\log x) = 0$ ■

$\boxed{2}$ 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
&= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2x\sqrt{1-y^2}\cdot y\sqrt{1-x^2}\\
&= \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geqq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})\\
&= x^2y^2 + (1-x^2)(1-y^2) - 2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\\
&= \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

よって　$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$

別解 $x = \cos\alpha$，$y = \cos\beta$ とおくと $(0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
&= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
&= \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\\
&= (\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha)^2 = \sin^2(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

このとき，$0 \leqq \sin^2(\alpha+\beta) \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

■

3 (1) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (m,\ n \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき，この両辺を平方すると

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{ゆえに} \quad m^2 = 2n^2$$

m^2 は偶数であるから，m も偶数で，ある自然数 m' を用いて $m = 2m'$ とおける．これを上式に代入して

$$(2m')^2 = 2n^2 \quad \text{ゆえに} \quad n^2 = 2m'^{\,2}$$

したがって，n^2 は偶数となり，n も偶数である．このとき，m と n がともに偶数となり，m，n が互いに素であることと矛盾する．
よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではなく，すなわち，無理数である．
次に，$\sqrt[3]{3}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt[3]{3} = \frac{k}{l} \qquad (k,\ l \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき，この両辺を 3 乗すると

$$3 = \frac{k^3}{l^3} \quad \text{ゆえに} \quad k^3 = 3l^3$$

k^3 は 3 の倍数であるから，k も 3 の倍数で，ある自然数 k' を用いて $k = 3k'$ とおける．これを上式に代入して

$$(3k')^3 = 3l^3 \quad \text{ゆえに} \quad l^3 = 3{\cdot}3k'^{\,3}$$

したがって，l^3 は 3 の倍数となり，l も 3 の倍数である．このとき，k と l がともに 3 の倍数となり，k，l が互いに素であることと矛盾する．
よって，$\sqrt[3]{3}$ は有理数ではなく，すなわち，無理数である．

(2) $\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r$ (r は有理数) $\cdots(*)$ とおく．
$(*)$ より，$\sqrt[3]{3}q=r-\sqrt{2}p$ の両辺を 3 乗すると

$$3q^3=r^3-3r^2p\sqrt{2}+6rp^2-2\sqrt{2}p^3$$

したがって　$\sqrt{2}p(2p^2+3r^2)=6p^2r-3q^3+r^3$

$p\neq 0$ であると仮定すると，$p(2p^2+3r^2)\neq 0$ であるから

$$\sqrt{2}=\frac{6p^2r-3q^3+r^3}{p(2p^2+3r^2)}$$

p, q, r は，有理数であるから，上式の右辺は有理数であり，$\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する．したがって　$p=0$

これを $(*)$ に代入すると　$\sqrt[3]{3}q=r$

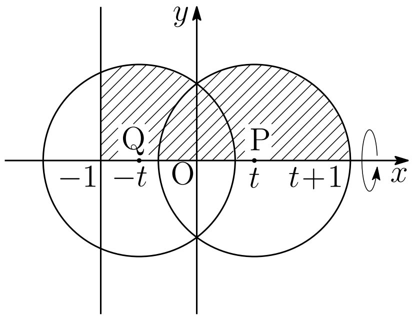
$q\neq 0$ であると仮定すると　$\sqrt[3]{3}=\dfrac{r}{q}$

q, r は有理数であるから，上式の右辺は有理数であり，$\sqrt[3]{3}$ が無理数であることと矛盾する．したがって　$q=0$

よって　$p=q=0$　■

4 (1) 点 P，Q を中心とする半径 1 の球面が xy 平面によって切り取られる円の方程式は，それぞれ次のようになる．

$$(x-t)^2+y^2=1,\quad (x+t)^2+y^2=1$$



$V(t)$ は右の図の斜線部分を x 軸の周りに一回転させた立体の体積であるから

$$\begin{aligned}\frac{V(t)}{\pi}&=\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx+\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx\\&=\left[\,x-\frac{(x+t)^3}{3}\,\right]_{-1}^{0}+\left[\,x-\frac{(x-t)^3}{3}\,\right]_{0}^{t+1}\\&=-\frac{t^3}{3}-t^2+2t+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V(t)=\pi\left(-\frac{t^3}{3}-t^2+2t+\frac{4}{3}\right)}$

(2) (1) の結果から $V'(t) = \pi(-t^2 + 2t + 2)$

$0 \leqq t \leqq 1$ に注意して，$V(t) = 0$ を解くと $t = -1 + \sqrt{3}$

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$V(t) = \pi\left\{(-t^2 - 2t + 2)\left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}\right) + 2t + \frac{2}{3}\right\}$ であること利用すると，$V(t)$ の最大値は

$$V(-1+\sqrt{3}) = \pi\left\{2(-1+\sqrt{3}) + \frac{2}{3}\right\} = \boldsymbol{\pi\left(-\frac{4}{3} + 2\sqrt{3}\right)}$$ ■

5 (1) 第 n 列の第 i 行，第 $i+1$ 行に 0 または 1 がともに現われるとき，第 i 行，第 $i+1$ 行において，各列ごとに交互に 0 と 1 が現われる．このとき，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには，次にようになる．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \quad \cdots ①$$

また，第 n 行の第 j 列，第 $j+1$ 列に 0 または 1 がともに現われるとき，第 j 列，第 $j+1$ 列において，各行ごとに交互に 0 と 1 が現われる．このとき，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには，次にようになる．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \quad \cdots ②$$

① と ② は一致しないので，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現われる．

(2) 第 n 行および第 n 列の $2n-1$ 個の数字の入れ方が決まれば，残りの $(n-1)^2$ 個の数字の入れ方は決定する (例えば，第 n 行に 0 と 1 が交互に現れると，下の行から一意的に決定する)．(1) の結果から，次の場合分けができる．

(i) 第 n 行に 0 と 1 が交互に現われるとき，第 n 列の第 1 行から第 $n-1$ 行の数字の入れ方は $2 \times 2^{n-1} = 2^n$ (通り)

(ii) 第 n 列に 0 と 1 が交互に現われるとき，第 n 行の第 1 列から第 $n-1$ 列の数字の入れ方は $2 \times 2^{n-1} = 2^n$ (通り)

(iii) 第 n 行および第 n 列に 0 と 1 が交互に現われるとき ((i) かつ (ii))，その数字の入れ方は 2 (通り)

(i)〜(iii) から $a_n = 2^n + 2^n - 2 = \boldsymbol{2^{n+1} - 2}$ ■

7.2　2016 年 (150 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5]

[1] 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a，b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

$$
\begin{array}{lll}
(\text{ア}) & f_1(x) = \sin(\pi x) & \\
(\text{イ}) & f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - x\right) & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\
(\text{ウ}) & f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) & (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{array}
$$

以下の問いに答えよ．

(1) $a = 2$，$b = 3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) $a = 1$，$b = 6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ．

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ．

[2] 次の問いに答えよ．

(1) c を正の定数とする．正の実数 x，y が $x + y = c$ をみたすとき，

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ．

(2) 正の実数 x，y，z が $x + y + z = 1$ をみたすとき，

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ．

[3] 座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y = \sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 $(a,\ b)$ をもつとする．

(1) a，b，r の値をそれぞれ求めよ．

(2) 連立不等式

$$a \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2 + y^2 \geqq r^2$$

の表す領域を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

4 正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする．

(1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ．

(2) $S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 $(n,\ m)$ をすべて求めよ．

(3) 整数 a と $0 \leqq b < 1$ をみたす実数 b を用いて，

$$A_{20}S_{20} = a + b$$

と表すとき，b の値を求めよ．

5 円上の5点A，B，C，D，Eは反時計回りにこの順に並び，円周を5等分している．5点A，B，C，D，Eを頂点とする正五角形を R_1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2 = y(y - x)$ がなりたつことを示せ．

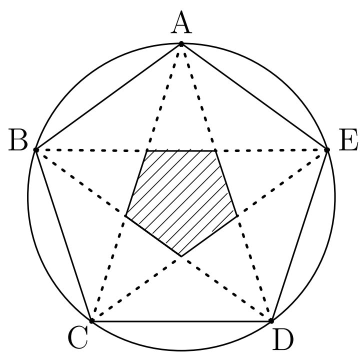
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の5つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする．R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の5つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ．



斜線部分が R_2

解答例

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned}
&(\text{ア})\quad f_1(x)=\sin(\pi x)\\
&(\text{イ})\quad f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right) \qquad (n=1,2,3,\cdots)\\
&(\text{ウ})\quad f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x) \qquad (n=1,2,3,\cdots)
\end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}
f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)&=f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-(-x)\right)\\
&=f_{2n-1}\left(x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

したがって　$f_5(x)=f_1\left(x+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)$

よって，$a=2$，$b=3$ のとき，$x=0$ とすると

$$f_5(0)=f_1\left(\frac{5}{3}\right)=\sin\frac{5}{3}\pi=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $(*)$ より　$f_{2k-1}(x)=f_1\left(x+(k-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)$

したがって
$$\begin{aligned}
f_{2k}(x)&=f_{2k-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right)\\
&=f_1\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right)+(k-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)\\
&=f_1\left(k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-x\right) \qquad \cdots(**)
\end{aligned}$$

$a=1$，$b=6$ のとき，$x=0$ とすると

$$f_{2k}(0)=f_1\left(\frac{7}{6}k\right)=\sin\frac{7}{6}k\pi=\sin\left(k\pi+\frac{k}{6}\pi\right)=(-1)^k\sin\frac{k}{6}\pi$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)&=\sum_{k=1}^{100}(-1)^k\cdot(-1)^k\sin\frac{k}{6}\pi=\sum_{k=1}^{100}\sin\frac{k}{6}\pi\\
&=\sum_{k=1}^{95}\sin\frac{k}{6}\pi+\sum_{k=96}^{100}\sin\frac{k}{6}\pi\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{95}\left(\sin\frac{k}{6}\pi+\sin\frac{96-k}{6}\pi\right)+\sum_{k=96}^{100}\sin\frac{k}{6}\pi\\
&=\sum_{k=96}^{100}\sin\frac{k}{6}\pi=0+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

(3) (**) より $f_6(x) = f_1\left(3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)-x\right)$

これに $x=0$ を代入すると，(ア) により

$$f_6(0) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right) = \sin 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0)=0$ となるのは，$3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ が整数になるときで，次の 8 組.

$$(a,b) = (1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 6),\ (6,\ 2),\ (3,\ 3),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は $\dfrac{8}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$ ■

2 (1) $x+y=c$ より

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1+\frac{x+y+1}{xy} = 1+\frac{c+1}{xy} \quad \cdots ①$$

$x>0$，$y>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{c}{2} = \frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \geqq \frac{4}{c^2} \quad \cdots ②$$

が成立する $\left(\text{等号が成立するのは}, x=y=\dfrac{c}{2}\text{のとき}\right)$.

①，② より $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right) \geqq 1+(c+1)\cdot\dfrac{4}{c^2} = \left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2$

よって，$x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2}$ をとる.

解説 n 個の正の数 x_1，$x_2, \cdots, x_n$ の相加平均 A，相乗平均 G，調和平均 H は

$$A = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$
$$G = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$
$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$A \geqq G$ が成り立つから [1]，n 個の正の数 $\dfrac{1}{x_1}$，$\dfrac{1}{x_2}$，$\cdots$，$\dfrac{1}{x_n}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geqq \frac{1}{G}$$

したがって $A \geqq G \geqq H$

なお，等号が成立するのは，$x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときに限る.

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{3}$ を参照

補足 $\dfrac{1}{x}$ と $\dfrac{1}{y}$ の相乗平均・調和平均の大小関係により

$$\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} \geqq \frac{2}{x+y} = \frac{2}{c} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \geqq \frac{4}{c^2} \quad \left(\text{等号は } x = y = \frac{c}{2} \text{ のとき}\right)$$

(2) x，y，z は正の実数，$x+y+z=1$ であるから，$0<z<1$ より

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) > 0, \quad \left(1-\frac{4}{3z}\right) < 0$$

したがって

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right) \quad \cdots (*)$$

これが最大となるのは，z を固定したとき

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

が最小となるときである．$x+y=1-z$ であるから，(1) の結果により，$x=y=\dfrac{1-z}{2}$ を $(*)$ に代入して

$$f(z) = \left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right) \quad (0<z<1)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 2\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\frac{2}{(1-z)^2}\cdot\left(1-\frac{4}{3z}\right) + \left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2} \\
&= 2\cdot\frac{3-z}{1-z}\cdot\frac{2}{(1-z)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z} + \left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2} \\
&= \frac{4(3-z)(3z-4)}{3z(1-z)^3} + \frac{4(3-z)^2}{3z^2(1-z)^2} \\
&= \frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2}\left(\frac{3z-4}{1-z} + \frac{3-z}{z}\right) = \frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2}\cdot\frac{(2z-1)(2z-3)}{z(1-z)}
\end{aligned}$$

z	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		$\nearrow$	$-\frac{125}{3}$	$\searrow$	

$z=\dfrac{1}{2}$，$x=y=\dfrac{1}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{-\dfrac{125}{3}}$ をとる． ■

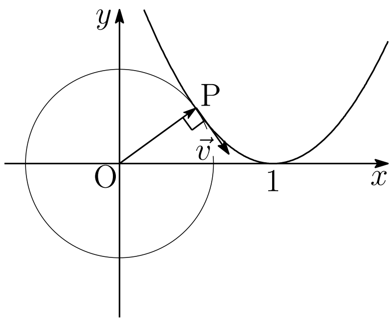
3　(1) 放物線上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{2}(t-1)^2)$ について，$f(t)=\mathrm{OP}^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2+2(t-1)^4,\\ f'(t) &= 2t+8(t-1)^3 = 8t^3-24t^2+26t-8\\ &= 2(2t-1)(2t^2-5t+4) = 2(2t-1)\left\{2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right\} \end{aligned}$$

t	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，$\boldsymbol{b}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$，$r=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{4}}$

補足　放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ 上の動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を



$$x=t,\quad y=\sqrt{2}(t-1)^2,$$
$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\quad \vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

とおき，$f(t)=\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$ を微分すると

$$f'(t)=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}$$

$f'(t)=0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{v}$

$$f''(t)=2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+2x\frac{d^2x}{dt^2}+2y\frac{d^2y}{dt^2}=2|\vec{v}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t,\ \sqrt{2}(t-1)^2)$，$\vec{v}=(1,\ 2\sqrt{2}(t-1))$，$\vec{a}=(0,\ 2\sqrt{2})$ より

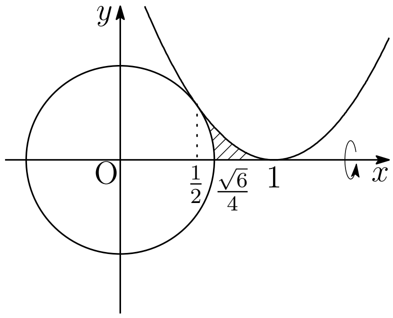
$$|\vec{v}|^2>0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=4(t-1)^2\geqq 0$$

$f''(t)>0$ であるから，$f'(t)=0$ をみたす点において，OP は極小となる．

(2) (1) の結果から，連立不等式

$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2+y^2 \geqq 1$$

の表す領域は，下の図の斜線部分．



この領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \left(\frac{3}{8} - x^2\right) dx \\ &= \left[\ \frac{2}{5}(x-1)^5\ \right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[\ \frac{3}{8}x - \frac{x^3}{3}\ \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \\ &= \frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16}\end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{\left(\frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16}\right)\pi}$　■

$\boxed{4}$ (1) N は $\log_2 n$ 以下の最大の整数であるから

$$N \leqq \log_2 n < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^N \leqq n < 2^{N+1}$$

自然数 k に対して，非負整数 a_k と奇数 b_k を用いて

$$k = 2^{a_k} \cdot b_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

とおくと

$$2^N A_n S_n = 2^N A_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{a_k} \cdot b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k}$$

$\dfrac{A_n}{b_k}$ は奇数，$k = 2^N$ のとき $a_k = N$，$k \neq 2^N$ のとき $a_k < N$ であるから

$$k = 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{は奇数,} \quad k \neq 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{は偶数}$$

$2^N A_n S_n$ は 1 個の奇数と $n-1$ 個の偶数の和であるから，$2^N A_n S_n$ は奇数．

(2) $S_n = 2 + \dfrac{m}{20} = \dfrac{40+m}{2^2 \cdot 5}$ より

$$2^N A_n S_n = \frac{(40+m)A_n}{5} \cdot 2^{N-2}$$

上式は，奇数であるから，$N \leqq 2$ より，$\log_2 n < N+1$ に注意して

$$\log_2 n < 3 \quad \text{ゆえに} \quad n < 8$$

したがって　$S_1 = 1,\ \ S_2 = 1 + \dfrac{1}{2},\ \ S_3 = 1 + \dfrac{5}{6},\ \ S_4 = 2 + \dfrac{1}{12},$

$$S_5 = 2 + \frac{17}{60},\ \ S_6 = 2 + \frac{9}{20},\ \ S_7 = 2 + \frac{83}{140}$$

$S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ となるのは　　$\boldsymbol{(n,\ m) = (6,\ 9)}$

(3)
$$\begin{aligned}
A_{20}S_{20} &= A_{20}\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k} \\
&= \left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9}\right) \\
&\quad\quad + \frac{1}{4}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5}\right) + \frac{A_{20}}{8} + \frac{A_{20}}{16} \qquad \cdots (*)
\end{aligned}$$

n が 20 以下の奇数のとき，$\dfrac{A_{20}}{n}$ は奇数の整数であるから

$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19} \text{ は整数} \quad \cdots ①$$

また，$A_{20} + \dfrac{A_{20}}{3} + \dfrac{A_{20}}{5} + \dfrac{A_{20}}{7} + \dfrac{A_{20}}{9}$ は 5 つの奇数の和であるから

$$\frac{1}{2}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9}\right) \text{ の小数部分は } \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

ここで
$$\begin{aligned}
A_{20} &= 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19 \\
&\equiv 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot(-7)\cdot(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot1\cdot3 \\
&\equiv 3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot3 \equiv 9\cdot9\cdot1\cdot3 \equiv 81\cdot3 \equiv 1\cdot3 \equiv 3 \pmod{16}
\end{aligned}$$

したがって，$p = 4,\ 8,\ 16$ のとき　$A_{20} \equiv 3 \pmod{p}$

$3^2 \equiv 1,\ \ 5^2 \equiv 1 \pmod 4$ であるから

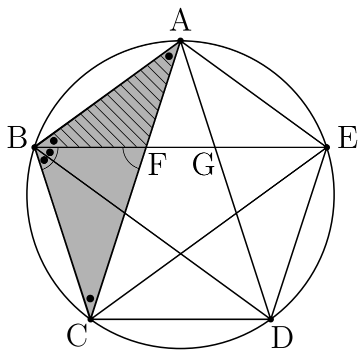
$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} \equiv A_{20} + 3A_{20} + 5A_{20} \equiv 9A_{20} \equiv A_{20} \equiv 3 \pmod 4$$

$$\frac{1}{4}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5}\right) \text{ の小数部分は } \frac{3}{4} \quad \cdots ③$$

また，$\dfrac{A_{20}}{8}$ の小数部分は $\dfrac{3}{8}$，$\dfrac{A_{20}}{16}$ の小数部分は $\dfrac{3}{16}$ であるから，これと $(*)$，①〜③ により

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{29}{16} = 1 + \frac{13}{16} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = \frac{13}{16}}$$ ■

5 (1) AC と BE の交点を F とすると，△BCF は二等辺三角形であるから



$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CF} = x$$
$$\mathrm{AF} = \mathrm{AC} - \mathrm{CF} = y - x$$

$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{AFB}$ であるから

$$x : y = y - x : x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = y(y - x)$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから

$$\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \vec{c} = \frac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{x}{y - x}(\vec{a} + \vec{c})$$

(1) の結果から　$y^2 - xy - x^2 = 0$　ゆえに　$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{y}{x} - 1 = 0$

$\dfrac{y}{x} > 0$ に注意して　$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}(\vec{a} + \vec{c})}$

(3) AD と BE の交点を G とすると，$\mathrm{BE} = \mathrm{AC} = y$，$\mathrm{BF} = \mathrm{AF} = y - x$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{FG} &= \mathrm{BE} - 2\mathrm{BF} \\ &= y - 2(y - x) = 2x - y = \left(2 - \frac{y}{x}\right)x \\ &= \left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x\end{aligned}$$

よって，R_2 の一辺の長さは　$\boldsymbol{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}x}$

(4) (3) の結果から，$r = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad S_n = S_1 \cdot (r^2)^{n-1} = S_1 \cdot r^{2n-2}$$

$|-r^2| < 1$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_1\cdot r^{2k-2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-r^2)^{k-1}\\ &= \frac{1}{1-(-r^2)} = \frac{1}{1+r^2}\\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}\end{aligned}$$

■

7.3　2017 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ $(t \neq 0)$ を考える．

(1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いてあらわせ．

(2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いてあらわせ．

(3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ．

2 複素数 z は $z^5 = 1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする．硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ とおく．複素数 w を $w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$ と定める．

(1) 5 回とも表が出たとする．w の値を求めよ．

(2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0$，$a_1 = a_4 = 1$ のとき，$|w| < 1$ であることを示せ．

(3) $|w| < 1$ である確率を求めよ．

3 a，b を自然数とし，不等式

$$\left|\frac{a}{b} - \sqrt{7}\right| < \frac{2}{b^4} \qquad \text{(A)}$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，$2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい．

(1) 不等式 (A) を満たし $b \geqq 2$ である自然数 a，b に対して

$$\left|\frac{a}{b} + \sqrt{7}\right| < 6$$

であることを示せ．

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 a，b の組のうち，$b \geqq 2$ であるものをすべて求めよ．

4 b，c を実数とする．2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が

$$0 \leqq f(1) \leqq 2, \quad 5 \leqq f(3) \leqq 6$$

を満たすとする．

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

5 xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく．回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく．

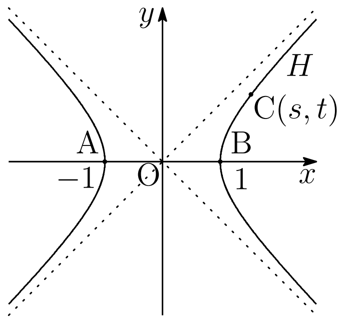
(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする．xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする．$t=(2\cos\theta)^2$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いてあらわせ．

(2) M の体積 V を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) H 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ における接線の方程式は

$$x=-1$$



H 上の点 $\mathrm{C}(s,\ t)$ は，$t\neq 0$ より　$s\neq\pm1$
2 点 $\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ を通る直線の方程式は

$$y=\frac{t}{s-1}(x-1)$$

上の 2 式を解いて　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{-1},\ \boldsymbol{\frac{-2t}{s-1}}\right)$

(2) H 上の点 $\mathrm{C}(s,\ t)$ における接線の方程式は　$sx-ty=1$
直線 AB の方程式は　$y=0$
この 2 式を解いて　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{1}{s}},\ \mathbf{0}\right)$

(3) H 上の点 B における接線の方程式は　$x=1$
2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ を通る直線の方程式は　$y=\dfrac{t}{s+1}(x+1)$
この 2 式を解いて　$\mathrm{R}\left(1,\ \dfrac{2t}{s+1}\right)$
$s^2-t^2=1$ に注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(-\frac{s+1}{s},-\frac{2t}{s-1}\right)=\frac{1}{1-s}\left(\frac{s^2-1}{s},2t\right)=\frac{t}{1-s}\left(\frac{t}{s},\ 2\right),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\left(\frac{s-1}{s},\ \frac{2t}{s+1}\right)=\frac{1}{1+s}\left(\frac{s^2-1}{s},\ 2t\right)=\frac{t}{1+s}\left(\frac{t}{s},\ 2\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ であるから，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．

別解 $(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s,-2t)$，$(s+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1+s,\ 2t)$ より

$$(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(s+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(2,\ 0)=2s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{s-1}{2s}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{s+1}{2s}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

このとき，$\dfrac{s-1}{2s}+\dfrac{s+1}{2s}=1$ より，直線 PR 上に点 Q がある．
よって，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ であるから，$z^5 = 1$ $(z \neq 1)$ より

$$w = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = \mathbf{0}$$

(2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0$，$a_1 = a_4 = 1$ のとき

$$w = z + z^4 = z + \frac{z^5}{z} = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = z + \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z + \overline{z}$$

条件 $z^5 = 1,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta = \arg z = \dfrac{2\pi}{5}$ とおくと

$$w = z + \overline{z} = 2\cos\theta < 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \qquad \text{よって} \qquad |w| < 1$$

(3) 表が出た枚数を n とする．

(i) $n = 0$ のとき，$w = 0$ より　$|w| = 0$

(ii) $n = 1$ のとき，$|w| = 1$

(iii) $n = 2$ のとき

$$|z + z^2| = |z||1 + z|, \qquad |z^2 + z^3| = |z^2||1 + z|,$$
$$|z^3 + z^4| = |z^3||1 + z|, \qquad |z^4 + 1| = |z^4||1 + z|$$

$1 + z$ の実部について　$1 + \cos\theta > 0$ であるから

$$|1 + z| = |z + z^2| = |z^2 + z^3| = |z^3 + z^4| = |z^4 + 1| > 1$$

$1 + z^2$ について　$\begin{aligned} 1 + z^2 &= 1 + (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\ &= (1 + \cos 2\theta) + i\sin 2\theta \end{aligned}$

ゆえに　$\begin{aligned} |1 + z^2|^2 &= (1 + \cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2 \\ &= 2 + 2\cos 2\theta = (2\cos\theta)^2 < 1 \end{aligned}$

$$|1 + z^2| = |z + z^3| = |z^2 + z^4| = |z^3 + 1| = |z^4 + z| < 1$$

このとき，$|w| < 1$ となるは，5 通り

(iv) $n = 3$のとき　$1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$ より，例えば，$|1+z+z^2| = |z^3+z^4|$ であるから，$|w| < 1$ を満たす場合の数は，$n = 2$ の場合と等しい．

(v) $n = 4$ のとき，例えば，$|1+z+z^2+z^3| = |z^4| = 1$ であるから，$|w| < 1$ とならない．

(vi) $n = 5$ のとき，$w = 0$ であるから，$|w| = 0$

(i)〜(v) から，$|w| < 1$ となる確率は　$\dfrac{1 + 0 + 5 + 5 + 0 + 1}{2^5} = \mathbf{\dfrac{3}{8}}$ ■

3　(1) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$ より　$2\sqrt{7}-\dfrac{2}{b^4}<\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}<2\sqrt{7}+\dfrac{2}{b^4}$

$b \geqq 2$ のとき　$2\sqrt{7}-\dfrac{2}{b^4} \geqq 2\sqrt{7}-\dfrac{1}{8} > 2\times 2.645-0.125 > 5.165$

$$2\sqrt{7}+\dfrac{2}{b^4} \leqq 2\sqrt{7}+\dfrac{1}{8} < 2\times 2.646+0.125 = 5.417 < 6$$

したがって　$5.165<\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}<6$　よって　$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$

(2) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$，$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$ より

$$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{12}{b^4}\quad\text{ゆえに}\quad b^2|a^2-7b^2|<12\quad\cdots(*)$$

$\sqrt{7}$ は無理数であるから，自然数 a，b に対して $\dfrac{a}{b}\neq\sqrt{7}$ より　$a^2-7b^2\neq 0$

a^2-7b^2 は整数であるから，$(*)$ を満たす b $(b \geqq 2)$ は，$b=2,\ 3$ について調べればよい．

(i) $b=2$ のとき　$2^2|a^2-28|<12$　ゆえに　$|a^2-28|<3$

これを満たす自然数 a は存在しない．

(ii) $b=3$ のとき　$3^2|a^2-63|<12$　ゆえに　$|a^2-63|<\dfrac{4}{3}$

これを満たす自然数 a は　$a=8$

(i),(ii) より，求める a，b の組は　$\boldsymbol{(a,\ b)=(8,\ 3)}$　■

4 (1) $m=f(1)$，$M=f(3)$ とおくと，$f(x)=-x^2+bx+c$ より

$$-1+b+c=m,\quad -9+3b+c=M$$

ゆえに　$b=\dfrac{M-m}{2}+4,\ \ c=\dfrac{3m-M}{2}-3$

したがって　$f(x)=-x^2+\left(\dfrac{M-m}{2}+4\right)x+\dfrac{3m-M}{2}-3$

$$f(4)=\frac{3M-m}{2}-3$$

$f(4)$ は，$M=5$，$m=2$ のとき最小値 $\dfrac{7}{2}$ をとり，$M=6$，$m=0$ のとき最大値 6 をとる．よって　$\boldsymbol{\dfrac{7}{2} \leqq f(4) \leqq 6}$

(2) $k=\dfrac{M-m}{2}$ とおくと　$b=k+4$，$c=-3k+M-3$

$D=b^2+4c$，$q=\dfrac{D}{4}$ であるから

$$q=\frac{1}{4}\{(k+4)^2+4(-3k+M-3)\}=\frac{1}{4}(k-2)^2+M$$

$0 \leqq m \leqq 2$，$5 \leqq M \leqq 6$，$\dfrac{3}{2} \leqq k \leqq 3$ であるから，q は，

$M=6$，$k=3$ のとき $(m=0)$，最大値 $\dfrac{25}{4}$ をとり，
$M=5$，$k=2$ のとき $(m=1)$，最小値 5 をとる．

よって　$\boldsymbol{5 \leqq q \leqq \dfrac{25}{4}}$

(3) 放物線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，$\alpha+\beta=b$，$\alpha\beta=-c$ より，$D=b^2+4c$，$q=\dfrac{D}{4}$ に注意して

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=b^2+4c=D=4q=4\cdot 6=24$$

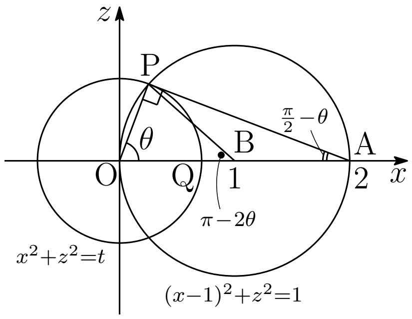
$\beta-\alpha=\sqrt{24}$ であるから　$S=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(\sqrt{24})^3=\boldsymbol{8\sqrt{6}}$　■

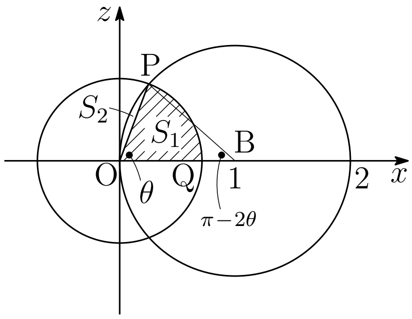
$\boxed{5}$ (1) xy 平面に垂直で O を通る座標軸を z とすると，立体 M の表す領域は

$$0 \leqq y \leqq 2, \quad y \geqq x^2+z^2, \quad (x-1)^2+z^2 \leqq 1$$

平面 $y=t$ 上に 2 円 $x^2+z^2=t$，$(x-1)^2+z^2=1$ の交点の 1 つを P とし，OP と x 軸方向の正の向きとなす角を θ とすると，左下の図から

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OA}\cos\theta = 2\cos\theta \quad ゆえに \quad t = \mathrm{OP}^2 = (2\cos\theta)^2$$





右上の図において，扇形 OPQ の面積を S_1，弧 OP と線分 OP で囲まれた部分の面積を S_2 とすると (△OPB は BO = BP = 1 の二等辺三角形)

$$S_1 = \frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta = 2\theta\cos^2\theta,$$
$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-2\theta) - \frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(\pi-2\theta) = \frac{\pi}{2}-\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$S(t) = 2(S_1+S_2)$ であるから

$$S(t) = 2\left(2\theta\cos^2\theta + \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$
$$= 2\theta(2\cos^2\theta-1) - \sin 2\theta + \pi = \boldsymbol{2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi}$$

(2) $t=(2\cos\theta)^2$ より $\quad \dfrac{dt}{d\theta} = -8\cos\theta\sin\theta = -4\sin 2\theta$

t	$0 \longrightarrow 2$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$V = \int_0^2 S(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)\frac{dt}{d\theta}d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)(-4\sin 2\theta)d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4\theta\sin 4\theta + 2\cos 4\theta - 2 + 4\pi\sin 2\theta)\,d\theta$$
$$= \left[-\theta\cos 4\theta + \frac{3}{4}\sin 4\theta - 2\pi\cos 2\theta - 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$$

■

7.4　2018年(150分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ．

(1) $x>0$ の範囲で不等式

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ．

(2) x が $x>0$ の範囲を動くとき，

$$y=\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ．

2 a，b を正の実数とし，$f(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$ とする．

(1) c を実数とし，$f(x)$ が $x-c$ で割り切れるとする．このとき，$c>0$ であり，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れることを示せ．

(2) $f(x)$ がある実数 s，t，u，v を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるとき，$a \geqq 4$ が成り立つことを示せ．

(3) $a=5$ とする．$f(x)$ がある実数 s，t，u，v を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ．

3 2 つの関数

$$f(t) = 2\sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2\cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C : x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．

(1) t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ．

(2) t_1，t_2 を $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ を満たす実数とする．このとき $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) C と直線 $x = 1$ が囲む領域の面積 S を求めよ．

4 座標空間に 6 点

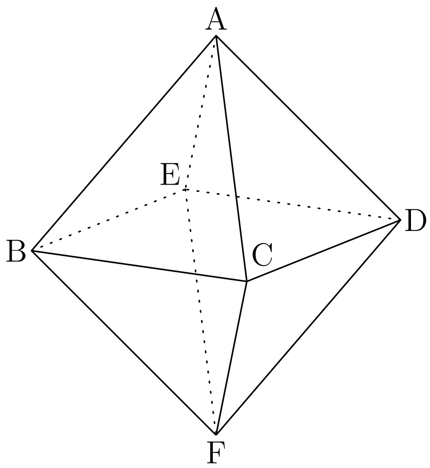
$$\mathrm{A}(0,0,1),\ \mathrm{B}(1,0,0),\ \mathrm{C}(0,1,0),\ \mathrm{D}(-1,0,0),\ \mathrm{E}(0,-1,0),\ \mathrm{F}(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある．s，t を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ を満たす実数とする．線分 AB，AC をそれぞれ $1-s : s$ に内分する点を P，Q とし，線分 FD，FE をそれぞれ $1-t : t$ に内分する点を R，S とする．

(1) 4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあることを示せ．

(2) 線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする．s，t が $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ．

(3) 正八面体 ABCDEF の 4 点 P，Q，R，S を通る平面による切り口の面積を X とする．線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき，X を最大とするような s，t の値と，そのときの X の値を求めよ．



5 p，q を $0 < p < 1$，$0 < q < 1$ を満たす実数とし，n を 2 以上の整数とする．2 つのチーム A，B が野球の試合を n 回行う．1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする．また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする．なお，試合結果に引き分けはなく，勝敗が決まるとする．

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ とする．B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$，$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$ とおくと

$$f(0)=0,\quad g(0)=0$$

$x>0$ において　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0$

$g(x)=\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$ より，$x>0$ において

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{1+x}\\&=\frac{(1+x)-2\sqrt{1+x}+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}>0\end{aligned}$$

したがって，$x>0$ において　$f(x)>0$，$g(x)>0$

よって，$x>0$ の範囲で　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

(2) $y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ より　$y'=-\dfrac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\dfrac{1}{x^2}$

(1) の結果から，$x>0$ において

$$\{\log(1+x)\}^2<\frac{x^2}{1+x}\quad \text{ゆえに}\quad -\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\frac{1}{x^2}<0$$

したがって，$x>0$ において，y は単調減少である．

$x-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x(2-x)}{2}$ であるから，$0<x<2$ のとき，(1) の結果から

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)}$$

したがって　$\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{2}{x(2-x)}-\dfrac{1}{x}$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sqrt{1+x}}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to+0}\left\{\frac{2}{x(2-x)}-\frac{1}{x}\right\}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$$

したがって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{2}$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}=0$　よって　$\boldsymbol{0<y<\dfrac{1}{2}}$ ■

2　(1) $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ が $x - c$ で割り切れるから，$f(c) = 0$ より

$$c^4 - ac^3 + bc^2 - ac + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad ac(c^2+1) = c^4 + bc^2 + 1$$

a, b は正の実数であるから，上の第 2 式より　　$c > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\left(x^2 - ax + b - \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2\right\} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$f(c) = 0$ であるから　$\left(c + \dfrac{1}{c}\right)^2 - a\left(c + \dfrac{1}{c}\right) + b - 2 = 0$

したがって　$f\left(\dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{1}{c^2}\left\{\left(\dfrac{1}{c} + c\right)^2 - a\left(\dfrac{1}{c} + c\right) + b - 2\right\} = 0$

(i) $c \neq 1$ のとき，$f(c) = f\left(\dfrac{1}{c}\right) = 0$ より，$f(x)$ は $(x-c)\left(x - \dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れる．

(ii) $c = 1$ のとき，$f(1) = 0$ であるから，$(*)$ より

$$-2a + b + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a - 2 \quad \cdots ①$$

① を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2a - 4\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)\right\} \\ &= (x^2-1)^2 - ax(x-1)^2 \\ &= (x-1)^2\{(x+1)^2 - ax\} \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，$f(x)$ は $(x-c)\left(x - \dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れる．

(2) $f(x)$ が $x-s$，$x-t$ で割り切れる，すなわち，これらを因数にもつとき，(1) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-s)(x-t)\left(x-\frac{1}{s}\right)\left(x-\frac{1}{t}\right) \\ &= \left\{x^2-\left(s+\frac{1}{s}\right)x+1\right\}\left\{x^2-\left(t+\frac{1}{t}\right)x+1\right\} \\ &= x^4-\left(s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}\right)x^3+\left\{\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+2\right\}x^2 \\ &\qquad -\left(s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}\right)x+1 \end{aligned}$$

係数を比較して

$$a=s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t},\quad b=\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+2 \quad \cdots(**)$$

(1) の結果から　$s>0$，$t>0$

したがって，相加・相乗平均の大小関係により，$(*)$ の第 1 式は

$$s+\frac{1}{s} \geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{1}{s}}=2,\quad t+\frac{1}{t} \geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2 \quad \text{よって} \quad a \geqq 4$$

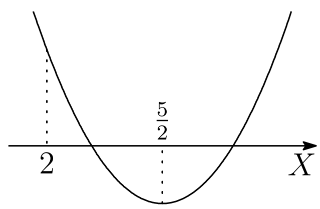
(3) $\alpha=s+\dfrac{1}{s}$，$\beta=t+\dfrac{1}{t}$ とおくと，(2) の結果から　$\alpha \geqq 2$，$\beta \geqq 2$

$a=5$ のとき，$(**)$ より　　$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=b-2$

α，β を解とする 2 次方程式は　$X^2-5X+b-2=0$

$g(X)=X^2-5X+b-2$ とおくと　$g(X)=\left(X-\dfrac{5}{2}\right)^2+b-\dfrac{33}{4}$

$g(X)=0$ の 2 解が $X \geqq 2$ の範囲に実数解をもつことから



$$g(2)=b-8 \geqq 0,\quad b-\frac{33}{4} \leqq 0$$

ゆえに　　$8 \leqq b \leqq \dfrac{33}{4}$

b は自然数であるから　　$\boldsymbol{b=8}$

■

3 (1) $f(t) = 2\sin t + \cos 2t$，$g(t) = 2\cos t + \sin 2t$ より $(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\cos t - 2\sin 2t = 2\cos t - 4\sin t\cos t \\ &= 2\cos t(1 - 2\sin t) \\ g'(t) &= -2\sin t + 2\cos 2t = -2\sin t + 2(1 - 2\sin^2 t) \\ &= -2(\sin t + 1)(2\sin t - 1) \end{aligned}$$

$f(t)$，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

よって　$f(t)$ の最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$，$g(t)$ の最大値 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(2) $f(t) = 2\sin t + \cos 2t = -2\sin^2 t + 2\sin t + 1$ より

$$\begin{aligned} f(t_1) - f(t_2) &= -2(\sin^2 t_1 - \sin^2 t_2) + 2(\sin t_1 - \sin t_2) \\ &= -2(\sin t_1 - \sin t_2)(\sin t_1 + \sin t_2 - 1) \end{aligned}$$

$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$f(t_1) = f(t_2)$ より，$\sin t_1 - \sin t_2 \neq 0$ に注意して

$$\sin t_1 + \sin t_2 - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

$g(t) = 2\cos t + \sin 2t = 2\cos t + 2\sin t\cos t = 2\cos t(1 + \sin t)$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}g(t)^2 &= \cos^2 t(1 + \sin t)^2 = (1 - \sin t)(1 + \sin t)^3 \\ &= 2(1 + \sin t)^3 - (1 + \sin t)^4 \end{aligned}$$

$u = 1 + \sin t_1$，$v = 1 + \sin t_2$ とおくと，① より $u + v = 3$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\{g(t_1)^2 - g(t_2)^2\} &= 2(u^3 - v^3) - u^4 + v^4 \\ &= 2(u - v)(u^2 + uv + v^2) - (u - v)(u + v)(u^2 + v^2) \\ &= 2(u - v)(u^2 + uv + v^2) - 3(u - v)(u^2 + v^2) \\ &= (u - v)(-u^2 + 2uv - v^2) = (v - u)^3 \\ &= (\sin t_2 - \sin t_1)^3 \end{aligned}$$

$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin t_2 - \sin t_1 > 0$ であるから，上式より

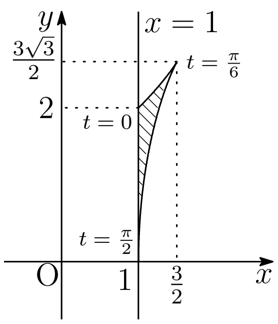
$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 \geqq 0$$

(3) (1) の結果から，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$$f(t) \geqq 1, \quad g(t) \geqq 0$$

(2) の結果から，$0 \leqq t_1 < \dfrac{\pi}{6} < t_2$ において，
$f(t_1) = f(t_2)$ を満たす t_1，t_2 に対して

$$g(t_1) > g(t_2)$$



したがって，右の図の斜線部分の面積が S であるから

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)\cdot(2\sin t + \cos 2t)'dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2 t - 2\sin 2t\cos t - 2\sin^2 2t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2t - \sin 3t - \sin t + \cos 4t + 1)\,dt \\
&= \left[\ \sin 2t + \frac{1}{3}\cos 3t + \cos t + \frac{1}{4}\sin 4t + t\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\vec{a} = (0,0,1)$，$\vec{b} = (1,0,0)$，$\vec{c} = (0,1,0)$ とすると，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(-\vec{b})$，E$(-\vec{c})$，F$(-\vec{a})$ であるから

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{c}, \\
&\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{b}, \\
&\overrightarrow{\mathrm{OS}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{c}
\end{aligned}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (t-1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{SR}}$ であるから，4 点 P，Q，R，S は同一平面上にある．

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b}+\vec{c})$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \left(\dfrac{s+t-2}{2},\ \dfrac{s+t-2}{2}, -(s+t)\right)$

ここで，$s+t=2u$ とおくと $(0<u<1)$ $\overrightarrow{\mathrm{LM}} = (u-1,\ u-1, -2u)$

$$m^2 = |\overrightarrow{\mathrm{LM}}|^2 = (u-1)^2 + (u-1)^2 + (-2u)^2$$
$$= 6u^2 - 4u + 2 = 6\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

よって，$u=\dfrac{1}{3}$，すなわち，$s+t=\dfrac{2}{3}$ のとき，m は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(3) 直線 LM と xy 平面との交点を H とすると，$\vec{a}$ の係数に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{t\overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{s+t} = \frac{t(1-s)+s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

したがって

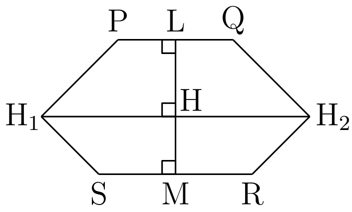
$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$
$$= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$
$$= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

$s+t=\dfrac{2}{3}$ を上の 2 式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = s(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (s,\ s,\ s),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (-t, -t, -t)$$

ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{HL}}| = \sqrt{3}s$，$|\overrightarrow{\mathrm{HM}}| = \sqrt{3}t$

平面 PQRS と線分 BE，CD のとの交点をそれぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{2}$

(1) の結果から　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = (1-s)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-s)\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{\mathrm{SR}}| = (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-t)\sqrt{2}$

X は 2 つの台形 $\mathrm{PH_1H_2Q}$，$\mathrm{H_1SRH_2}$ の和であるから

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}(\mathrm{PQ} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HL} + \frac{1}{2}(\mathrm{SR} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HM} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}s + \frac{1}{2}\left\{(1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}t \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t) - (s^2+t^2)\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\{4(s+t) - (s+t)^2 - (s-t)^2\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{4\cdot\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - (s-t)^2\right\} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{\frac{20}{9} - (s-t)^2\right\}
\end{aligned}$$

よって，$s-t=0$，すなわち，$s=t=\dfrac{1}{3}$ のとき，X は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}}{9}}$ ■

5　(1) $n+1$ 試合目に A が勝つのは，n 試合目に A が勝っているときと B が勝っているときがあるから，次の確率漸化式が成立する．

$$a_{n+1} = pa_n + q(1-a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = (p-q)a_n + q$$

したがって　$a_{n+1} - \dfrac{q}{1-p+q} = (p-q)\left(p_n - \dfrac{q}{1-p+q}\right)$

$$a_n - \frac{q}{1-p+q} = (p-q)^{n-1}\left(p_1 - \frac{q}{1-p+q}\right)$$

$a_1 = p$ であるから

$$\begin{aligned}
a_n - \frac{q}{1-p+q} &= (p-q)^{n-1}\cdot\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q} \\
a_n &= \boldsymbol{\frac{(1-p)(p-q)^n + q}{1-p+q}}
\end{aligned}$$

(2)　(i)　n 試合目に A が勝つ場合

勝者が $\boxed{\mathrm{BA}}$ の順で 2 回，$\boxed{\mathrm{A}}$ が $n-4$ 回であるから，その確率は

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_2\{(1-p)q\}^2p^{n-4} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2q^2p^{n-4} $$

(ii)　n 試合目に B が勝つ場合

勝者が $\boxed{\mathrm{BA}}$ の順で 1 回，$\boxed{\mathrm{A}}$ が $n-3$ 回，最後に $\boxed{\mathrm{B}}$ であるから，その確率は

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_1(1-p)q\cdot p^{n-3} \times (1-p) = (n-2)(1-p)^2qp^{n-3} $$

(i),(ii) より

$$ \begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2q^2p^{n-4} + (n-2)(1-p)^2qp^{n-3} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(1-p)^2q(n-2)\{(n-3)q+2p\}p^{n-4}} \end{aligned} $$

■

7.5　2019 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 以下の問いに答えよ．ただし，log は自然対数，e はその底とする．

(1) b を実数とする．関数

$$f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ．

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 a，b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める．

$$I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log I_n$$

を求めよ．ただし，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0$$

を用いてもよい．

2 自然数 a，b に対し，

$$w = \cos\frac{a\pi}{3+b} + i\sin\frac{a\pi}{3+b}$$

とおく．ただし，i は虚数単位とする．複素数 z_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を以下のように定める．

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 - w, \quad z_n = (1-w)z_{n-1} + wz_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $a = 4$，$b = 3$ のとき，複素数平面上の点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ．

(2) $a = 2,\ b = 1$ のとき，z_{63} を求めよ．

(3) さいころを 2 回投げ，1 回目に出た目を a，2 回目に出た目を b とする．このとき $z_{63} = 0$ である確率を求めよ．

3 実数 s，t が $s^2 + t^2 \leqq 6$ を満たしながら変わるとき，xy 平面上で点 $(s+t,\ st)$ が動く領域を A とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $(2,\ \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ．

(2) A を図示せよ．

(3) A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

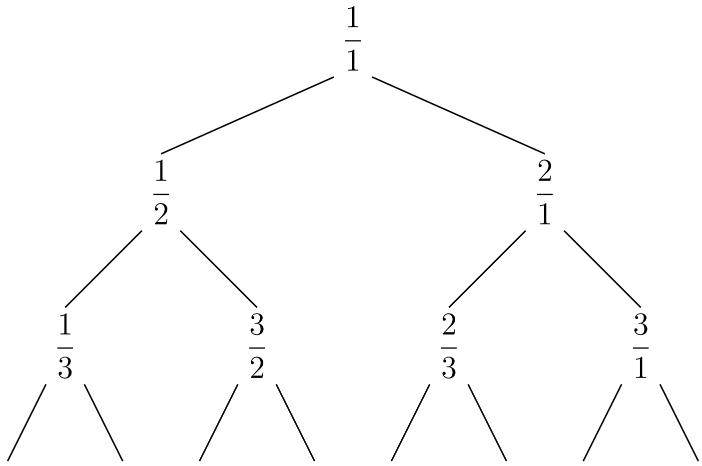
4 下の図は，$\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$，右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ．ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす．

(2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ．

(3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ．

(4) $\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ．たとえば，$\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である．



5 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える．S_1 と S_2 の共通部分を C とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ．

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ．

解答例

1　(1) $f(x)=\displaystyle\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=-e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\\&=-\frac{2}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}<0\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は単調に減少する．

(2) $0<a\leqq b$ および (1) の結果より，$f(b)\leqq f(a)$ であるから

$$\int_b^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\qquad\cdots①$$

$0<a\leqq t\leqq b$ において，$e^{-\frac{t^2}{2}}\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}$ であるから

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\leqq\int_a^b e^{-\frac{a^2}{2}}\,dt=\Big[\,e^{-\frac{a^2}{2}}t\,\Big]_a^b=e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)\qquad\cdots②$$

①，② により，$a\leqq b$ を満たす正の実数 a，b に対して，次式が成立する．

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

(3) (2) の結論において，t を $\sqrt{n}\,t$ に置き換えると

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_{\frac{a}{\sqrt{n}}}^{\frac{b}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{2}}\sqrt{n}\,dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

さらに，$a=\sqrt{n}$，$b=2\sqrt{n}$ とすると

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\frac{2\sqrt{n}}{4n+1}e^{-2n}\leqq\sqrt{n}\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt\leqq e^{-\frac{n}{2}}(2\sqrt{n}-\sqrt{n})$$

$$\frac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}\left(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)\leqq\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt\leqq e^{-\frac{n}{2}}$$

ここで，$J_n=\dfrac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}\left(1-\dfrac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$，$K_n=e^{-\frac{n}{2}}$ とおくと

$$J_n\leqq I_n\leqq K_n\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{n}\log J_n\leqq\frac{1}{n}\log I_n\leqq\frac{1}{n}\log K_n\qquad\cdots③$$

$\log K_n = -\dfrac{n}{2}$ より

$$\frac{1}{n}\log K_n = -\frac{1}{2} \quad よって \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log K_n = -\frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

$\log J_n = -\log(n+1) - \dfrac{n}{2} + \log\left(1 - \dfrac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$ より

$$\frac{1}{n}\log J_n = -\frac{1}{n}\log(n+1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\log\left(1 - \frac{2+\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1) = 0$ に注意して　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log J_n = -\frac{1}{2} \quad \cdots ⑤$

③，④，⑤ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

■

2 (1) $z_1 = 1$，$z_2 = 1 - w$，$z_n = (1-w)z_{n-1} + wz_{n-2}$ より

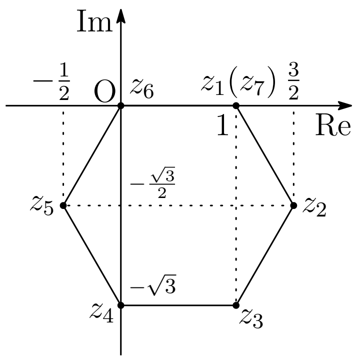
$$z_2 - z_1 = -w,$$
$$z_n - z_{n-1} = -w(z_{n-1} - z_{n-2})$$

したがって　$$\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \frac{z_4 - z_3}{z_3 - z_2} = \cdots = \frac{z_7 - z_6}{z_6 - z_5} = -w$$

$a = 4$，$b = 3$ より　$w = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$$\begin{aligned}-w &= (\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

ゆえに　$|z_n - z_{n-1}| = 1$，$\angle z_{n-1}z_nz_{n+1} = -\dfrac{\pi}{3}$



よって，点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形は，右の図のように 1 辺の長さが 1 の正六角形である．

(2) $z_1=1$，$z_2=1-w$，$z_n=(1-w)z_{n-1}+wz_{n-2}$ より

$$\begin{aligned} z_{n+1}+wz_n &= z_n+wz_{n-1}=z_2+wz_1=1, \\ z_{n+1}-z_n &= -w(z_n-z_{n-1})=(-w)^{n-1}(z_2-z_1)=(-w)^n \end{aligned}$$

上の 2 式から　$z_n=\begin{cases} \dfrac{1-(-w)^n}{1+w} & (w\neq -1) \\ n & (w=-1) \end{cases}$　$\cdots(*)$

$a=2$，$b=1$ より　$w=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i$

よって　$z_{63}=\dfrac{1-(-w)^{63}}{1+w}=\dfrac{1-(-i)^{63}}{1+i}=\dfrac{1-i}{1+i}=\boldsymbol{-i}$

(3) $w=\cos\dfrac{a\pi}{3+b}+i\sin\dfrac{a\pi}{3+b}$，$w\neq -1$ より　$\dfrac{a\pi}{3+b}$ は π の奇数倍でない

$$\begin{aligned} -w &= (\cos\pi+i\sin\pi)\left(\cos\frac{a\pi}{3+b}+i\sin\frac{a\pi}{3+b}\right) \\ &= \cos\left(\frac{a}{3+b}+1\right)\pi+i\sin\left(\frac{a}{3+b}+1\right)\pi \end{aligned}$$

$z_{63}=\dfrac{1-(-w)^{63}}{1+w}=0$ となるとき，$(-w)^{63}=1$ であるから

$$63\left(\frac{a}{3+b}+1\right)\pi \text{ は } 2\pi \text{ の整数倍　ゆえに　} \frac{63a\pi}{3+b} \text{ は } \pi \text{ の奇数倍}$$

したがって，$(a,\ b)$ の満たす条件は

$$\frac{63a\pi}{3+b} \text{ は } \pi \text{ の奇数倍かつ　} \frac{a\pi}{3+b} \text{ は } \pi \text{ の奇数倍でない}$$

これを満たす $(a,\ b)$ は，次の 7 組．

$a=1$ のとき　$b=4,\ 6$
$a=2$ のとき　$b=3,$
$a=3$ のとき　$b=4,\ 6$
$a=4$ のとき　なし
$a=5$ のとき　$b=4,\ 6$
$a=6$ のとき　なし

よって，求める確率は　$\dfrac{7}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$　■

3 (1) $s+t=2$，$st=\sqrt{2}$ に対し

$$(s-t)^2=(s+t)^2-4st=2^2-4\cdot\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})<0$$

したがって，これを満たす実数 s，t は存在しない．
よって，点 $(2,\ \sqrt{2})$ は領域 A の点ではない．

(2) $s+t=x$，$st=y$ とおくと，2 数 s，t は，2 次方程式 $\lambda^2-x\lambda+y=0$ の解

$$\frac{x\pm\sqrt{x^2-4y}}{2}$$

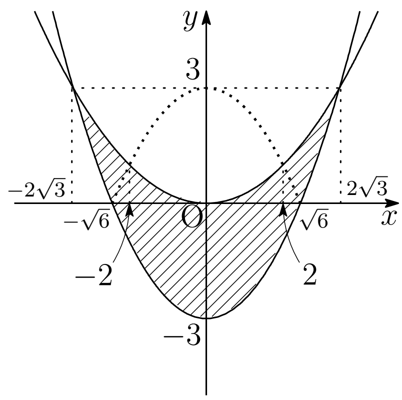
である．これが実数解で，条件 $s^2+t^2\leqq 6$ を満たすから

$$x^2-4y\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2}\right)^2\leqq 6$$

したがって，領域 A の表す不等式は

$$\begin{cases} y\leqq \dfrac{x^2}{4} \\ y\geqq \dfrac{1}{2}x^2-3 \end{cases}$$

右の図の斜線部分で，境界線を含む．



(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{2\pi}&=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}-3\right)^2dx+\int_2^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2dx-\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-3\right)^2dx\\
&=\int_0^2\left(\frac{x^4}{4}-3x^2+9\right)dx+\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{x^4}{16}dx-\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^4}{4}-3x^2+9\right)dx\\
&=\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_0^2+\left[\frac{x^5}{80}\right]_2^{2\sqrt{3}}-\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\\
&=\frac{8(7-3\sqrt{3}+3\sqrt{6})}{5}
\end{aligned}$$

よって，求める回転体の体積は　$V=\boldsymbol{\dfrac{16(7-3\sqrt{3}+3\sqrt{6})}{5}\pi}$ ■

$\boxed{4}$ (1) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記する．

$(p,q)\,|\,(p+q)$ および $(p,q)\,|\,p$ であるから，(p,q) は $p+q$ と p の公約数．

$$(p,q)\,|\,(p+q,p) \quad \cdots ①$$

$q=(p+q)-p$ より，$(p+q,p)\,|\,q$，また，$(p+q,p)\,|\,p$ であるから，$(p+q,p)$ は q と p の公約数．

$$(p+q,p)\,|\,(p,q) \quad \cdots ②$$

①，② から　$(p,q)=(p+q,p) \quad \cdots (*)$

$(*)$ は p と q を交換しても成立するから

$$(q,p)=(q+p,q) \quad \text{ゆえに} \quad (p,q)=(p+q,q) \quad \cdots (**)$$

$(*)$，$(**)$ より，$(p,q)=1$ のとき，$(p+q,p)=1$，$(p+q,q)=1$

したがって，$\dfrac{p}{q}$ が既約分数のとき，$\dfrac{p}{p+q}$，$\dfrac{p+q}{q}$ も既約分数である．

よって，$\dfrac{1}{1}$ から始まるこの樹形図に現れる分数は，すべて既約分数である．

(2) $\dfrac{p}{q}$ について (p，q は自然数)，$n=p+q$ とする．樹形図に現れない既約分数の集合 $A(\neq \phi)$ が存在すると仮定する．A における n の最小値を N とし，その N に対応する既約分数の 1 つを $\dfrac{P}{Q}$ とする．

(i) $P=Q$ のとき，すなわち，$\dfrac{1}{1}$ は樹形図にあるので，矛盾．

(ii) $P<Q$ のとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ に対し，$\dfrac{P}{Q-P}$ は既約分数で

$$n=P+(Q-P)=N-P<N$$

したがって，N の最小性により，既約分数 $\dfrac{P}{Q-P}$ は樹形図に現れる．この既約分数に対して左下に配置する規則を適用すると

$$\frac{P}{P+(Q-P)}=\frac{P}{Q}$$

このとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ が樹形図に現れ，矛盾．

(iii) $P > Q$ のとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ に対し，$\dfrac{P-Q}{Q}$ は既約分数で

$$n = (P-Q) + Q = N - Q < N$$

したがって，N の最小性により，既約分数 $\dfrac{P-Q}{Q}$ は樹形図に現れる．この既約分数に対して右下に配置する規則を適用すると

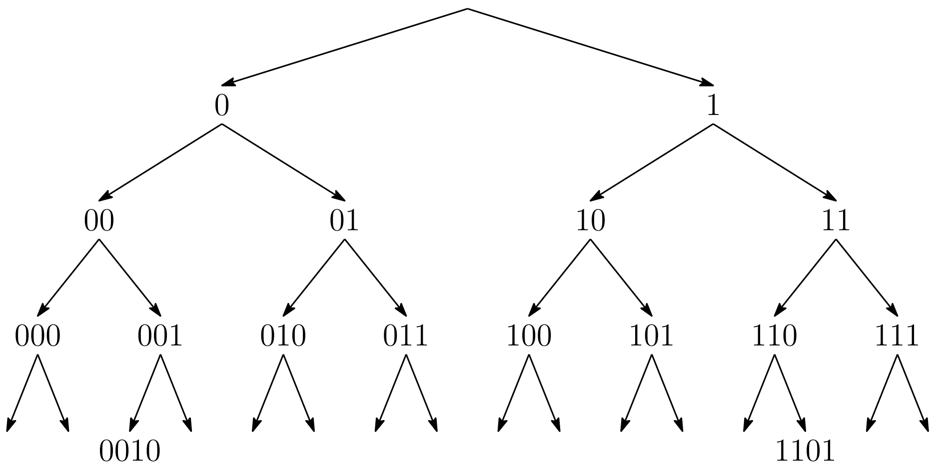
$$\frac{(P-Q)+Q}{Q} = \frac{P}{Q}$$

このとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ が樹形図に現れ，矛盾．

(i)〜(iii) より，$A = \phi$ となり，すべての正の有理数がこの樹形図に現れる．

(3) 樹形図に現れる既約分数 $\dfrac{p}{q}$ に対し，$n = p + q$ とする．
樹形図に現れる有理数 (既約分数) で，等しい 2 数の存在を仮定し，n を最小にするものを考える．その値を n_0 とすると，(2) と同様に，n_0 の最小性により矛盾を生じる．

(4) 樹形図の既約分数に対して，左下 (分母に分子を加える)，右下 (分子に分母を加える) にそれぞれ配置することを配置「0」，配置「1」と表記する．例えば,「左下 → 左下 → 右下 → 左下」,「右下 → 右下 → 左下 → 右下」の配置をそれぞれ 0010，1101 と表記する．これらの文字列は 4 個であるから，5 段目にあり，配置を 2 進数とみると，それぞれ 2，13．起点に注意すると，これらにそれぞれ 1 を加えた 3，14 が左からの順番を表す．



$\dfrac{1}{1}$ から $\dfrac{19}{44}$ に至る配置は，$\dfrac{19}{44}$ から $\dfrac{1}{1}$ へ逆に辿ることにより

$$\frac{19}{44} \overset{0}{\leftarrow} \frac{19}{25} \overset{0}{\leftarrow} \frac{19}{6} \overset{1}{\leftarrow} \frac{13}{6} \overset{1}{\leftarrow} \frac{7}{6} \overset{1}{\leftarrow} \frac{1}{6} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{5} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{4} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{3} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{2} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{1}$$

したがって，$\dfrac{19}{44}$ の表す配置は　0000011100

文字列が 10 個で，配置を 2 進数とみると 28 であるから，起点に注意して

11 段目の左から 29 番目

■

5　(1) 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$
$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

の中心は，それぞれ (1, 1, 1)，(2, 3, 3) であり，この 2 点間の距離は

$$\sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2} = 3$$

また，S_1，S_2 の半径は，それぞれ $\sqrt{7}$，1 より

$$\sqrt{7} - 1 < 3 < \sqrt{7} + 1$$

したがって，S_1 と S_2 の共通部分 C は円である．S_1 と S_2 の方程式から $x^2 + y^2 + z^2$ の項を消去すると，円 C が存在する次の平面の方程式を得る．

$$2x + 4y + 4z - 25 = 0$$

これから，S_1 との共通部分が C となる球面の方程式は，実数 k を用いて

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 7 + k(2x + 4y + 4z - 25) = 0$$
$$(x+k-1)^2 + (y+2k-1)^2 + (z+2k-1)^2 = 9k^2 + 15k + 7 \quad \cdots (*)$$

ゆえに　　$9k^2 + 15k + 7 = 9\left(k + \dfrac{5}{6}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

球面の半径が最小になるのは，$k = -\dfrac{5}{6}$ ときで，その方程式は

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}}$$

(2) 球面の半径が $\sqrt{3}$ になるとき　$9k^2+15k+7=3$

ゆえに　$(3k+1)(3k+4)=0$　これを解いて　$k=-\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}$

上の結果を $(*)$ に代入することにより，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3,}$$
$$\boldsymbol{\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3}$$

■

7.6　2020 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 関数

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geqq 0)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $f(x)$ とその導関数の極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

をそれぞれ求めよ．ただし，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることを用いてよい．

(3) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない．

2 1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k = 1$，出た目が 2 の場合は $X_k = -1$，その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする．

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき，Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ を Z_n で表す．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) Z_2 が実数でない確率を求めよ．

(2) Z_1，Z_2，Z_3，$\cdots$，Z_n がいずれも実数でない確率を求めよ．

(3) Z_n が実数となる確率を p_n とする．p_n を n を用いて表し，極限 $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

3 n を 2 以上の自然数とする．三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す．$\angle \mathrm{ACB} = n\angle \mathrm{ABC}$ であるとき，$c < nb$ を示せ．

4 t を正の実数とする．xy 平面において，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad xy \leqq 1, \quad x + y \leqq t$$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく．極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S(t) - 2\log t)$ を求めよ．

5 3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す．三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．以下の問いに答えよ．

(1) a の値を固定して b の値を変化させるとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．これを示せ．

(2) a，b の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える a，b の値をそれぞれ求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x \geqq 0$ より，$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} > 0$ であるから，$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log f(x) = \frac{1}{x+1}\log(x+1) \qquad \text{(A)}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{(x+1)^2}\log(x+1) + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2} \qquad \text{(B)}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

よって　最大値 $\boldsymbol{f(e-1) = e^{\frac{1}{e}}}$

(2) (A) より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$　よって $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = 1}$

上式および (B) より

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \frac{f(x)}{x+1}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{\log(x+1)}{x+1}\right) = \mathbf{0}$$

補足 $g(x) = 2(\sqrt{x+1}-1) - \log(x+1)$ とおくと $(x \geqq 0)$　$g'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+1}$

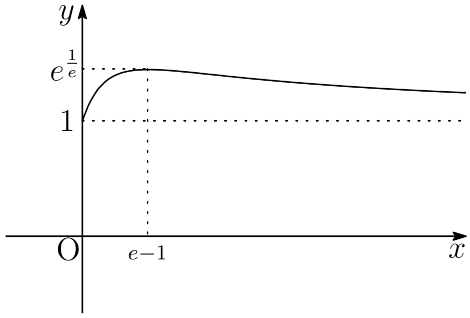
$g(0) = 0$，$x > 0$ において $g'(x) > 0$ であるから　$g(x) \geqq 0$ $(x \geqq 0)$

ゆえに　$x \geqq 0$ において　$0 \leqq \dfrac{\log(x+1)}{x+1} \leqq \dfrac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} \leqq \lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+1}\right) = 0$$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$

(3) (1)，(2) の結果から，$y = f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



2　(1) Z_2 が実数となるのは

$$(X_1,\ X_2) = (0,\ 0),\ (1, -1),\ (-1,\ 1)$$

したがって，Z_2 が実数である確率は

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) $X_1 = 1$ または $X_1 = -1$，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とすると

$S_n = 1$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = 1) = \dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

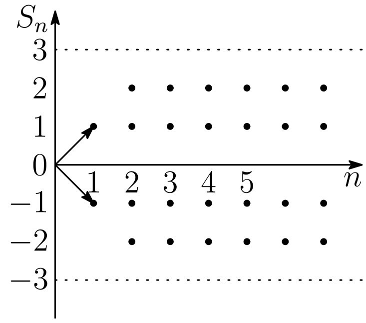
$S_n = 2$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = -1) = \dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

$S_n = -1$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = -1) = \dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

$S_n = -2$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = 1) = \dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$



(3) 法 3 について

$$p_n = P(S_n \equiv 0),\quad q_n = P(S_n \equiv 1),\quad r_n = P(S_n \equiv 2)\quad (\mathrm{mod}\ 3)$$

とすると，$p_1 = \dfrac{4}{6}$，$p_{n+1} = \dfrac{4}{6}p_n + \dfrac{1}{6}q_n + \dfrac{1}{6}r_n$ であるから

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}(p_n + q_n + r_n)\quad \text{ゆえに}\quad p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}$$

したがって　$p_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}\left(p_n - \dfrac{1}{3}\right)$　ゆえに　$p_n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

これから　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$　よって　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3}}$　■

3 $C=\angle\mathrm{ACB}$，$B=\angle\mathrm{ABC}$ とする．正弦定理により $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$C=nB$ であるから $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin nB}$　ゆえに $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin nB}{\sin B}$　$\cdots$①

$B+C<\pi$，$C=nB$ $(n\geqq 2)$ より，$B<\dfrac{\pi}{n+1}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから，B は鋭角

$0<B<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，2以上の自然数 n について

$$\frac{\sin nB}{\sin B}<n \quad \cdots(*)$$

が成立することを数学的帰納法で示す．

［1］$n=2$ のとき，$(*)$ より

$$\frac{\sin 2B}{\sin B}=\frac{2\sin B\cos B}{\sin B}=2\cos B<2$$

このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると $\dfrac{\sin kB}{\sin B}<k$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(k+1)B}{\sin B}&=\frac{\sin kB\cos B+\cos kB\sin B}{\sin B}\\&=\frac{\sin kB}{\sin B}\cdot\cos B+\cos kB\\&<k\cdot 1+1=k+1\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，2以上の自然数 n について，$(*)$ は成立する．

① および $(*)$ により

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin nB}{\sin B}<n \quad \text{よって} \quad c<nb$$

別解　$f(\theta)=n\sin\theta-\sin n\theta$ とおくと $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{n}\right)$

$$f'(\theta)=n\cos\theta-n\cos n\theta=n(\cos\theta-\cos n\theta)$$

$n\geqq 2$ のとき，$0<\theta<n\theta<\pi$ において，$\cos n\theta<\cos\theta$ であるから

$$f'(\theta)>0$$

$f(0)=0$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，$0<\theta<n\theta<\pi$ において

$$f(\theta)=n\sin\theta-\sin n\theta>0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}<n \quad \cdots(**)$$

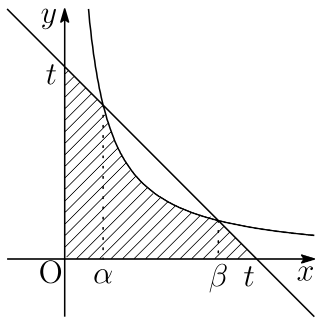
条件から，$B+C<\pi$，$C=nB$ $(n \geqq 2)$ より，$B<\dfrac{\pi}{n+1}<\dfrac{\pi}{n}$

$\theta=B$，$n\theta=C$ とおくと，①，$(**)$ より

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin nB}{\sin B}<n \quad \text{よって} \quad c<nb$$

■

4 曲線 $xy=1$ と直線 $x+y=t$ $(t>2)$ の 2 式から，y を消去すると



$$x(t-x)=1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-tx+1=0$$

この方程式の解を α, β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}, \quad \beta=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2},$$
$$\alpha+\beta=t, \quad \alpha\beta=1, \quad \beta-\alpha=\sqrt{t^2-4}$$

曲線 $xy=1$ と直線 $x+y=t$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\int_\alpha^\beta\left(t-x-\frac{1}{x}\right)dx=\left[tx-\frac{x^2}{2}-\log x\right]_\alpha^\beta \\ &=t(\beta-\alpha)-\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\log\frac{\beta}{\alpha}=(\beta-\alpha)\left(t-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\log\frac{\beta^2}{\alpha\beta} \\ &=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}-2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2} \end{aligned}$$

$S(t)=\dfrac{t^2}{2}-S$ より，$S(t)=\dfrac{t(t-\sqrt{t^2-4})}{2}+2\log\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} S(t)-2\log t&=\frac{t(t-\sqrt{t^2-4})}{2}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}-2\log t \\ &=\frac{2t}{t+\sqrt{t^2-4}}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2t} \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}(S(t)-2\log t)&=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}+2\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}{2}\right) \\ &=\frac{2}{1+1}+2\log\frac{1+1}{2}=\mathbf{1} \end{aligned}$$

■

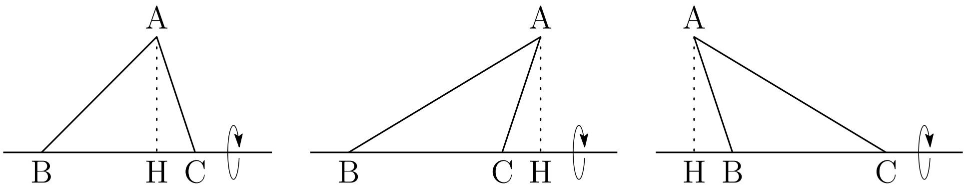
$\boxed{5}$ (1) 点 A から直線 BC に垂線 AH を引く．$h = \mathrm{AH}$ とすると

(i) H が線分 BC 上にあるとき

$$V = \frac{\pi}{3}ah^2$$

(ii) H が線分 BC 上にないとき

$$V = \frac{\pi}{3}|\mathrm{BH} - \mathrm{CH}|h^2 = \frac{\pi}{3}ah^2$$



(i)，(ii) の結果から，a は定数であるから，V が最大となるのは，h が最大のときである．三角形の成立条件 $|\mathrm{AB} - \mathrm{AC}| < \mathrm{BC} < \mathrm{AB} + \mathrm{CA}$ より

$$|(2 - a - b) - b| < a < (2 - a - b) + b$$

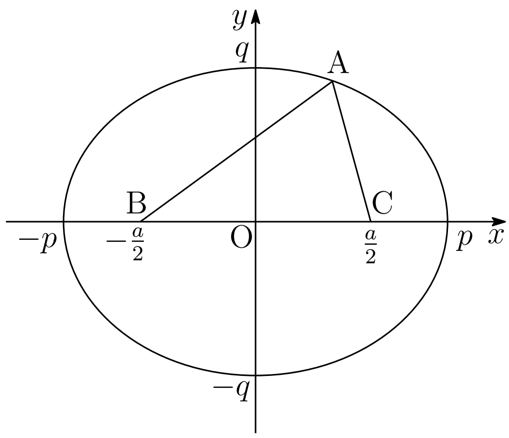
これを解いて　$1 < a + b,\quad a < 1,\quad b < 1$

条件より，$\mathrm{BC} = a$ は定数であるから，$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 2$ より，

$$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = 2 - a \quad \cdots ①$$

は定数であるから，点 A は，2 点 B，C を焦点とする長軸の長さが $2 - a$ の楕円上の点である．$\mathrm{BC} = a$ より，座標平面上に $\mathrm{B}\left(-\frac{a}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ をとると，楕円の頂点 $(\pm p,\ 0)$，$(0,\ \pm q)$ は $(p,\ q > 0)$

$$2p = 2 - a,\quad \sqrt{p^2 - q^2} = \frac{a}{2}\quad ゆえに\quad p = 1 - \frac{a}{2},\quad q^2 = 1 - a \quad \cdots ②$$



よって，h が最大となるのは，点 A が y 軸上，すなわち，△ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．

(2) (1) の結果から

$$V = \frac{\pi}{3}ah^2$$

が最大となるのは，AB = AC，$h = q$ のときであるから，①，② より

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = b = 1 - \frac{a}{2}$$
$$V = \frac{\pi}{3}a(1-a) = -\frac{\pi}{3}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{12}$$

よって，$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$**，** $\boldsymbol{b = \frac{3}{4}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$ をとる**.** ■

7.7　2021年(150分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 $a,\ b$ を $ab < 1$ をみたす正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から，曲線 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ に2本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$，$\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とする．ただし，$s < t$ とする．

(1) s および t を $a,\ b$ を用いて表せ．

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が曲線 $y = \dfrac{9}{4} - 3x^2$ 上の $x > 0,\ y > 0$ をみたす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの $a,\ b$ の値を求めよ．

2 空間内に，同一平面上にない4点 O，A，B，C がある．$s,\ t$ を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ をみたす実数とする．線分 OA を $1:1$ に内分する点を $\mathrm{A_0}$，線分 OB を $1:2$ に内分する点を $\mathrm{B_0}$，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．さらに4点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，P，Q が同一平面上にあるとする．

(1) t を s を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 2$，$\angle\mathrm{AOB} = 120^\circ$，$\angle\mathrm{BOC} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{COA} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{POQ} = 90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ．

3 n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ をみたす実数とする．

(1) $x \geqq t$ のとき，不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ をみたすような実数 $p,\ q$ の値を求めよ．

4 整数 $a,\ b,\ c$ に関する次の条件 $(*)$ を考える．

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots (*)$$

(1) 整数 $a,\ b,\ c$ が $(*)$ および $a \neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ．

(2) $c = 3600$ のとき，$(*)$ および $a < b$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ．

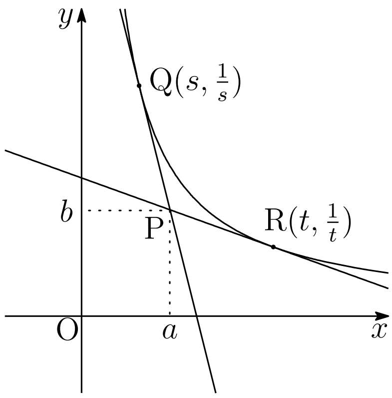
5 次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ．

(2) 自然数 n に対し，$x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく．t を $|t| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．このとき，曲線 $C : y = \sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ のいずれかと等しいことであることを示せ．

解答例

1　(1) $y=\dfrac{1}{x}$ より　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$



曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$ における接線は

$$y-\frac{1}{s}=-\frac{1}{s^2}(x-s)$$

これが点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$b-\frac{1}{s}=-\frac{1}{s^2}(a-s)$$

s について整理すると　$bs^2-2s+a=0$　$\cdots$①

同様に，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ についても次式を得る．

$$bt^2-2t+a=0 \quad \cdots ②$$

①，② から，$s,\ t\ (s<t)$ は2次方程式 $bu^2-2u+a=0$ の解である．
このとき，$b>0,\ D/4=1-ab>0$ に注意して

$$\boldsymbol{s=\frac{1-\sqrt{1-ab}}{b},\quad t=\frac{1+\sqrt{1-ab}}{b}}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{t}{s} = \frac{1+\sqrt{1-ab}}{1-\sqrt{1-ab}} = \frac{2}{1-\sqrt{1-ab}} - 1$$

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ は曲線 $y = \dfrac{9}{4} - 3x^2\ (x > 0,\ y > 0)$ の点であるから

$$a > 0, \quad (*)\ b = \frac{9}{4} - 3a^2 > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$ab = a\left(\dfrac{9}{4} - 3a^2\right) = \dfrac{9}{4}a - 3a^3$ より

$$f(a) = \frac{9}{4}a - 3a^3 \quad \left(0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とおくと　$f'(a) = \dfrac{9}{4} - 9a^2 = -9\left(a + \dfrac{1}{2}\right)\left(a - \dfrac{1}{2}\right)$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$(\frac{\sqrt{3}}{2})$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	(0)

ab が最大のとき，$\dfrac{t}{s}$ は最小となり，最小値は

$$\frac{2}{1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}} - 1 = \mathbf{3}$$

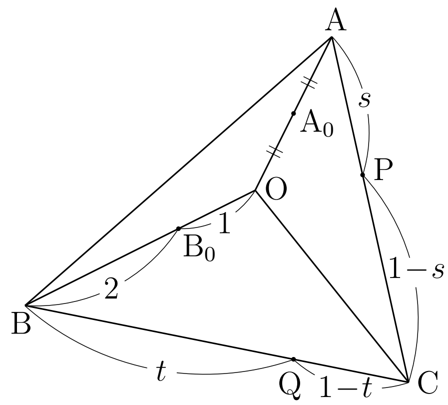
このとき，$(*)$ より　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{3}{2}}$ ■

2　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $(0<s<1)$

$$\vec{p}-\vec{a}=s(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\vec{a})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(1-\dfrac{1}{s}\right)\vec{a}+\dfrac{1}{s}\vec{p}$



点Qは線分BCを $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(1-t)\vec{b}+t\left\{\left(1-\frac{1}{s}\right)\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{p}\right\}\\&=t\left(1-\frac{1}{s}\right)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\frac{t}{s}\vec{p}\end{aligned}$$

$\vec{a}=2\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2t\left(1-\frac{1}{s}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}+\frac{t}{s}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

点Qは平面 $\mathrm{A_0B_0P}$ 上の点であるから

$$2t\left(1-\frac{1}{s}\right)+3(1-t)+\frac{t}{s}=1\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{t=\frac{2s}{s+1}}$$

(2) 条件から　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=1\cdot2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos90^\circ=0,\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos60^\circ=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\vec{p}=s\vec{c}+(1-s)\vec{a}$，$\vec{q}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ について

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=\{s\vec{c}+(1-s)\vec{a}\}\cdot\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}\\&=s(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+st|\vec{c}|^2+(1-s)(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-s)t\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=4st-(1-s)(1-t)+(1-s)t\\&=2t(s+1)+s-1\end{aligned}$$

(1) の結果および，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ より $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ であるから

$$2\cdot\frac{2s}{s+1}(s+1)+s-1=0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{s=\frac{1}{5}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)$，$g(x)=f(x)+\dfrac{(x-t)^2}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{xt}(x-t)\\ g'(x)&=f'(x)+x-t=-\frac{1}{xt}(x-t)+x-t\\ &=\frac{(xt-1)(x-t)}{xt} \end{aligned}$$

$x\geqq t$ において $(t\geqq 1)$，$f(x)$ は単調減少，$g(x)$ は単調増加である．
$f(t)=0$，$g(t)=0$ であるから，$x\geqq t$ において

$$f(x)\leqq 0,\quad g(x)=f(x)+\frac{(x-t)^2}{2}\geqq 0$$

したがって $\quad -\dfrac{(x-t)^2}{2}\leqq f(x)\leqq 0$

よって，$x\geqq t$ のとき $(t\geqq 1)$，次式が成立する．

$$-\frac{(x-t)^2}{2}\leqq \log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\leqq 0$$

別解 (部分積分法を用いた証明法)

$$\begin{aligned} \log x-\log t&=\int_t^x\frac{1}{u}\,du=\int_t^x(u-x)'\frac{1}{u}\,du\\ &=\Big[\,(u-x)\frac{1}{u}\,\Big]_t^x-\int_t^x(u-x)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du\\ &=\frac{1}{t}(x-t)-\int_t^x\frac{x-u}{u^2}du \end{aligned}$$

したがって $\quad \log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)=-\displaystyle\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du \qquad$ (A)

$1\leqq t\leqq x$ であるから $\quad 0\leqq\displaystyle\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du\leqq\int_t^x(x-u)\,du$

$$-\frac{(x-t)^2}{2}=\int_t^x(u-x)\,du\leqq-\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du\leqq 0 \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) により，(1) の不等式が導かれる．

(2) (1) で示した不等式により

$$-\int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{(x-t)^2}{2}\,dx \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} (\log x - \log t)\,dx - \frac{1}{t}\int_t^{t+\frac{1}{n}} (x-t)\,dx \leqq 0$$

$$-\left[\frac{(x-t)^3}{6}\right]_t^{t+\frac{1}{n}} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{t}\left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]_t^{t+\frac{1}{n}} \leqq 0$$

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

(3) (2) で不等式において，$t = 1 + \dfrac{k}{n}$ とすると

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq 0$$

辺々に $-n$ を掛けると

$$0 \leqq \log\left(1+\frac{k}{n}\right) - n\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x\,dx + \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n^2}$$

上式について，$k=0$ から $k=n-1$ までの総和をとると

$$0 \leqq \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right) - n\int_1^2 \log x\,dx + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n}$$

$p = \displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$ とおくと

$$p = \int_1^2 \log x\,dx = \Big[\, x(\log x - 1)\,\Big]_1^2 = 2\log 2 - 1$$

$a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ より　$0 \leqq a_n - pn + \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \dfrac{1}{6n}$　$\cdots(*)$

$-q = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ とおくと

$$q = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\Big[\,\log(1+x)\,\Big]_0^1 = -\frac{\log 2}{2}$$

$(*)$ において，$n \longrightarrow \infty$ とすると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - pn - q) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$$

よって　　$\boldsymbol{p = 2\log 2 - 1}$，$\boldsymbol{q = -\dfrac{\log 2}{2}}$ ■

4 (1) $\displaystyle\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots(*)$

$(*)$ より　$\displaystyle\int_a^b x^2\,dx + b\int_a^c x\,dx - a\int_b^c x\,dx = 0$

$$\frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{b}{2}(c^2-a^2)-\frac{a}{2}(c^2-b^2)=0$$
$$\frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{c^2}{2}(b-a)+\frac{ab}{2}(b-a)=0$$

$a \neq b$ であるから　$2(a^2+ab+b^2)+3c^2+3ab=0$

したがって　　$(2a+b)(a+2b)=-3c^2 \quad \cdots①$

上式より　$2a+b\equiv 0$　または　$a+2b\equiv 0 \pmod 3$

$(2a+b)+(a+2b)=3(a+b)$ であるから

$$2a+b\equiv 0,\quad a+2b\equiv 0 \pmod 3$$

① より　　$\dfrac{2a+b}{3}\cdot\dfrac{a+2b}{3}=-\dfrac{c^2}{3} \quad \cdots①'$

①′ の左辺は整数より，c^2 は 3 で割り切れるから，c は 3 の倍数である．

(2) $\dfrac{2a+b}{3}=A$，$\dfrac{a+2b}{3}=B$ とおくと (A, B は整数)

$$a=2A-B,\quad b=-A+2B$$

$c=3600$ のとき，①′ より　$AB=-2^8\cdot 3^3\cdot 5^4 \quad \cdots(**)$

$b-a=3(B-A)$ であるから，$a<b$ より　$A<0<B$

よって，$(**)$ を満たす組 $(A,\ B)$ の個数は

$$(8+1)(3+1)(4+1)=\mathbf{180}\ \textbf{(個)}$$

■

5 (1) $f(x) = x - \tan x$ とおくと　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \leqq 0$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = -\infty$$

$f(x)$ は，区間 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ において単調減少で，$-\infty < f(x) < \infty$ であるから，実数 a に対して

$$f(x) = a \quad \text{すなわち} \quad x - \tan x = a$$

を満たす x $\left(|x| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ がちょうど1個ある．

(2) $C : y = \sin x$ より，$y' = \cos x$ であるから，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(u,\ \sin u)$ における接線は，それぞれ

$$y = x\cos t - t\cos t + \sin t, \quad y = x\cos u - u\cos u + \sin u$$

これらの2直線が一致するとき，$-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \leqq u$ を満たす $t,\ u$ が存在する，すなわち

(A) $\cos t = \cos u,\ \ -t\cos t + \sin t = -u\cos u + \sin u,\ \ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \leqq u$ を満たす $t,\ u$ が存在する．

これと次が同値であることを示せばよい．

(B) $f(x) = n\pi$ $\left(|x| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の解を x_n とすると，t は $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ のいずれかと等しい．

(A) $\Longrightarrow$ (B) を示す．(A) の第1式より

(i) $u = t + 2l\pi$ (l は自然数)　または　(ii) $u = -t + 2m\pi$ (m は自然数)

(i) のとき，$\sin u = \sin t$，$\cos u = \cos t$ を (A) の第2式に代入すると

$$-t\cos t + \sin t = -u\cos t + \sin t \quad \text{ゆえに} \quad (u-t)\cos t = 0$$

$-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos t \neq 0$ であるから，$u = t$ となり不適．

(ii) のとき，$\sin u = -\sin t$，$\cos u = \cos t$ を (A) の第2式に代入すると

$$-t\cos t + \sin t = -u\cos t - \sin t \quad \text{ゆえに} \quad u\cos t = t\cos t - 2\sin t$$

$-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos t \neq 0$ であるから　$u = t - 2\tan t$

$u = -t + 2m\pi$ を代入すると　$-t + 2m\pi = t - 2\tan t$

整理すると　$t - \tan t = m\pi$　すなわち　$f(t) = m\pi$

(B) $\Longrightarrow$ (A) は，(ii) の証明を逆に辿ればよい．(証終) ■

7.8　2022 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 r を正の実数とする．複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，

$$z+w=zw$$

を満たす点 w が描く図形を求めよ．

2 $\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\cos 4\alpha=\cos 3\alpha$ であることを示せ．

(2) $f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とするとき，$f(\cos\alpha)=0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\cos\alpha$ は無理数であることを示せ．

3 正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える．t が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ．

4 $f(x)=\log(x+1)+1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=x$ は，$x>0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2) (1) の解を α とする．実数 x が $0<x<\alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0<\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$$

(3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=f(x_n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

で定める．このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\alpha-x_{n+1}<\frac{1}{2}(\alpha-x_n)$$

が成り立つことを示せ．

(4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を示せ．

5 座標平面において，t を媒介変数として

$$x = e^t \cos t + e^\pi, \quad y = e^t \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

1 点 z が点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 r $(r>0)$ の円周上を動くとき

$$\left|z-\frac{3}{2}\right|=r \quad \cdots ①$$

$z+w=zw$ より　$(w-1)z=w$　$w\neq 1$ であるから　$z=\dfrac{w}{w-1}$　$\cdots ②$

② を ① に代入すると　$\left|\dfrac{w}{w-1}-\dfrac{3}{2}\right|=r$

$$\left|\frac{2w-3(w-1)}{w-1}\right|=2r \quad \text{ゆえに} \quad \frac{|w-3|}{|w-1|}=2r \qquad (*)$$

(i) $2r=1$ のとき，w は 2 点 1, 3 の垂直二等分線であるから

$$\mathrm{Re}(w)=2$$

(ii) $2r\neq 1$ のとき，w は 2 点 1, 3 を $1:2r$ に内分および外分する 2 点

$$\frac{2r+3}{1+2r},\quad \frac{-2r+3}{1-2r}$$

を直径の両端とする円 (アポロニウスの円) である．w の中心は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2r+3}{1+2r}+\frac{-2r+3}{1-2r}\right)=\frac{3-4r^2}{1-4r^2}$$

w の半径は

$$\frac{1}{2}\left|\frac{2r+3}{1+2r}-\frac{-2r+3}{1-2r}\right|=\frac{4r}{|1-4r^2|}$$

(i)，(ii) より，w が描く図形は

$$\begin{cases} \boldsymbol{r=\dfrac{1}{2}}\textbf{のとき　直線 }\boldsymbol{\mathrm{Re}(w)=2} \\ \boldsymbol{r\neq\dfrac{1}{2}}\textbf{のとき }\boldsymbol{(r>0)}\textbf{　中心}\boldsymbol{\dfrac{3-4r^2}{1-4r^2}}\textbf{，半径}\boldsymbol{\dfrac{4r}{|1-4r^2|}}\textbf{の円} \end{cases}$$

別解　$(*)$ より　$|w-3|^2 = 4r^2|w-1|^2$

$$(w-3)(\overline{w}-3) = 4r^2(w-1)(\overline{w}-1)$$
$$(1-4r^2)w\overline{w} - (3-4r^2)(w+\overline{w}) + 9 - 4r^2 = 0 \qquad (**)$$

(i) $r = \dfrac{1}{2}$ のとき，これを $(**)$ に代入すると

$$w + \overline{w} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(w) = \frac{w+\overline{w}}{2} = 2$$

(ii) $r \neq \dfrac{1}{2}$ のとき $(r > 0)$，$(**)$ より

$$w\overline{w} - \frac{3-4r^2}{1-4r^2}(w+\overline{w}) = -\frac{9-4r^2}{1-4r^2}$$
$$\left|w - \frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right|^2 = \left(\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right)^2 - \frac{9-4r^2}{1-4r^2}$$
$$\left|w - \frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right|^2 = \frac{16r^2}{(1-4r^2)^2}$$
$$\left|w - \frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right| = \frac{4r}{|1-4r^2|}$$

(i)，(ii) より，w が描く図形は

$$\begin{cases} \boldsymbol{r = \dfrac{1}{2}} \textbf{のとき} \quad \mathbf{Re}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{2} \\ \boldsymbol{r \neq \dfrac{1}{2}} \textbf{のとき} \ (\boldsymbol{r > 0}) \quad \textbf{中心} \dfrac{\mathbf{3 - 4}\boldsymbol{r}^\mathbf{2}}{\mathbf{1 - 4}\boldsymbol{r}^\mathbf{2}}, \ \textbf{半径} \dfrac{\mathbf{4}\boldsymbol{r}}{|\mathbf{1 - 4}\boldsymbol{r}^\mathbf{2}|} \end{cases}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ より　$\cos 4\alpha = \cos\dfrac{8\pi}{7} = \cos\left(\dfrac{\pi}{7} + \pi\right) = -\cos\dfrac{\pi}{7}$

$$\cos 3\alpha = \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$$

よって　$\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$

別証　$\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ より，$7\alpha = 2\pi$ であるから

$$\cos 4\alpha = \cos(2\pi - 3\alpha) = \cos(-3\alpha) = \cos 3\alpha$$

(2) $\cos(n+1)\alpha = 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha$ より

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1,\\ \cos 3\alpha &= 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha\\ &= 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \cos\alpha\\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,\\ \cos 4\alpha &= 2\cos\alpha\cos 3\alpha - \cos 2\alpha\\ &= 2\cos\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) - (2\cos^2\alpha - 1)\\ &= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1\end{aligned}$$

$x = \cos\alpha$ とおいて $(x \neq 1)$，上の 2 式を (1) の等式に代入すると

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 4x^3 - 3x \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) = 0$$

$x \neq 1$ であるから　$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

よって，$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とすると　$f(\cos\alpha) = 0$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1 &= 0\\ (2\cos\alpha)^3 + (2\cos\alpha)^2 - 2(2\cos\alpha) - 1 &= 0 \qquad (*)\end{aligned}$$

$\cos\alpha$ を有理数と仮定すると，$2\cos\alpha$ も有理数であるから

$$2\cos\alpha = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素である正の整数})$$

とおいて，これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{p^3}{q^3} + \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q} - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{p^3}{q} = -p^2 + 2pq + q^2$$

上の第 2 式の右辺は整数であるから，$q = 1$ より

$$p^3 = -p^2 + 2p + 1 \quad \text{ゆえに} \quad p(p^2 + p - 2) = 1$$

$p = 1$ となるが，$p = 1$ は上式を満たさない．よって $\cos\alpha$ は無理数．

補足 $q = 1$ であることを示すと

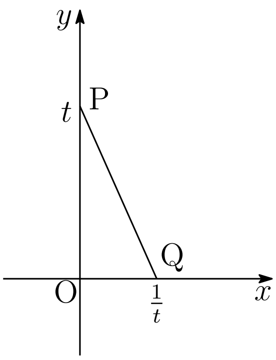
$$2\cos\alpha = p \quad \text{ゆえに} \quad \cos\alpha = \frac{p}{2}$$

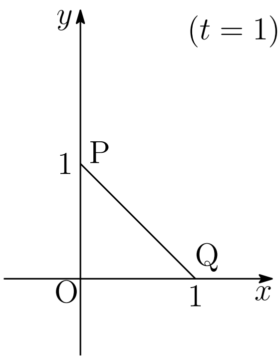
$0 < \cos\alpha < 1$ より，$p = 1$ となり，$\cos\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ より矛盾． ■

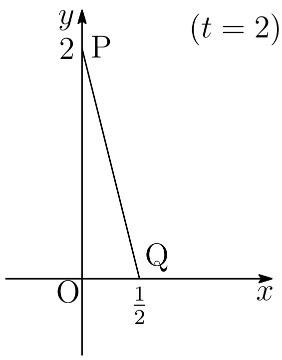
$\boxed{3}$ 線分 PQ を表す方程式は $(1 \leqq t \leqq 2)$　$y = -t^2x + t \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{t}\right)$

$f(t) = -t^2x + t$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ とおくと，線分 PQ が通過する領域は，点 Q が x 軸上で $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ にあることに注意すると

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad \min_{1 \leqq t \leqq 2} f(t) \leqq y \leqq \max_{1 \leqq t \leqq 2} f(t)$$
$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} \quad 0 \leqq y \leqq \max_{1 \leqq t \leqq 2} f(t)$$







$0 < x \leqq 1$ のとき　$f(t) = -x\left(t - \dfrac{1}{2x}\right)^2 + \dfrac{1}{4x}$

(i) $x = 0$ のとき，$f(t) = t$ より　$1 \leqq y \leqq 2$

(ii) $2 \leqq \dfrac{1}{2x}$，すなわち，$0 < x \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき

$$f(1) \leqq y \leqq f(2) \quad \text{ゆえに} \quad -x + 1 \leqq y \leqq -4x + 2$$

(iii) $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{1}{2x} \leqq 2$，すなわち，$\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

(定義域の中央 $\dfrac{3}{2}$ が軸 $t = \dfrac{1}{2x}$ より左側にあるから，左端 $f(1)$ が最小値)

$$f(1) \leqq y \leqq f\left(\frac{1}{2x}\right) \quad \text{ゆえに} \quad -x + 1 \leqq y \leqq \frac{1}{4x}$$

(iv) $1 \leqq \dfrac{1}{2x} \leqq \dfrac{3}{2}$，すなわち，$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

(定義域の中央 $\dfrac{3}{2}$ が軸 $t = \dfrac{1}{2x}$ より右側にあるから，右端 $f(2)$ が最小値)

$$f(2) \leqq y \leqq f\left(\frac{1}{2x}\right) \quad \text{ゆえに} \quad -4x + 2 \leqq y \leqq \frac{1}{4x}$$

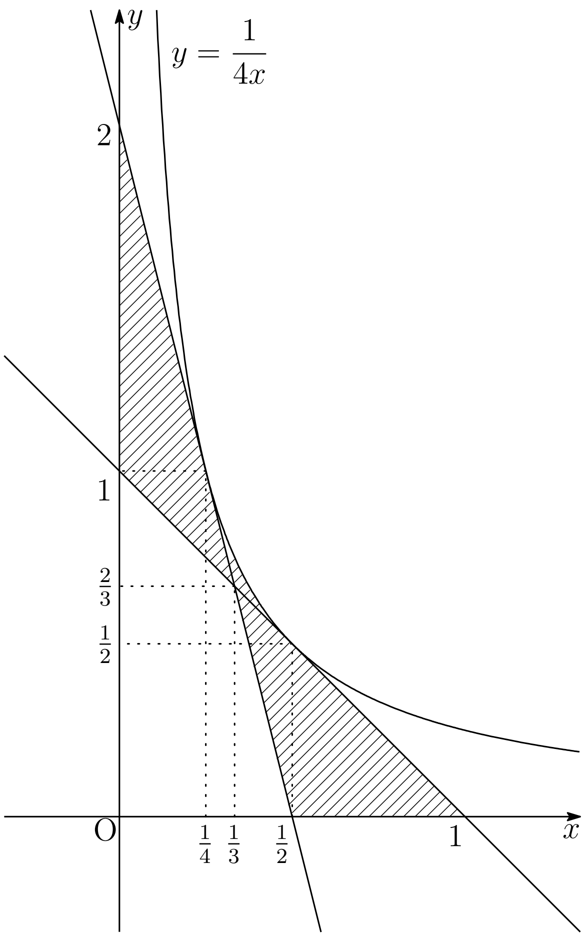
(v) $\dfrac{1}{2x} \leqq 1$，すなわち，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき

$$0 \leqq y \leqq f(1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq y \leqq -x+1$$

(i)〜(v) について，(i) と (ii) をまとめると次のようになる．

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{4} \text{ のとき} & -x+1 \leqq y \leqq -4x+2 \\ \dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{3} \text{ のとき} & -x+1 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4x} \\ \dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & -4x+2 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4x} \\ \dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} & 0 \leqq y \leqq -x+1 \end{cases}$$

求める領域は，下の図の境界線を含む斜線部分である．



4　(1) $g(x) = x - f(x)$ とおくと $(x > 0)$

$$g(x) = x - \log(x+1) - 1,$$
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$$

$g(x)$ は単調増加関数である．

$$g(0) = -1 < 0, \quad g(e^2 - 1) = e^2 - 4 = (e+2)(e-2) > 0$$

$g(x) = 0$，すなわち，$f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつ．

(2) $f(x) = \log(x+1) + 1$ より，$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$，$f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$
$x > 0$ において，$f'(x) > 0$，$f''(x) < 0$ より，$f(x)$ は単調増加，$f'(x)$ は単調減少である．$0 < x < \alpha$ を満たすとき

$$f(x) < f(\alpha) = \alpha \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} > 0 \tag{A}$$

また，平均値の定理により

$$\frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} = f'(c), \quad x < c < \alpha$$

を満たす c が存在する．$x < c$ より $f'(x) > f'(c)$ であるから

$$\frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x) \tag{B}$$

(A)，(B) より

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x) \tag{証終}$$

別証　$f''(x) < 0$ を利用する．

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(x) &= \int_x^\alpha f'(t)\,dt = \int_x^\alpha (t-\alpha)' f'(t)\,dt \\ &= \Big[(t-\alpha)f'(t)\Big]_x^\alpha - \int_x^\alpha (t-\alpha) f''(t)\,dt \\ &= (\alpha - x)f'(x) + \int_x^\alpha (\alpha - t) f''(t)\,dt \\ &< (\alpha - x)f'(x) \end{aligned}$$

(3) すべての自然数 n について，$(*)$ $1 \leqq x_n < \alpha$ が成立することを示す．

［1］ $n=1$ のとき，$x_1=1$ より，$(*)$ は成立する．

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．

$f(x)$ が単調増加であるから，$1 \leqq x_n < \alpha$ より

$$f(1) \leqq f(x_n) < f(\alpha) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < \log 2 + 1 \leqq x_{n+1} < \alpha$$

よって，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．　(証終)

$x=x_n$ として，(2) の結論を利用すると

$$0 < \frac{\alpha - f(x_n)}{\alpha - x_n} < f'(x_n)$$

$f'(x)$ が単調減少であることと $1 \leqq x_n$ により

$$0 < \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} < f'(x_n) \leqq f'(1) = \frac{1}{2} \qquad (**)$$

よって　$\dfrac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} < \dfrac{1}{2}$

(4) $(**)$ より　$0 < \alpha - x_{n+1} < \dfrac{1}{2}(\alpha - x_n)$

したがって　$0 < \alpha - x_n < (\alpha - 1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\alpha-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha - x_n) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

■

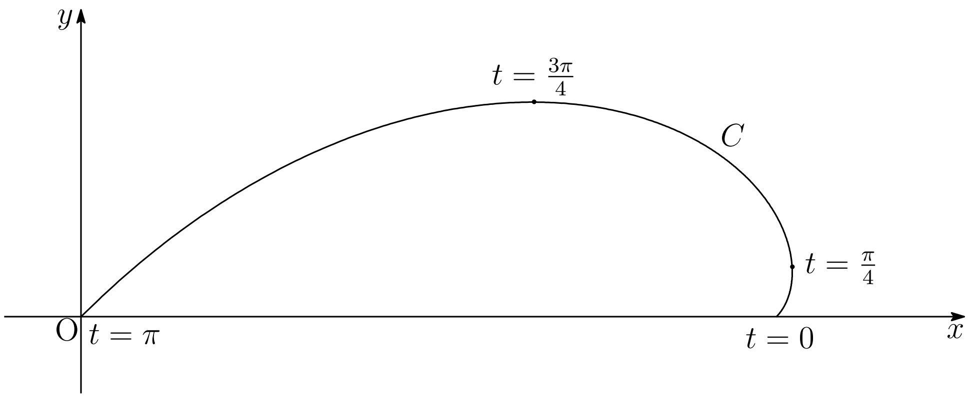
$\boxed{5}$ $C: x = e^t\cos t + e^\pi,\ y = e^t\sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) = \sqrt{2}e^t\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) = \sqrt{2}e^t\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$		$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	(x_0, y_0)	$\cdots$	$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}})$	$\cdots$	$(x_{\frac{3\pi}{4}}, y_{\frac{3\pi}{4}})$	$\cdots$	$(0, 0)$

ただし　$(x_0, y_0) = (1 + e^\pi,\ 0)$，$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}}) = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^\pi,\ \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$，

$(x_{\frac{3\pi}{4}},\ y_{\frac{3\pi}{4}}) = \left(-\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^\pi,\ \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$



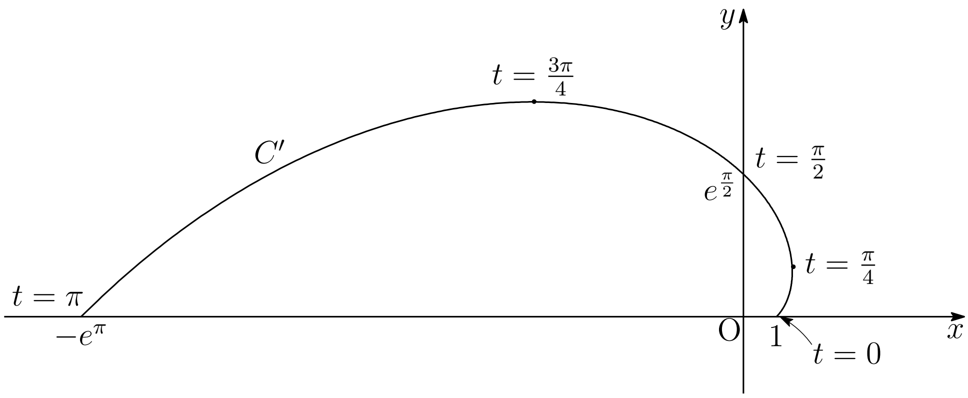
$x = f(t),\ y = g(t)$ とし，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{f(\pi)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx - \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx = -\int_{f(0)}^{f(\pi)} y\,dx \\ &= -\int_0^\pi g(t)f'(t)\,dt = -\int_0^\pi e^t\sin t\cdot e^t(\cos t - \sin t)\,dt \\ &= -\int_0^\pi e^{2t}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1 - \cos 2t}{2}\right)dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{2t}(\sin 2t + \cos 2t - 1)\,dt \\ &= -\frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}(\sin 2t - 1)\ \Big]_0^\pi = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)} \end{aligned}$$

別解 C を x 軸方向に $-e^{\pi}$ だけ平行移動させた曲線

$$C' : x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積を求めてもよい．



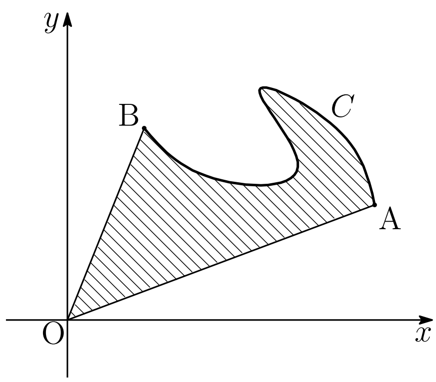
C' は O を極とする極方程式 $r = e^t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表されるから，その面積は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)}$$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 $>$OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



本題は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

$$f(t)g'(t) - f'(t)g(t) = e^t\cos t\cdot e^t(\sin t + \cos t) - e^t(\cos t - \sin t)\cdot e^t\sin t = e^{2t}$$

したがって，求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)}$$

補足 極座標 $x = r\cos t,\ y = r\sin t$ について $xy' - x'y = r^2$ であるから，ガウス・グリーンの定理により，極方程式における面積公式が導かれる． ■

7.9　2023 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 n を 2 以上の自然数とする．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n} (-x)^{k-1} \right\} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

2 平面上の 3 点 O，A，B が

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする．

(1) $(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ．

(2) 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})| \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \leqq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

3 P を座標平面上の点とし，点 P の座標を $(a,\ b)$ とする．$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 t のうち，曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(\mathrm{P})$ とする．$N(\mathrm{P}) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

4 a，b を $a^2+b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする．座標空間の点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ b)$ と点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ をとる．点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし，平面 α と直線 AP との交点を Q とする．

(1) $(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$ をみたすように点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ が xy 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

$\boxed{5}$ 1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする．b_n を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k} a_k$$

により定義し，b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

解答例

1　(1)　$-x \neq 1$ に注意して

$$1+\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}=\frac{1}{x+1}-\frac{(-x)^n}{1+x}$$

したがって
$$\frac{1}{1+x}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{(-x)^n}{x+1}$$
$$(-1)^n\left\{\frac{1}{1+x}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}=\frac{x^n}{x+1} \quad \cdots①$$

ここで，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}=\frac{1-x}{2(x+1)} \geqq 0$$
$$1-\frac{x}{2}-\frac{1}{x+1}=\frac{x(1-x)}{2(x+1)} \geqq 0$$

上の 2 式から
$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{x+1} \leqq 1-\frac{x}{2}$$
$$\frac{1}{2}x^n \leqq \frac{x^n}{x+1} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1} \quad \cdots②$$

①，② から，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成立する．

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x+1}-1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}$ とおくと，(1) の結果から

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n f(x) \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$
$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n\,dx \leqq (-1)^n\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx$$
$$\frac{1}{2(n+1)} \leqq (-1)^n\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)} \qquad (*)$$

$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n} (-x)^{k-1} \right) dx \\
&= \Bigg[\ \log(x+1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \ \Bigg]_0^1 \\
&= \log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 - a_n \qquad (**)
\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(n+1)} &\leqq (-1)^n(\log 2 - a_n) \leqq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \\
-\frac{n}{2(n+1)} &\geqq (-1)^n n(a_n - \log 2) \geqq -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \qquad \text{(A)}
\end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n}{2(n+1)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{1}{2+\frac{2}{n}} \right\} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+\frac{4}{n}} \right\} = -\frac{1}{2}$$

(A) および上の 2 式から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n(a_n - \log 2) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

■

2　(1)

$$(*)\begin{cases} |2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1 \\ (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{v}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}\vec{u}+\dfrac{1}{3}\vec{v}$

これらを $(*)$ に代入すると　$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$

$$\vec{u}\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}\right)=\frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

よって　　$(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\mathbf{0}$

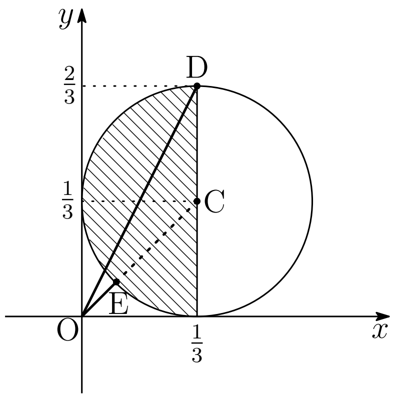
(2) 与えられた条件から

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}\right)\right| \leqq \frac{1}{3}\quad \text{かつ}\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u} \leqq \frac{1}{3}$$

(1) の結果から，$\vec{u}=(1,\ 0)$，$\vec{v}=(0,\ 1)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とおくと

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 \leqq \frac{1}{9}\quad \text{かつ}\quad x \leqq \frac{1}{3}$$

点 P の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



上の図において　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|-|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

よって　　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}}$　■

3 $y = \cos x$ を微分すると　$y' = -\sin x$

$y = \cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線の方程式は $(-\pi \leqq t \leqq \pi)$

$$y = (-\sin t)(x - t) + \cos t$$

この直線が点 $(a,\ b)$ を通るから

$$b = (-\sin t)(a - t) + \cos t$$

これを満たす実数 t は，平面 tu における曲線 $u = (-\sin t)(a - t) + \cos t$ と直線 $u = b$ の共有点の t 座標に一致する．$f(t) = (-\sin t)(a - t) + \cos t$ とおくと

$$f'(t) = (t - a)\cos t$$

(i) $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} + a$	$\searrow$	$\cos a$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - a$	$\searrow$	-1

$N(\mathrm{P}) = 4$ となる条件は，増減表から　$f(a) < b < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\cos a < b < \frac{\pi}{2} - a$$

(ii) $a = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	π	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

増減表から，$N(\mathrm{P}) = 4$ を満たす点 $(a,\ b)$ は存在しない．

(iii) $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$ のとき，$f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}-a$	$\nearrow$	$\cos a$	$\searrow$	-1

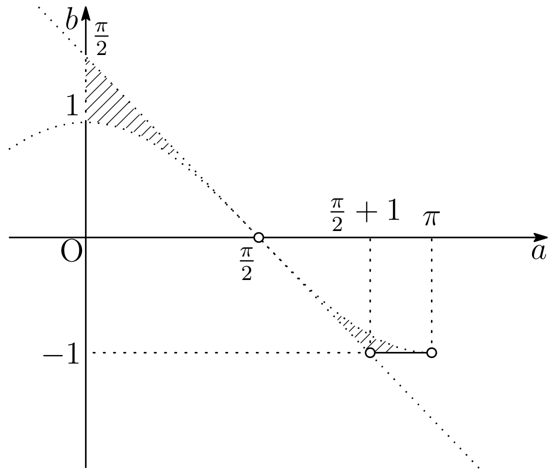
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \geqq f(\pi)$ のとき，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < b < f(a)$ より

$$\frac{\pi}{2} - a < b < \cos a$$

- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < f(\pi)$ のとき，$f(\pi) \leqq b < f(a)$ より

$$-1 \leqq b < \cos a$$

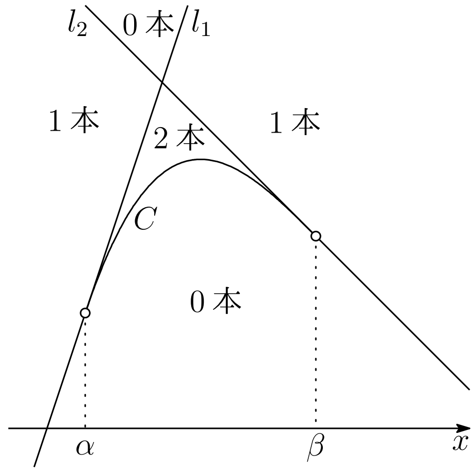
(i)〜(iii) から，点 $(a,\ b)$ の表す領域は，下の図の実線部分を含む斜線部分で，○および点線部分を含まない．



補足　$y = \cos x$ の変曲点 $\left(\pm\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ により，次の 3 つの領域に分けて考える．

- 曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(-\pi, -1)$ と変曲点 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ における 2 接線によってできる領域
- 曲線 $y = \cos x$ 上の変曲点 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ における 2 接線によってできる領域
- 曲線 $y = \cos x$ 上の変曲点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ と点 $(\pi, -1)$ における 2 接線によってできる領域

解説 区間 $\alpha < x < \beta$ において，$f''(x)$ が常に定符号である曲線 $C : y = f(x)$ に引ける接線の本数は $(\alpha < x < \beta)$，C および $x = \alpha,\ \beta$ における 2 本の接線 $l_1,\ l_2$ によって，下の図のようになる ($l_1,\ l_2$ 上の点から引ける接線の本数は 0 本).



$y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は $(\alpha < t < \beta)$

$$f'(t)(x - t) + f(t) - y = 0$$

この接線が点 $(p,\ q)$ を通るとき

$$f'(t)(p - t) + f(t) - q = 0$$

これから

$$\varphi(t) = f'(t)(p - t) + f(t) - q \qquad (*)$$

とおくと，方程式 $\varphi(t) = 0$ の解 $(\alpha < t < \beta)$ の個数は，点 $(p,\ q)$ から曲線 C に引ける接線の本数と一致する．

$$\varphi'(t) = f''(t)(p - t)$$

$f''(t) < 0$ のとき，$\varphi(t)$ の増減表は

t	α	$\cdots$	p	$\cdots$	β
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	$\varphi(\alpha)$	$\searrow$	$\varphi(p)$	$\nearrow$	$\varphi(\beta)$

たとえば，$\varphi(t) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき

$$\varphi(\alpha) > 0,\quad \varphi(p) < 0,\quad \varphi(\beta) > 0$$

$(*)$ より，このとき，l_1 の下側，C の上側，l_2 の下側となる [2]．■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf $\boxed{6}$ を参照

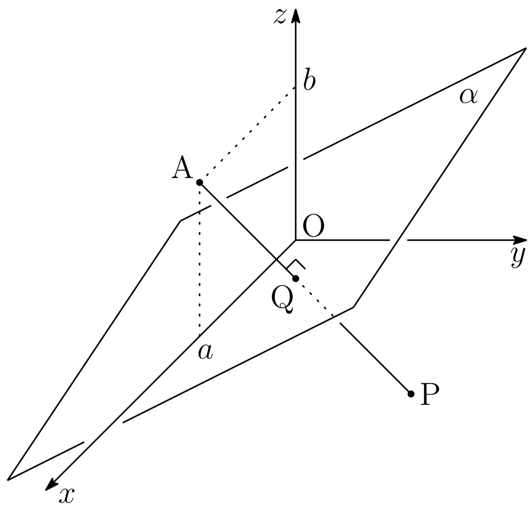
4　(1)　AP$\perp\alpha$ で，直線 AP と平面 α との交点が Q であるから

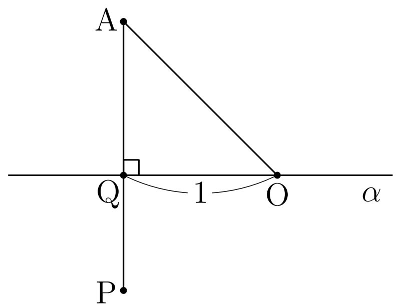
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \pm|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$　$\cdots ②$

①，② より　$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2 = (\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}})^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$

よって　$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$





(2)　A$(a,\ 0,\ b)$，P$(x,\ y,\ 0)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = a^2 + b^2 - 1$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (x-a)^2 + y^2 + b^2$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2 = (\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2 = (ax - a^2 - b^2)^2$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$(ax - a^2 - b^2)^2 = \{(x-a)^2 + y^2 + b^2\}(a^2 + b^2 - 1)$$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{(b^2-1)x^2 + (a^2+b^2-1)y^2 + 2ax - a^2 - b^2 = 0}$$

補足　$a^2 + b^2 - 1 > 0$ であるから，$0 < |b| < 1$ のとき双曲線．$|b| = 1$ のとき放物線，$|b| > 1$ のとき楕円．■

$\boxed{5}$ (1) $b_1 = a_1$ より　$\boldsymbol{p_1 = 0}$

$b_2 = {a_1}^2 + a_2$，${a_1}^2 \not\equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$
{a_1}^2 + a_2 \equiv 0 \pmod 7
$$

を満たす a_2 がただ 1 つ存在する．よって　$\boldsymbol{p_2 = \dfrac{1}{6}}$

(2) $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k} a_k$ より

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} {a_1}^{n+1-k} a_k = \sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\
&= a_1 \sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k} a_k + a_{n+1} = a_1 b_n + a_{n+1}
\end{aligned}
$$

(i) $b_n \not\equiv 0 \pmod 7$ のとき，$a_1 b_n \not\equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$
a_1 b_n + a_{n+1} \equiv 0 \pmod 7
$$

となる a_{n+1} がただ一つ定まる．

(ii) $b_n \equiv 0 \pmod 7$ のとき，$a_1 b_n \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$
a_1 b_n + a_{n+1} \not\equiv 0 \pmod 7
$$

(i)，(ii) および (1) の結果から，$\{p_n\}$ について，次の確率漸化式が成立する．

$$
p_1 = 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{6}(1 - p_n)
$$

上の第 2 式から

$$
p_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_n - \frac{1}{7}\right) \quad \text{ゆえに} \quad p_n - \frac{1}{7} = \left(p_1 - \frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}
$$

$p_1 = 0$ より　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{7}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$　■

7.10 2024 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3} \quad (x \geqq 0)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) における実数解を a_n とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

2 α，β を複素数とし，複素数 z に対して

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

とおく．α，β は

$$|f(1) - 3| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i) - 1| \leqq 3$$

を満たしながら動く．ただし，i は虚数単位である．

(1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

(2) $f(1+i) = 0$ であるとき，α，β の値を求めよ．

3 空間内の 2 直線 ℓ，m はねじれの位置にあるとする．ℓ と m の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

4 $a > 1$ とする．xy 平面において，点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする．

(1) 円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1$，$y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする．(1) における V_1 について，$V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 自然数 1, 2, 3, $\cdots$, n のうち，n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする.

(1) 自然数 a, b, c および相異なる素数 p, q, r に対して，等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ.

解答例

1 (1) $f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{nx} + \cos\dfrac{x}{3}$ を微分すると $(x \geqq 0)$

$$f_n'(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$$

$x \geqq 0$ のとき，$-\dfrac{n}{2}e^{nx} \leqq -\dfrac{n}{2}$，$-\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3} \leqq \dfrac{1}{3}$ であるから

$$f_n'(x) \leqq -\frac{n}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(n - \frac{2}{3}\right) < 0$$

したがって，$f_n(x)$ は単調減少．

また，$f_n(0) = \dfrac{3}{2} > 0$，$f_n\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{\frac{3n}{2}\pi} < 0$ であるから，方程式

$$f_n(x) = 0$$

は，ただ 1 つの実数解 $x \in \left(0,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ をもつ．

(2) $f_n(a_n) = 0$ より　$1 - \dfrac{1}{2}e^{na_n} + \cos\dfrac{a_n}{3} = 0$

$$e^{na_n} = 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) \quad \text{ゆえに} \quad na_n = \log 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) \qquad (*)$$

$a_n \in \left(0,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ であるから，$\log 2 < \log 2\left(1 + \cos\dfrac{a_n}{3}\right) < \log 4$ に注意して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) = \mathbf{0}$$

(3) (2) の結果を $(*)$ に代入して　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = \mathbf{\log 4}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)

$$|f(1)-3| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i)-1| \leqq 3$$

上の2式に $f(z)=z^2+\alpha z+\beta$ をそれぞれ代入して整理すると

$$|\alpha+\beta-2| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |\alpha i+\beta-2| \leqq 3$$

$w_1=\alpha+\beta-2$, $w_2=\alpha i+\beta-2$ とおくと　$|w_1| \leqq 1$, $|w_2| \leqq 3$

α, β を w_1, w_2 で表すと

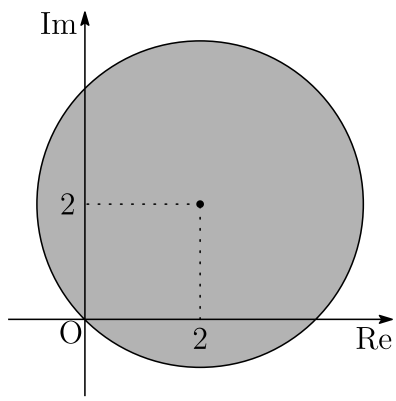
$$\alpha=\frac{1}{2}(1+i)(w_1-w_2), \quad \beta=\frac{1}{2}(1-i)w_1+\frac{1}{2}(1+i)w_2+2 \qquad (*)$$

$f(1+i)=(1+i)^2+\alpha(1+i)+\beta=(1+i)\alpha+\beta+2i$ に $(*)$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(1+i) &= \frac{1}{2}(1+i)^2(w_1-w_2)+\frac{1}{2}(1-i)w_1+\frac{1}{2}(1+i)w_2+2+2i \\ &= \frac{1}{2}(1+i)w_1+\frac{1}{2}(1-i)w_2+2+2i \qquad (**) \end{aligned}$$

$$\left|\frac{1}{2}(1+i)w_1\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|w_1| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left|\frac{1}{2}(1-i)w_2\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|w_2| \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$f(1+i)$ は中心 $2+2i$，半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ の円の内部で境界線を含む．



(2) $(**)$ より

$$\frac{1}{2}(1+i)w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right), \quad \frac{1}{2}(1-i)w_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

ゆえに　　$w_1=-1$, $w_2=-3i$

これを $(*)$ に代入して　　$\boldsymbol{\alpha=-2+i}$, $\boldsymbol{\beta=3-i}$　■

3 2直線 ℓ, m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とする．ℓ と m は平行ではないから，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}$ とし，2直線 ℓ, m 上の定点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{n})$，$\mathrm{B}(\beta_1\vec{a}+\beta_2\vec{b}+\beta_3\vec{n})$ とする．

ℓ を含み，$\vec{n}$ に平行な平面 S のベクトル方程式は，媒介変数 s_1, s_2 を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s_1\vec{a}+s_2\vec{n}&=\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{n}+s_1\vec{a}+s_2\vec{n}\\&=(s_1+\alpha_1)\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+(s_2+\alpha_3)\vec{n}\end{aligned}$$

m を含み，$\vec{n}$ に平行な平面 T のベクトル方程式は，媒介変数 t_1, t_2 を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t_1\vec{b}+t_2\vec{n}&=\beta_1\vec{a}+\beta_2\vec{b}+\beta_3\vec{n}+t_1\vec{b}+t_2\vec{n}\\&=\beta_1\vec{a}+(t_1+\beta_2)\vec{b}+(t_2+\beta_3)\vec{n}\end{aligned}$$

S と T の共通部分は

$$(s_1+\alpha_1)\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+(s_2+\alpha_3)\vec{n}=\beta_1\vec{a}+(t_1+\beta_2)\vec{b}+(t_2+\beta_3)\vec{n} \qquad (*)$$

これを整理すると

$$(s_1+\alpha_1-\beta_1)\vec{a}+(-t_1+\alpha_2-\beta_2)\vec{b}+(s_2-t_2+\alpha_3-\beta_3)\vec{n}=\vec{0}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ は，1次独立であるから

$$s_1+\alpha_1-\beta_1=0,\quad -t_1+\alpha_2-\beta_2=0,\quad s_2-t_2+\alpha_3-\beta_3=0$$

上の3式から

$$s_1=\beta_1-\alpha_1,\quad t_1=\alpha_2-\beta_2,\quad s_2-t_2=\beta_3-\alpha_3 \qquad (**)$$

このとき，2直線 ℓ, m 上の2定点 P，Q をそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s_1\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t_1\vec{b}$$

とおくと，2平面 S, T の共通部分は，$(*)$，$(**)$ より

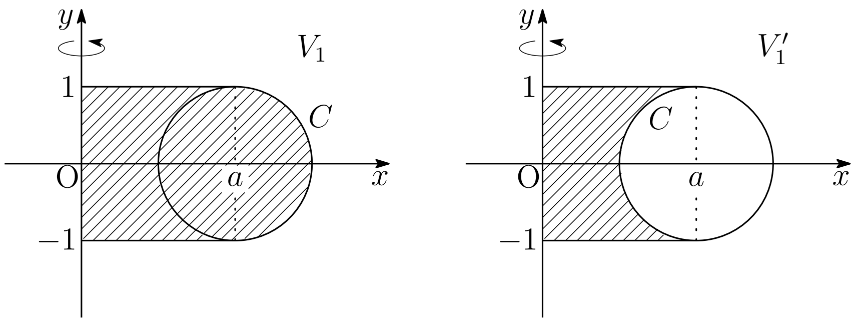
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s_2\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t_2\vec{n}\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s_2-t_2)\vec{n}=(\beta_3-\alpha_3)\vec{n}$$

よって，ℓ と m の両方に直交する直線 PQ がただ1つ存在する．■

4 (1) 円 $C:(x-a)^2+y^2=1$ より　$x^2=-(y+1)(y-1)-a^2+2ax$

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi}&=-\int_{-1}^{1}(y+1)(y-1)\,dy-a^2\int_{-1}^{1}dy+2a\int_{-1}^{1}x\,dy\\&=\frac{1}{6}\cdot2^3-2a^2+2a\left(2a+\frac{\pi}{2}\right)\qquad(*)\\&=\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V_1=\pi\left(\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\right)}$



(2) 右上の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1' とすると，$(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1'}{\pi}&=\frac{1}{6}\cdot2^3-2a^2+2a\left(2a-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{4}{3}+2a^2-\pi a\end{aligned}$$

$V_2=V_1-V_1'$ であるから　$V_2=2\pi^2a$

上式および (1) の結果を $V_1=2V_2$ に代入すると

$$\pi\left(\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\right)=2\times2\pi^2a$$

整理すると　$2a^2-3\pi a+\frac{4}{3}=0$　$\cdots$ ①

$f(a)=2a^2-3\pi a+\frac{4}{3}$ とすると　$f(1)=\frac{10}{3}-3\pi<0$

2 次方程式 $f(a)=0$ は 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつことに注意して，① を解くと

$$\boldsymbol{a=\frac{9\pi+\sqrt{81\pi^2-96}}{12}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $n = p^a q^b r^c$ とする．

n 以下の自然数で p，q，r で割り切れる数の個数は，それぞれ

$$\frac{n}{p},\quad \frac{n}{q},\quad \frac{n}{r}$$

n 以下の自然数で pq，qr，rp で割り切れる数の個数は，それぞれ

$$\frac{n}{pq},\quad \frac{n}{qr},\quad \frac{n}{rp}$$

n 以下の自然数で pqr で割り切れる数の個数は

$$\frac{n}{pqr}$$

したがって[3]

$$\begin{aligned} f(n) &= n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{n}{r}\right) + \left(\frac{n}{pq} + \frac{n}{qr} + \frac{n}{rp}\right) - \frac{n}{pqr} \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right) \qquad (*) \\ &= p^a q^b r^c \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right) \\ &= p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1) \end{aligned}$$

(2) 次の (i)〜(iv) を考える．

(i) $n = p^a$ のとき (p は素数，a は自然数)

$$f(n) = n - \frac{n}{p} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad ゆえに \quad \frac{n}{f(n)} = \frac{p}{p-1}$$

上の第 2 式は整数で，p と $p-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p - 1 = 1 \quad ゆえに \quad p = 2$$

(ii) $n = p^a q^b$ のとき (p, q は素数 ($p < q$)，a, b は自然数)

$$f(n) = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q}\right) + \frac{n}{pq} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

したがって $\quad \dfrac{n}{f(n)} = \dfrac{pq}{(p-1)(q-1)}$

上式は整数で，p と $p-1$，q と $q-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p - 1 = 1,\quad q - 1 = p \quad ゆえに \quad p = 2,\quad q = 3$$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6(定理 3) を参照)

(iii) $n = p^a q^b q^c$ のとき ($p,\ q,\ r$ は素数 $(p < q < r)$，$a,\ b,\ c$ は自然数)，
(*) より

$$\frac{n}{f(n)} = \frac{pqr}{(p-1)(q-1)(r-1)}$$

上式は整数で，p と $p-1$，q と $q-1$，r と $r-1$ はそれぞれ互いに素，
$q-1,\ r-1$ はともに偶数であるから，上式は条件を満たさない．

(iv) n が 4 つ以上の素因数をもつとき，$n \geqq 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7 = 210$ となり，n が 100
以下の自然数であることに反する．

(i)〜(iv) より，求める 5 以上 100 以下の自然数 n は，整数 $a,\ b$ を用いて

$$n = 2^a 3^b \qquad (a \geqq 1,\quad b \geqq 0)$$

で与えられる．これを満たす整数 $(a,\ b)$ の組は，次の 13 組

$$\begin{aligned}(a,\ b) =& (3,\ 0),\ (4,\ 0),\ (5,\ 0),\ (6,\ 0),\\ & (1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1), (5,\ 1),\\ & (1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (3,\ 2),\\ & (1,\ 3)\end{aligned}$$

よって，求める n は

$$\boldsymbol{n = 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 32,\ 36,\ 48,\ 54,\ 64,\ 72,\ 96}$$

■

7.11　2025 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 平面上の三角形 OAB を考える．∠AOB は鋭角，OA = 3，OB = t とする．また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，OC = 1 とする．線分 AB を 2 : 1 に内分する点を P，点 A から直線 OP に下した垂線と直線 OB との交点を R とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を t を用いて表せ．

(2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ．

(3) 線分 OB の中点を M とする．点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

2 p と m を実数とし，関数 $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ は $x = \alpha$ で極大値をとり，$x = \beta$ で極小値をとるとする．

(1) $f(\alpha) - f(\beta)$ を p と m を用いて表せ．

(2) p と m が $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ．

3 座標空間に 3 点 O(0, 0, 0)，A(0, 1, 1)，P(x, y, 0) がある．∠OAP = 30° かつ $y \geqq 0$ を満たすように点 P が動くとき，$(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ．

4 次の問いに答えよ．

(1) $t > 0$ のとき

$$-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}\,dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0$ を示せ．

(3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく．

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{2} \frac{\cos x}{x}\,dx$$

を示せ．

$\boxed{5}$ 投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある．A，B，C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う．

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる．
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる．

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる．

最初の文字列は ABC であるとする．コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする．

(1) k を正の整数とするとき，$p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，p_n を求めよ．

解答例

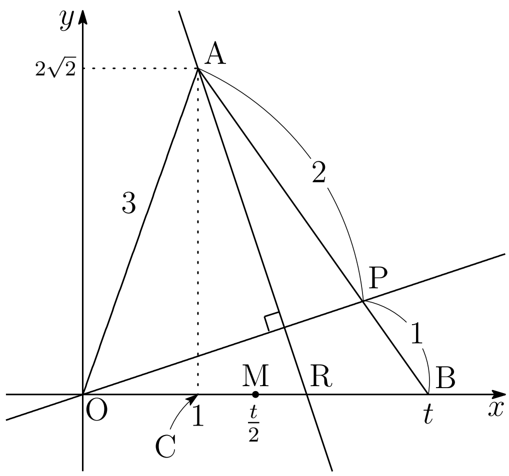
$\boxed{1}$ (1) $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{OCA}=90^\circ$ より　$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OC}^2}=2\sqrt{2}$

3 点 O，A，B を座標平面上の点として

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\quad \mathrm{A}(1,\ 2\sqrt{2}),\quad \mathrm{B}(t,\ 0)$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2\sqrt{2}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(t,\ 0)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t}$$



(2) 点 P は線分 AB を $2:1$ に内分する点であるから　$\mathrm{P}\left(\dfrac{2t+1}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$t>0$ に注意すると，直線 OP の傾きは　$\dfrac{2\sqrt{2}}{2t+1}$

点 $\mathrm{A}(1,\ 2\sqrt{2})$ を通り，直線 OP に垂直な直線の方程式は

$$y-2\sqrt{2}=-\frac{2t+1}{2\sqrt{2}}(x-1)$$

この直線と x 軸の交点が R であるから，$y=0$ とすると

$$-2\sqrt{2}=-\frac{2t+1}{2\sqrt{2}}(x-1)\quad \text{よって}\quad \mathrm{OR}=x=\boldsymbol{\frac{2t+9}{2t+1}}$$

(3) (2) の結果から $(t>0)$　$\dfrac{t}{2}\leqq\dfrac{2t+9}{2t+1}\leqq t$　ゆえに　$\begin{cases}2t^2-3t-18\leqq 0\\ 2t^2-t-9\geqq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{3-3\sqrt{17}}{4}\leqq t\leqq\frac{3+3\sqrt{17}}{4}\\ t\leqq\frac{1-\sqrt{73}}{4},\ \frac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\end{cases}$　$t>0$ より　$\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}}$ ■

2 (1) $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ より　$f'(x) = 3x^2 + 6px + 3m$

$f(x)$ は $x = \alpha,\ \beta$ で極値をとるから，これらは $f'(x) = 0$ の解である．
解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2p, \quad \alpha\beta = m \qquad (*)$$

したがって　$f'(x) = 3(x^2 + 2px + m) = 3\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}$
$= 3(x - \alpha)(x - \beta)$

$f(x)$ は $x = \alpha$ で極大，$x = \beta$ で極小であるから，下の増減表より　$\alpha < \beta$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx = 3\int_\beta^\alpha (x - \alpha)(x - \beta) \\ &= 3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha - \beta)^3 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

$\alpha,\ \beta$ は $f'(x) = 0$ の実数解であるから $(\alpha < \beta)$，$(*)$ より

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{4p^2 - 4m} = 2\sqrt{p^2 - m}$$

よって　$f(\alpha) - f(\beta) = \dfrac{1}{2}\{2\sqrt{p^2 - m}\}^3 = \boldsymbol{4(p^2 - m)^{\frac{3}{2}}}$

(2) $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ のとき，(1) の結果から

$$4(p^2 - m)^{\frac{3}{2}} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 - m = 1 \quad \cdots ①$$

$f''(x) = 6x + 6p$ であるから，$f''(x) = 0$ を解くと　$x = -p$
① より，$m = p^2 - 1$ であるから　$f(x) = x^3 + 3px - 2 + 3(p^2 - 1)x$

$$f(-p) = (-p)^3 + 3p^2(-p) + 3(p^2 - 1)(-p) = -p^3 + 3p$$

したがって，変曲点は　$(-p, -p^3 + 3p)$

この変曲点の軌跡を $(x,\ y)$ を用いると　$x = -p,\ y = -p^3 + 3p$

第 1 式から $p = -x$ を第 2 式に代入すると (p はすべての実数)，
変曲点の軌跡の方程式は

$$y = -(-x)^3 + 3(-x) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x^3 - 3x}$$

■

3 3 点 O(0, 0, 0)，A(0, 1, 1)，P(x, y, 0) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = (0, -1, -1), \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x,\ y-1, -1)$$

$\angle\mathrm{OAP} = 30^\circ$ かつ $y \geqq 0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = |\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos 30^\circ$ より

$$2 - y = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sqrt{2}(2 - y) = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1}$$

両辺を平方して整理すると

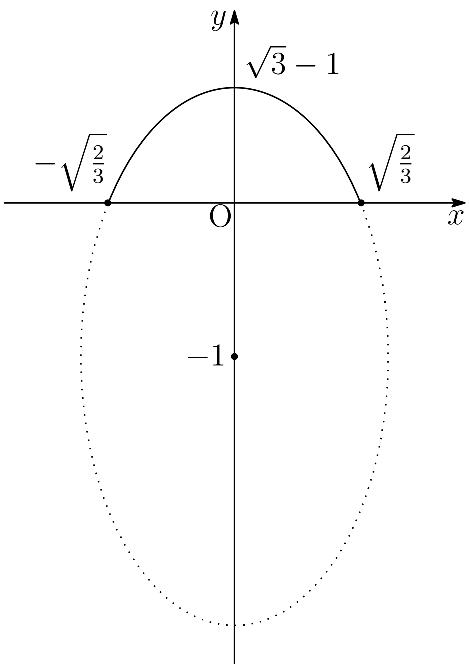
$$3x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

$x = \cos\theta$，$y + 1 = \sqrt{3}\sin\theta$ とおくと，$y = \sqrt{3}\sin\theta - 1 \geqq 0$ より

$$\sin\theta \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす鋭角 α を用いると，θ のとり得る値の範囲は

$$\alpha \leqq \theta \leqq \pi - \alpha$$



$x+1=\cos\theta+1$，$y+1=\sqrt{3}\sin\theta$ より，関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta+1) \qquad (\alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \sqrt{3}\{\cos\theta(\cos\theta+1)-\sin^2\theta\} \\ &= \sqrt{3}(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1) \end{aligned}$$

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3}}>\dfrac{1}{2}$ であるから，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$ に注意して

θ	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\pi-\alpha$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sqrt{3}\sin\alpha(\cos\alpha+1)=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}+1, \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{9}{4}, \\ f(\pi-\alpha) &= \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)=-\sqrt{\frac{2}{3}}+1 \end{aligned}$$

$f(\pi-\alpha)<f(\alpha)$ であるから　　**最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$，最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{\dfrac{2}{3}}+1}$**

別解 1　点Pの表す図形は

$$x^2+\frac{(y+1)^2}{3}=1,\quad \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\leqq x\leqq\sqrt{\frac{2}{3}},\ 0\leqq y\leqq\sqrt{3}-1\right)$$

であるから，$(y+1)^2=3(1-x^2)$ より

$$(x+1)^2(y+1)^2=3(x+1)^2(1-x^2)=3(x+1)^3(1-x)$$

したがって

$$g(x)=3(x+1)^3(1-x)\quad\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\leqq x\leqq\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

とおくと

$$g'(x)=6(x+1)^2(1-2x)$$

x	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$g\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=3\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{2}+1\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=3\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$\sqrt{g(x)}$，すなわち，$(x+1)(y+1)$ のとりうる値の範囲は

$$1-\sqrt{\frac{2}{3}}\leqq(x+1)(y+1)\leqq\frac{9}{4}$$

よって　**最大値 $\boldsymbol{\frac{9}{4}}$，最小値 $\boldsymbol{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}$**

別解 2　点 P の表す図形を C とすると

$$C : y = -1 + \sqrt{3-3x^2} \quad \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \leqq x \leqq \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

k を実数とし，$(x+1)(y+1) = k$ とおき $(x > -1)$，その図形を H とすると

$$H : y = \frac{k}{x+1} - 1 \qquad (k > 0)$$

2 曲線 $C,\ H$ が共有点をもつ k の値の範囲を考える．

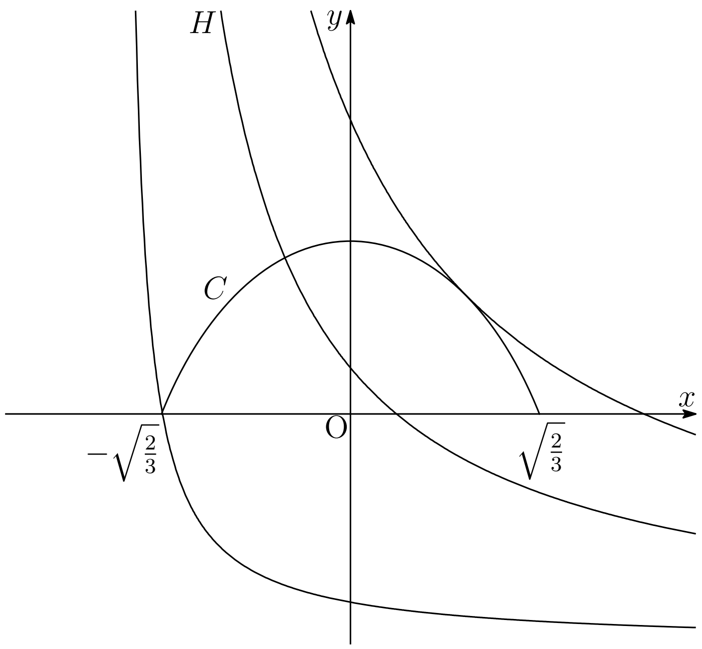
k が最小となるのは，H が点 $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\ 0\right)$ を通るときで，k の最小値は

$$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)(0+1) = \boldsymbol{-\sqrt{\frac{2}{3}}+1}$$

k が最大となるのは，2 曲線 $C,\ H$ が第 1 象限で接するときである．

C の関数を微分すると　$y' = -\dfrac{3x}{\sqrt{3-3x^2}}$

H の関数を微分すると　$y' = -\dfrac{k}{(x+1)^2}$



C と H が接するときの接点の座標は，連立方程式

$$-1+\sqrt{3-3x^2}=\frac{k}{x+1}-1,\quad -\frac{3x}{\sqrt{3-3x^2}}=-\frac{k}{(x+1)^2}$$

の解である．それぞれ整理すると

$$\sqrt{3-3x^2}=\frac{k}{x+1},\quad \frac{3x}{\sqrt{3-3x^2}}=\frac{k}{(x+1)^2}$$

上の2式から k を消去すると

$$\frac{3x}{\sqrt{3-3x^2}}=\frac{\sqrt{3-3x^2}}{x+1}\quad \text{すなわち}\quad 2x^2+x-1=0$$

ゆえに　$(x+1)(2x-1)=0$　$x>-1$ であるから　$x=\dfrac{1}{2}$

これを C の方程式に代入すると，接点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

したがって，k の最大値は

$$\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $-\dfrac{1}{x^2} \leqq \dfrac{\sin x}{x^2} \leqq \dfrac{1}{x^2}$ であるから，$t>0$ に対し

$$-\int_t^{2t} \frac{dx}{x^2} \leqq \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}\,dx \leqq \int_t^{2t} \frac{dx}{x^2}$$

また，$\displaystyle\int_t^{2t} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_t^{2t} = \frac{1}{2t}$ であるから，$t>0$ のとき

$$-\frac{1}{t} < -\frac{1}{2t} \leqq \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}\,dx \leqq \frac{1}{2t} < \frac{1}{t}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx &= \int_t^{2t} \frac{(\sin x)'}{x}\,dx = \left[\frac{\sin x}{x}\right]_t^{2t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}\,dx \\ &= \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}\,dx \qquad (*)\end{aligned}$$

$t>0$ より　$-\dfrac{3}{2t} = -\dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{t} \leqq \dfrac{\sin 2t}{2t} - \dfrac{\sin t}{t} \leqq \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{3}{2t}$

上式と (1) の結果の辺々を加えると

$$-\frac{5}{2t} < \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}\,dx < \frac{5}{2t} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$-\dfrac{5}{2t} < \displaystyle\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{5}{2t}$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{5}{2t}\right) = 0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{5}{2t} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0$$

(3) $2f(x) = 2\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = \cos x - \cos 2x$ より

$$2\int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^t \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_1^t \frac{\cos 2x}{x}\,dx \qquad \text{(A)}$$

ここで，$\displaystyle\int_1^t \frac{2x}{x}\,dx$ について，$y = 2x$ とおくと　$\dfrac{dy}{dx} = 2$

x	$1 \longrightarrow t$
y	$2 \longrightarrow 2t$

$$\int_1^t \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \int_1^t \frac{\cos 2x}{2x}\,2dx = \int_2^{2t} \frac{\cos y}{y}\,dy = \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) より

$$\begin{aligned}
2\int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx &= \int_1^t \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx \\
&= \int_1^t \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{2t}^{2} \frac{\cos x}{x}\,dx \\
&= \int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_2^{t} \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{2t}^{2} \frac{\cos x}{x}\,dx \\
&= \int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{2t}^{t} \frac{\cos x}{x}\,dx \\
&= \int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_{t}^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx
\end{aligned}$$

したがって

$$\int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx$$

(2) の結果を利用すると

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$$

■

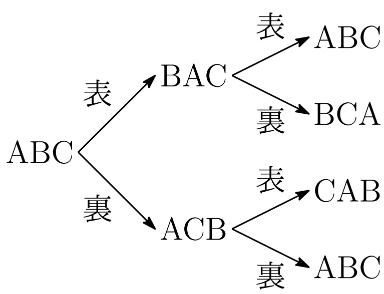
5　(1)　コインを偶数回投げた後の文字の配列は $\{\mathrm{ABC},\ \mathrm{BCA},\ \mathrm{CAB}\}$ であり，コインを奇数回投げた後の文字の配列は $\{\mathrm{ACB},\ \mathrm{BAC},\ \mathrm{CBA}\}$ である．

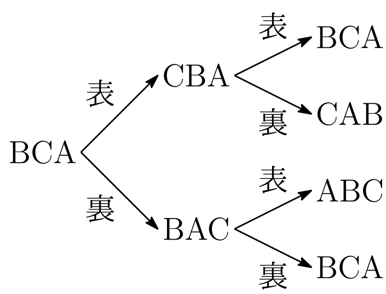
p_n，q_n と同様に，n 回投げた後の文字の配列が CAB である確率を r_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

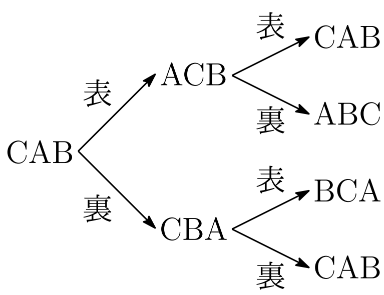
$$\begin{aligned} &p_0 = 1,\ q_0 = r_0 = 0,\ p_1 = q_1 = r_1 = 0, \\ &p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ &q_{n+2} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ &r_{n+2} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \end{aligned}$$

$p_{n+2} - q_{n+2} = \dfrac{1}{4}(p_n - q_n)$ であるから

$$p_{2k} - q_{2k} = (p_0 - q_0)\left(\frac{1}{4}\right)^k = \boldsymbol{\left(\frac{1}{4}\right)^k}$$







(2) n が偶数のとき

$$p_{n+2}+q_{n+2}+r_{n+2}=p_n+q_n+r_n=p_0+q_0+r_0=1$$

したがって

$$\begin{aligned} p_{n+2}+q_{n+2} &= \frac{3}{4}p_n+\frac{3}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n \\ &= \frac{1}{4}(p_n+q_n)+\frac{1}{2}(p_n+q_n+r_n) \\ &= \frac{1}{4}(p_n+q_n)+\frac{1}{2} \\ p_{n+2}+q_{n+2}-\frac{2}{3} &= \frac{1}{4}\left(p_n+q_n-\frac{2}{3}\right) \\ p_n+q_n-\frac{2}{3} &= \left(p_0+q_0-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \\ p_n+q_n &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(1) の結果から

$$p_n-q_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$$

上の 2 式から q_n を消去すると

$$p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって $\quad \boldsymbol{p_n=\begin{cases} 0 & (n\text{ が奇数}) \\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (n\text{ が偶数}) \end{cases}}$

補足 $p_n=\dfrac{1+(-1)^n}{6}\left\{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ と表記してもよい．

同様に p_n を消去すると $\quad q_n=\dfrac{1+(-1)^n}{6}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

また，$p_n+q_n+r_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ であるから

$$r_n=\frac{1+(-1)^n}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

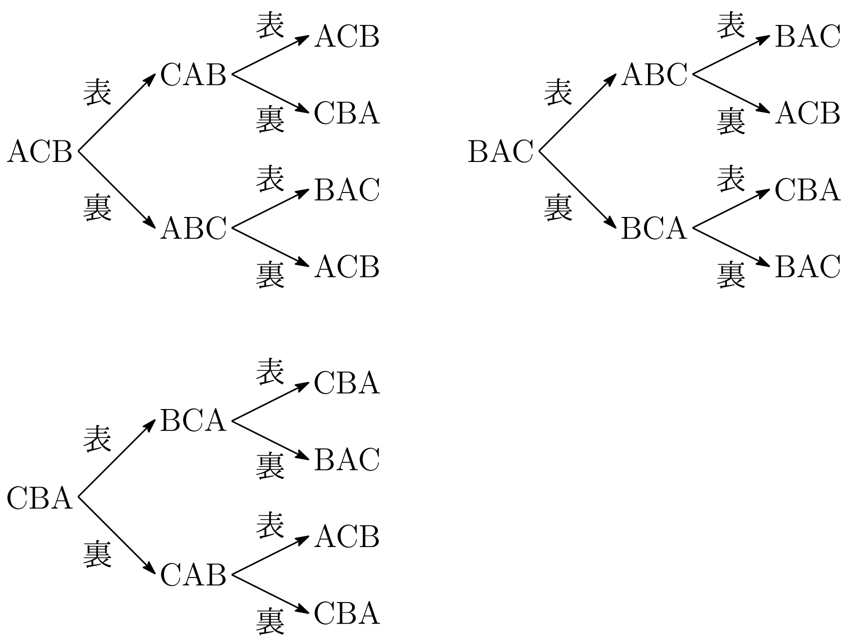
コインを n 回投げた後の文字の配列が ACB, BAC, CBA である確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$
\begin{aligned}
&a_0 = b_0 = c_0 = 0,\ a_1 = b_1 = \frac{1}{2},\ c_1 = 0,\\
&a_{n+2} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n\\
&b_{n+2} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n\\
&c_{n+2} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n
\end{aligned}
$$

$a_{n+2} - b_{n+2} = \dfrac{1}{4}(a_n - b_n)$，$a_0 - b_0 = 0$，$a_1 - b_1 = 0$ であるから　$a_n = b_n$

n を奇数とすると

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n)\\
a_{n+2} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}\\
a_{n+2} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)\\
a_n - \frac{1}{3} &= \left(a_1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}\\
a_n &= \frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}
\end{aligned}
$$



n が整数のとき $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{6}\left\{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

$a_n = b_n$，$a_n + b_n + c_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ であるから

$$a_n = b_n = \frac{1-(-1)^n}{6}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\},$$
$$c_n = \frac{1-(-1)^n}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

■

第 8 章　神戸大学

出題分野 (2015-2025) 120 分

◀	神戸大学	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	数と式											
I	2 次関数											
	図形と計量											
	データの分析											
	式と証明											
	複素数と方程式							1				
II	図形と方程式		2					4		2	2	
	三角関数											
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法						1					1
	関数											
	極限	4		3·5	2				1·2			
III	微分法とその応用	2·3		1		1	4					5
	積分法			2				2				
	積分法の応用	1	3·5		5	5	2	5	3	5	4·5	3
	場合の数と確率	5		4	3	3	3			3	3	
A	整数の性質		4			4		1	5			
	図形の性質											
B	数列						5			1	1	2
	確率分布と統計											
	平面上のベクトル					2		3				
C	空間のベクトル		1		1					4		4
	複素数平面				4							
	式と曲線								4			

8.1　2015年 (120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 座標平面上の2つの曲線 $y = \dfrac{x-3}{x-4}$，$y = \dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．以下の問に答えよ．

(1) 2曲線 C_1，C_2 の交点をすべて求めよ．

(2) 2曲線 C_1，C_2 の概形をかき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ．

2 座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を C とする．$a > 2$，$0 < \theta < \pi$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる．原点を O とし，直線 AP と y 軸との交点を Q とする．点 Q を通り x 軸に平行な直線と，直線 OP との交点を R とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 R の座標を求めよ．

(2) (1) で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする．このとき，$0 < \theta < \pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) 原点 O と点 R の距離の2乗を $g(\theta)$ とする．このとき，$0 < \theta < \pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ．

3 a を正の実数とする．座標平面上の曲線 C を

$$y = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$$

で定める．曲線 C が2つの変曲点 P，Q をもち，それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 線分 PQ の中点と x 座標が一致するような，C 上の点を R とする．三角形 PQR の面積を求めよ．

(3) 曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点を P' とし，点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点を Q' とする．線分 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ の中点の x 座標を求めよ．

4 a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a，b を用いて表せ．

(2) $b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

5 a，b，c を 1 以上 7 以下の自然数とする．次の条件 $(*)$ を考える．

> $(*)$ 3 辺の長さが a，b，c である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する．

以下の問に答えよ．

(1) $a=b>c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

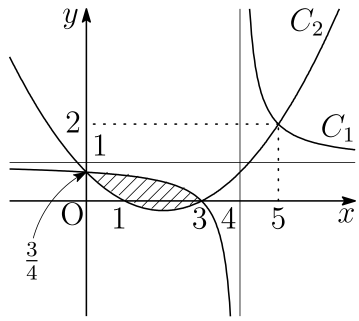
(2) $a>b>c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(3) 条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

解答例

1 (1) $C_1 : y = \dfrac{x-3}{x-4}$，$C_2 : y = \dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$

C_1，C_2 の方程式から y を消去すると



$$\frac{1}{4}(x-1)(x-3) = \frac{x-3}{x-4}$$
$$\frac{x-3}{4(x-4)}\{(x-1)(x-4)-4\} = 0$$
$$\frac{x(x-3)(x-5)}{4(x-4)} = 0$$

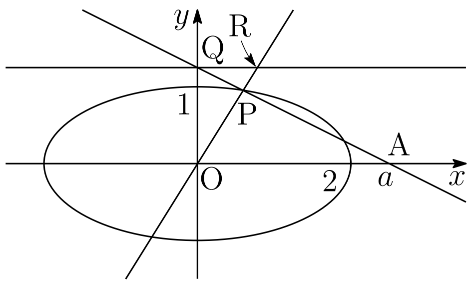
ゆえに　$x = 0,\ 3,\ 5$　よって，求める交点は $\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$，$(\mathbf{3},\ \mathbf{0})$，$(\mathbf{5},\ \mathbf{2})$

(2) 求める面積を S とすると，上の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{\frac{x-3}{x-4} - \frac{1}{4}(x-1)(x-3)\right\} dx \\ &= \int_0^3 \left\{1 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{4}(x^2-4x+3)\right\} dx \\ &= \left[x + \log|x-4| - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\right]_0^3 \\ &= 3 - \log 4 - \frac{1}{4}(9-18+9) = \mathbf{3 - 2\log 2} \end{aligned}$$

■

2 (1) 2 点 A$(a,\ 0)$，P$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通る直線方程式は $(a>2)$



$$y=\frac{-\sin\theta}{a-2\cos\theta}(x-a)$$

ゆえに　$\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)$

直線 OP の方程式は　　$x\sin\theta-2y\cos\theta=0$

$y=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$ を上式に代入すると $(0<\theta<\pi)$

$$x\sin\theta-2\cdot\frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\cdot\cos\theta=0$$

$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta\neq0$ であるから　$x=\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}$

よって　　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta},\ \dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}}\right)$

(2) (1) の結果より，$f(\theta)=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$ であるから

$$f'(\theta)=a\cdot\frac{\cos\theta\cdot(a-2\cos\theta)-\sin\theta\cdot2\sin\theta}{(a-2\cos\theta)^2}=\frac{a(a\cos\theta-2)}{(a-2\cos\theta)^2}$$

$a>2$ より，$f'(\theta)=0$ を満たす θ $(0<\theta<\pi)$ がただ 1 つ存在し，これを α とすると

$$\cos\alpha=\frac{2}{a},\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$$

したがって，$f(\theta)$ の増減表は

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める $f(\theta)$ の最大値は

$$f(\alpha)=\frac{a\sin\alpha}{a-2\cos\alpha}=\frac{a\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}}{a-2\cdot\dfrac{2}{a}}=\frac{a\sqrt{a^2-4}}{a^2-4}=\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}}$$

(3) (1) の結果より，$g(\theta) = \mathrm{OR}^2$ であるから

$$
\begin{aligned}
g(\theta) &= \left(\frac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2 \\
&= \frac{4a^2\cos^2\theta + a^2(1-\cos^2\theta)}{(a-2\cos\theta)^2} = \frac{a^2(1+3\cos^2\theta)}{(a-2\cos\theta)^2}
\end{aligned}
$$

$0 < \theta < \pi$ であるから

$$h(t) = a^2(3t^2+1)(a-2t)^{-2} \quad (-1 < t < 1)$$

とおくと，$h(t)$ の最小値は，$g(\theta)$ の最小値と一致するから

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= a^2\{6t(a-2t)^{-2} + (3t^2+1)\cdot 4(a-2t)^{-3}\} \\
&= 2a^2\{3t(a-2t) + 2(3t^2+1)\}(a-2t)^{-3} \\
&= 2a^2(3at+2)(a-2t)^{-3}
\end{aligned}
$$

$a > 2$ より，$-\dfrac{1}{3} < -\dfrac{2}{3a} < 0$ であるから，$h(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{2}{3a}$	$\cdots$	(1)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，求める最小値は

$$
\begin{aligned}
h\left(-\frac{2}{3a}\right) &= a^2\left\{3\left(-\frac{2}{3a}\right)^2 + 1\right\}\left\{a - 2\cdot\left(-\frac{2}{3a}\right)\right\}^{-2} \\
&= a^2\cdot\frac{4+3a^2}{3a^2}\cdot\left(\frac{3a^2+4}{3a}\right)^{-2} \\
&= \frac{3a^2+4}{3}\cdot\frac{9a^2}{(3a^2+4)^2} = \boldsymbol{\frac{3a^2}{3a^2+4}}
\end{aligned}
$$

■

3 (1) $f(x) = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6(a+1)x^2 + 6ax, \\ f''(x) &= 12x^2 - 12(a+1)x + 6a \\ &= 6\{2x^2 - 2(a+1)x + a\} \end{aligned}$$

$\dfrac{f''(x)}{6} = 0$ の係数について

$$D/4 = (a+1)^2 - 2a = a^2 + 1 > 0$$

したがって，$f''(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ．この 2 つの実数解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

C 上の 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化するので，これらの 2 点は C の変曲点である．また，$f''(x) = 0$ を解くと

$$\alpha = \frac{a+1-\sqrt{a^2+1}}{2}, \quad \beta = \frac{a+2+\sqrt{a^2+1}}{2}$$

上式より，$\beta - \alpha = \sqrt{a^2+1}$．条件より，$\beta - \alpha = \sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}$$

$a > 0$ であるから　　$\boldsymbol{a = 1}$

注意 $f'(a) = 0$ は $f(a)$ が極値であるための必要条件であるが，十分条件ではないように，$f''(a) = 0$ は点 $(a,\ f(a))$ が変曲点であるための必要条件ではあるが，十分条件ではない．必ず，$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化していることを示す必要がある．なお，$f''(x)$ の符号は曲率[1] の符号を表す．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf の p.10 を参照．

(2) (1) の結果より　$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$，$f''(x) = 6(2x^2 - 4x + 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 4x + 1)\left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{4}\right) - 2x + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{6}f''(x)\left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{4}\right) - 2x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(\alpha, -2\alpha + \dfrac{3}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\beta, -2\beta + \dfrac{3}{4}\right)$ とおく．

$$\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = 1 \quad \cdots (*)$$

$f(1) = 0$ より，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = \left(\alpha - 1, -2\alpha + \frac{3}{4}\right), \quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \left(\beta - 1, -2\beta + \frac{3}{4}\right)$$

$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|(\alpha - 1)\left(-2\beta + \frac{3}{4}\right) - (\beta - 1)\left(-2\alpha + \frac{3}{4}\right)\right| \\ &= \frac{5}{8}|\beta - \alpha| = \boldsymbol{\frac{5}{8}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \dfrac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \dfrac{f'''(\alpha)}{3!}(x - \alpha)^3 + (x - \alpha)^4$

曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \quad \cdots ①$$

$f''(\alpha) = 0$，$f'''(x) = 24(x - 1)$ より $f'''(\alpha) = 24(\alpha - 1)$ に注意して，$y = f(x)$ と ① から y を消去すると

$$\begin{aligned} 4(\alpha - 1)(x - \alpha)^3 + (x - \alpha)^4 &= 0 \\ (x - \alpha)^3(x + 3\alpha - 4) &= 0 \end{aligned}$$

したがって，P' の x 座標は　$-3\alpha + 4$

同様にして，Q' の x 座標は　$-3\beta + 4$

よって，線分 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ の中点の x 座標は，$(*)$ に注意して

$$-3\cdot\frac{\alpha+\beta}{2} + 4 = -3\cdot 1 + 4 = \mathbf{1}$$

解説

関数 $f(x)=x^4-4x^3+3x^2$ について，$f^{(4)}(x)=4!$ であるから

$$
\begin{aligned}
f(x)&=f(p)+\int_p^x f'(t)\,dt=f(p)-\int_p^x (x-t)'f'(t)\,dt\\
&=f(p)-\Big[\ (x-t)f'(t)\ \Big]_p^x+\int_p^x (x-t)f''(t)\,dt\\
&=f(p)+(x-p)f'(p)-\frac{1}{2!}\int_p^x \{(x-t)^2\}'f''(t)\,dt\\
&=f(p)+(x-p)f'(p)-\frac{1}{2!}\Big[(x-t)^2f''(t)\Big]_p^x+\frac{1}{2!}\int_p^x (x-t)^2f'''(t)\,dt\\
&=f(p)+(x-p)f'(p)+\frac{1}{2!}(x-p)^2f''(p)-\frac{1}{3!}\int_p^x \{(x-t)^3\}'f'''(t)\,dt\\
&=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2-\frac{1}{3!}\Big[(x-t)^3f'''(t)\Big]_p^x\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{3!}\int_p^x (x-t)^3f^{(4)}(t)\,dt\\
&=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3+4\int_p^x (x-t)^3\,dt\\
&=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3-\Big[(x-t)^4\Big]_p^x\\
&=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3+(x-p)^4
\end{aligned}
$$

一般に，n 次関数 $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ について $(n\geqq 2)$

$$
g(x)=g(p)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+a_n(x-p)^n
$$

が成り立つ．■

$\boxed{4}$ (1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3} = \dfrac{(p+q+r)k^2 + (4p+3q+r)k + 3p}{k(k+1)(k+3)}$

$x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ であるから

$$p+q+r=0, \quad 4p+3q+r=2a, \quad 3p=6b$$

よって　　$\boldsymbol{p=2b, \quad q=a-3b, \quad r=-a+b}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= 2b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) + (a-b)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) \\ &= 2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + (a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

(上式は，$n=1,2$ のときも成立する)

$(*)$ より，$b=0$ のとき $(n \geqq 3)$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) = \boldsymbol{\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}}$$

$(*)$ より，$a=0$ のとき $(n \geqq 4)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= 2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right) - b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \\ &= b\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}}\end{aligned}$$

(上式は，$n=1,2,3$ のときも成立する)

(3) $(*)$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k = 2b\cdot 1 + (a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{6}a+\frac{7}{6}b}$

■

5 (1) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a=b>c$ のとき　$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　　$b+c>a$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a=b>c$ であるから　$\dfrac{2}{b}>\dfrac{1}{c}$　すなわち　$2c>b>c$

ゆえに　$c=1$ のとき　$2>b>1$ より　なし
$c=2$ のとき　$4>b>2$ より　$a=b=3$
$c=3$ のとき　$6>b>3$ より　$a=b=4,\ 5$
$c=4$ のとき　$8>b>4$ より　$a=b=5,\ 6,\ 7$
$c=5$ のとき　$10>b>5$ より　$a=b=6,\ 7$
$c=6$ のとき　$12>b>6$ より　$a=b=7$
$c=7$ のとき　$14>b>7$ より　なし

よって，求める組の個数は　$1+2+3+2+1=\mathbf{9}$ (個)

(2) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a>b>c$ のとき　$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　　$b+c>a$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

ゆえに　　$a-b<c$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a>b>c$ であるから　$1\leqq c\leqq 5$

(i) $a>b>c=1$ のとき　$a-b<1$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>1$

これをみたす $(a,\ b)$ の組はなし

(ii) $a>b>c=2$ のとき　$a-b<2$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{2}$

よって，$(a,\ b)=(4,\ 3)$ の 1 個

(iii) $a>b>c=3$ のとき　$a-b<3$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{3}$

よって，$(a,\ b)=(5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (7,\ 5)$ の 4 個

(iv) $a>b>c=4$ のとき　$a-b<4$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{4}$

よって，$(a,\ b)=(6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$ の 3 個

(v) $a>b>c=5$ のとき　$a-b<5$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{5}$

よって，$(a,\ b)=(7,\ 6)$ の 1 個

したがって，求める組の個数は　$1+4+3+1=\mathbf{9}$　(個)

(3) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a > b = c$ のとき　$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　$b + c > a$　かつ　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

このとき，$a > b = c$ であるから　$c + c > a$　すなわち　$2c > a > c$

これは (1) の個数に等しいから　9 (個)

また，$a = b = c$ となる個数は 7 個であるから，以上をまとめると

- $a = b > c$ の場合が 9 個であるから，
  $b = c > a$，$c = a > b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b = c$ の場合が 9 個であるから，
  $b > c = a$，$c > a = b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b > c$ の場合が 9 個であるから，
  $$a > c > b,\ b > a > c,\ b > a > c,\ c > a > b,\ c > b > a$$
  の場合もそれぞれ 9 個
- $a = b = c$ の場合が 7 個

よって，条件 $(*)$ をみたす a，b，c の個数は

$$9 \times 3 + 9 \times 3 + 9 \times 6 + 7 = \mathbf{115}\ \ (\text{個})$$

■

8.2　2016 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 四面体 OABC において，P を辺 OA の中点，Q を辺 OB を 2 : 1 に内分する点，R を辺 BC の中点とする．P，Q，R を通る平面と辺 AC の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ．

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ．

2 a を正の定数とし，$f(x)=|x^2+2ax+a|$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $a=2$ とする．すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ．

(3) $0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ とする．すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を a を用いて表せ．また，その条件をみたす点 $(a,\ b)$ の領域を ab 平面上に図示せよ．

3 a を正の定数とし，2 曲線 $C_1: y=\log x$，$C_2: y=ax^2$ が点 P で接しているとする．以下の問に答えよ．

(1) P の座標と a の値を求めよ．

(2) 2 曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

4 約数，公約数，最大公約数を次のように定める．

- 2 つの整数 a，b に対して，$a = bk$ をみたす整数 k が存在するとき，b は a の約数であるという．
- 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という．
- 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という．

以下の問に答えよ．

(1) a，b，c，p は 0 でない整数で $a = pb + c$ をみたしているとする．

(i) $a = 18$，$b = 30$，$c = -42$，$p = 2$ のとき，a と b の公約数の集合 S，および b と c の公約数の集合 T を求めよ．

(ii) a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とする．M と N は等しいことを示せ．ただし，a，b，c，p は 0 でない任意の整数とする．

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n \ (n = 1, 2, \cdots), \quad a_1 = 3,\ a_2 = 4$$

で定める．

(i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

(ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ．

(iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ．

5 極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ．

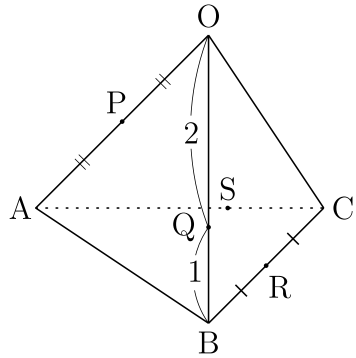
(2) $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi} \frac{dy}{dx}$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ．

(4) 曲線 C の長さを求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \boldsymbol{\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}}$$

(2) S は平面 PQR 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + \frac{t}{2}\right)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}$$

このとき，S は直線 AC 上の点であるから

$$\frac{1}{2}(1-s-t) + \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{2}{3}s + \frac{t}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = -1,\ t = \frac{4}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}| = 2 : 1}$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{QS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2$$
$$= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 8\vec{b}\cdot\vec{c} + 4\vec{c}\cdot\vec{a})$$

このとき　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \dfrac{1}{9}(1+4+4-2-4+2) = \dfrac{5}{9}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{QS}}| = \dfrac{\sqrt{5}}{3}}$ ■

2 (1) $g(x) = x^2 + 2ax + a$ とおくと　$g(x) = (x+a)^2 - a^2 + a$

$a > 0$ に注意すると

(i) $-a^2 + a \geqq 0$，すなわち，$0 < a \leqq 1$ のとき，$g(x) \geqq 0$ であるから

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

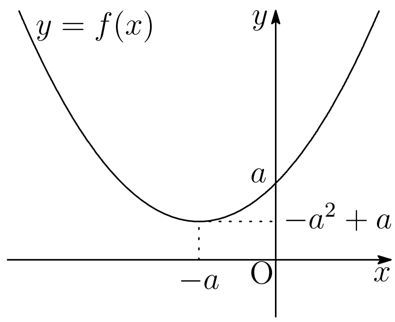
(ii) $-a^2 + a < 0$，すなわち，$1 < a$ のとき，

$g(x) = 0$ の解は　$x = -a \pm \sqrt{a^2 - a}$

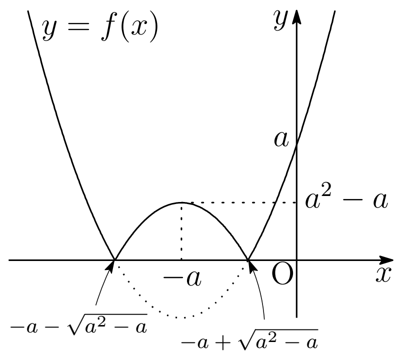
$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & (x \leqq -a - \sqrt{a^2-a},\ -a + \sqrt{a^2-a} \leqq x) \\ -g(x) & (-a - \sqrt{a^2-a} \leqq x \leqq -a + \sqrt{a^2-a}) \end{cases}$$

(i)，(ii) より，$y = f(x)$ のグラフは，次のようになる．

(i) $0 < a \leqq 1$ のとき



(ii) $1 < a$ のとき



(2) $a = 2$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は，(1)(ii) のグラフに $a = 2$ を代入して

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

また，$g(x) = x^2 + 4x + 2$ であるから，$g'(x) = 2x + 4$ より

$$g'(-2+\sqrt{2}) = 2(-2+\sqrt{2}) + 4 = 2\sqrt{2} > 2$$

点 $(-2+\sqrt{2},\ 0)$ が直線 $y = 2x + b$ の上側またはこの直線上にあるときで

$$0 \geqq 2(-2+\sqrt{2}) + b \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b \leqq 4 - 2\sqrt{2}}$$

(3)　(i) $0 < a \leqq 1$ のとき，すべての x について，

$$g(x) \geqq 2x + b \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2(a-1)x + a - b \geqq 0$$

が成り立つので，係数について

$$(a-1)^2 - (a-b) \leqq 0 \quad \text{よって} \quad b \leqq -a^2 + 3a - 1$$

(ii) $1 < a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$g'(x) = 2x + 2a$ より

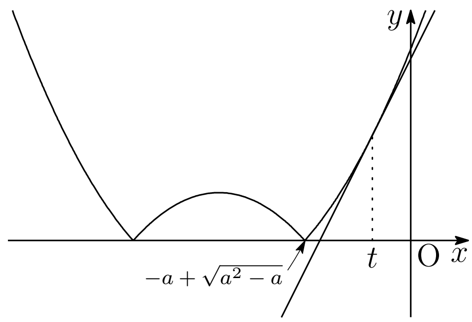
$$g'(-a + \sqrt{a^2 - a}) = 2(-a + \sqrt{a^2 - a}) + 2a = 2\sqrt{a^2 - a}$$

ここで　$a^2 - a = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$　ゆえに　$0 < a^2 - a \leqq \dfrac{3}{4}$

このとき　$g'(-a + \sqrt{a^2 - a}) \leqq 2\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \sqrt{3} < 2$

したがって，$y = f(x)$ と $y = 2x + b$ のグラフが接するとき，接点は，x 軸の上側にある．接点の x 座標を t とすると，$g'(t) = 2$ より

$$2t + 2a = 2$$



これを解いて　$t = 1 - a$

$y = g(x)$ 上の点 $(1 - a,\ g(1 - a))$ における接線の方程式は

$$y - g(1 - a) = 2(x - 1 + a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - a^2 + 3a - 1$$

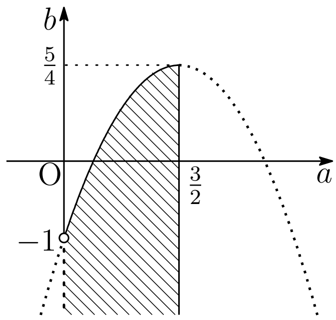
$f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つとき，直線 $y = 2x + b$ はこの直線の下側または一致するので，求める条件は

$$b \leqq -a^2 + 3a - 1$$

よって，(i)，(ii) より，求める領域は

$$\boldsymbol{b \leqq -a^2 + 3a - 1 \ \left(0 < a \leqq \dfrac{3}{2}\right)}$$

また，点 $(a,\ b)$ の領域は，右の図の斜線部分部分である．



■

3 (1) $f(x)=\log x$，$g(x)=ax^2$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g'(x)=2ax$

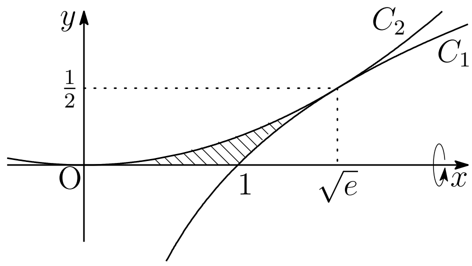
点Pの x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ であるから

$$\log t = at^2,\quad \frac{1}{t}=2at$$

第2式から　$at^2=\dfrac{1}{2}$　これを第1式に代入すると

$$\log t=\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad t=\sqrt{e}\quad \text{よって}\quad \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\sqrt{e},\ \frac{1}{2}}\right),\quad \boldsymbol{a=\frac{1}{2e}}$$

(2) 求める立体の体積を V とすると



$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\sqrt{e}}\left(\frac{x^2}{2e}\right)^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^2 dx$$

ここで

$$\int_0^{\sqrt{e}}\left(\frac{x^2}{2e}\right)^2 dx=\frac{1}{4e^2}\int_0^{\sqrt{e}} x^4\,dx=\frac{1}{4e^2}\left[\ \frac{x^5}{5}\ \right]_0^{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{20},$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^2dx &= \Big[\ x(\log x)^2\ \Big]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}x(2\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &=\frac{\sqrt{e}}{4}-2\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx\\ &=\frac{\sqrt{e}}{4}-2\Big[\ x(\log x-1)\ \Big]_1^{\sqrt{e}}\\ &=\frac{\sqrt{e}}{4}+\sqrt{e}-2=\frac{5}{4}\sqrt{e}-2\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{V}{\pi}=\dfrac{\sqrt{e}}{20}-\left(\dfrac{5}{4}\sqrt{e}-2\right)=2-\dfrac{6}{5}\sqrt{e}$

よって　$V=\boldsymbol{\left(2-\frac{6}{5}\sqrt{e}\right)\pi}$　■

4　(1)　(i)　$a=18=2\cdot3^2$，$b=30=2\cdot3\cdot5$，$c=-42=-2\cdot3\cdot7$ より

$$S=\{\pm\mathbf{1},\ \pm\mathbf{2},\ \pm\mathbf{3},\ \pm\mathbf{6}\},$$
$$T=\{\pm\mathbf{1},\ \pm\mathbf{2},\ \pm\mathbf{3},\ \pm\mathbf{6}\}$$

(ii)　n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記すると

$$(x,y)\,|\,x,\quad (x,y)\,|\,y$$

が成り立つ．$a=pb+c$ より　$(b,c)\,|\,a$　また，$(b,c)\,|\,b$ であるから，(b,c) は a と b の公約数，すなわち

$$(b,c)\,|\,(a,b)\quad\cdots①$$

同様に，$c=a-pb$ より　$(a,b)\,|\,c$　また，$(a,b)\,|\,b$ であるから，(a,b) は b と c の公約数，すなわち

$$(a,b)\,|\,(b,c)\quad\cdots②$$

①，② より　$(a,b)=(b,c)$　よって　$M=N$

(2)　(i)　(1)(ii) を $a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ に適用すると　$(a_{n+2},a_{n+1})=(a_{n+1},a_n)$
よって　$(a_{n+1},a_n)=(a_2,a_1)=(4,3)=\mathbf{1}$

(ii)　$a_{n+4}=6a_{n+3}+a_{n+2}$，$a_{n+3}=6a_{n+2}+a_{n+1}$，

$$\begin{aligned}a_{n+4}&=6a_{n+3}+a_{n+2}=6(6a_{n+2}+a_{n+1})+a_{n+2}\\&=37a_{n+2}+6a_{n+1}\end{aligned}$$

$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ より，$6a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$ であるから

$$\begin{aligned}a_{n+4}&=37a_{n+2}+(a_{n+2}-a_n)\\&=38a_{n+2}-a_n\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_{n+4}=38a_{n+2}-a_n}$

(iii)　(1)(ii) を $a_{n+4}=38a_{n+2}+(-a_n)$ に適用すると

$$(a_n+4,\ a_{n+2})=(a_{n+2},-a_n)=(a_{n+2},\ a_n)$$

$a_3=6a_2+a_1=6\cdot4+3=27$，$a_4=6a_3+a_2=6\cdot27+4=166$

(ii) の結果により

n が奇数のとき　$(a_{n+2},a_n)=(a_3,a_1)=(27,3)=\mathbf{3}$

n が偶数のとき　$(a_{n+2},a_n)=(a_4,a_2)=(166,4)=\mathbf{2}$　■

5 (1) $r=1+\cos\theta$ より

$$\begin{cases} x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

これらを θ について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta(1+2\cos\theta), \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -(1-\cos^2\theta)+(1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= (1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta) \end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{dx}{d\theta}=0\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ の解は　$\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　$\boldsymbol{(2,\ 0),\ (0,\ 0),\ \left(-\dfrac{1}{4},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}$

また，$\dfrac{dy}{d\theta}=0\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ の解は　$\theta=\pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\dfrac{3}{4},\ \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$

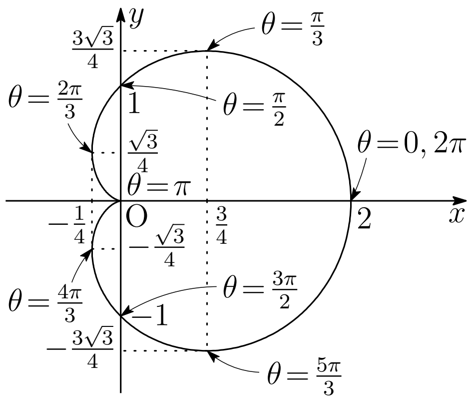
(2) $$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} &= \frac{(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)} \\ &= \frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}=\frac{0}{1+1}\cdot\frac{1+2}{1-2}=\boldsymbol{0}$

(3) $f(\theta) = 1 + \cos\theta$ とすると，$f(2\pi - \theta) = r(\theta)$．$C$ は x 軸に関して対称であるから，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における C の増減を調べる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}\right)$		$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	
(x, y)	$(2, 0)$	$\cdots$	$\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$	$\cdots$	$\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$	$\cdots$	$(0, 0)$

上の増減表および (2) の結果から，C の概形は次のようになる．



(4) $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

ゆえに　$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$r = 1 + \cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1 + \cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2 \\ &= 2(1 + \cos\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって，曲線 C の長さを l とすると

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \left[\,4\sin\frac{\theta}{2}\,\right]_0^{\pi} = 4 \end{aligned}$$

よって　$l = \mathbf{8}$

補足 曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ は，カージオイド (cardioid) または心臓形という．

解説

C の x 軸の上側の部分と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\ r^2\sin\theta\cos\theta\ \Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\ \frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\ \Big]_0^{\pi} = \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

C の x 軸の上側の部分を x 軸のまわりに 1 回転した回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y^2\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y^2\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\Big[\ r^3\sin^2\theta\cos\theta\ \Big]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\Big[\ -\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\ \Big]_0^{\pi} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

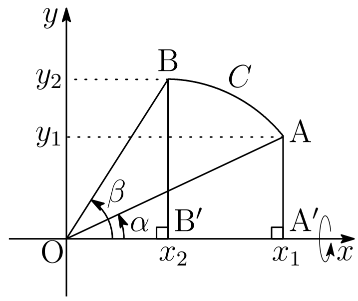
よって　　$V = \dfrac{8}{3}\pi$

曲線 $r = f(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の弧長 l，x 軸と囲まれた部分の面積 S，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$l = \int_0^{\pi}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta, \quad S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,d\theta, \quad V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta$$

極方程式と面積

$C : r = f(\theta)\ (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から x 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．$S_A = \triangle\mathrm{OAA'}$，$S_B = \triangle\mathrm{OBB'}$ とし，曲線 C，x 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域 D_C の面積を S_C，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域 D の面積を S とすると



$$\begin{aligned}
S_C &= \int_{x_2}^{x_1} y\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\, r^2\sin\theta\cos\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -S_B + S_A + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta
\end{aligned}$$

よって　　$S = S_C + S_B - S_A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta$

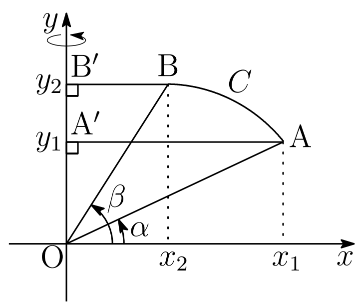
極方程式と x 軸の周りの回転体の体積

次に $\triangle\mathrm{OAA'}$，$\triangle\mathrm{OBB'}$ を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると

$$\begin{aligned}
V_C &= \pi\int_{x_2}^{x_1} y^2\,dx = \pi\int_{\beta}^{\alpha} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\Big[\, r^3\sin^2\theta\cos\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -V_B + V_A + \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

よって　　$V = V_C + V_B - V_A = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta$

極方程式と y 軸の周りの回転体の体積



$C: r=f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta=\alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から y 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．曲線 C，y 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域を D_C とし，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域を D とする．△OAA′，△OBB′ を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると

$$\begin{aligned}
V_C &= \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy = \pi\int_\alpha^\beta r^2\cos^2\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\int_\alpha^\beta (r^3)'\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + \pi\int_\alpha^\beta r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\Big[\,r^3\cos^2\theta\sin\theta\,\Big]_\alpha^\beta - \frac{\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(-2\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta)d\theta + \pi\int_\alpha^\beta r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= V_B - V_A + \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

よって　　$V = V_C + V_A - V_B = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta\,d\theta$

極方程式の計量

- 弧長 l　　$\boldsymbol{l = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$
- 面積 S　　$\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta}$
- x 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta\,d\theta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi)}$$

- y 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta\,d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)}$$

8.3　2017 年 (120 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ n を自然数とする．

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく．$3 < \pi < 4$ であることを用いて，以下の問に答えよ．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x) < 0$ であることを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ．

(3) (2) における解を x_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式をみたす S の値を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

(3) 不等式

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

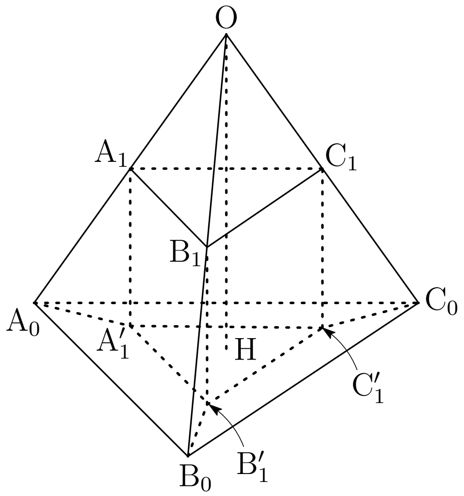
が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ．

3 1辺の長さがa_0の正四面体$\mathrm{OA_0B_0C_0}$がある．図のように，辺$\mathrm{OA_0}$上の点$\mathrm{A_1}$，辺$\mathrm{OB_0}$上の点$\mathrm{B_1}$，辺$\mathrm{OC_0}$上の点$\mathrm{C_1}$から平面$\mathrm{A_0B_0C_0}$に下ろした垂線をそれぞれ$\mathrm{A_1A_1'}$，$\mathrm{B_1B_1'}$，$\mathrm{C_1C_1'}$としたとき，三角柱$\mathrm{A_1B_1C_1{-}A_1'B_1'C_1'}$は正三角柱になるとする．ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする．同様に，点$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{A_2'}$，$\mathrm{B_2'}$，$\mathrm{C_2'}$，$\cdots$を次のように定める．正四面体$\mathrm{OA_kB_kC_k}$において，辺$\mathrm{OA_k}$上の点$\mathrm{A_{k+1}}$，辺$\mathrm{OB_k}$上の点$\mathrm{B_{k+1}}$，辺$\mathrm{OC_k}$上の点$\mathrm{C_{k+1}}$から平面$\mathrm{A_kB_kC_k}$に下ろした垂線をそれぞれ$\mathrm{A_{k+1}A_{k+1}'}$，$\mathrm{B_{k+1}B_{k+1}'}$，$\mathrm{C_{k+1}C_{k+1}'}$としたとき，三角柱$\mathrm{A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}{-}A_{k+1}'B_{k+1}'C_{k+1}'}$は正三角柱になるとする．辺$\mathrm{A_kB_k}$の長さを$a_k$とし，正三角柱$\mathrm{A_kB_kC_k{-}A_k'B_k'C_k'}$の体積を$V_k$とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点Oから平面$\mathrm{A_0B_0C_0}$に下ろした垂線をOHとし，$\theta=\angle\mathrm{OA_0H}$とするとき，$\cos\theta$と$\sin\theta$の値を求めよ．

(2) a_1をa_0を用いて表せ．

(3) V_kをa_0を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}V_k$を求めよ．



4 $\vec{v}_1 = (1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}_2 = (1, -1, -1)$，$\vec{v}_3 = (-1,\ 1, -1)$，$\vec{v}_4 = (-1, -1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ (1，2，3，4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る) をふるごとに，出た目が k $(k = 1, 2, 3, 4)$ のときは $\vec{v}_k$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \vec{v}_k$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0 = \mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ．

(4) n を 6 以下の自然数とする．$\mathrm{P}_n = \mathrm{O}$ となる確率を求めよ．

5 r，c，ω は正の定数とする．座標平面上の動点 P は時刻 $t = 0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする．また，動点 Q は時刻 $t = 0$ のとき点 $(0, -r)$ にあるとする．点 P から見て，動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問に答えよ．

(1) 時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ．

(2) 動点 Q の描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1 \neq t_2$ ならば $(x(t_1),\ y(t_1)) \neq (x(t_2),\ y(t_2))$ であるための必要十分条件を r，c，ω を用いて与えよ．

解答例

1 (1) $f(x) = \sin x - nx^2 + \dfrac{1}{9}x^3$ より

$$f'(x) = \cos x - 2nx + \frac{1}{3}x^2,$$
$$f''(x) = -\sin x - 2n + \frac{2}{3}x$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\pi < 4$ に注意して

$$f''(x) < -2n + \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} < -2\cdot1 + \frac{\pi}{3} < -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

(2) $f'(0) = 1 > 0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2n\cdot\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$

$$= -\pi\left(n - \frac{\pi}{12}\right) = -\pi\left(1 - \frac{\pi}{12}\right) < 0$$

(1) の結果から，$f'(x)$ は単調減少であるから，上の結果により

$$f'(\alpha) = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす α が唯一存在する．

また　$f(0) = 0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3$

$$< 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{2}\right)^3 = -\frac{13}{36} < 0$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$f(\frac{\pi}{2})$

よって，方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ 1 つの解をもつ．

(3) $f(x_n) = 0$ $(0 < x_n < \frac{\pi}{2})$ より　$\sin x_n - n{x_n}^2 + \dfrac{1}{9}{x_n}^3 = 0 \quad \cdots(*)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} {x_n}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin x_n + \frac{1}{9}{x_n}^3\right) = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

上式および $(*)$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n} + \frac{1}{9}{x_n}^2\right) = \mathbf{1}$　■

2 (1) $t \neq 0$ のとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ 　ゆえに $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^n - \frac{1}{1-t} = -\frac{t^{n+1}}{1-t}$

$t = -e^{-x}$ とおいて，上式に代入すると

$$\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k - \frac{1}{1+e^{-x}} = -\frac{(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}$$

よって
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) (1) の結果から
$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} &= 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-kx} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \int_0^1 e^{-kx}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \Big[-\frac{e^{-kx}}{k}\Big]_0^1 - \Big[\log(1+e^{-x})\Big]_0^1 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - \log\frac{1+e^{-1}}{2} \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \log\dfrac{1+e^{-1}}{2}}$

(3) $0 \leqq \dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \leqq e^{-(n+1)x}$ であるから

$$\begin{aligned}0 \leqq \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leqq \int_0^1 e^{-(n+1)x}dx &= \Big[-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\Big]_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-n-1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ から，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} = 0$

$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - \log\frac{1+e^{-1}}{2} = 0$

よって
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} = \boldsymbol{\log\frac{1+e^{-1}}{2}}$$ ■

3 (1) 直角三角形 $\mathrm{OA_0H}$ について　$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{A_0H}}{\mathrm{OA_0}} = \dfrac{\mathrm{A_0H}}{a_0}$

H は $\triangle\mathrm{A_0B_0C_0}$ の外心であるから，正弦定理により

$$\frac{a_0}{\sin 60^\circ} = 2\mathrm{A_0H} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{A_0H}}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

また　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2}{3}}}$

(2) $\mathrm{OA_1} = \mathrm{A_1B_1} = a_1$ より　$\mathrm{A_0A_1} = a_0 - a_1$

$\mathrm{A_1A_1'} = \mathrm{A_0A_1}\sin\theta = (a_0 - a_1)\sin\theta$ であるから，$\mathrm{A_1B_1} = \mathrm{A_1A_1'}$ のとき

$$a_1 = (a_0 - a_1)\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad a_1 = \frac{a_0\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

よって　$a_1 = \dfrac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}a_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}a_0 = \boldsymbol{(\sqrt{6}-2)a_0}$

(3) (2) と同様にして　$a_{k+1} = (\sqrt{6}-2)a_k$　ゆえに　$a_k = (\sqrt{6}-2)^k a_0$

したがって　$V_k = \dfrac{1}{2}{a_k}^2\sin 60^\circ\cdot a_k = \dfrac{\sqrt{3}}{4}{a_k}^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}-2)^{3k}{a_0}^3$

$|\sqrt{6}-2| < 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} V_k &= \frac{\sqrt{3}{a_0}^3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{6}-2)^{3k} \\ &= \frac{\sqrt{3}{a_0}^3}{4}\cdot\frac{(\sqrt{6}-2)^3}{1-(\sqrt{6}-2)^3} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18}{a_0}^3}\end{aligned}$$

■

4 (1) $i, j = 1, 2, 3, 4$ とし，$\vec{v}_i + \vec{v}_j$ が x 軸と平行になる組み合わせは

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (2,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = (-2,\ 0,\ 0)\end{aligned}$$

したがって，求める確率は　$\dfrac{2!+2!}{4^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) $\vec{e_1} = (1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e_2} = (0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e_3} = (0,\ 0,\ 1)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，次のベクトルからなる．

$$\begin{array}{ll}
\vec{v_1}+\vec{v_1}=2\vec{v_1}, & \vec{v_2}+\vec{v_2}=2\vec{v_2}, \\
\vec{v_3}+\vec{v_3}=2\vec{v_3}, & \vec{v_4}+\vec{v_4}=2\vec{v_4}, \\
\vec{v_1}+\vec{v_2}=\vec{v_2}+\vec{v_1}=2\vec{e_1}, & \vec{v_1}+\vec{v_3}=\vec{v_3}+\vec{v_1}=2\vec{e_2}, \\
\vec{v_1}+\vec{v_4}=\vec{v_4}+\vec{v_1}=2\vec{e_3}, & \vec{v_2}+\vec{v_3}=\vec{v_3}+\vec{v_2}=-2\vec{e_3}, \\
\vec{v_2}+\vec{v_4}=\vec{v_4}+\vec{v_2}=-2\vec{e_2}, & \vec{v_3}+\vec{v_4}=\vec{v_4}+\vec{v_3}=-2\vec{e_1}
\end{array}$$

$\vec{v_j}\cdot\vec{e_k} \neq 0$ であるから $(j=1,2,3,4,\ k=1,2,3)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}} \perp \overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ となるのは，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ が座標軸に平行で，互いに垂直な場合について調べればよい．(1) の結果と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，x 軸，y 軸，z 軸と平行となる確率は $\dfrac{1}{4}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\times{}_3\mathrm{P}_2 = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(3) $i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ のとき，$\vec{v_i}$，$\vec{v_j}$，$\vec{v_k}$ は 1 次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}$ がすべて異なる場合を除く確率であるから

$$1-\frac{{}_4\mathrm{P}_3}{4^3} = 1-\frac{4\cdot3\cdot2}{4^3} = \boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

(4) $\vec{v_i}(i=1,2,3,4)$ の成分はすべて奇数である．
ゆえに，$n=1,\ 3,\ 5$ のとき，$\mathrm{P}_n = \mathrm{O}$ となる確率は　0
$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_4P_6}}$ は (2) で求めたベクトルである．
ゆえに，$n=2,6$ のとき，$\mathrm{P}_n = \mathrm{O}$ のとなる確率は　0
$n=4$ のとき，$\mathrm{P}_n = \mathrm{O}$ のとなるのは，$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}} + \overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ が

$$\begin{array}{lll}
2\vec{e_1}+(-2\vec{e_1}), & 2\vec{e_2}+(-2\vec{e_2}), & 2\vec{e_3}+(-2\vec{e_3}), \\
-2\vec{e_1}+2\vec{e_1}, & -2\vec{e_2}+2\vec{e_2}, & -2\vec{e_3}+2\vec{e_3}
\end{array}$$

の場合である．このとき，求める確率は　$\dfrac{2}{4^2}\cdot\dfrac{2}{4^2}\times 6 = \dfrac{3}{32}$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{n=1,2,3,5,6}$ **のとき** $\boldsymbol{0}$，　$\boldsymbol{n=4}$ **のとき** $\boldsymbol{\dfrac{3}{32}}$

5　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (ct,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (r\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}),\ r\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})) = (r\sin\omega t, -r\cos\omega t)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (ct + r\sin\omega t, -r\cos\omega t)$

よって　$\mathbf{Q}(\boldsymbol{ct + r\sin\omega t, -r\cos\omega t})$

(2) $(x(t_1),\ y(t_1)) = (x(t_2),\ y(t_2))$ ならば $t_1 = t_2$ であるための必要十分条件を求めればよい．(1) の結果から，$(x(t_1),\ y(t_1)) = (x(t_2),\ y(t_2))$ のとき

$$ct_1 + r\sin\omega t_1 = ct_2 + r\sin\omega t_2,\quad -r\cos\omega t_1 = -r\cos\omega t_2$$

上の 2 式から

$$r(\sin\omega t_2 - \sin\omega t_1) = c(t_2 - t_1),\quad r(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1) = 0$$

したがって

$$\begin{aligned} c^2(t_2 - t_1)^2 &= r^2(\sin\omega t_2 - \sin\omega t_1)^2 + r^2(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1)^2 \\ &= 2r^2\{1 - \cos\omega(t_2 - t_1)\} \\ &= 4r^2\sin^2\frac{\omega(t_2 - t_1)}{2} \end{aligned}$$

ここで，$\theta = \dfrac{\omega(t_2 - t_1)}{2}$ とおくと

$$c^2\left(\frac{2\theta}{\omega}\right)^2 = 4r^2\sin^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{c}{r\omega}|\theta| = |\sin\theta|$$

これが $\theta = 0$ 以外に解をもたない条件，すなわち，方程式

$$\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| = \frac{c}{r\omega} \qquad \cdots(*)$$

が解を持たない条件を求めればよい．$f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ とすると，$f(-\theta) = f(\theta)$ であるから，$\theta > 0$ について調べる．

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

$y = \sin\theta$ と $y = \theta$ のグラフから，$0 < \theta \leqq \pi$ のとき

$$\theta > \sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

$\theta > \pi$ のとき　$\left|\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right| < \dfrac{1}{\pi}$　したがって　$\left|\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right| < 1$

$(*)$ が解をもたないとき　$\dfrac{c}{r\omega} \geqq 1$　よって　$\boldsymbol{c \geqq r\omega}$　■

8.4　2018 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする．辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする．また $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ．

(3) t が (2) で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ．

2 k を 2 以上の整数とする．また

$$f(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $x > 0$ において，関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$，$x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を満たすとき，$x_n > 1$ を示せ．

(3) (2) の数列 $\{x_n\}$ に対し，

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ．また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

3 さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots (*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ．

(2) $(*)$ が整数を解にもつとする．このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ．

(3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ．

$\boxed{4}$ 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ 3 次式で，3 次の係数は 1，定数項は -3 とする．方程式 $f(x)=0$ は，1 と虚数 $\alpha,\ \beta$ を解にもつとし，α の実部は 1 より大きく，α の虚部は正とする．複素数平面上で $\alpha,\ \beta,\ 1$ が表す点を順に A，B，C とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．

(1) α の絶対値を求めよ．

(2) θ を α の偏角とする．$\triangle$ABC の面積 S を θ を用いて表せ．

(3) S を最大にする θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 座標空間において，O を原点とし，A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(1, 1, 0) とする．$\triangle$OAB を直線 OC の周りに 1 回転してできる回転体を L とする．以下の問に答えよ．

(1) 直線 OC 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$ から直線 OC におろした垂線を PH とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x，y，z の式で表せ．

(2) 点 P$(x,\ y,\ z)$ が L の点であるための条件は

$$z^2 \leqq 2xy \text{ かつ } 0 \leqq x+y \leqq 2$$

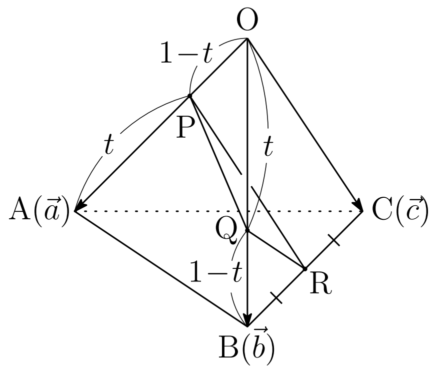
であることを示せ．

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする．L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ．

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z) \mid (x,\ y, z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{(1-t)\vec{a} - t\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) - t\vec{b}$$

$$= \boldsymbol{\left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}}$$

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}} = 0$ であるから

$$\{(1-t)\vec{a} - t\vec{b}\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right\} = 0$$

ゆえに　$(1-t)\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{a}\cdot\vec{b} + \dfrac{1}{2}(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a} - t\left(\dfrac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2 - \dfrac{1}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

上式に $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1^2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$，$|\vec{b}| = 1$ を代入すると

$$\frac{1}{2}(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right) + \frac{1}{4}(1-t) - t\left(\frac{1}{2}-t\right) - \frac{1}{4}t = 0$$

整理すると　$6t^2 - 7t + 2 = 0$　ゆえに　$(2t-1)(3t-2) = 0$

$0 < t < 1$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}}$

(3) (i) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \dfrac{1}{2}\vec{c}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}| = \dfrac{1}{2}|\vec{c}| = \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 - 2\cdot\frac{1}{2} + 1^2} = \dfrac{1}{2}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}| = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

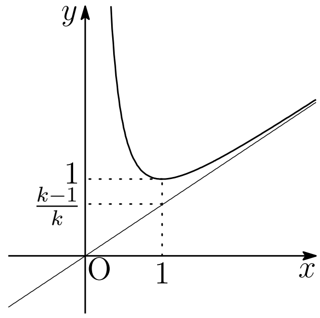
(ii) $t = \dfrac{2}{3}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \dfrac{1}{6}(-\vec{a} + 3\vec{c})$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}| = \dfrac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{1^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot 1^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}| = \dfrac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{c} + 9|\vec{c}|^2} = \dfrac{1}{6}\sqrt{1^2 - 6\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 1^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{6}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}| = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{6} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{36}}$　■

2 (1) $f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ より



$$f'(x)=\frac{1}{k}(k-1)\left(1-\frac{1}{x^k}\right)\quad\cdots(*)$$

$x>0$ において，$f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{k-1}{k}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{kx^{k-1}}=0$$

したがって，$y=f(x)$ の漸近線は　　$\boldsymbol{x=0,\ y=\dfrac{k-1}{k}x}$

よって，グラフの概形は右の図のようになる．

(2) $x_n>1$ であることを数学的帰納法により示す．

［1］$x_1>1$ であるから，$n=1$ のとき成立する．

［2］$n=j$ のとき，$x_j>1$ であると仮定すると，平均値の定理により

$$\frac{x_{j+1}-1}{x_j-1}=\frac{f(x_j)-f(1)}{x_j-1}=f'(c)$$

を満たす $c\ (1<c<x_j)$ が存在する．このとき，$(*)$ より

$$0<f'(c)=\frac{k-1}{k}\left(1-\frac{1}{c^k}\right)<\frac{k-1}{k}$$

したがって　　$0<\dfrac{x_{j+1}-1}{x_j-1}<\dfrac{k-1}{k}\quad\cdots(**)$

よって，$x_j>1$ のとき，$x_{j+1}>1$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$x_n>1$ が成立する．

(3) $(**)$ より，$n>1$ のとき　$0<\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1}\frac{x_{j+1}-1}{x_j-1}<\prod_{j=1}^{n-1}\frac{k-1}{k}$

したがって　　$0<\dfrac{x_n-1}{x_1-1}<\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0\quad\text{すなわち}\quad\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

解説 (2) ですべての自然数 n について，$x_n > 1$ を示した (下に有界).

$x > 1$ のとき

$$f(x) - x = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right) - x$$
$$= \frac{1}{k}\left(-1 + \frac{1}{x^{k-1}}\right) = \frac{1-x^k}{kx^{k-1}} < 0$$

$x_j > 1$ のとき，$f(x_j) - x_j < 0$　ゆえに　$x_{j+1} < x_j$

$\{x_n\}$ は下に有限な単調減少列であるから，$\{x_n\}$ は極限値をもつ[2].

$x > 1$ $(0 < x < 1$ でもよい) のとき，$f(x) - 1 > 0$ は，次式からも示される.

$$f(x) - 1 = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right) - 1$$
$$= \frac{1}{kx^{k-1}}\{(k-1)x^k - kx^{k-1} + 1\}$$
$$= \frac{(x-1)^2}{kx^{k-1}}\sum_{j=1}^{k-1} jx^{j-1}$$

または，$f''(x) = \dfrac{k-1}{x^{k+1}}$ より，$x > 0$ において，$f''(x) > 0$ であるから

$$f(x) - 1 = f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)\,dt = -\int_1^x (x-t)'f'(t)\,dt$$
$$= -\Big[\,(x-t)f'(t)\,\Big]_1^x + \int_1^x (x-t)f''(t)\,dt$$
$$= (x-1)f'(1) + \int_1^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_1^x (x-t)f''(t)\,dt$$

$1 < x$ のとき，$1 < t < x$ において，$x - t > 0$ より　$\displaystyle\int_1^x (x-t)f''(t)\,dt > 0$

$x < 1$ のとき，$x < t < 1$ において，$t - x > 0$ より

$$\int_1^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_x^1 (t-x)f''(t) > 0$$

したがって，$0 < x_1 < 1$ であっても，$x_j > 1$ $(j = 2, 3, \cdots)$ より

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2008.pdf $\boxed{8}$ を参照.

3 (1) 2次方程式 $x^2 - ax + b = 0 \cdots (*)$ が $x = 1$ を解にもつから　$b = a - 1$

$1 \leqq a \leqq 6$，$2 \leqq b \leqq 12$ であるから

$$(a,\ b) = (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$$

a の値に対する確率は $\frac{1}{6}$，それぞれの b の値に対する確率は

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36}\right) = \frac{10}{216} = \boldsymbol{\frac{5}{108}}$$

(2) 2次方程式 $(*)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

$(*)$ の整数解を α とすると，上の第1式から

$$\beta = a - \alpha$$

上式の右辺は整数であるから，β も整数である．

2整数 α，β について，$\alpha \leqq \beta$ とおいても一般性を失わないから

$$2\alpha \leqq \alpha + \beta = a \leqq 6 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha \leqq 3$$

(3) (i) $x = 2$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき　$b = 2a - 4$

$$(a,\ b) = (3,\ 2),\ (4,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 8)$$

(ii) $x = 3$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき　$b = 3a - 9$

$$(a,\ b) = (4,\ 3),\ (5,\ 6)\ (6,\ 9)$$

(1),(i),(ii) より

a	3	4	4,5	6	5	6	6
b	2	3	4	5	6	8	9

よって，求める確率は

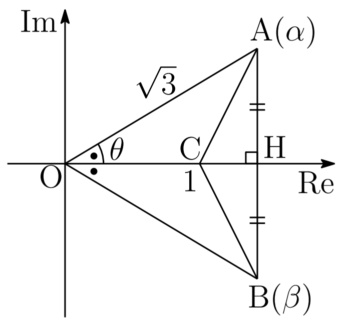
$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36}\cdot 2 + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36}\right) = \frac{27}{216} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

■

4 (1) 実数を係数とする 3 次方程式が虚数 α を解にもつとき，$\overline{\alpha}$ もこの方程式の解であるから，$\beta = \overline{\alpha}$ である．3 次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha\beta\cdot 1 = |\alpha|^2 = -\frac{-3}{1} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{|\alpha| = \sqrt{3}}$$

(2) 右の図において



$$\mathrm{CH} = \mathrm{OH} - \mathrm{OC} = \sqrt{3}\cos\theta - 1$$
$$\mathrm{AH} = \sqrt{3}\sin\theta$$

よって　$S = 2\triangle\mathrm{ACH} = 2\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{CH}$

$$= \boldsymbol{\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta - 1)}$$

(3) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の解を $\theta = \varphi$ とし，

$$g(\theta) = \frac{S}{\sqrt{3}} = \sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta - 1) \quad (0 < \theta < \varphi)$$

とすると

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \cos\theta(\sqrt{3}\cos\theta - 1) + \sin\theta(-\sqrt{3}\sin\theta) \\ &= 2\sqrt{3}\cos^2\theta - \cos\theta - \sqrt{3} \\ &= (\sqrt{3}\cos\theta + 1)(2\cos\theta - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$\cos\dfrac{\pi}{6} > \cos\varphi$，すなわち，$\dfrac{\pi}{6} < \varphi$ に注意して

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	(φ)
$g'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$g(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，S を最大にする θ は　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$

ゆえに　$\alpha = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta = \overline{\alpha} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

したがって，$\alpha + \beta = 3$，$\alpha\beta = 3$ より，2 数 α, β を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

よって　$f(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 3) = \boldsymbol{x^3 - 4x^2 + 6x - 3}$

別解 $\alpha = p + qi$ とおくと $(1 < p < \sqrt{3},\ q > 0)$ $p^2 + q^2 = 3$

$S = (p-1)q$ より $S^2 = (p-1)^2q^2 = (p-1)^2(3-p^2)$

$h(p) = (p-1)^2(3-p^2)$ とおくと $(1 < p < \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} h'(p) &= 2(p-1)(3-p^2) + (p-1)^2\cdot(-2p) \\ &= 2(p-1)\{(3-p^2) - p(p-1)\} \\ &= -2(p-1)(2p^2-p-3) \\ &= -2(p-1)(2p-3)(p+1) \end{aligned}$$

p	(1)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$h'(p)$		$+$	0	$-$	
$h(p)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

S が極大となるとき，$p = \dfrac{3}{2}$ であるから

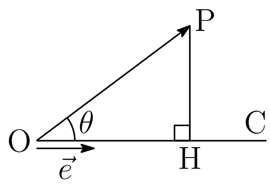
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + q^2 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって $\alpha = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\theta = \arg\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ ■

5　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e})\vec{e}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{x+y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{x+y}{2}(1,\ 1,\ 0)=\left(\boldsymbol{\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2},\ 0}\right),\\\overrightarrow{\mathrm{HP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2},\ 0\right)\\&=\left(\boldsymbol{\frac{x-y}{2},\ \frac{y-x}{2},\ z}\right)\end{aligned}$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ方向の単位ベクトルを $\vec{e}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta)\vec{e}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e})\vec{e}$

(2) P が L 上の点であるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|^2\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2$ より

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{y-x}{2}\right)^2+z^2\leqq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

これを整理すると　$z^2\leqq 2xy$　$\cdots$①

また，H は線分 OC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{x+y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$0\leqq\frac{x+y}{2}\leqq 1\quad \text{すなわち}\quad 0\leqq x+y\leqq 2\quad\cdots②$$

①，② より，求める条件は　$z^2\leqq 2xy$ かつ $0\leqq x+y\leqq 2$

(3) L の平面 $x=a$ $(1 \leqq a \leqq 2)$ による断面の領域は

$$z^2 \leqq 2ay,\ 0 \leqq a+y \leqq 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{z^2}{2a} \leqq y \leqq 2-a$$

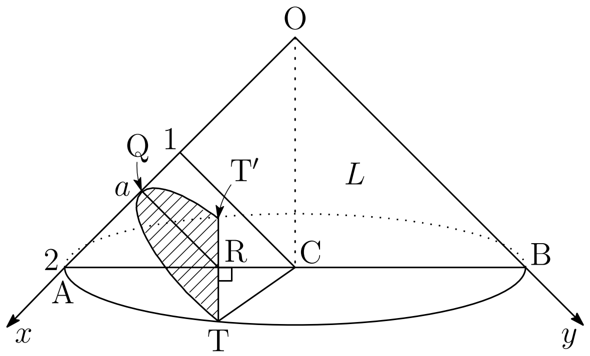
放物線 $y=\dfrac{z^2}{2a}$ と直線 $y=2-a$ の交点の z 座標は

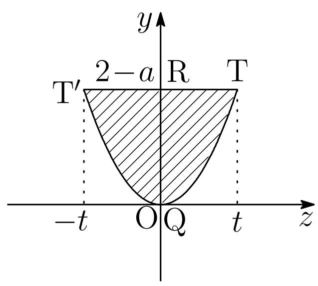
$$2-a=\frac{z^2}{2a} \quad \text{ゆえに} \quad z=\pm\sqrt{2a(2-a)}$$

したがって，$S(a)$ は下の図の斜線部分の面積である．

ここで，$t=\sqrt{2a(2-a)}$ とおくと，$2-a=\dfrac{t^2}{2a}$ に注意して

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-t}^{t}\left(\frac{t^2}{2a}-\frac{z^2}{2a}\right)dz = \frac{1}{2a}\int_{-t}^{t}(t+z)(t-z)dz \\ &= \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{6}\cdot(2t)^3 = \frac{2t^3}{3a} \\ &= \frac{2\cdot 2a(2-a)\sqrt{2a(2-a)}}{3a} = \boldsymbol{\frac{4}{3}(2-a)\sqrt{2a(2-a)}} \end{aligned}$$





別解　平面 $x=a$ と x 軸，線分 AB との交点をそれぞれ Q，R とすると

$$\mathrm{QR}=\mathrm{QA}=2-a$$

上の図において，$\mathrm{CR}=\sqrt{2}(a-1)$，$\mathrm{CT}=\mathrm{CA}=\sqrt{2}$ であるから

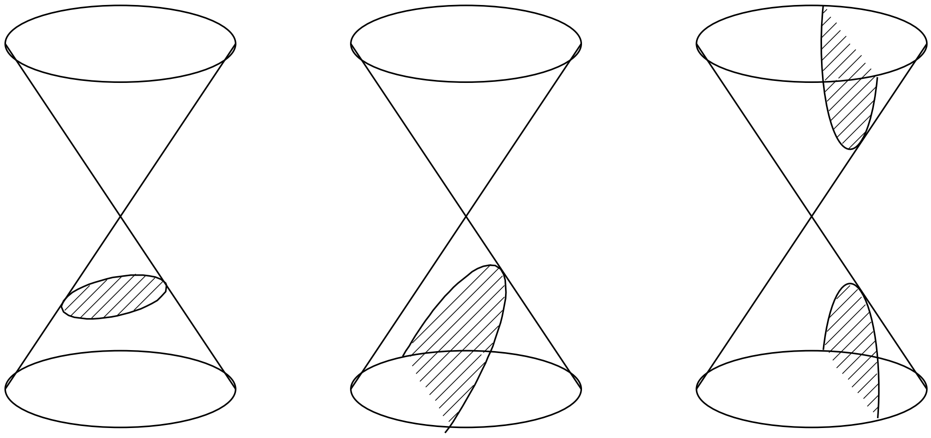
$$\mathrm{RT}=\sqrt{\mathrm{CT}^2-\mathrm{CR}^2}=\sqrt{2-2(a-1)^2}=\sqrt{2a(2-a)}$$

円錐の母線に平行な平面 $x=a$ による切り口は放物線であるから[3]

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{2}{3}\mathrm{QR}\cdot\mathrm{TT'} = \frac{2}{3}\mathrm{QR}\cdot 2\mathrm{RT} \\ &= \frac{2}{3}(2-a)\cdot 2\sqrt{2a(2-a)} = \frac{4}{3}(2-a)\sqrt{2a(2-a)} \end{aligned}$$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2021_12_18.pdf

補足 平面による円錐面の切り口は 2 次曲線である．そのため，2 次曲線を円錐曲線ともいう．とくに，放物線となるのは，平面が母線と平行な場合である．また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合である．とくに，平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は 1 点に退化する．



楕円　放物線　双曲線

(4) (3) の結果から，求める立体の体積を V とすると

$$V=\int_1^2 S(a)\,da=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_1^2 (2-a)\sqrt{1-(a-1)^2}\,da$$

$u=a-1$ とおくと　$\dfrac{du}{da}=1$

a	$1\longrightarrow 2$
u	$0\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\int_1^2 (2-a)\sqrt{1-(a-1)^2}\,da &= \int_0^1 (1-u)\sqrt{1-u^2}\,du\\ &= \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du-\int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,du\\ &= \frac{\pi}{4}+\left[\frac{1}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

よって　$V=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4}{9}\right)\sqrt{2}}$ ■

8.5　2019年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 以下の問に答えよ．

(1) 関数
$$f(x)=\frac{\log x}{x}$$
の $x>0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ．

(2) a を $a\neq 1$ をみたす正の実数とする．曲線 $y=e^x$ と曲線 $y=x^a$ $(x>0)$ が共有点Pをもち，さらに点Pにおいて共通の接線をもつとする．点Pの x 座標を t とするとき，a と t の値を求めよ．

(3) a と t を(2)で求めた実数とする．x を $x\neq t$ をみたす正の実数とするとき，e^x と x^a の大小を判定せよ．

2 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ をみたす△PABを考え，辺ABの中点をM，△PABの重心をGとする．以下の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ．

(3) 点Aと点Bを固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ をみたすように点Pを動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ．ただし，$0<\angle\mathrm{ABG}<\pi$ とする．

3 n を2以上の整数とする．2個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが1となる確率を P_n とする．以下の問に答えよ．

(1) P_2，P_3，P_4 を求めよ．

(2) $n\geqq 36$ のとき，P_n を求めよ．

(3) $P_n=\dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする．

$$1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\cdots$$

すなわち，$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4$ で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n = a_{n-3}$ とする．この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の問に答えよ．

(1) S_n を求めよ．

(2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ．

(3) どのような自然数 k に対しても，$S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ．

$\boxed{5}$ 媒介変数表示

$$x = \sin t,\quad y = (1 + \cos t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ．

(2) C の凹凸を調べ，C の概形を描け．

(3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ を微分すると $f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

よって $\boldsymbol{x = e}$ のとき 最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$

(2) $g(x) = e^x$，$h(x) = x^a$ とおくと $g'(x) = e^x$，$h'(x) = ax^{a-1}$
条件より，$g(t) = h(t)$，$g'(t) = h'(t)$ であるから

$$(*) \begin{cases} e^t = t^a \\ e^t = at^{a-1} \end{cases}$$

上の 2 式から，e^t を消去すると

$$t^a = at^{a-1} \quad \text{ゆえに} \quad (t-a)t^{a-1} = 0$$

$t > 0$ より，$t = a$ であるから，これを $(*)$ の第 1 式に代入して

$$e^a = a^a \quad \text{ゆえに} \quad a = e \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = t = e}$$

(3) 条件より，e^x $(x \neq e)$ と x^e の大小を比較する．(1) の結果から

$$\frac{1}{e} > \frac{\log x}{x} \quad \text{ゆえに} \quad x > e\log x \quad \text{よって} \quad e^x > x^e$$

■

2 (1) 点 M は辺 AB の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}})$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} \quad \cdots ①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}} - \overrightarrow{\mathrm{PA}}| = 2$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = 4 + 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

上の結果を ① に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \frac{1}{4}(4 + 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 1}$$

(2) 点 G は △PAB の重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = 3\overrightarrow{\mathrm{GM}} \quad \cdots ②$

また，$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}})$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \dfrac{3}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}) \quad \cdots ③$

$\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} = 0 \quad \text{および} \quad |\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 2^2 = 4$$

③ より　$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \dfrac{9}{4}|\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2 = \dfrac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2)$

$$= \frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2) = \frac{9}{4}\cdot 4 = 9$$

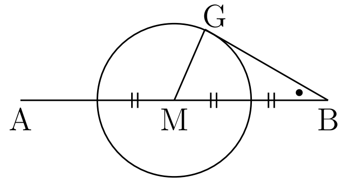
これを (1) の結果に代入して　$9 = \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 1$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 8}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ を (1) の結果に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = 1 + \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PM}}| = \frac{3}{2}$$

これに ② を代入することにより　$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{MG}}| = \dfrac{1}{2}$

したがって，G は M を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある．B からこの円に引いた接線と辺 AB のなす角が求める最大値であるから，MB = 1 より



$$\boldsymbol{\angle\mathrm{ABG} = \frac{\pi}{6}}$$

■

3　(1) 2個のさいころの出た目をそれぞれ a，b とし，$X = ab-1$ とおくと，X は右の表のようになる．

$X = ab - 1$

a \ b	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	7	9	11
3	2	5	8	11	14	17
4	3	7	11	15	19	23
5	4	9	14	19	24	29
6	5	11	17	23	29	35

$$X \equiv 0 \pmod{n} \quad \cdots (*)$$

を満たす X の個数について

$n=2$ のとき，次の9個

$0,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 14,\ 14,\ 24$

$n=3$ のとき，次の8個

$0,\ 3,\ 3,\ 3,\ 9,\ 9,\ 15,\ 24$

$n=4$ のとき，次の5個

$0,\ 4,\ 4,\ 8,\ 24$

よって　$P_2 = \dfrac{9}{36} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$，$P_3 = \dfrac{8}{36} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$，$P_4 = \boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$

(2) $n \geqq 36$ のとき，$(*)$ を満たす X の個数は　1個

よって，$n \geqq 36$ のとき　$P_n = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$

(3) $P_n = \dfrac{1}{18} = \dfrac{2}{36}$ であるから，$(*)$ を満たす X が2個，すなわち，0以外に1個だけ，$(*)$ を満たす n を求めればよい．$a \neq b$ のときの次の X について

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 17, 19, 23, 29\} \quad \cdots ①$$

これらは，$(*)$ を満たす X が2個以上存在するので，これらは含まない．

また，(2) の結果から，$n \geqq 36$ を含まない．

以上を除く，$a = b$ のとき

$$8 = 2^3, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 24 = 2^3 \cdot 3, \quad 35 = 5 \cdot 7$$

これらの4数の約数で他の数の約数に含まれないこと，さらに①に含まれないことに注意すると，求める n は

$2 \cdot 3,\quad 2^2 \cdot 3,\quad 3 \cdot 5,\quad 2^3 \cdot 3,\quad 5 \cdot 7$　すなわち　**6，12，15，24，35**

■

$\boxed{4}$ (1) (i) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_3 + (1+3+4)\frac{n-3}{3} = 8 + \frac{8}{3}(n-3) = \frac{8n}{3}$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_1 + (3+4+1)\frac{n-1}{3} = 1 + \frac{8}{3}(n-1) = \frac{8n-5}{3}$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_2 + (4+1+3)\frac{n-2}{3} = 4 + \frac{8}{3}(n-2) = \frac{8n-4}{3}$$

よって　$$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} \dfrac{8n}{3} & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-5}{3} & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-4}{3} & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}}$$

(2) $n = 3m + r$ とおくと $(r = 0,\ 1,\ 2)$

$r = 0$ のとき　$S_{3m} = \dfrac{8\cdot 3m}{3} = 8m$

$r = 1$ のとき　$S_{3m+1} = \dfrac{8(3m+1)-5}{3} = 8m+1$

$r = 2$ のとき　$S_{3m+2} = \dfrac{8(3m+2)-4}{3} = 8m+4$

$2019 \equiv 3 \pmod 8$ であるから，$S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しない．

(3) i) $k \equiv 0, \pm 4 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 0 \pmod 8$

ii) $k \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 1 \pmod 8$

iii) $k \equiv \pm 2 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 4 \pmod 8$

i)〜iii) および (2) の結果から，どのような自然数 k に対しても，

$$S_n = k^2$$

となる自然数 n が存在する．■

5 (1) $x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=-\sin^2 t+(1+\cos t)\cos t=2\cos^2 t+\cos t-1$$

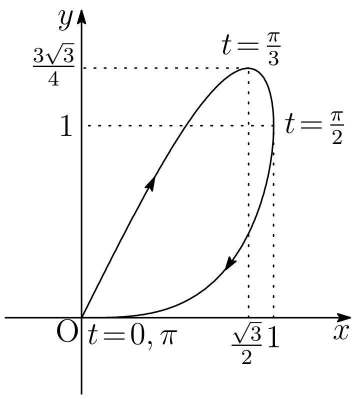
したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos^2 t+\cos t-1}{\cos t}=2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}$$
$$=\boldsymbol{\frac{(\cos t+1)(2\cos t-1)}{\cos t}}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}\right)$$
$$=\frac{d}{dt}\left(2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(-2\sin t-\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$
$$=-\frac{\sin t(2\cos^2 t+1)}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}=\boldsymbol{-\frac{\sin t(2\cos^2 t+1)}{\cos^3 t}}$$

(2) (1) の結果から　$0<t<\frac{\pi}{2}$のとき　$\frac{d^2y}{dx^2}<0$ より　上に凸

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$のとき　$\frac{d^2y}{dx^2}>0$ より　下に凸

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x,y)	$(0,0)$		$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$		$(1,1)$		$(0,0)$



(3) 曲線 C で囲まれる領域の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} y\,dx - \int_{\sin\pi}^{\sin\frac{\pi}{2}} y\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{\pi} (1+\cos t)\sin t\cos t\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} \{\cos t + (\cos t)^2\}(\cos t)'dt \\
&= -\left[\,\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{3}\cos^3 t\,\right]_0^{\pi} = \mathbf{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

別解　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ のとき　$\cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t}$

$x = \sin t$，$y = (1+\cos t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$y = (1 \pm \sqrt{1-x^2})x$$

したがって，求める面積 S は，2 曲線

$$y = (1+\sqrt{1-x^2})x, \quad y = (1-\sqrt{1-x^2})x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

で囲まれた部分の面積であるから

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 (1+\sqrt{1-x^2})x\,dx - \int_0^1 (1-\sqrt{1-x^2})x\,dx \\
&= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\,-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

■

8.6　2020年 (120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 α は実数とし，$f(x)$ は係数が実数である3次式で，次の条件 (i)，(ii) をみたすとする．

(i) $f(x)$ の x^3 の係数は1である．

(ii) $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$$

が成り立つ．

以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ．

(2) $f(\alpha+2) = 0$ とする．$f'(x) = 0$ かつ $x \neq \alpha$ をみたす x を α を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで $\alpha = 0$ とする．xy 平面において不等式

$$y \geqq f(x) \quad \text{かつ} \quad y \geqq f'(x) \quad \text{かつ} \quad y \leqq 0$$

の表す部分の面積を求めよ．

2 θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とし，原点O，A$(1,\ 0)$，B$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ を頂点とする $\triangle$OAB の内接円の中心を P とする．また，θ がこの範囲を動くときに点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分を D とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の座標は $\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$ で表されることを示せ．

(2) D を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 和が30になる2つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(2) 和が30になる3つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(3) 和が30になる3つの自然数からなる組合せの総数を求めよ．

$\boxed{4}$ n を自然数とし，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ に対して $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) (1) の x の値を x_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\tan x_n}$ を求めよ．

$\boxed{5}$ p を 2 以上の自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = \frac{1}{2^p+1}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) $p = 3$ のとき，x_n を求めよ．

(2) $x_{p+1} = x_1$ であることを示せ．

解答例

1 (1) 条件 (i) から

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta) + px + q$$

とおいて，これを微分すると

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2 + p$$

条件 (ii) から

$$f(\alpha) = p\alpha + q = 0, \quad f'(\alpha) = p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p = q = 0$$

したがって $f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta) \quad \cdots ①$

よって，$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる．

(2) $f(\alpha+2) = 0$ および ① より，$\beta = \alpha + 2$ であるから

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\alpha-2) \tag{A}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-\alpha)(x-\alpha-2) + (x-\alpha)^2 \\ &= (x-\alpha)\{2(x-\alpha-2) + (x-\alpha)\} \\ &= (x-\alpha)(3x-3\alpha-4) \end{aligned} \tag{B}$$

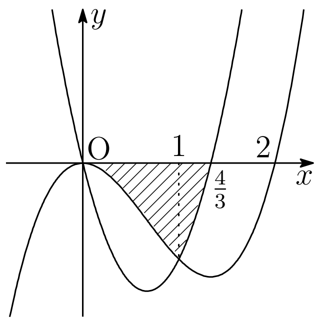
したがって，$f'(x) = 0$ かつ $x \neq \alpha$ をみたす x は

$$3x - 3\alpha - 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x = \alpha + \frac{4}{3}}$$

(3) (A)，(B) に $\alpha = 0$ を代入すると

$$f(x) = x^2(x-2), \quad f'(x) = x(3x-4)$$

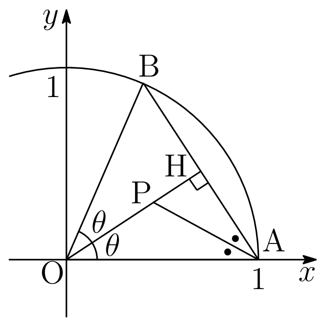
$y \geqq f(x)$，$y \geqq f'(x)$，$y \leqq 0$ の表す領域は，右の図の斜線部分でその面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{-f(x)\}\,dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \{-f'(x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 (-x^3 + 2x^2)\,dx + \int_1^{\frac{4}{3}} (-3x^2 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-x^3 + 2x^2\right]_1^{\frac{4}{3}} = \boldsymbol{\frac{65}{108}} \end{aligned}$$

■

2 (1) A$(1,\ 0)$，B$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$
直線 OP と辺 AB の交点を H とすると，H は AB の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2},\ \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$
$$= \left(\cos^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta\right)$$

OH⊥AH であるから　$\mathrm{AH} = \sin\theta$
AP は ∠OAH の二等分線であるから

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PH} = \mathrm{OA} : \mathrm{AH} = 1 : \sin\theta$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OP}+\mathrm{PH}}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{1+\sin\theta}(\cos^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta)$
$$= \left(1-\sin\theta,\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

よって，点 P の座標は　$\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$

別解　点 P の y 座標は △OAB の内接円の半径に等しいから

$$\frac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{AB})y = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 2\theta$$
$$\frac{1}{2}(1+1+2\sin\theta)y = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 2\theta$$

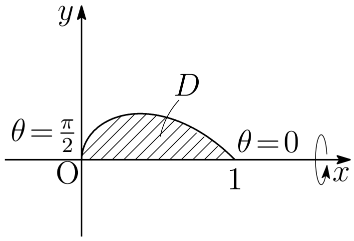
ゆえに　$(1+\sin\theta)y = \sin\theta\cos\theta$　　これから　$y = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$

また，$\dfrac{y}{x} = \tan\theta$ であるから

$$x = \frac{y}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)\tan\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = 1-\sin\theta$$

(2) (1) の結果から

$$x = 1 - \sin\theta, \quad y = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$$



ゆえに　$\dfrac{dx}{d\theta} = -\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 (-\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^3\theta}{(1+\sin\theta)^2}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\{(1+\sin\theta)(-\sin^2\theta+2\sin\theta-2)+2\}}{1+\sin\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(-\sin^2\theta+2\sin\theta-2)\cos\theta+\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}\right\}d\theta \\
&= \left[-\frac{1}{3}\sin^3\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta+2\log(1+\sin\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\log 2 - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

よって　$V = \boldsymbol{\pi\left(2\log 2 - \frac{4}{3}\right)}$

別解 $x = 1 - \sin\theta$ より，$\sin\theta = 1 - x$ であるから

$$\begin{aligned}
y^2 &= \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2} = \frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^2} \\
&= \frac{(1-x)^2\{1-(1-x)^2\}}{(1+1-x)^2} = \frac{(1-x)^2x(2-x)}{(2-x)^2} \\
&= \frac{(1-x)^2x}{2-x} = \frac{(2-x)(-x^2-1)+2}{2-x} \\
&= -x^2-1+\frac{2}{2-x}
\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{V}{\pi} = \displaystyle\int_0^1 y^2\,dx = \int_0^1 \left(-x^2-1+\frac{2}{2-x}\right)dx$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}-x-2\log(2-x)\right]_0^1 = 2\log 2 - \frac{4}{3}$$

■

3 (1) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 1 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$${}_{29}\mathrm{C}_1 = \mathbf{29}\ (\text{個})$$

(2) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 2 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$${}_{29}\mathrm{C}_2 = \frac{29{\cdot}28}{2{\cdot}1} = \mathbf{406}\ (\text{個})$$

(3) 和 30 になる 3 つの自然数の組合せについて

(i) 3 数が等しいものが $\{10,\ 10,\ 10\}$ の 1 組

(ii) 2 数だけが等しいものが，次の 13 組

$$\{1,1,28\},\ \{2,2,26\},\ \cdots,\ \{9,9,12\},\ \{11,11,8\},\ \cdots\{14,14,2\}$$

(iii) 3 数がすべて異なるものが，n 組とすると，(i)，(ii) および (2) から

$$1+13{\cdot}3+n{\cdot}3! = 406 \quad \text{これを解いて} \quad n = 61\ (\text{組})$$

よって，求める組合せの総数は，(i)〜(iii) から

$$1+13+61 = \mathbf{75}\ (\text{組})$$

■

4 (1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ を微分すると $(2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi)$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$g(x) = x\cos x - \sin x$ とおくと，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において

$$g'(x) = -x\sin x < 0$$

$g(x)$ は単調減少，$g(2n\pi) = 2n\pi$，$g((2n+1)\pi) = -(2n+1)\pi$ であるから

$$g(c) = 0, \quad 2n\pi < c < (2n+1)\pi$$

を満たす c がただ一つ存在する．したがって

x	$2n\pi$	$\cdots$	c	$\cdots$	$(2n+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

よって，$f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在する．

(2) $g\left(\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)=-1$ であるから，c，すなわち，x_n は

$$f'(x_n)=0,\quad 2n\pi < x_n < \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

上の第 1 式から

$$\frac{x_n\cos x_n-\sin x_n}{{x_n}^2}=0\quad \text{ゆえに}\quad x_n\cos x_n=\sin x_n$$

さらに第 2 式から，$\cos x_n\neq 0$ であることに注意して

$$x_n=\frac{\sin x_n}{\cos x_n}=\tan x_n\quad \text{ゆえに}\quad 2n\pi<\tan x_n<\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

したがって　$\dfrac{1}{\left(2+\frac{1}{2n}\right)\pi}<\dfrac{n}{\tan x_n}<\dfrac{1}{2\pi}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{2n}\right)\pi}=\frac{1}{2\pi}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tan x_n}=\boldsymbol{\frac{1}{2\pi}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $p=3$ のとき，$x_1=\dfrac{1}{2^3+1}=\dfrac{1}{9}$ より

$$x_2=\left|2\cdot\frac{1}{9}-1\right|=\frac{7}{9},\quad x_3=\left|2\cdot\frac{7}{9}-1\right|=\frac{5}{9},\quad x_4=\left|2\cdot\frac{5}{9}-1\right|=\frac{1}{9}$$

$x_4=x_1$ であるから

$$\boldsymbol{x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & (n\equiv 1)\\[2mm] \dfrac{7}{9} & (n\equiv 2)\\[2mm] \dfrac{5}{9} & (n\equiv 0)\end{cases}\quad (\mathrm{mod}\ 3)}$$

(2) $2 \leqq q \leqq p$ のとき

$$x_q = \frac{2^p - (2^{q-1} - 1)}{2^p + 1} \quad \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す.

［1］$q = 2$ のとき

$$x_2 = \left|2\cdot\frac{1}{2^p + 1} - 1\right| = \left|\frac{2 - 2^p - 1}{2^p + 1}\right| = \frac{2^p - 1}{2^p + 1}$$

したがって，$q = 2$ のとき成立する.

［2］$q = k$ のとき $(2 \leqq k \leqq p)$，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \left|2\cdot\frac{2^p - (2^{k-1} - 1)}{2^p + 1} - 1\right| \\ &= \left|\frac{2\cdot 2^p - 2^k + 2 - (2^p + 1)}{2^p + 1}\right| \\ &= \left|\frac{2^p - (2^k - 1)}{2^p + 1}\right| = \frac{2^p - (2^k - 1)}{2^p + 1} \end{aligned}$$

したがって，$q = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する.

よって，$2 \leqq q \leqq p$ である整数 q について，$(*)$ は成立する.

この結果から．$q = p + 1$ のとき

$$\begin{aligned} x_{p+1} = |2x_p - 1| &= \left|2\cdot\frac{2^p - (2^{p-1} - 1)}{2^p + 1} - 1\right| \\ &= \left|\frac{2^p + 2 - (2^p + 1)}{2^p + 1}\right| = \frac{1}{2^p + 1} = x_1 \end{aligned}$$

■

8.7　2021年(120分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5]

1 i を虚数単位とする．以下の問に答えよ．

(1) $n=2,3,4,5$ のとき $(2+i)^n$ を求めよ．またそれらの虚部の整数を10で割った余りを求めよ．

(2) n を正の整数とするとき $(2+i)^n$ は虚数であることを示せ．

2 次の定積分を求めよ．

(1) $I=\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(2) $J=\displaystyle\int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx$

3 $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直であるとする．$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $|\vec{a}|=x$，$|\vec{b}|=y$ とするとき，$\sin^2\theta$ を x，y を用いて表せ．

(2) θ の最大値を求めよ．

4 m を実数とする．座標平面上の放物線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+1$ の共有点を A，B とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) 3点 A，B，O を通る円の方程式を求めよ．

(3) 放物線 $y=x^2$ と(2)の円が A，B，O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ．

5 座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\quad y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 P と原点 O との距離を求めよ．

(2) 点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned}(2+i)^2 &= 4+4i+i^2 = \mathbf{3+4}\boldsymbol{i}\\[6pt] (2+i)^3 &= (2+i)(2+i)^2 = (2+i)(3+4i)\\ &= 6+11i+4i^2 = \mathbf{2+11}\boldsymbol{i}\\[6pt] (2+i)^4 &= (2+i)(2+i)^3 = (2+i)(2+11i)\\ &= 4+24i+11i^2 = \mathbf{-7+24}\boldsymbol{i}\\[6pt] (2+i)^5 &= (2+i)(2+i)^4 = (2+i)(-7+24i)\\ &= -14+41i+24i^2 = \mathbf{-38+41}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

よって，$n=2,3,4,5$ のとき，$(2+i)^n$ の虚部を 10 で割った余りは，順次

$$\mathbf{4,\quad 1,\quad 4,\quad 1}$$

(2) 自然数 n について，$(2+i)^n = a_n + b_n i$ とすると

$$\begin{aligned}a_{n+1}+b_{n+1}i &= (2+i)(a_n+b_n i)\\ &= 2a_n - b_n + (a_n+2b_n)i\end{aligned}$$

したがって　$a_{n+1} = 2a_n - b_n,\quad b_{n+1} = a_n + 2b_n$

(1) の結果から

$$(*)\begin{cases} n\text{ が奇数のとき} & a_n \equiv 2,\quad b_n \equiv 1 \pmod{10}\\ n\text{ が偶数のとき} & a_n \equiv 3,\quad b_n \equiv 4 \pmod{10}\end{cases}$$

であると推測する．

［1］n が奇数のとき

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n - b_n \equiv 2\cdot2-1 \equiv 3 \pmod{10}\\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n \equiv 2+2\cdot1 \equiv 4 \pmod{10}\end{aligned}$$

［2］n が偶数のとき

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n - b_n \equiv 2\cdot3-4 \equiv 2 \pmod{10}\\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n \equiv 3+2\cdot4 \equiv 1 \pmod{10}\end{aligned}$$

(1),［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

すべての自然数 n について，$b_n \neq 0$ であるから，$(2+i)^n$ は虚数である．

■

2 (1) $x=\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

このとき，$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$ であるから

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta\cos\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\Big[\,\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}
\end{aligned}
$$

発展 $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}!=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用[4]．$t=x^2$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx}=2x$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x^2(1-x^2)}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)!}(1-0)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}
\end{aligned}
$$

(2) $t=x^2+1$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx}=2x$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 2$

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\log(x^2+1)\cdot 2x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (t-1)\log t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)'\log t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\log t\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\frac{1}{t}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\,\frac{t^2}{4}-t\,\Big]_1^2 = \boldsymbol{\frac{1}{8}}
\end{aligned}
$$

別解

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{4}\int_0^1 (x^4-1)'\log(x^2+1)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\Big[\,(x^4-1)\log(x^2+1)\,\Big]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 (x^4-1)\frac{2x}{x^2+1}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-1)x\,dx = -\frac{1}{2}\Big[\,\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\,\Big]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{8}}
\end{aligned}
$$

■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf (p.8 を参照)

3　(1) $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ のなす角が θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ であるから

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b}) = |\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+3\vec{b}|\cos\theta$$

このとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ が垂直であるから

$$|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2 = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}\sqrt{|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2}\cos\theta \qquad (*)$$

$|\vec{a}|=x$, $|\vec{b}|=y$ とおいて，両辺を平方すると

$$(x^2+3y^2)^2 = (x^2+y^2)(x^2+9y^2)(1-\sin^2\theta)$$

したがって

$$(x^2+y^2)(x^2+9y^2)\sin^2\theta = (x^2+y^2)(x^2+9y^2)-(x^2+3y^2)^2$$

よって　$\boldsymbol{\sin^2\theta = \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}}$

別解 2 つの $\vec{a}$, $\vec{b}$ を座標平面上のベクトルとし，$\vec{a}=(x,\ 0)$, $\vec{b}=(0,\ y)$ とする．原点を O とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a}+\vec{b} = (x,\ y), \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{a}+3\vec{b} = (x,\ 3y)$$

とする．△OPQ の面積に注目すると $(x>0,\ y>0)$

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sin\theta = \frac{1}{2}|x\cdot 3y - y\cdot x|$$

したがって　$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+9y^2}\sin\theta = 2xy$

よって　$\boldsymbol{\sin^2\theta = \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}}$

(2) (1) の結果から

$$\sin^2\theta = \frac{4x^2y^2}{x^4+10x^2y^2+9y^4} = \frac{4}{\dfrac{x^2}{y^2}+10+\dfrac{9y^2}{x^2}}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{x^2}{y^2}+10+\frac{9y^2}{x^2} \geqq 10+2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{9y^2}{x^2}} \geqq 16$$

したがって　$\sin^2\theta \leqq \dfrac{4}{16} \leqq \dfrac{1}{4}$　ゆえに　$\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

$(*)$ より　$\cos\theta > 0$　すなわち　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$

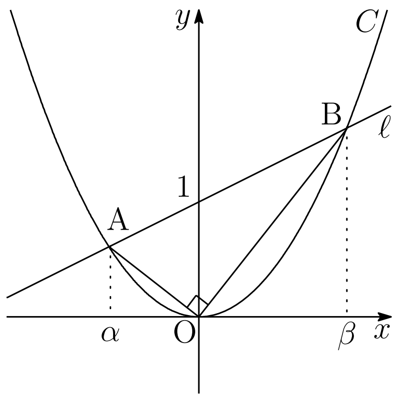
よって，θ の最大値は　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$　■

$\boxed{4}$ (1) 放物線 $C: y=x^2$ と直線 $\ell: y=mx+1$ の方程式から y を消去すると

$$x^2-mx-1=0 \qquad (*)$$

曲線 C と直線 ℓ の共有点 A，B の x 座標をそれぞれ α, β とすると，方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m, \quad \alpha\beta=-1 \qquad (**)$$



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\alpha,\ \alpha^2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\beta,\ \beta^2)$ について，$(**)$ により

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\beta+\alpha^2\beta^2=\alpha\beta(1+\alpha\beta)=0$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　よって　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$

(2) 3点 A，B，O を通る円は AB を直径の両端とする円であるから，この円周上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ より

$$(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\alpha^2)(y-\beta^2)=0$$

したがって　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+y^2-(\alpha^2+\beta^2)y+(\alpha\beta)^2=0$

$(**)$ および $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=m^2+2$ より，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2-mx+y^2-(m^2+2)y=0}$$

(3) (2) で求めた円と放物線 C の方程式から y を消去すると

$$x^2-mx+(x^2)^2-(m^2+2)x^2=0$$

整理すると　$x^4-(m^2+1)x^2-mx=0$

3点 A，B，O の x 座標 α, β, 0 はこの方程式の解で，左辺は $x-\alpha$, $x-\beta$, x を因数に持つ，すなわち，x^2-mx-1, x を因数に持つことに注意して

$$x(x+m)(x^2-mx-1)=0$$

これから，C と円の共有点の x 座標は，$0, -m$, α, β である．

C と円が A, B, O 以外の共有点を持たないとき，$-m$ は方程式

$$x(x^2-mx-1)=0$$

の解であるから

$$m(2m^2-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{m=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

■

5　(1)　P$(x,\ y)$ の座標が

$$x = \frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\quad y = \frac{3\sin t}{5+4\cos t} \qquad (*)$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= \left(\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t}\right)^2 + \left(\frac{3\sin t}{5+4\cos t}\right)^2 \\ &= \frac{16+40\cos t+25\cos^2 t+9\sin^2 t}{(5+4\cos t)^2} \\ &= \frac{25+40\cos t+16\cos^2 t}{(5+4\cos t)^2} = 1\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{OP = 1}$

(2)　$(*)$ より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-5\sin t(5+4\cos t)-(4+5\cos t)(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2} \\ &= -\frac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3\cos t(5+4\cos t)-3\sin t(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2} \\ &= \frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\vec{v} = \left(-\frac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\ \frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\right)}$

P を原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた点を Q$(-y,\ x)$ とすると

$$\vec{v} = \frac{3}{5+4\cos t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \qquad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$$

よって　$|\vec{v}| = \left|\frac{3}{5+4\cos t}\right||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \boldsymbol{\frac{3}{5+4\cos t}}$

補足　$\mathrm{OP}^2 = 1$ より，$x^2+y^2=1$ の両辺を t で微分すると

$$2\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{v}$$

(3) $(*)$ より $t=0$ のとき $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $t=\pi$ のとき $\mathrm{P}(-1,\ 0)$

$$0 \leqq t \leqq \pi \text{ において } \quad y \geqq 0$$

(2) の結果から $0 < t < \pi$ において $\dfrac{dx}{dt} < 0$

よって，点 P は $0 \leqq t \leqq \pi$ において，単位円周上を点 $(1,\ 0)$ から点 $(-1,\ 0)$ まで反時計回りに移動する．したがって，点 P の描く弧長 s は

$$s = \int_0^{\pi} |\vec{v}|\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1 = \pi$$

上式に (2) の結果を代入すると

$$\int_0^{\pi} \frac{3}{5+4\cos t}\,dt = \pi \quad \text{よって} \quad \int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t}\,dt = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

補足 P が単位円周上を移動することは変数変換を行うことで確認できる．まず

$$f(u) = \frac{1-9u^2}{1+9u^2}, \quad g(u) = \frac{6u}{1+9u^2} \quad (0 \leqq u < \infty)$$

とおくと

$$f(u)^2 + g(u)^2 = 1, \quad f'(u) = -\frac{36u}{(1+9u^2)^2}$$

$f(u)$ は単調減少で，点 $(f(u),\ g(u))$ は，$u=0$ のとき $(1,\ 0)$，$u \to \infty$ のとき $(-1,\ 0)$ にある．さらに

$$u = \tan\theta \quad \left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

とする ($\theta \to \frac{\pi}{2} - 0$ のとき $u \to \infty$)．$\cos t = f(u)$，$\sin t = g(u)$ とおくと

$$\begin{aligned}
x &= \frac{4+5f(u)}{5+4f(u)} = \frac{4(1+9u^2)+5(1-9u^2)}{5(1+9u^2)+4(1-9u^2)} \\
&= \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta, \\
y &= \frac{3g(u)}{5+4f(u)} = \frac{3\cdot 6u}{5(1+9u^2)+4(1-9u^2)} \\
&= \frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta
\end{aligned}$$

$0 \leqq 2\theta < \pi$ であることから，P の軌跡が分かる．

本題の定積分を $\cos t = f(u)$ および $u = \tan\theta$ を用いて求めることもできる．$\cos t = f(u)$ の両辺を u について微分すると

$$-\sin t\frac{dt}{du} = f'(u) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dt}{du} = -\frac{f'(u)}{g(u)}$$

t	$0 \longrightarrow \pi$
u	$0 \longrightarrow \infty$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{5+4f(u)} \cdot \frac{-f'(u)}{g(u)}\,du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{5(1+9u^2)+4(1-9u^2)} \cdot \frac{36u}{6u}\,du \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}\end{aligned}$$

さらに，$u = \tan\theta$ を θ について微分すると

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+u^2$$

u	$0 \longrightarrow \infty$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

よって $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} = \frac{2}{3}\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{3}$ ■

8.8　2022 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定める．以下の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n について $a_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定める．b_n の値を n を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

2 m を 3 以上の自然数，$\theta=\dfrac{2\pi}{m}$，C_1 を半径 1 の円とする．円 C_1 に内接する (すべての頂点が C_1 上にある) 正 m 角形を P_1 とし，P_1 に内接する (P_1 のすべての辺と接する) 円を C_2 とする．同様に，n を自然数とするとき，円 C_n に内接する正 m 角形を P_n とし，P_n に内接する円を C_{n+1} とする．C_n の半径を r_n，C_n の内側で P_n の外側の部分の面積を s_n とし，$f(m)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_n$ とする．以下の問に答えよ．

(1) r_n，s_n の値を θ，n を用いて表せ．

(2) $f(m)$ の値を θ を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f(m)$ を求めよ．

ただし，必要があれば $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ を用いてよい．

3 a を実数，$0<a<1$ とし，$f(x)=\log(1+x^2)-ax^2$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) $f(1)=0$ とする．曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{4}$ a を正の実数とし，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\sqrt{a}\,x+\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P，Q で交わっているとする．線分 PQ の中点を R$(s,\ t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $s,\ t$ の値を a を用いて表せ．

(3) a が (1) で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) t の値を s を用いて表せ．

$\boxed{5}$ $a,\ b$ を実数，p を素数とし，$1<a<b$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x,\ y,\ z$ を 0 でない実数とする．$a^x=b^y=(ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ であることを示せ．

(2) $m,\ n$ を $m>n$ をみたす自然数とし，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ とする．$m,\ n$ の値を p を用いて表せ．

(3) $m,\ n$ を自然数とし，$a^m=b^n=(ab)^p$ とする．b の値を $a,\ p$ を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $(*)$ $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_n}$ より

$$a_{n+2}\sqrt{a_{n+1}} = a_{n+1}\sqrt{a_n} \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}\sqrt{a_n} = a_2\sqrt{a_1}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 2$ より　$a_{n+1}\sqrt{a_n} = 2\sqrt{1}$　よって　$a_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$

(2) $(*)$ の両辺の自然対数をとると

$$\log a_{n+2} = \frac{1}{2}\log a_{n+1} + \frac{1}{2}\log a_n$$

$b_n = \log a_n$ より　$b_1 = 0$，$b_2 = \log 2$，$b_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_n$

$$b_{n+2} + \frac{1}{2}b_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n,$$
$$b_{n+2} - b_{n+1} = -\frac{1}{2}(b_{n+1} - b_n)$$

したがって

$$b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = b_2 + \frac{1}{2}b_1 = \log 2,$$
$$b_{n+1} - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b_2 - b_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\log 2$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\frac{3}{2}b_n = \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log 2$$

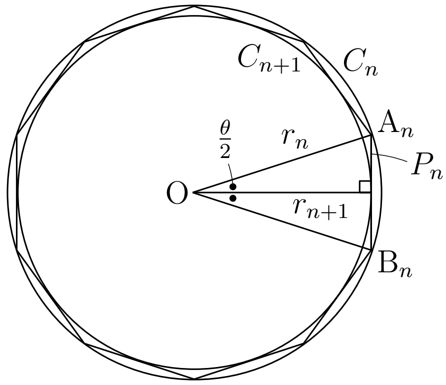
よって　$\boldsymbol{b_n = \dfrac{2}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log 2}$

(3) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{3}\log 2 = \log 2^{\frac{2}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty}\log a_n = \log 2^{\frac{2}{3}}$$

よって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 2^{\frac{2}{3}}}$　■

2 (1) P_n の 1 辺を $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ とすると



$$r_1 = 1, \quad r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta}{2}$$

したがって

$$r_n = 1\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\cos^{n-1}\frac{\theta}{2}},$$

$$\triangle\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n = \frac{1}{2}{r_n}^2\sin\theta$$

$\theta = \dfrac{2\pi}{m}$ より，$m = \dfrac{2\pi}{\theta}$ であるから

$$\begin{aligned} s_n &= \pi {r_n}^2 - m\triangle\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n = \pi{r_n}^2 - \frac{2\pi}{\theta}\cdot\frac{1}{2}{r_n}^2\sin\theta \\ &= \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right){r_n}^2 = \boldsymbol{\pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2} \\ &= \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\frac{1}{1-\cos^2\frac{\theta}{2}} = \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \boldsymbol{4\pi\cdot\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2} \end{aligned}$$

(3) $\theta = \dfrac{2\pi}{m}$ より，$m \to \infty$ のとき $\theta \to 0$ であるから

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{\theta\to 0} 4\pi\cdot\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 4\pi\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^2 = \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$$

■

$\boxed{3}$ (1) $f(x) = \log(1+x^2) - ax^2$ より $(0 < a < 1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 2ax = \frac{2x(1-a-ax^2)}{1+x^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ \pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$

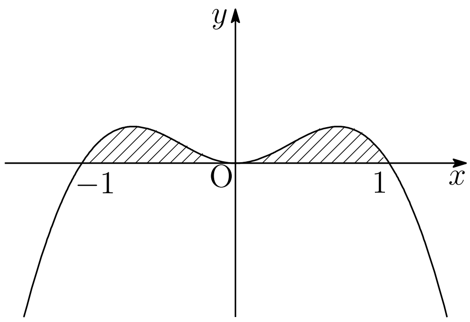
x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって　極大値 $f\left(\pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\right) = \boldsymbol{a - 1 - \log a}$，極小値 $f(0) = \boldsymbol{0}$

(2) $f(0) = 0$，$f(1) = 0$．$y = f(x)$ のグラフは x 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \int_0^1 f(x)\,dx = \Big[\,xf(x)\,\Big]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\,dx$$
$$= -\int_0^1 x\left(\frac{2x}{1+x^2} - 2ax\right)dx$$
$$= \int_0^1 (2ax^2-2)\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad (*)$$

ここで



$$\int_0^1 (2ax^2-2)\,dx = \left[\,\frac{2}{3}ax^3 - 2x\,\right]_0^1 = \frac{2}{3}a - 2$$

$x = \tan\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

これらを $(*)$ に代入すると　$\dfrac{S}{2} = \dfrac{2}{3}a - 2 + \dfrac{\pi}{2}$

$f(1) = \log 2 - a = 0$ より　$a = \log 2$　よって　$\boldsymbol{S = \dfrac{4}{3}\log 2 - 4 + \pi}$ ■

4 (1) 双曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ と直線 $\ell : y = \sqrt{a}\,x + \sqrt{a}$ の方程式から y を消去して整理すると

$$(a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0 \qquad (*)$$

C と ℓ が異なる 2 点で交わるとき，上の方程式の係数について

$$a - 1 \neq 0 \quad \text{かつ} \quad D = a^2 - (a-1)(a+4) = 4 - 3a > 0$$

$a > 0$ であるから　　$\boldsymbol{0 < a < 1,\ 1 < a < \dfrac{4}{3}}$

(2) $(*)$ の 2 つの解を $s_1,\ s_2$ とすると，解と係数の関係により

$$s_1 + s_2 = -\frac{2a}{a-1} \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{s_1+s_2}{2} = \boldsymbol{\frac{a}{1-a}}$$

これを $\ell : y = \sqrt{a}(x+1)$ の方程式に代入すると

$$t = \sqrt{a}\left(\frac{a}{1-a} + 1\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{1-a}}$$

(3) (2) の結果から　$s = -\dfrac{1}{a-1} - 1$

$f(a) = -\dfrac{1}{a-1} - 1$ とおくと，$f(a)$ は $a < 1,\ 1 < a$ で単調増加．

$$f(0) = 0, \quad \lim_{a\to 1-0} f(a) = \infty, \quad \lim_{a\to 1+0} f(a) = -\infty, \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = -4$$

よって，$0 < a < 1,\ 1 < a < \dfrac{4}{3}$ において　$\boldsymbol{s < -4,\ 0 < s}$

(4) $s = \dfrac{a}{1-a}$ より　$(s+1)a = s$　$s \neq -1$ であるから　$a = \dfrac{s}{s+1}$

(2) の結果から　　$t = \dfrac{\sqrt{\dfrac{s}{s+1}}}{1 - \dfrac{s}{s+1}} = \boldsymbol{(s+1)\sqrt{\dfrac{s}{s+1}}}$

補足 次のように表記することもできる．

$$t = \begin{cases} \sqrt{s(s+1)} & (0 < s) \\ -\sqrt{s(s+1)} & (s < -4) \end{cases}$$

■

5 (1) $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x,\ y,\ z \neq 0,\ 1 < a < b)$　$R \neq 1$

$$a = R^{\frac{1}{x}},\quad b = R^{\frac{1}{y}},\quad ab = R^{\frac{1}{z}}$$

ゆえに　$R^{\frac{1}{x}}R^{\frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}}$　したがって　$R^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}}$　よって　$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$

別解 $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x,\ y,\ z \neq 0,\ 1 < a < b)$　$R \neq 1$
正の実数 c $(c \neq 1)$ を底とする対数をとると

$$\log_c R = x\log_c a = y\log_c b = z(\log_c a + \log_c b)$$

したがって　$\log_c a = \dfrac{\log_c R}{x},\quad \log_c b = \dfrac{\log_c R}{y},\quad \log_c a + \log_c b = \dfrac{\log_c R}{z}$

上の第 1 式，第 2 式を第 3 式に代入すると

$$\frac{\log_c R}{x} + \frac{\log_c R}{y} = \frac{\log_c R}{z}\quad よって\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

(2) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ より　$mn = (m+n)p$　ゆえに　$(m-p)(n-p) = p^2$
$m > n$ に注意すると，$m-p > n-p > 0$ であるから

$$m-p = p^2,\quad n-p = 1\quad よって\quad \boldsymbol{(m,\ n) = (p^2+p,\ p+1)}$$

別解 $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ より　$mn = (m+n)p$　$\cdots$①
p は素数であるから，m または n は p を因数にもつ．m が p を因数にもつ，すなわち，$m = kp$ (k は整数) とし，① に代入すると

$$kpn = (kp+n)p\quad ゆえに\quad n = \frac{kp}{k-1}$$

上の第 2 式の右辺は整数で k と $k-1$ は互いに素であるから，$k-1 = 1,\ p$ である．このとき，$(m,\ n) = (2p,\ 2p),\ (p(p+1),\ p+1)$
また，$m,\ n$ の対称性から

$$(m,\ n) = (2p,\ 2p),\ (p(p+1),\ p+1),\ (p+1,\ p(p+1))$$

$m > n$ であるから　　$\boldsymbol{m = p(p+1),\ n = p+1}$

(3) $m,\ n$ は自然数であるから，$Q = a^m = b^n$ とおくと $(1 < a < b)$　$Q > 1$

$$a = Q^{\frac{1}{m}},\quad b = Q^{\frac{1}{n}}$$

$a < b$ より　$Q^{\frac{1}{m}} < Q^{\frac{1}{n}}$　ゆえに　$\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n}$　すなわち　$m > n$

さらに，(1)，(2) の結論を適用すると

$$a^{p(p+1)} = b^{p+1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = a^p}$$

■

8.9　2023 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} & (x \leqq 1) \\ 2x - 1 & (x > 1) \end{cases}$$

で定める．a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) すべての実数 x について $f(x) \geqq x$ が成り立つことを示せ．

(2) $a \leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n \leqq 1$ が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ．

2 $a,\ b$ を実数とする．整式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + b$ で定める．以下の問に答えよ．ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える．

(1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解の実部が共に 0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

3 n を 2 以上の整数とする．袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている．以下の問に答えよ．

(1) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(2) この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(3) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n + 1$ 以上である確率を求めよ．

4 四面体 OABC があり，辺 OA，OB，OC の長さはそれぞれ $\sqrt{13}$，5，5 である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -11$ とする．頂点 O から △ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする．以下の問に答えよ．

(1) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 実数 s，t を $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたすように定めるとき，s と t の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

5 媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 0$ または $\dfrac{dy}{dt} = 0$ となる t の値を求めよ．

(2) C の概形を xy 平面上に描け．

(3) C の $y \leqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1　(1) $x \leqq 1$ のとき　$f(x)-x=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-x=\frac{1}{2}(1-x) \geqq 0$

$x>1$ のとき　$f(x)-x=(2x-1)-x=x-1>0$

よって，すべての実数 x について，次が成立する．

$$f(x)-x \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) \geqq x$$

(2)　　$(*)$　$a_n \leqq 1$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=a \leqq 1$ より，$(*)$ が成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると　$a_k \leqq 1$

$$a_{k+1}=f(a_k)=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}=1$$

したがって，$n=k+1$ のとき，$(*)$ が成立する．

［1］,［2］より，すべての正の整数 n について，$(*)$ が成立する．

(3)　(i) $a \leqq 1$ のとき，(2) の結果から　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1) \quad \text{よって} \quad a_n=(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$$

(ii) $a>1$ のとき，(1) の結果から　$a_{n+1}=f(a_n) \geqq a_n$

$\{a_n\}$ は単調増加列であるから

$$a_n \geqq a>1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}=2a_n-1$$

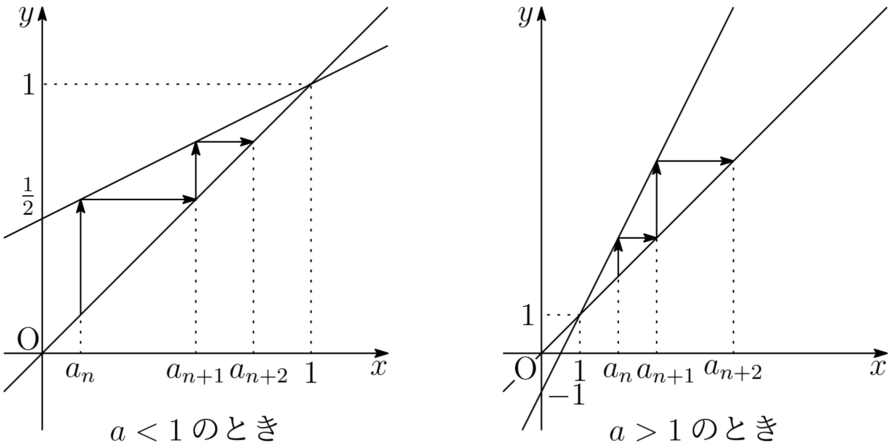
上の第 2 式を変形すると

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1) \quad \text{よって} \quad a_n=(a-1)\cdot 2^{n-1}+1$$

(i)，(ii) から　$\boldsymbol{a_n=\begin{cases} (a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1 & (a \leqq 1) \\ (a-1)\cdot 2^{n-1}+1 & (a>1) \end{cases}}$

補足　$f(1)=1$ より，$a=1$ のとき　$a_n=1$

$\{a_n\}$ は $a<1$ のとき，1 に収束し，$a>1$ のとき正の無限大に発散する．



$a<1$ のとき　　　　$a>1$ のとき

2　(1)　$f(x)=x^2+ax+b$ より　$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$

$f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき

$$-\frac{a}{2}>0,\quad f(0)=b>0,\quad b-\frac{a^2}{4}<0$$

よって，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{a<0,\ b>0,\ b<\frac{a^2}{4}}$

(2)　(i)　$f(x)=0$ が実数解をもつ，すなわち，$a^2-4b \geqq 0$ のとき

$$-\frac{a}{2}<0,\quad f(0)=b>0$$

したがって　$a>0,\ \ b>0,\ \ b \leqq \frac{a^2}{4}$

(ii)　$f(x)=0$ が虚数解をもつ，すなわち，$a^2-4b<0$ のとき

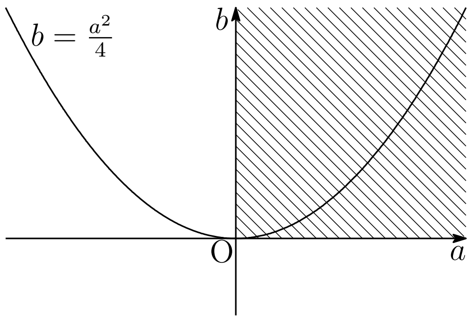
$f(x)=0$ の虚数解 $\dfrac{-a\pm\sqrt{-a^2+4b}\,i}{2}$ の実部 $-\dfrac{a}{2}$ が負であるから

$$-\frac{a}{2}<0 \quad \text{すなわち} \quad a>0$$

したがって　$a>0,\ \ b>\frac{a^2}{4}$

(i)，(ii) から　$a>0,\ \ b>0$

よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界線を含まない．



(3)　(i) $f(x)=0$ が実数解をもつ，すなわち，$a^2-4b \geqq 0$ のとき

$$-1 < -\frac{a}{2} < 0, \quad f(0)=b>0, \quad f(-1)=1-a+b>0$$

したがって　　$0<a<2,\ \ b>0,\ \ b>a-1,\ \ b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

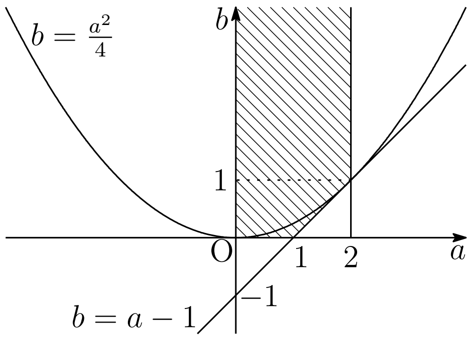
(ii) $f(x)=0$ が虚数解をもつ，すなわち，$a^2-4b<0$ のとき
$f(x)=0$ の虚数解 $\dfrac{-a \pm \sqrt{-a^2+4b}\,i}{2}$ の実部 $-\dfrac{a}{2}$ が -1 より大きく，0 より小さいから

$$-1 < -\frac{a}{2} < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0<a<2$$

したがって　　$0<a<2,\ \ b>\dfrac{a^2}{4}$

(i)，(ii) から　　$0<a<2,\ \ b>0,\ \ b>a-1$

よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界線を含まない．



■

3 (1) $2n$ 枚のカードのうち，偶数のカードおよび奇数のカードはともに n 枚ある．$2n$ 枚のカードから 2 枚取り出すとき，2 枚とも偶数のカードまたは 2 枚とも奇数のカードを取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\frac{2\cdot{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\bigg/\frac{2n(2n-1)}{2}=\boldsymbol{\frac{n-1}{2n-1}}$$

(2) (i) $n \geqq 3$ のとき，$2n$ 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，偶数のカード 3 枚または偶数のカード 1 枚と奇数のカード 2 枚を取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{4(2n-1)}=\frac{1}{2} \qquad (*)$$

(ii) $n=2$ のとき，$2n$ 枚のカードから偶数のカード 1 枚と奇数のカード 2 枚を取り出す確率であるから，$(*)$ に $n=2$ を代入したものである．

(i)，(ii) より，求める確率は　$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) $2n$ 枚から 2 枚のカードを取り出すとき，1 番目に取り出すカードと 2 番目に取り出すカードの順番を区別すると，取り出す場合の総数は

$${}_{2n}\mathrm{P}_2=2n(2n-1)$$

1 番目に取り出したカードの数を k とする．

(i) $1 \leqq k \leqq n$ のとき，2 枚目のカードは，$2n+1-k$ から $2n$ の数が書かれた k 通り．

(ii) $n+1 \leqq k \leqq 2n$ のとき，2 枚の目のカードは，k を除く $2n+1-k$ から $2n$ の数が書かれた $k-1$ 通り．

したがって，(i)，(ii) の場合の総数は

$$\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}n\{n+(2n-1)\}=2n^2$$

よって，求める確率は

$$\frac{2n^2}{2n(2n-1)}=\boldsymbol{\frac{n}{2n-1}}$$

■

4 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$|\vec{a}|=\sqrt{13},\quad |\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=-11$$

したがって
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2\\&=5^2-2\cdot1+(\sqrt{13})^2=36\end{aligned}$$

よって　$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\mathbf{6}$

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2\\&=-11-1-1+(\sqrt{13})^2=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad(*)$$

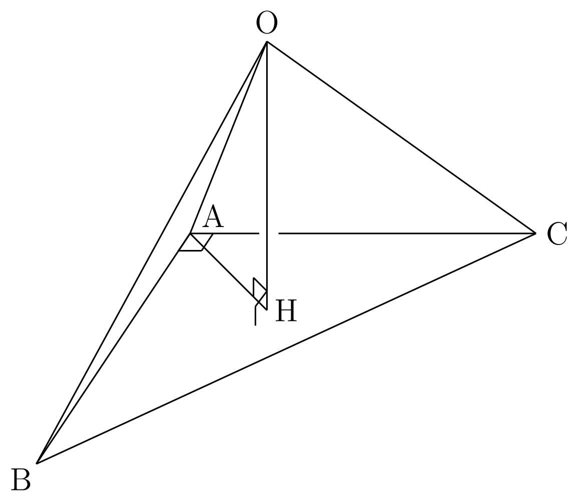
このとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2&=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=5^2-2\cdot1+(\sqrt{13})^2=36\\\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=-1+(\sqrt{13})^2=12\\\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=-\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=-1+(\sqrt{13})^2=12\end{aligned}$$

以上の結果を $(*)$ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{12}{36}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{12}{36}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad(**)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって　$\boldsymbol{s=t=\dfrac{1}{3}}$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ により，$(**)$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = \frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + \frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = \frac{1}{9}\cdot 36 + \frac{1}{9}\cdot 36 = 8$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = 13 - 8 = 5$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \sqrt{5}$

よって，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 6\cdot\sqrt{5} = \mathbf{6\sqrt{5}}$$

発展 行列 M を $M = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると，四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{6}|\det M|$$

したがって

$${}^tMM = \begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 1 \\ 1 & 25 & -11 \\ 1 & -11 & 25 \end{pmatrix}$$

$\det M = \det {}^tM$ より，$\det({}^tMM) = \det {}^tM \det M = (\det M)^2$ に注意して

$$(\det M)^2 = 36^2\cdot 5 \quad \text{ゆえに} \quad |\det M| = 36\sqrt{5}$$

よって　　$V = \dfrac{1}{6}|\det M| = \dfrac{1}{6}\cdot 36\sqrt{5} = \mathbf{6\sqrt{5}}$　■

5 (1) $x = \sin t,\quad y = \cos\left(t - \dfrac{\pi}{6}\right)\sin t$ より $(0 \leqq t \leqq \pi)$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t$$
$$\frac{dy}{dt} = -\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\sin t + \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\sin t = \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$\dfrac{dx}{dt} = 0$ とすると　$t = \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{dy}{dt} = 0$ とすると，$-\dfrac{\pi}{6} \leqq 2t - \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{11\pi}{6}$ より

$$2t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \quad すなわち \quad t = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}$$

よって，求める t の値は　$\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{6}}$

(2) (1) の結果から

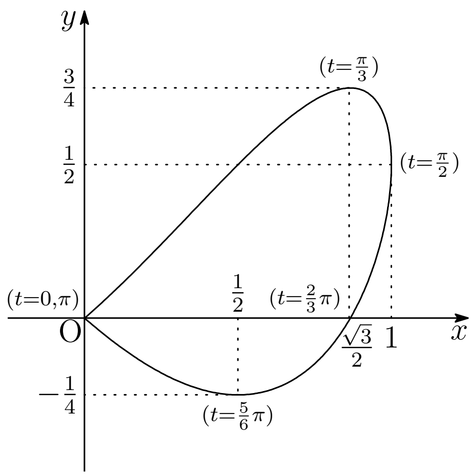
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
(x, y)	$(0, 0)$		$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$		$\left(1, \frac{1}{2}\right)$		$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$		$(0, 0)$

$0 < t < \pi$ において，$y = 0$ とすると，$\sin t > 0$，$-\dfrac{\pi}{6} < t - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5\pi}{6}$ より

$$t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad ゆえに \quad t = \frac{2\pi}{3}$$

C の原点以外の x 軸との交点は　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

よって，C の概形は次のようになる[5].



[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2019.pdf $\boxed{5}$

(3) 求める面積を S とし，$f(t)=\sin t$ とおくと　$f'(t)=\cos t$

$$\begin{aligned}
S &= \int_{f(\pi)}^{f(\frac{2\pi}{3})}(-y)\,dx = \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}(-y)f'(t)\,dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\cos t\,dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)\sin t\cos t\,dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t\right)dt \\
&= \left[-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos^3 t+\frac{1}{6}\sin^3 t\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}
\end{aligned}$$

別解　$x=\sin t,\quad y=\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin t$ より

$$\begin{aligned}
x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y &= \sin t\left\{-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos t\right\} \\
&\qquad -\cos t\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t \\
&= -\sin^2 t\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= -\sin^2 t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 t\sin t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t
\end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理により (積分区間は，正の回転角の向きにとる)[6]

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\left(x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 t\sin t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos^3 t+\frac{1}{6}\sin^3 t\right]_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}
\end{aligned}$$

■

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Odai/Odai_ri_2022.pdf $\boxed{5}$

8.10　2024 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 c を正の実数とする．各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．a_1 は関数

$$y = x + \sqrt{c - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \sqrt{c}\,)$$

が最大値をとるときの x の値とする．a_{n+1} は関数

$$y = x + \sqrt{a_n - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \sqrt{a_n}\,)$$

が最大値をとるときの x の値とする．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) a_1 を c を用いて表せ．

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を n と c を用いて表せ．

2 a，b，c は実数で，$a \neq 0$ とする．放物線 C と直線 ℓ_1，ℓ_2 をそれぞれ

$$\begin{aligned} C &: y = ax^2 + bx + c \\ \ell_1 &: y = -3x + 3 \\ \ell_2 &: y = x + 3 \end{aligned}$$

で定める．ℓ_1，ℓ_2 がともに C に接するとき，以下の問に答えよ．

(1) b を求めよ．また c を a を用いて表せ．

(2) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) C と ℓ_1 の接点を P，C と ℓ_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする．a が (2) の条件を満たしながら動くとき，$\triangle$PQR の重心 G の軌跡を求めよ．

3 n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n を小さい順に 3 つ求めよ．

(2) 1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ であるような n を小さい順に 3 つ求めよ．

(3) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 160 の約数となる確率を求めよ．

4 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形 ABCD を底面にもち，高さが 1 である直方体 ABCD-EFGH を，頂点の座標がそれぞれ

$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{D}(0,-1,\ 0)$$
$$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{F}(0,\ 1,\ 1),\ \mathrm{G}(-1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{H}(0,-1,\ 1)$$

になるように xyz 空間内におく．以下の問に答えよ．

(1) 直方体 ABCD-EFGH を直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体を X_1 とし，また直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体を X_2 とする．X_1 の体積 V_1 と X_2 の体積 V_2 を求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ とする．平面 $x=t$ と線分 EF の共有点の座標を求めよ．

(3) 直方体 ABCD-EFGH を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を X_3 とする．X_3 の体積 V_3 を求めよ．

5 0 以上の実数 x に対して，

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\frac{1}{1+u^2}\,du$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 α に対して，$f(\tan\alpha)$ を求めよ．

(2) xy 平面上で，次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

$$0 \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq y \leqq 1,\quad f(x)+f(y) \leqq f(1)$$

またその領域の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\vec{u} = (1,\ 1)$，$\vec{v} = (x,\ \sqrt{c - x^2})$ とすると，$\vec{u}\cdot\vec{v} \leqq |\vec{u}||\vec{v}|$ であるから

$$x + \sqrt{c - x^2} \leqq \sqrt{2}\sqrt{c}$$

上式において，等号が成立するのは $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ向きのときであるから

$$x = \sqrt{c - x^2} \qquad \text{これを解いて} \quad a_1 = x = \boldsymbol{\sqrt{\frac{c}{2}}}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \log a_{n+1} = \frac{1}{2}\log a_n - \frac{1}{2}$$

$b_n = \log a_n$ より　　$\boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}}$

(3) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 \sqrt{\dfrac{c}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2 c - \dfrac{1}{2}$

(2) の結果から　　$b_{n+1} + 1 = \dfrac{1}{2}(b_n + 1)$

$\{b_n + 1\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}(\log_2 c + 1)$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n + 1 = \frac{1}{2}(\log_2 c + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって　　$\boldsymbol{b_n = (\log_2 c + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$ ■

2　(1) ℓ_1，ℓ_2 がともに C に接するとき

$$\begin{aligned} C' &: y = ax^2 + (b+1)x + c \\ \ell_1' &: y = -2x + 3 \\ \ell_2' &: y = 2x + 3 \end{aligned}$$

とすると，ℓ_1'，ℓ_2' はともに C' に接する．ℓ_1'，ℓ_2' は y 軸対称より，C' も y 軸対称であるから

$$b + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = -1}$$

C' と ℓ_1' から y を消去して，整理すると

$$ax^2 + 2x + c - 3 = 0 \qquad (*)$$

上の 2 次方程式は重解をもつから，係数について

$$D/4 = 1^2 - a(c-3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c = \frac{1}{a} + 3}$$

(2) (1) の結果から C の方程式は　$y = ax^2 - x + \dfrac{1}{a} + 3$
C は x 軸と 2 点で交わるから，係数について

$$D = (-1)^2 - 4a\left(\frac{1}{a} + 3\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 4a < 0$$

上の第 2 式の両辺に $\dfrac{1}{a^2}$ を掛けると

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + 4\right) < 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-4 < \frac{1}{a} < 0}$$

(3) C' と ℓ_1' の接点を P′，C' と ℓ_2' の接点を Q′ とする．

P′ の x 座標は，(∗) から　$x = -\dfrac{2}{2a} = -\dfrac{1}{a}$

Q′ は P′ と y 軸対称であるから，その x 座標は　$x = \dfrac{1}{a}$

P と P′，Q と Q′ の x 座標は一致するから

$$C : y = ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3 = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{3}{4a} + 3$$

これより，3 点 P，Q，R の座標を得る．

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{a},\ \frac{3}{a} + 3\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a} + 3\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a} + 3\right)$$

したがって，△PQR の重心 G の座標は　$\left(\dfrac{1}{6a},\ \dfrac{19}{12a} + 3\right)$

(2) の結果から　$-\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{6a} < 0$

$$\frac{19}{12a} + 3 = \frac{19}{2}\cdot\frac{1}{6a} + 3$$

よって，点 G の軌跡は　**直線** $\boldsymbol{y = \dfrac{19}{2}x + 3\ \left(-\dfrac{2}{3} < x < 0\right)}$ ■

3 (1) サイコロの目 1, 2, 3, 4, 5, 6 の最小公倍数は　60

よって，求める 3 つの数は　**60，120，180**

(2) n の約数となるサイコロの目の集合を A とし，A の大きさ (要素の個数) を $|A|$ とする．$1 \in A$，$2 \notin A \Rightarrow 6 \notin A$，$3 \notin A \Rightarrow 6 \notin A$，$\{2,\ 3\} \subset A \Rightarrow 6 \in A$ に注意すると，$|A| = 5$ となる A は次の 2 通り．

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\} \quad \text{または} \quad A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$$

これを満たす n を小さい順に 3 つ求めると　**12，24，30**

(3) $160 = 2^5 \cdot 5$ より　$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$

このとき，5 の目が出るのは 1 回まで，3 回とも 4 の目は出ない．

- 5 の目が出ないときの確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{26}{216}$$

- 5 の目が 1 回出るときの確率は

$${}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{27}{216}$$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{26}{216} + \frac{27}{216} = \boldsymbol{\frac{53}{216}}$$

■

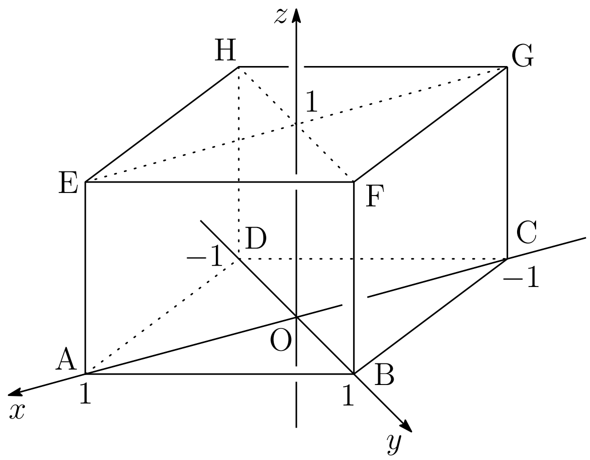
$\boxed{4}$ (1) 直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体 X_1 の体積 V_1 は

$$V_1 = \pi \mathrm{AC}^2 \cdot \mathrm{AE} = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = \boldsymbol{4\pi}$$

$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}\ (0, 1, 0)$，$\mathrm{H}(0, -1,\ 1)$ より　$\mathrm{AB} = \sqrt{2}$，$\mathrm{AH}^2 = 3$

直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体 X_2 の体積 V_2 は

$$V_2 = \pi \mathrm{AH}^2 \cdot \mathrm{AB} = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = \boldsymbol{3\sqrt{2}\pi}$$



(2) 直線 EF の方程式は　$x + y = 1,\ z = 1$

これと平面 $x = t$ との共有点の座標は　$(t,\ 1-t,\ 1)$

$0 \leqq t \leqq 1,\ 0 \leqq 1-t \leqq 1$ であるから，この共有点は線分 EF 上にある．

よって，平面 $x = t$ と線分 EF との共有点の座標は　$\boldsymbol{(t,\ 1-t,\ 1)}$

(3) x 軸上の点 $(t,\ 0,\ 0)$ と (2) の共有点 $(t,\ 1-t,\ 1)$ との距離を d とすると

$$d^2 = (t-1)^2 + 1$$

したがって，求める回転体 X_3 の体積 V_3 は

$$\frac{V_3}{2\pi} = \int_0^1 d^2\,dt = \int_0^1 \{(t-1)^2 + 1\}\,dt$$
$$= \left[\ \frac{1}{3}(t-1)^3 + t\ \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{V_3 = \frac{8}{3}\pi}$ ■

5　(1)　$u=\tan\theta$ とすると　$\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

u	$0 \longrightarrow \tan\alpha$
θ	$0 \longrightarrow \alpha$

$$f(\tan\alpha)=\frac{1}{2}\int_{-\tan\alpha}^{\tan\alpha}\frac{1}{1+u^2}\,du=\int_0^{\tan\alpha}\frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\alpha}d\theta=\boldsymbol{\alpha}$$

(2)　$x=\tan\theta_1$，$y=\tan\theta_2$ とすると，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$　$\cdots$ ①

$$0 \leqq \theta_1 \leqq \frac{\pi}{4},\quad 0 \leqq \theta_2 \leqq \frac{\pi}{4}$$

次に，$f(x)+f(y) \leqq f(1)$ を (1) の結論に適用すると

$$\theta_1+\theta_2 \leqq \frac{\pi}{4} \qquad \text{(A)}$$

$x=y=1$，すなわち，$\theta_1=\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$ とすると，(A) に反するから

$$0 \leqq xy < 1 \quad \cdots ②$$

(A) から　　$\tan(\theta_1+\theta_2) \leqq \tan\dfrac{\pi}{4}$

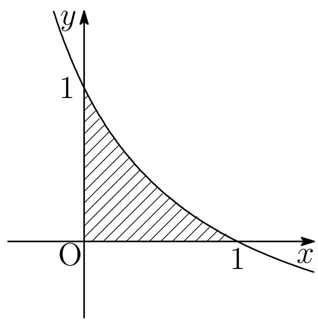
$$\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x+y}{1-xy} \leqq 1$$

①，② に注意して，上の第 2 式を y について解くと

$$0 \leqq y \leqq \frac{-x+1}{x+1}=\frac{2}{x+1}-1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

求める面積は，下の図の斜線部分であるから

$$\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-1\right)dx=\Big[\,2\log(x+1)-x\,\Big]_0^1=\mathbf{2\log 2-1}$$



8.11　2025 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 k を実数とする．$f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = |x^3 - x|, \quad g(x) = k(x+1)$$

とおき，曲線 $y = f(x)$ を C，直線 $y = g(x)$ を ℓ とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C の概形をかけ．ただし，関数 $f(x)$ の極大値を調べる必要はない．

(2) 曲線 C と直線 ℓ がちょうど 4 つの共有点をもつような k の値を求めよ．

2 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を k とするとき，$a-k$ を a の小数部分という．n を自然数とし，$a_n = \sqrt{n^2+1} - n$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ．

(2) b_n を $\left(3n - \dfrac{1}{a_n}\right)$ の小数部分とする．b_n を n を用いて表せ．

(3) b_n を (2) で定めたものとする．m，n を異なる 2 つの自然数とするとき，$a_m + b_n \neq 1$ であることを示せ．

3 媒介変数 θ を用いて

$$x = \sin\theta, \quad y = \cos\theta + |\sin\theta| \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C の概形をかけ．

(2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ．

4 $s,\ t$ を実数とする．座標空間に 3 点

$$\mathrm{A}(-4, -1,\ 0),\quad \mathrm{B}(-3,\ 0, -1),\quad \mathrm{P}(s,\ t, -2s + t - 1)$$

がある．以下の問に答えよ．

(1) 3 点 A，B，P は一直線上にないことを示せ．

(2) 点 P から直線 AB に下ろした垂線を PH とする．点 H の座標を s を用いて表せ．

(3) $s,\ t$ が変化するとき，三角形 ABP の面積の最小値を求めよ．

5 連続関数 $f(x)$ は $x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ を満たし，$x > 0$ で微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ は連続であるとする．$t \geqq 1$ を満たす t に対して，原点 O と点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ の距離を $g(t)$ とする．また，$t > 1$ を満たす t に対して，$y = f(x)\ (1 \leqq x \leqq t)$ で表される曲線の長さを $h(t)$ とし，$t = 1$ のときは $h(1) = 0$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $t > 1$ とする．開区間 $(1,\ t)$ で常に $f(x) - xf'(x) = 0$ が成り立つならば，閉区間 $[1,\ t]$ で $\dfrac{f(x)}{x}$ は定数であることを示せ．

(2) $t \geqq 1$ を満たす任意の t に対して，$g(t) = h(t) + 2$ が成り立つとする．このとき，$f(1)$ の値を求めよ．また，$t \geqq 1$ のとき $f(t)$ を t を用いて表せ．

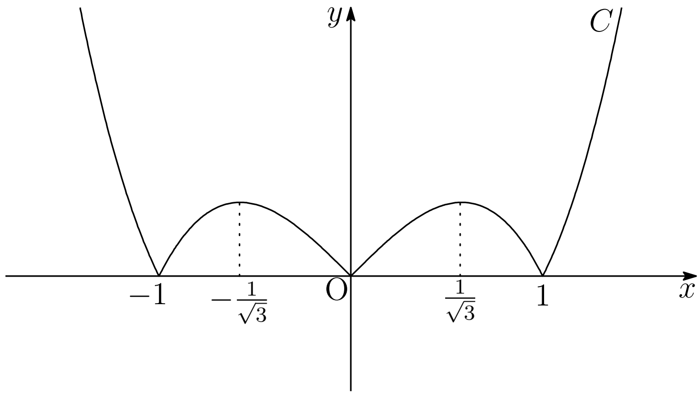
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$　(1)　$f(x) = |x^3 - x| = |x(x+1)(x-1)|$ より

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & (-1 \leqq x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ -x^3 + x & (x \leqq -1,\ 0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & (-1 < x < 0,\ 1 < x) \\ -3x^2 + 1 & (x < -1,\ 0 < x < 1) \end{cases}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0	$\nearrow$



(2)　下の図のように，区間 $0 < x < 1$ において，C と ℓ が接するときである．

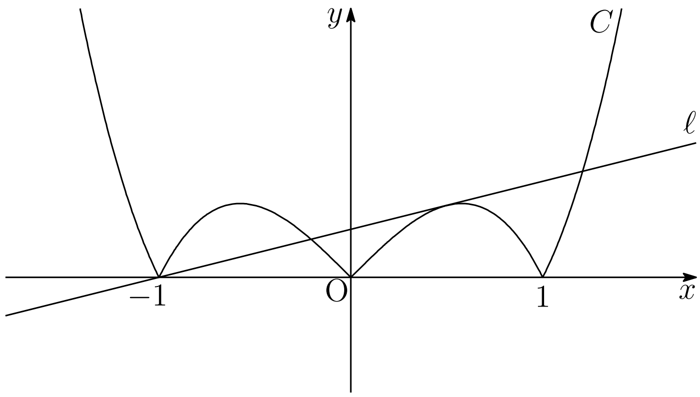
$$-x^3 + x = k(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x^2 - x + k) = 0$$

$x^2 - x + k = 0$ より　　$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + k - \dfrac{1}{4} = 0$

上式から，$x = \dfrac{1}{2}$ でこの 2 次方程式が重解をもつことであるから

$$k - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = \frac{1}{4}}$$

■



2　(1)　$a_n = \sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

n は自然数であるから　$0 < \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}+1} < 1$

よって　　$0 < a_n < 1$

(2)　$a_n = \sqrt{n^2+1} - n$ より

$$\begin{aligned}3n - \frac{1}{a_n} &= 3n - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} \\ &= 3n - (\sqrt{n^2+1}+n) = n - (\sqrt{n^2+1}-n) \\ &= n - a_n = n - 1 + (1 - a_n)\end{aligned}$$

(1) の結果から，$0 < 1 - a_n < 1$ であるから，上式より　$b_n = 1 - a_n$

よって　　$b_n = 1 - (\sqrt{n^2+1} - n) = \boldsymbol{n + 1 - \sqrt{n^2+1}}$

(3)　(2) の結果から，$m \neq n$ のとき

$$\begin{aligned}a_m + b_n - 1 &= \sqrt{m^2+1} - m + (n + 1 - \sqrt{n^2+1}) - 1 \\ &= n - m - (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{m^2+1}) \\ &= n - m - \frac{(n^2+1)-(m^2+1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{m^2+1}} \\ &= (n-m)\left(1 - \frac{n+m}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{m^2+1}}\right) \\ &= \frac{(n-m)(\sqrt{n^2+1} - n + \sqrt{m^2+1} - m)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{m^2+1}} \\ &= \frac{(n-m)(a_n + a_m)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{m^2+1}}\end{aligned}$$

$m \neq n$ のとき，(1) の結論から　$\dfrac{(n-m)(a_n+a_m)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{m^2+1}} \neq 0$

したがって　$a_m + b_n - 1 \neq 0$　すなわち　$a_m + b_n \neq 1$　■

3 (1) $x=f(\theta)=\sin\theta$，$y=g(\theta)=\cos\theta+|\sin\theta|$ とおくと $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$$f(2\pi-\theta)=-f(\theta),\quad g(2\pi-\theta)=g(\theta)$$

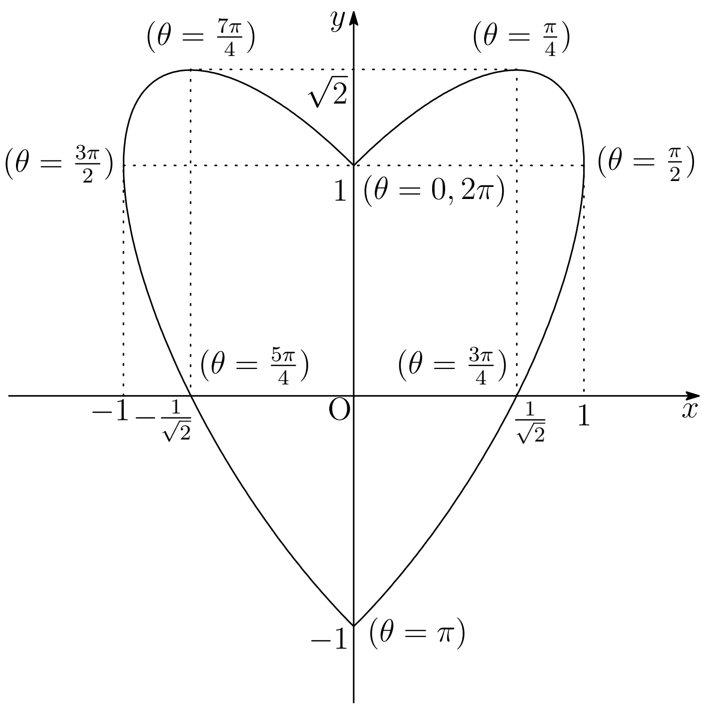
したがって，曲線 C は y 軸に関して対称であるから，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における C を図形を元に y 軸に関して対称な図形をえがくとよい．

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$f(\theta)=\sin\theta$，$g(\theta)=\cos\theta+\sin\theta$ であるから

$$f'(\theta)=\cos\theta,\quad g'(\theta)=-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta})$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x,y)	$(0,1)$		$(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})$		$(1,1)$		$(0,-1)$

よって，曲線 C の概形は次のようになる．



(2) 求める面積を S とすると，C の図形が y 軸に関して対称であるから

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_{g(\pi)}^{g(\frac{\pi}{4})} x\,dy - \int_{g(0)}^{g(\frac{\pi}{4})} x\,dy = -\int_{g(0)}^{g(\pi)} x\,dy \\ &= -\int_0^{\pi} f(\theta)g'(\theta)d\theta = -\int_0^{\pi} \sin\theta(-\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S = \pi}$

別解 $xy' - x'y = \sin\theta(-\sin\theta+\cos\theta) - \cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) = -1$ であるから，ガウス・グリーンの定理により (積分区間は回転角の正の向きにとる)

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0} (xy' - x'y)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0} (-1)\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

よって　$\boldsymbol{S = \pi}$ ■

類題 神戸大理系 2023 年 $\boxed{5}$

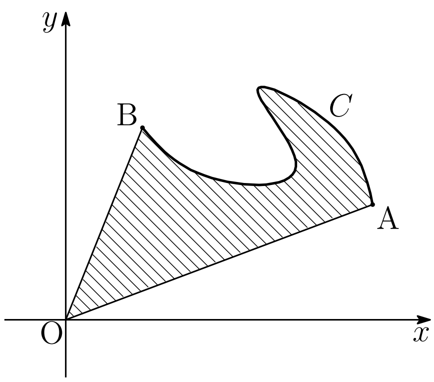
http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2023.pdf $\boxed{5}$

ガウス・グリーンの定理

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C: x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



証明 O を原点とする．C 上の 2 点 $\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$，$\mathrm{Q}(f(t+\Delta t),\ g(t+\Delta t))$ をとり (OQ の偏角 $>$ OP の偏角)，△OPQ の面積を ΔS とすると

$$\begin{aligned} 2\Delta S &= f(t)g(t+\Delta t) - f(t+\Delta t)g(t) \\ &= f(t)\{g(t+\Delta t) - g(t)\} - \{f(t+\Delta t) - f(t)\}g(t) \\ \frac{2\Delta S}{\Delta t} &= f(t)\cdot\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} - \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\cdot g(t) \end{aligned}$$

$\Delta t \to 0$ とすると $\qquad 2\dfrac{dS}{dt} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$

$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$

証終

$\boxed{4}$ (1) $\mathrm{A}(-4,-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-3,\ 0,-1)$，$\mathrm{P}(s,\ t,-2s+t-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(s+4,\ t+1,-2s+t-1)$$

3 点 A，B，P が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の x 成分に注目すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(s+4)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

このとき，y 成分および z 成分から

$$\begin{cases} t+1=s+4 \\ -2s+t-1=-s-4 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -s+t=3 \\ -s+t=-3 \end{cases}$$

これを満たす s，t は存在しないから，3 点 A，B，P は一直線上にない．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3s+6$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=3$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s+2)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s+2)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(-4,-1,\ 0)+(s+2)(1,\ 1,-1)\\&=(s-2,\ s+1,-s-2)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{H}(\boldsymbol{s-2,\ s+1,-s-2})$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-2s+2t,\ s-t-3,-s+t-3)$ より，$u=s-t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-2u,\ u-3,-u-3)$$

$\triangle$ABP の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2u)^2+(u-3)^2+(-u-3)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{6u^2+18}\end{aligned}$$

S は $u=0$，すなわち，$s=t$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{18}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt{2}}$ をとる． ■

5 (1) 開区間 $(1,\ t)$ において $f(x)-xf'(x)=0$ であるから

$$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=0$$

これを積分すると　$\dfrac{f(x)}{x}=C$　(C は定数)

$f(x)$ は，$x>0$ で微分可能より，$f(x)$ は $x=1$，$x=t$ で連続である．

よって，$\dfrac{f(x)}{x}$ は閉区間 $[1,\ t]$ において連続である．

したがって，閉区間 $[1,\ t]$ において，$\dfrac{f(x)}{x}$ は定数である．

(2) 原点 O と点 P$(t,\ f(t))$ の距離が $g(t)$ であるから

$$g(t)^2=t^2+f(t)^2 \quad \text{ゆえに} \quad g(t)g'(t)=t+f(t)f'(t) \qquad \text{(A)}$$

$y=f(x)$ $(1 \leqq x \leqq t)$ で表される曲線の長さが $h(t)$ であるから

$$h(t)=\int_1^t \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \quad \text{ゆえに} \quad h'(t)=\sqrt{1+f'(t)^2} \qquad \text{(B)}$$

$g(t)=h(t)+2$ の両辺を微分すると，(B) の第 2 式から

$$g'(t)=h'(t)=\sqrt{1+f'(t)^2} \qquad \text{(C)}$$

(A) の第 2 式を平方すると，(A) の第 1 式および (C) より

$$\{t+f(f)f'(t)\}^2=g(t)^2g'(t)^2=\{t^2+f(t)^2\}\{1+f'(t)\}^2$$

$\{t+f(f)f'(t)\}^2=\{t^2+f(t)^2\}\{1+f'(t)\}^2$ を整理すると

$$t^2f'(t)^2-2tf'(t)f(t)+f(t)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \{tf'(t)-f(t)\}^2=0$$

$f(t)-tf'(t)=0$ であるから，(1) の結果より，定数 k を用いて

$$\frac{f(t)}{t}=k \quad \text{ゆえに} \quad f(t)=kt$$

$x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ であるから　$k \geqq 0$

$g(t)=h(t)+2$ に $t=1$ を代入すると

$$g(1)=h(1)+2=0+2=2$$

(A) の第 1 式に $t=1$ を代入すると，$f(1)=k$ より

$$g(1)^2=1^2+f(1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^2=1+k^2$$

$k>0$ であるから　$k=\sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{f(t)=\sqrt{3}t}$　■

第 9 章　広島大学

出題分野 (2015-2025)

◀	広島大学	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
I	数と式											
	2 次関数											
	図形と計量											
	データの分析										1	
II	式と証明											
	複素数と方程式							4				
	図形と方程式					5			2			
	三角関数						1					
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法			2	1			1	1			
III	関数											
	極限	2		1					5			3
	微分法とその応用	3			5	5						
	積分法				3					5		
	積分法の応用	1	2	4		3	3·4	5*			5	1
A	場合の数と確率	5	4	3		2	5	3	4	1		4
	整数の性質		5	5				4	3			
	図形の性質					5						
B	数列				4	1				4	3	2
	確率分布と統計											
C	平面上のベクトル							2		2		
	空間のベクトル	3	1							3	2	
	複素数平面		3		2	4	2				4	5
	式と曲線							6*				

9.1 2015 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 座標平面上の点 P(1, 1) を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする．k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}$ $(x>0)$ を C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q，R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする．点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする．次の問いに答えよ．

(1) k，q，r の値を求めよ．

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ，OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

2 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を考える．ただし，p_n，q_n は

$${p_1}^2 - 4q_1 = 4, \quad {p_n}^2 - 4q_n > 0 \quad (n=2,3,4\cdots)$$

を満たす実数とする．C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを ℓ_n とする．また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) C_n の頂点の y 座標を ℓ_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{\ell_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数である．

3 座標空間内に 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{C}(s,\ t,\ 0),\ \mathrm{D}(0,\ u,\ 0)$$

がある．ただし，s，t，u は実数で，$s>0$，$t>0$，$s+t=1$ を満たすとする．3 点 A，B，C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ．

(2) u を t を用いて表せ．また，$0<u<1$ であることを示せ．

(3) 点 $(0,\ 1,\ 0)$ を E とする．点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき，t の値を求めよ．

4 a，b，p は $a>0$，$b>0$，$p<0$ を満たす実数とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y=e^x, \quad C_2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を考える．ただし，e は自然対数の底である．C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ．

(1) p を a を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ．

5　m，n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) $m \geqq 2$，$n \geqq 2$ とする．異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる．このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(2) $n \geqq 3$ とする．3 種類の文字 a，b，c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる．このとき a，b，c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(3) $n \geqq 3$ とする．n 人を最大 3 組までグループ分けする．このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ．ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする．

たとえば，$n = 3$ のとき，A，B，C の 3 人のグループ分けする方法は

$$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\},$$
$$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\},\ \{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$$

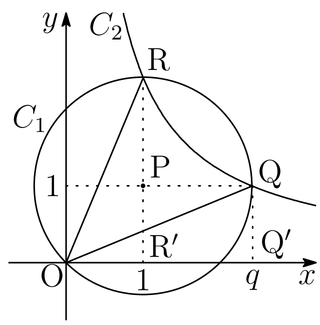
の 5 通りであるので，$p_3 = \dfrac{3}{5}$ である．

(4) (3) の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の範囲を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\mathrm{OP}=\sqrt{2}$ より，C_1 は中心 $(1,\ 1)$，半径 $\sqrt{2}$ の円．
$k>0$ より，C_1 と C_2 の交点 Q，R は第 1 象限あるから，$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}$ より

$$q-1=\sqrt{2}\quad ゆえに\quad \boldsymbol{q=1+\sqrt{2}}$$



C_1，C_2 は直線 $y=x$ に関して対称であるから，R は直線 $y=x$ に関して $\mathrm{Q}(1+\sqrt{2},\ 1)$ と対称．

したがって　$\mathrm{R}(1,\ 1+\sqrt{2})$　よって　$\boldsymbol{r=1}$

R は $C_2: y=\dfrac{k}{x}$ 上の点であるから　$1+\sqrt{2}=\dfrac{k}{1}$　よって　$\boldsymbol{k=1+\sqrt{2}}$

(2) $\mathrm{R}'(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}'(1+\sqrt{2},\ 0)$ とおく．求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned}
S_1&=\triangle\mathrm{ORR}'+\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{x}\,dx-\triangle\mathrm{OQQ}'\\
&=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\Big[\ \log x\ \Big]_1^{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\cdot 1\\
&=\boldsymbol{(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})}
\end{aligned}$$

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ より　$\dfrac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

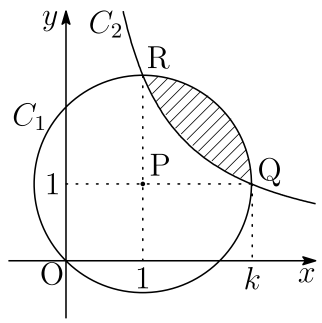
x	$1\longrightarrow 1+\sqrt{2}$
θ	$0\longrightarrow\ \frac{\pi}{2}$

したがって，求める定積分は

$$\begin{aligned}
\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&=\Big[\ \theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

(4)　$f(x) = \sqrt{2-(x-1)^2}$ とおくと，$q = k$ により

$$\frac{V}{\pi} = \int_1^k \{f(x)+1\}^2\,dx - \int_1^k \left(\frac{k}{x}\right)^2 dx$$
$$= \int_1^k \left(\{f(x)\}^2+1\right) dx + 2\int_1^k f(x)\,dx$$
$$- \int_1^k \frac{k^2}{x^2}\,dx \quad \cdots(*)$$



このとき，(3) の結果を利用して

$$\int_1^k \left(\{f(x)\}^2+1\right) dx = \int_1^k \{3-(x-1)^2\}\,dx$$
$$= \left[\ 3x - \frac{1}{3}(x-1)^3\ \right]_1^k$$
$$= 3(k-1) - \frac{1}{3}(k-1)^3$$
$$= 3\sqrt{2} - \frac{1}{3}(\sqrt{2})^3 = \frac{7\sqrt{2}}{3},$$
$$2\int_1^k f(x)\,dx = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi,$$
$$\int_1^k \frac{k^2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{k^2}{x}\right]_1^k = k(k-1) = 2+\sqrt{2}$$

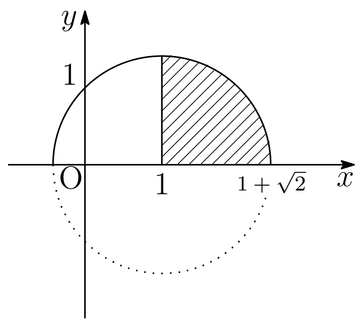
これらを $(*)$ に代入して，整理すると

$$\frac{V}{\pi} = \pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{V = \pi\left(\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\right)}$$

別解 (3) $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ とおくと

$$(x-1)^2+y^2=2$$

したがって，求める定積分の値は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S=\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{2}$$

補足 上の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^3=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$

図の斜線部分は，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるから，上の図形の重心の y 座標 h は，パップス・ギュルダンの定理 $(V=2\pi hS)$ により [1]

$$h=\frac{V}{2\pi S}=\frac{\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}}{2\pi\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

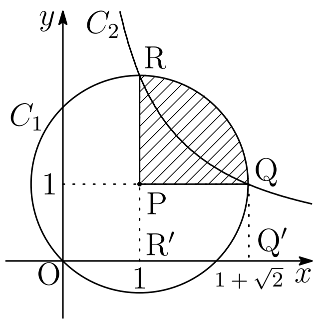
図形の対称性により，重心の x 座標 d は

$$d=1+h=1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

したがって，斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V_0 は

$$V_0=2\pi dS=2\pi\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\left(\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積も V_0 に等しい．
また，長方形 PQQ′R′ を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体は，半径 1，高さ $\sqrt{2}$ の円柱であるから，$f(x)=\sqrt{2-(x-1)^2}$ について，次が成り立つ．



$$\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\{f(x)+1\}^2\,dx=V_0+\sqrt{2}\pi$$

パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外である．入試では使用できないが，便利な検算法である．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

2 (1) 2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の解は

$$x = \frac{p_n \pm \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}}{2}$$

これが放物線 $y = x^2 - p_n x + q_n$ と x 軸との共有点の x 座標であるから，これらの差をとることにより

$$\ell_n = \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n} \quad \cdots (*)$$

$y = x^2 - p_n x + q_n$ を変形すると

$$y = \left(x - \frac{p_n}{2}\right)^2 - \frac{{p_n}^2 - 4q_n}{4}$$

よって，頂点の y 座標は $-\dfrac{{p_n}^2 - 4q_n}{4} = \boldsymbol{-\dfrac{{\ell_n}^2}{4}}$

(2) $S_n = \dfrac{1}{6}{\ell_n}^3$ であるから $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\right)^3$

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$ より $\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{(n+2)\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$

したがって $\dfrac{\ell_{n+1}}{(n+2)\sqrt{n+1}} = \dfrac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}}$

ゆえに $\dfrac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}} = \dfrac{\ell_1}{2} = \dfrac{\sqrt{{p_1}^2 - 4q_1}}{2} = 1$ よって $\boldsymbol{\ell_n = (n+1)\sqrt{n}}$

(3) $(*)$ を平方すると ${\ell_n}^2 = {p_n}^2 - 4q_n$

これに $p_n = n\sqrt{n}$ および (2) の結果を代入すると

$$(n+1)^2 n = n^3 - 4q_n \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{2q_n}{n^2} = 1 + \frac{1}{2n}$$

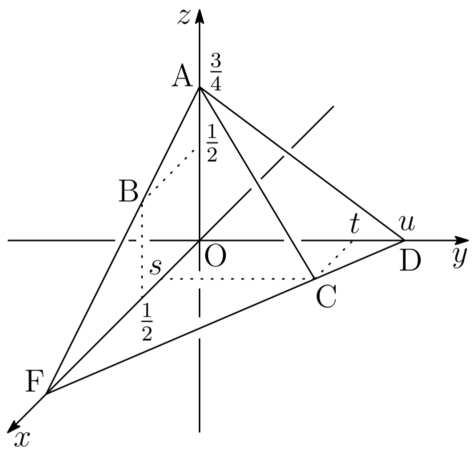
よって

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

■

3 (1) 2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線と x 軸との交点を F とすると，実数 k を用いて



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right) + k\left(\frac{1}{2},\ 0, -\frac{1}{4}\right)\\ &= \left(\frac{k}{2},\ 0,\ \frac{3}{4} - \frac{k}{4}\right)\end{aligned}$$

F は x 軸上の点であるから

$$\frac{3}{4} - \frac{k}{4} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = 3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$$

(2) 3 点 A，B，C の定める平面は，3 点 A，F，C の定める平面でもある．C は直線 FD 上の点であるから，$u = 0$ とすると，C は x 軸上の点となり，条件に反する．ゆえに，$u \neq 0$．xy 平面上の直線 FD の方程式は

$$\frac{2}{3}x + \frac{y}{u} = 1$$

点 C はこの直線上の点であるから　$\dfrac{2}{3}s + \dfrac{t}{u} = 1 \quad \cdots①$

$s > 0$，$t > 0$，$s + t = 1$ より，$s = 1 - t > 0$　ゆえに　$0 < t < 1$

$s = 1 - t$ を ① に代入すると

$$\frac{2}{3}(1 - t) + \frac{t}{u} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad u = \frac{3t}{2t + 1} > 0$$

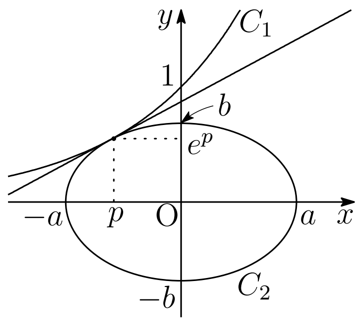
また　$1 - u = 1 - \dfrac{3t}{2t + 1} = \dfrac{1 - t}{2t + 1} > 0$　よって　$0 < u < 1$

(3) $\mathrm{D}\left(0,\ \dfrac{3t}{2t+1},\ 0\right)$ は，OE を 12 : 1 に内分するから，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{12}{13}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より

$$\left(0,\ \frac{3t}{2t+1},\ 0\right) = \frac{12}{13}(0,\ 1,\ 0) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3t}{2t+1} = \frac{12}{13}$$

これを解いて　$\boldsymbol{t = \dfrac{4}{5}}$　■

4 (1) 点 $(p,\ e^p)$ は C_2 上の点であるから



$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{e^{2p}}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$

C_2 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は

$$\frac{px}{a^2}+\frac{e^py}{b^2}=1$$

すなわち　　$y=-\dfrac{b^2p}{a^2e^p}x+\dfrac{b^2}{e^p}$

$y=e^x$ を微分すると　　$y'=e^x$

この直線の傾きが C_1 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の傾きに等しいから

$$-\frac{b^2p}{a^2e^p}=e^p \quad ゆえに \quad \frac{e^{2p}}{b^2}=-\frac{p}{a^2} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{p}{a^2}=1 \quad 整理すると \quad p^2-p-a^2=0$$

$p<0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{p=\dfrac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$p+a=\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}+a=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4a^2}-2a}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}+2a}\right)$$

よって　　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}+2a}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) ② より，$b^2=-\dfrac{a^2e^{2p}}{p}$ であるから

$$\frac{b^2e^{2a}}{a}=-\frac{a^2e^{2p}}{p}\cdot\frac{e^{2a}}{a}=-\frac{ae^{2p+2a}}{p}=\frac{a}{a-(p+a)}e^{2(p+a)}$$

したがって，(2) の結果を利用して

$$\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{a-(p+a)}e^{2(p+a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{a}(p+a)}e^{2(p+a)}=\boldsymbol{e}$$

■

5 (1) m 種類の文字から 2 種類の文字を選らぶ場合の総数は

$$_m\mathrm{C}_2 = \frac{m(m-1)}{2} \quad (\text{通り})$$

特定の 2 種類の文字列，例えば，a，b を 1 列に並べる場合の総数は 2^n 通りある．この中で a だけが 1 列に並ぶ場合が 1 通りと，b だけが 1 列に並ぶ場合が 1 通りある．したがって，両方の文字が並ぶ場合の総数は

$$2^n - 2 \quad (\text{通り}) \quad \cdots ①$$

よって，求める場合の数は

$$\frac{m(m-1)}{2} \times (2^n - 2) = \boldsymbol{m(m-1)(2^{n-1}-1)} \quad (\text{通り})$$

(2) 重複を許して，a，b，c の 3 種類の文字を 1 列に並べる場合の総数は 3^n 通りある．この内，1 種類の文字だけからなるものが 3 通りあり，2 種類の文字からなる場合の数は，(1) の結果に $m = 3$ を代入して $6(2^{n-1}-1)$ 通りある．したがって，a，b，c すべての文字を含む文字列の総数は

$$3^n - 3 - 6(2^{n-1}-1) = \boldsymbol{3^n - 3{\cdot}2^n + 3} \quad (\text{通り})$$

(3) (i) n 人を 1 グループとする場合の総数は　1 通り

(ii) n 人を a，b の 2 グループに分ける場合の総数は，① の結果から

$$2^n - 2 \quad (\text{通り})$$

このとき，a，b のグループの区別をなくすと

$$\frac{2^n - 2}{2!} = 2^{n-1} - 1 \quad (\text{通り})$$

(iii) n 人を a，b，c の 3 グループに分ける場合の総数は，(2) の結果から

$$3^n - 3{\cdot}2^n + 3 \quad (\text{通り})$$

このとき，a，b，c のグループの区別をなくすと

$$\frac{3^n - 3{\cdot}2^n + 3}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$$

(i)〜(iii) から，求める確率 p_n は

$$p_n = \frac{2^{n-1} - 1}{1 + (2^{n-1} - 1) + \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}} = \boldsymbol{\frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1}}$$

(4) $p_n \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき $(n \geqq 3)$，(3) の結果から

$$\frac{2^n-2}{3^{n-1}+1} \leqq \frac{1}{3} \quad \text{整理すると} \quad 3^{n-1}-3\cdot2^n+7 \geqq 0 \quad \cdots(*)$$

$f(n)=3^{n-1}-3\cdot2^n+7$ とおくと

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2-3\cdot2^3+7=-8 \\ f(4) &= 3^3-3\cdot2^4+7=-14 \\ f(5) &= 3^4-3\cdot2^5+7=-8 \\ f(6) &= 3^5-3\cdot2^6+7=58 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} f(n+1)-f(n) &= (3^n-3\cdot2^{n+1}+7)-(3^{n-1}-3\cdot2^n+7) \\ &= 2\cdot3^{n-1}-3\cdot2^n = 2^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3\right\} \end{aligned}$$

したがって　　$f(3)>f(4)<f(5)<f(6)<\cdots$

よって，$(*)$ を満たす n の範囲は　　$\boldsymbol{n \geqq 6}$

解説

異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べるとき，k 種類の文字を含む文字列の総数を ${}_n\mathrm{Q}_k$ とすると $(1 \leqq k \leqq m)$，次が成立する．

$$\begin{aligned} &{}_n\mathrm{Q}_1 = 1 \\ &{}_n\mathrm{Q}_2 = 2^n - {}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{Q}_1 \\ &{}_n\mathrm{Q}_3 = 3^n - {}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{Q}_1 - {}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{Q}_2 \\ &{}_n\mathrm{Q}_4 = 4^n - {}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{Q}_1 - {}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{Q}_2 - {}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_n\mathrm{Q}_3 \\ &{}_n\mathrm{Q}_5 = 5^n - {}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{Q}_1 - {}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{Q}_2 - {}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_n\mathrm{Q}_3 - {}_5\mathrm{C}_4\cdot{}_n\mathrm{Q}_4 \\ &\qquad \vdots \\ &{}_n\mathrm{Q}_k = k^n - \sum_{j=1}^{k-1} {}_k\mathrm{C}_j\cdot{}_n\mathrm{Q}_j \end{aligned}$$

${}_n\mathrm{Q}_1=1$ より，${}_n\mathrm{Q}_2=2^n-2$ となり，これらを用いて (本題 (2) の計算)

$$ {}_n\mathrm{Q}_3 = 3^n - {}_3\mathrm{C}_1\cdot1 - {}_3\mathrm{C}_2\cdot(2^n-2) = 3^n-3\cdot2^n+3 $$

例 1 n 個並べたときに丁度 3 種類の文字がそろう確率を $P_3(n)$ とすると

$$P_3(n) = \frac{3 \times {}_{n-1}\mathrm{Q}_2}{3^n} = \frac{3(2^{n-1}-2)}{3^n} = \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$$

また，文字が 3 種類そろうまで並べる文字数の期待値を E_3 とすると

$$\begin{aligned} E_3 &= \sum_{n=3}^{\infty} nP_3(n) = \sum_{n=3}^{\infty} n\cdot\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\left\{n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - 1 - 2\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - 1\right\} = \frac{11}{2} \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

補足 $|x| < 1$ のとき，$1 + x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ を微分すると

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

この計算は，次の公式[2] を利用すると簡単に求めることができる．

Coupon collector's problem

m 種類の文字すべてがそろうまで並べる文字数の期待値 E_m は

$$E_m = m\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

実際

$$E_3 = 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2}$$

例 2 サイコロを投げて，すべての目がそろうまで投げる回数の期待値 (期待回数) は

$$E_6 = 6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{147}{10}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf (p.12 に証明)

9.2　2016年(150分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5]

1 座標空間に4点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(s,\ s,\ s),\ \mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

がある．ただし，$s>0$ とする．t，u，v を実数とし，

$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u，v を s を用いて表せ．

(3) (2) のとき，2点D，E を

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$$

となる点とする．四面体OADEの体積が2であるとき，s の値を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) a を正の定数とする．関数 $f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ．

(3) c を定数とする．x 軸，y 軸，直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

3 複素数平面上を，点 P が次のように移動する．

1. 時刻 0 では，P は原点にいる．時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する．移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_1(z_1)$ とすると，$z_1 = 1$ である．
2. 時刻 1 に P は $\mathrm{Q}_1(z_1)$ において進行方向が $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する．移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_2(z_2)$ とすると，$z_2 = \dfrac{3+i}{2}$ である．
3. 以下同様に，時刻 n に P は $\mathrm{Q}_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する．移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_{n+1}(z_{n+1})$ とする．ただし n は自然数である．

$\alpha = \dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ．

(1) z_3，z_4 を求めよ．

(2) z_n を α，n を用いて表せ．

(3) P が $\mathrm{Q}_1(z_1)$，$\mathrm{Q}_2(z_2)$，$\cdots$ と移動するとき，P はある点 $\mathrm{Q}(w)$ に限りなく近づく．w を求めよ．

(4) z_n の実部が (3) で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ．

4 xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う．

> 1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く．ただし，点 (3, 1) に到達したら Q は原点に戻る．

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $(x_4,\ y_4) = (0,\ 0)$ となる確率を求めよ．

(2) $(x_8,\ y_8) = (5,\ 3)$ となる確率を求めよ．

(3) $x_8 + y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ．

(4) $x_{4n} + y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ．ここで k は n 以下の自然数とする．

5 数列

$$x_n = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を考える．この数列は 1，2，4，8，16，32，64，128，256, $\cdots$ であるが，各項の下 1 桁をみると，1，2，4，8，6，2，4，8，6, $\cdots$ となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすことにする．たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする．

(2) 4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ．

(3) 8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ．

(4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい．

解答例

$\boxed{1}$ (1) O(0, 0, 0), A$(s,\ s,\ s)$, B$(-1,\ 1,\ 1)$, C$(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= s(1,\ 1,\ 1),\\ \vec{d} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 1,\ 1) - t(s,\ s,\ s)\\ &= (-1-st,\ 1-st,\ 1-st)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{d}=0$ であるから $(s>0)$，

$$1(-1-st)+1(1-st)+1(1-st)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t=\frac{1}{3s}}$$

(2) (1) の結果から，$st=\dfrac{1}{3}$ より　$\vec{d}=\left(-1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - u\overrightarrow{\mathrm{OA}} - v\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 0,\ 1) - u(s,\ s,\ s) - v(-1,\ 1,\ 1)\\ &= (-us+v, -us-v,\ 1-us-v)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$, $\vec{d}\perp\vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=0$, $\vec{d}\cdot\vec{e}=0$ であるから

$$\begin{aligned}1(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0,\\ -2(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0\end{aligned}$$

整理すると $\begin{cases}-3us-v+1=0\\ -4v+1=0\end{cases}$ 　よって　$\boldsymbol{u=\dfrac{1}{4s},\ v=\dfrac{1}{4}}$

(3) (2) の結果から，$su=v=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$\vec{e}=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}(0, -1.\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

このとき，四面体 OADE の体積が 2 であるから，$\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=2$ より

$$\frac{1}{6}\cdot s\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s=6}$$

解説

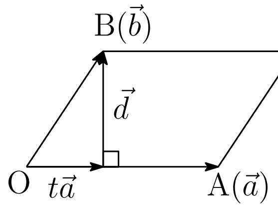
座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$$

があるとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

$\vec{d}=\vec{b}-t\vec{a}$ が $\vec{a}\perp\vec{d}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{d}=0$ より

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-t\vec{a})=0 \quad ゆえに \quad t|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$$



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S^2 &= (|\vec{a}||\vec{d}|)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}-t\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2(|\vec{b}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{a}|^2)\\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-2t|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+(t|\vec{a}|^2)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ であるから

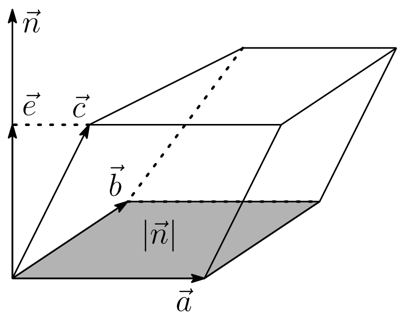
$$\begin{aligned}S^2 &= ({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\ &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\end{aligned}$$

ここで，$\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$ とおくと

$$|\vec{n}|=S, \quad \vec{n}\cdot\vec{a}=0, \quad \vec{n}\cdot\vec{b}=0$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $\vec{n}$ に平行なベクトル $\vec{e}$ を用いて

$$\vec{c}=\vec{e}+u\vec{a}+v\vec{b} \quad (u,\ v \text{ は定数})$$



とかける．このとき

$$\vec{n}\cdot\vec{e}=\vec{n}\cdot(\vec{c}-u\vec{a}-v\vec{b})=\vec{n}\cdot\vec{c}$$

$\vec{n}$ と $\vec{e}$ のなす角は $0°$ または $180°$ であるから　$|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}||\vec{e}|$

この平行六面体の体積を V とすると，$V=|\vec{n}||\vec{e}|$ であるから

$$V=|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}\cdot\vec{c}|=|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

よって，四面体 OABC の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S\cdot|\vec{e}|=\dfrac{1}{6}|\vec{n}||\vec{e}|=\dfrac{1}{6}V$ より

$$\frac{1}{6}|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

■

2　(1) $y=f(x)$ とおくと，$y=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}\cdots$① より

$$e^{2x}-2ye^x+y^2=y^2+a \quad \text{ゆえに} \quad (e^x-y)^2=y^2+a$$

① より　$e^x-y=e^x-\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}=\dfrac{e^x+ae^{-x}}{2}>0 \qquad (a>0)$

したがって　$e^x-y=\sqrt{y^2+a}$　すなわち　$x=\log(y+\sqrt{y^2+a}\,)$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{f^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2+a}\,)}$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}}$

別解 $y=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ より　$y'=\dfrac{e^x+ae^{-x}}{2}$

ここで，$e^x=y+\sqrt{y^2+a}$，$e^{-x}=\dfrac{-y+\sqrt{y^2+a}}{a}$ であるから

$$y'=\frac{y+\sqrt{y^2+a}+a\cdot\dfrac{-y+\sqrt{y^2+a}}{a}}{2}=\sqrt{y^2+a}$$

$y=f(x)$，$x=g(y)$ とおき，$g(y)=x$ を x について微分すると

$$g'(y)y'=1 \quad \text{ゆえに} \quad g'(y)=\frac{1}{y'}=\frac{1}{\sqrt{y^2+a}}$$

よって　$\dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

(3) (1),(2) の結果を用いると　$\{\log(x+\sqrt{x^2+c^2}\,)\}'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\int_0^c\frac{dx}{\sqrt{x^2+c^2}}=\Big[\ \log(x+\sqrt{x^2+c^2})\ \Big]_0^c \\ &=\log(c+\sqrt{2}c)-\log c \\ &=\boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})} \end{aligned}$$

■

3 (1) $z_1 = 1$，$z_2 - z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \dfrac{1+i}{2}$，

$$z_3 - z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot i = \frac{i}{2},$$

$$z_4 - z_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1+i}{4}$$

したがって　$z_3 = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) = 1 + \dfrac{1+i}{2} + \dfrac{i}{2} = \boldsymbol{\dfrac{3+2i}{2}}$,

$$z_4 = z_3 + (z_4 - z_3) = \frac{3+2i}{2} + \frac{-1+i}{4} = \boldsymbol{\frac{5+5i}{4}}$$

(2) k を自然数とすると

$$z_{k+1} - z_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k = \alpha^k$$

よって　$z_n = z_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(z_{k+1} - z_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k = \boldsymbol{\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}$

(3) $|\alpha| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n = 0$

よって　$w = \displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\dfrac{1+i}{2}} = \boldsymbol{1+i}$

(4) $\dfrac{1}{1-\alpha} = 1 + i = 2\alpha$ であるから，(2) の結果より

$$z_n = 2\alpha(1-\alpha^n) = 2\alpha - 2\alpha^{n+1}$$
$$= 1 + i - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\left(\cos\frac{n+1}{4}\pi + i\sin\frac{n+1}{4}\pi\right)$$

したがって　$\mathrm{Re}(z_n) = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\cos\dfrac{n+1}{4}\pi$

また，(3) の結果から　$\mathrm{Re}(w) = 1$ であるから

$$\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(w) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\cos\frac{n+1}{4}\pi > 0$$

$\dfrac{\pi}{2} + 2j\pi < \dfrac{n+1}{4}\pi < \dfrac{3}{2}\pi + 2j\pi$ (j は整数) であるから　$8j+1 < n < 8j+5$

よって　$\boldsymbol{n = 8j+2,\ 8j+3,\ 8j+4}$ **(j は負でない整数)**　■

4 (1) $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となるのは，硬貨を 4 回投げて，表が 3 回，裏が 1 回出る確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となるのは，点 $(3,1)$ を通らずに，点 $(5,\ 3)$ に到達する確率であるから，(1) の結果を利用して

$$ {}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{4}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{7}{32}-\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\boldsymbol{\frac{1}{8}} $$

(3) $x_8+y_8\leqq 4$ となるのは，4 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達することである．したがって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(4) $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となるのは，4 回目，8 回目，$\cdots$，$4(n-k)$ 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達する，すなわち，ちょうど $n-k$ 回原点に戻る．よって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}=\boldsymbol{\frac{1}{4^{n-k}}} $$

■

5 (1) $x_n=2^n$ の下 2 桁は，次のようになる．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_n	02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
x_n	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

よって，**04** から循環が始まり循環の周期は **20** である．

(2) 25 で割って 1 余る 2 桁の数は　26，51，76

A は 4 の倍数であるから　　$\boldsymbol{A=76}$

別解 $4x\equiv 1\pmod{25}$ を満たす整数 x は

$$ 24x\equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad -x\equiv 6 \quad \text{すなわち} \quad x\equiv -6 \pmod{25} $$

$x=25k-6$ であるから (k は整数)　$4x=100k-24$

A は 2 桁の自然数であるから，$k=1$ を代入して　$\boldsymbol{A=76}$

(3) 125 で割って 1 余る 3 桁の自然数は

$$126,\ 251,\ 376,\ 501,\ 626,\ 751,\ 876$$

B は 8 の倍数であるから $\boldsymbol{B = 376}$

別解 $8y \equiv 1 \pmod{125}$ を満たす整数 y は

$$120y \equiv 15 \quad \text{ゆえに} \quad -5y \equiv 15 \pmod{125}$$

$24y \equiv 3,\quad -25y \equiv 75 \pmod{125}$ であるから

$$24y - 25y \equiv 3 + 75 \quad \text{ゆえに} \quad y \equiv -78 \pmod{125}$$

$y = 125j - 78$ であるから (j は整数) $8y = 1000j - 624$

B は 3 桁の自然数であるから，$j = 1$ を代入して $\boldsymbol{B = 376}$

(4) 循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 m に対して

$$2^{m+e} - 2^m = 1000M \ (M \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{m-3}(2^e - 1) = 125M$$

2^{m-3} は整数であるから，これを満たす最小の m は 3

したがって，循環の始まりは 2^3 すなわち **008**

$2^e - 1$ は 125 で割り切れるから $2^e \equiv 1 \pmod{125}$

これを満たす最小の自然数 e は 100 であるから，求める周期は **100**

解説

1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ 関数 (phi function) といい，以下の定理が成り立つ．

定理 1

p_1，$p_2, \cdots, p_l$ を素数，k_1，$k_2, \cdots, k_l$ を自然数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

フェルマー・オイラーの定理 (Fermat-Euler Theorem)

自然数 n と互いに素である自然数 a について，次式が成り立つ．

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証明　http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6 を参照)．

定理 2

自然数 n と互いに素である自然数 a について

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 e(位数) は，$\varphi(n)$ の約数である．

証明　$\varphi(n)$ が e で割り切れないと仮定し，$\varphi(n)$ を e で割った商を q，余りを r とすると

$$\varphi(n) = eq + r \quad (0 < r < e)$$

したがって　$$a^{\varphi(n)} = a^{eq+r} = (a^e)^q a^r$$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1$，$a^e \equiv 1 \pmod{n}$ であるから

$$a^r \equiv 1 \qquad \pmod{n}$$

これは，e が位数であることに反する．　　証終

別解 (1)

循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 n に対して

$$2^{n+e}-2^n=100N\ (N\text{ は整数})\quad \text{ゆえに}\quad 2^{n-2}(2^e-1)=25N$$

2^{n-2} は整数であるから，これを満たす最小の n は　2
したがって，循環の始まりは　2^2　すなわち　**04**
2^e-1 は 25 で割り切れるから　　$2^e\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 25)$　$\cdots$①
$25=5^2$ より，$\varphi(25)=25\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=20$ であるから，フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{20}\equiv 1 \pmod{25}$$

① を満たす最小の自然数 e(位数) は，20 の約数であるから，法 25 について

$$2^1\equiv 2,\quad 2^2\equiv 4,\quad 2^4\equiv 16,\quad 2^5\equiv 7,\quad 2^{10}\equiv 7^2\equiv -1$$

よって，求める周期 (位数) は　　**20**

別解 (4)

循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 m に対して

$$2^{m+e}-2^m=1000M\ (M\text{ は整数})\quad \text{ゆえに}\quad 2^{m-3}(2^e-1)=125M$$

2^{m-3} は整数であるから，これを満たす最小の m は　3
したがって，循環の始まりは　2^3　すなわち　**008**
2^e-1 は 125 で割り切れるから　　$2^e\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 125)$　$\cdots$②
$125=5^3$ より，$\varphi(125)=125\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=100$ であるから，フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{100}\equiv 1 \pmod{125}$$

② を満たす最小の自然数 e(位数) は，100 の約数であるから，法 125 について

$$\begin{aligned}&2^1\equiv 2,\quad 2^2\equiv 4,\quad 2^4\equiv 16,\quad 2^5\equiv 32,\\&2^{10}\equiv 32^2\equiv 1024\equiv 24,\quad 2^{20}\equiv 24^2\equiv 576\equiv -24,\\&2^{25}\equiv -24\cdot 32\equiv -768\equiv -43,\quad 2^{50}\equiv(-43)^2\equiv 1849\equiv -1\end{aligned}$$

よって，求める周期 (位数) は　　**100**　■

9.3　2017 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \tan\frac{\pi}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) $a_2 = \tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ．

(2) 一般項 a_n の表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$ を求めよ．

2 $a > 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ．

(2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく．A^3 を求めよ．

(3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする．C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ．

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える．その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ．

3 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある．ただし，$0<p<1$ である．このとき，下図のような正三角形の 3 頂点 A，B，C を次の規則で移動する動点 R を考える．

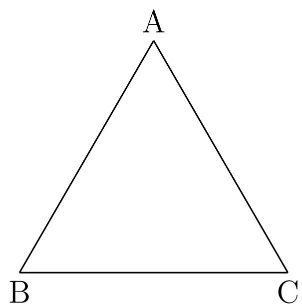
> コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する．

R は最初 A にあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する．ここで，N は自然数である．移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,3,\cdots,2N+3)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) P_2，P_3 を求めよ．

(2) P_{2m}，P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ．

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする．移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ．

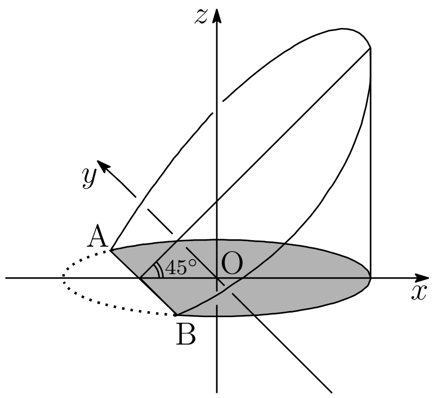


4 座標空間内の平面 $H : z = 0$ とその上の曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える．C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする．C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と $45°$ の角をなす平面を T とする．ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする．平面 H，平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする．次の問いに答えよ．

(1) 立体 V と平面 H の共通部分 (下図の灰色で示される部分) の面積を求めよ．

(2) 立体 V を平面 $x = t$ $(-1 < t < 2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．

(3) 立体 V の体積を求めよ．



5 x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ．格子点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および $\mathrm{A}(50,\ 14)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ．

(2) m を自然数とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする．P_1 および P_2 を求めよ．

(3) P_m を (2) で定めた格子点とする．自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ．

(4) P_m を (2) で定めた格子点とする．Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする．四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ．

解答例

1 (1) $a_n=\tan\theta_n\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)\cdots(*)$ とおくと

$$a_1=\tan\frac{\pi}{3} \text{ より}\quad \theta_1=\frac{\pi}{3}\quad\cdots①$$

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}$ より

$$\begin{aligned}\tan\theta_{n+1}&=\frac{\tan\theta_n}{\sqrt{\tan^2\theta_n+1}+1}=\frac{\sin\theta_n}{1+\cos\theta_n}\\&=\frac{2\sin\dfrac{\theta_n}{2}\cos\dfrac{\theta_n}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta_n}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\theta_n}{2}}{\cos\dfrac{\theta_n}{2}}=\tan\frac{\theta_n}{2}\end{aligned}$$

ゆえに　$\theta_{n+1}=\dfrac{\theta_n}{2}\quad\cdots②$　すなわち　$\theta_n=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{\pi}{3\cdot2^{n-1}}\quad\cdots(**)$

したがって　$a_n=\tan\dfrac{\pi}{3\cdot2^{n-1}}$　よって　$a_2=\tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3=\tan\dfrac{\pi}{12}$

(2) $(*)$ を用いて，a_n は $(**)$ であると推定する．

［1］$n=1$ のとき，① より，$(**)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(**)$ が成立する，

すなわち，$\theta_k=\dfrac{\pi}{3\cdot2^{k-1}}$ と仮定すると，② より

$$\theta_{k+1}=\frac{1}{2}\theta_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3\cdot2^{k-1}}=\frac{\pi}{3\cdot2^k}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(**)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ は成立する．

よって　$a_n=\tan\dfrac{\pi}{3\cdot2^{n-1}}$

(3) $(**)$ より，$2^n=\dfrac{2\pi}{3\theta_n}$ であるから　$2^na_n=\dfrac{2\pi}{3\theta_n}\tan\theta_n=\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{\tan\theta_n}{\theta_n}$

$n\to\infty$ のとき，$\theta_n\to+0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}2^na_n=\lim_{\theta_n\to+0}\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\tan\theta_n}{\theta_n}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $f(t) = t^3 - 2at + 1\ (a > 0)$ より

$$f'(t) = 3t^2 - 2a = 3\left(t + \sqrt{\frac{2a}{3}}\right)\left(t - \sqrt{\frac{2a}{3}}\right)$$

$t \geqq 0$ における $f(t)$ 増減表は

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，最小値は　$f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) = \dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{2a}{3}} - 2a\sqrt{\dfrac{2a}{3}} + 1 = \boldsymbol{-\dfrac{4a}{3}\sqrt{\dfrac{2a}{3}} + 1}$

(2) $a = A$ のとき，最小値が 0 であるから，(1) の結果より

$$-\frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}} = 1$$

両辺を平方すると　$\dfrac{16A^2}{9}\cdot\dfrac{2A}{3} = 1$　　よって　$\boldsymbol{A^3 = \dfrac{27}{32}}$

(3) $C_1 : y = x^4$，$C_2 : x^2 + (y-a)^2 = a^2$ から y を消去すると

$$x^2 + (x^4 - a)^2 = a^2 \quad \text{整理すると} \quad x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) = 0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 の共有点の個数は，方程式 $(*)$ の実数解の個数に等しい．
$t = x^2 \cdots$ ① とおくと，上の方程式は　　$tf(t) = 0 \quad \cdots(**)$

(1) の結果を利用すると，$f(t) = 0\ (t \geqq 0)$ の解の個数は，次のようになる．

$f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) > 0$，すなわち，$0 < a < \dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のとき　0 個

$f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) = 0$，すなわち，$a = \dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のとき　1 個

$f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) < 0$，すなわち，$\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}} < a$ のとき　2 個

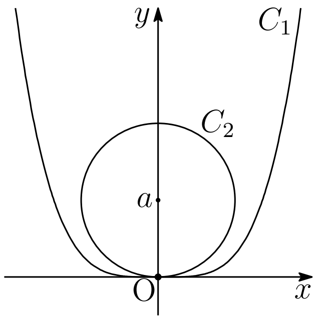
① より，これらの正の解 t に対し，$(*)$ の解はそれぞれ $x = \pm\sqrt{t}$ である．

$(*)$，$(**)$ より　　$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}}$ **のとき　1 個**

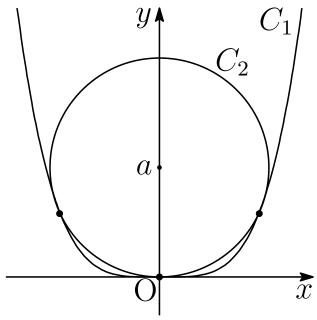
$\boldsymbol{a = \dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}}$ **のとき　3 個**

$\boldsymbol{\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}} < a}$ **のとき　5 個**

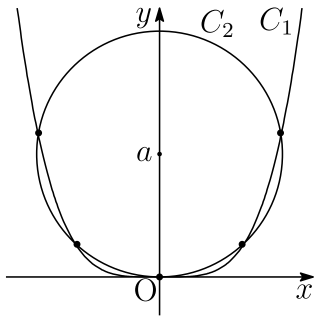
補足 a の値による C_1 と C_2 の共有点は次のようになる．



共有点 1 個 $(a < A)$



共有点 3 個 $(a = A)$



共有点 5 個 $(a > A)$

(4) C_1 上の点 $(x,\ x^4)$ と点 $(0,\ a)$ 間の距離を d とすると

$$d^2 = x^2 + (x^4 - a)^2 = x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2$$

d の最小値が a であるとき，$d^2 \geqq a^2$ であるから

$$x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2 \geqq a^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) \geqq 0$$

上式が常に成り立つとき，任意の x に対して

$$x^6 - 2ax^2 + 1 \geqq 0$$

が成立する a の範囲であるから，$t = x^2$ とおくと，$t \geqq 0$ において，常に

$$f(t) \geqq 0$$

を満たす a の範囲である．

したがって，(1) の結果から $f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) \geqq 0$ を満たす a の範囲は $(a > 0)$

$$-\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0 < a \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}}$$

■

3 (1) P_2 は，A → B → A または A → C → A と移動する確率より

$$P_2 = p(1-p) + (1-p)p = \boldsymbol{2p(1-p)}$$

P_3 は，A → B → C → A または A → C → B → A と移動する確率より

$$P_3 = \boldsymbol{p^3 + (1-p)^3}$$

(2) 移動回数がちょうど $2m$ に達したとき，R が A に初めて戻る場合，最初に A → B と移動し BC 間を $m-1$ 回往復して最後に B → A と移動するか，最初に A → C と移動し CB 間を $m-1$ 回往復して最後に C → A と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p) + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p \\ &= \boldsymbol{2\{p(1-p)\}^m} \end{aligned}$$

移動回数がちょうど $2m+1$ に達したとき，R が A に初めて戻る場合，最初に A → B と移動し BC 間を $m-1$ 回往復して最後に B → C → A と移動するか，最初に A → C と移動し CB 間を $m-1$ 回往復して最後に C → B → A と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2 + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= \boldsymbol{\{p^3 + (1-p)^3\}\{p(1-p)\}^{m-1}} \end{aligned}$$

(3) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき　$p(1-p) = \dfrac{1}{4}$，　$p^3 + (1-p)^3 = \dfrac{1}{4}$

$q = \dfrac{1}{4}$ とおくと，(2) の結果から　$P_{2m} = 2q^m$，　$P_{2m+1} = q{\cdot}q^{m-1} = q^m$

移動回数が $2k$ $(1 \leqq k \leqq N)$ のとき R が A に初めて戻り，$2N+3$ 回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} = 2q^k{\cdot}q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

移動回数が $2k+1$ $(1 \leqq k \leqq N)$ のとき R が A に初めて戻り，$2N+3$ 回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k+1}P_{2(N-k+1)} = q^k{\cdot}2q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N}\{P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} + P_{2k+1}P_{2(N-k+1)}\} &= \sum_{k=1}^{N}(2q^{N+1} + 2q^{N+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} q^N = Nq^N = \boldsymbol{\frac{N}{4^N}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ より，求める面積を S とすると　$S=2\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$

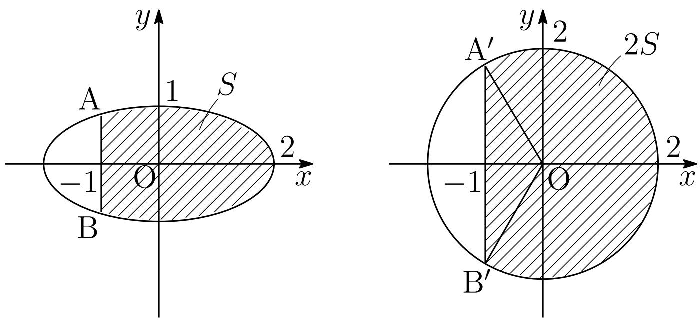
$x=2\cos\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$

x	$-1\longrightarrow 2$
θ	$\frac{2}{3}\pi\longrightarrow 0$

よって
$$S=2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}(-2\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}4\sin^2\theta\,d\theta=\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}(2-2\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\Big[\,2\theta-\sin 2\theta\,\Big]_{0}^{\frac{2\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

別解 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸を元に y 軸方向に2倍に拡大したものは，中心が原点で半径2の円．このとき，2点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が移動した点をそれぞれ $\mathrm{A'}(-1,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B'}(-1,-\sqrt{3})$ とおくと，$\angle\mathrm{A'OB}=\dfrac{2\pi}{3}$

$$2S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}\quad よって\quad S=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\pi}{3}$$



(2) 平面 $x=t\ (-1<t<2)$ と楕円柱面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ との交点の y 座標は

$$\frac{t^2}{4}+y^2=1\quad ゆえに\quad y=\pm\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}$$

平面 $x=t\ (-1<t<2)$ と平面 $T: z=x+1$ との交点の z 座標は　$z=t+1$

V を平面 $x=t\ (-1<t<2)$ で切った断面は，底辺 $2\sqrt{1-\dfrac{t^2}{4}}$，高さ $t+1$ の長方形であるから

$$\boldsymbol{S(t)=2(t+1)\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}$$

(3) V の体積は，(2) の結果および (1) で求めた定積分に注意して

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} S(t)\,dt &= \int_{-1}^{2} 2t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}dt + 2\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt \\ &= \left[-\frac{8}{3}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2} + S \\ &= \sqrt{3} + \left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{4\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

■

5 (1) O(0, 0)，A(50, 14) より，P(x, y) とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ より

$$50x + 14y = 6 \quad ゆえに \quad 25x + 7y = 3 \quad \cdots ①$$

x，y は整数であるから，$25 \equiv 4 \pmod 7$ より，① は

$$4x \equiv 3 \quad ゆえに \quad 8x \equiv 6 \quad すなわち \quad x \equiv -1 \pmod 7$$

整数 k を用いて，$x = 7k-1$ とおき，これを ① に代入すると

$$25(7k-1) + 7y = 3 \quad ゆえに \quad y = -25k+4$$

したがって　$(x,\ y) = (7k-1, -25k+4) \quad \cdots (*)$

$k = 0$ を $(*)$ に代入すると　$\boldsymbol{(-1,\ 4)}$

(2) $(*)$ より　$\mathrm{OP}^2 = (7k-1)^2 + (-25k+4)^2 = 674k^2 - 214k + 17$

$$= 647\left(k - \frac{107}{647}\right)^2 - \frac{107^2}{647} + 17$$

したがって，m と k は次のように対応する．

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
k	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	$\cdots$

よって　$\mathbf{P_1(-1,\ 4),\ P_2(6, -21)}$

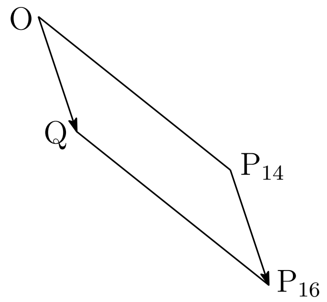
(3) $(*)$ および (2) の表から　$\mathrm{P}_{2k}(7k-1, -25k+4) \quad \cdots (**)$

また　$\mathrm{P}_{2k+1}(7(-k)-1,\ -25(-k)+4)$　すなわち　$\mathrm{P}_{2k+1}(-7k-1,\ 25k+4)$

$(**)$ より，$\mathrm{P}_{2k+2}(7k+6,\ -25k-21)$ であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}} = (-14k,\ 50k), \quad \overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}} = (7, -25)}$$

(4) $(**)$ および (3) の結果に $k=7$ を代入すると



$$P_{14}(48, -171), \quad \overrightarrow{P_{14}P_{16}} = (7, -25)$$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_{16}}$ より　　$Q(7, -25)$

直線 OQ の方程式は　　$25x+7y=0$

直線 $P_{14}P_{16}$ の方程式は

$$25(x-48)+7(y+171)=0 \quad \text{すなわち} \quad 25x+7y=3$$

直線 OP_{14} の方程式は　　$171x+48y=0$

直線 QP_{16} の方程式は

$$171(x-7)+48(y+25)=0 \quad \text{すなわち} \quad 171x+48y=-3$$

したがって，四角形 $OQP_{16}P_14$ の周および内部を表す領域は

$$\begin{cases} 0 \leqq 25x+7y \leqq 3 \\ -3 \leqq 171x+48y \leqq 0 \end{cases}$$

この領域内の点 $(x,\ y)$ が格子点であるとき，$25x+7y$ および $171x+48y$ は整数であるから，整数 $i,\ j$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ -3 \leqq j \leqq 0)$ を用いて

$$\begin{cases} 25x+7y=i \\ 171x+48y=j \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad x = 16i - \frac{7j}{3},\ y = -57i + \frac{25j}{3}$$

x，y は整数であるから，条件を満たす $(i,\ j)$ の組は

$$(i,\ j) = (0,\ 0), (1,\ 0), (2,\ 0), (3,\ 0), (0, -3), (1, -3), (2, -3), (3, -3),$$

よって，これに対応する格子点 $(x,\ y)$ は

$$\mathbf{(0,\ 0),\ (16, -57),\ (32, -114),\ (48, -171),}$$
$$\mathbf{(7, -25),\ (23, -82),\ (39, -139), (55, -196)}$$

■

9.4　2018 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ．

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(A) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(B) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(3) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ．

2 複素数平面上の 4 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$，$\mathrm{D}(\delta)$ を頂点とする四角形 ABCD を考える．ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が 180° より小さい四角形 (凸四角形) であるとする．また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A，B，C，D の順に並んでいるとする．四角形 ABCD の外側に，4 辺 AB，BC，CD，DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB，BQC，CRD，DSA を作る．次の問いに答えよ．

(1) 点 P を表す複素数を求めよ．

(2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ．

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ．

3 次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 次の不等式を示せ．

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$$

4　0，1，2，3 の数字が一つずつ書かれた 4 枚のカードがある．この中から 1 枚を取り出し，書かれた数字を見て元に戻す．この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，$\cdots$，Z_n とする．ここで，N は 3 以上の自然数である．さらに，複素数

$$\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, \quad X_{n+1} = X_n\alpha^{Z_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots, N-1)$$

により定める．$n = 1, 2, \cdots, N$ に対し，$X_n = \alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n = \alpha^2$ となる確率を Q_n とする．次の問いに答えよ．

(1) P_1 を求めよ．

(2) $n = 1, 2, \cdots, N-1$ とする．$\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ となる確率を求めよ．

(3) $n = 1, 2, \cdots, N$ とする．$X_n = 1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ．

(4) $n = 1, 2, \cdots, N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ．

(5) $n = 1, 2, \cdots, N$ に対し，P_n を求めよ．

5　座標平面上で，曲線 $C : y = x^3 - 3x$ と，$b > a^3 - 3a$ を満たすように動く点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える．また，点 P に対し，二つの不等式

$$|x - a| \leqq 1, \quad |y - b| \leqq 1$$

によって表される座標平面上の領域を B とする．領域 B と曲線 C に対して，B と C が共有点 Q をもち，さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき，B と C は点 Q で接するということにする．次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概形をかき，さらに点 P の座標が $(-2,\ 3)$ のときの領域 B を図示せよ．

(2) B と C が $x < -1$ の範囲にある点で接するように，点 P は動くとする．このときの点 P の軌跡を求めよ．

(3) B と C がある点で接するように点 P は動くとする．このときの点 P の軌跡を求めよ．

(4) (3) の点 P の軌跡は，ある関数 $y = f(x)$ のグラフで表すことができる．この $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．

解答例

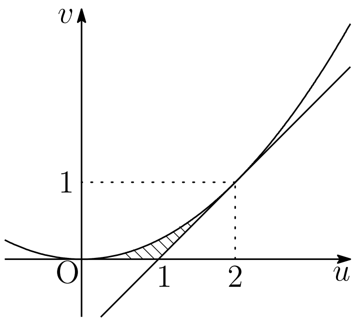
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(t)=t^2-ut+v$ とおくと　$f(t)=\left(t-\dfrac{u}{2}\right)^2+v-\dfrac{u^2}{4}$

2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 x, y が $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$ および上式より

$$v \geqq 0, \quad 1-u+v \geqq 0, \quad 0 \leqq \frac{u}{2} \leqq 1, \quad v-\frac{u^2}{4} \leqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} 0 \leqq u \leqq 2 \\ v \geqq 0 \\ v \geqq u-1 \\ v \leqq \dfrac{u^2}{4} \end{cases}$$



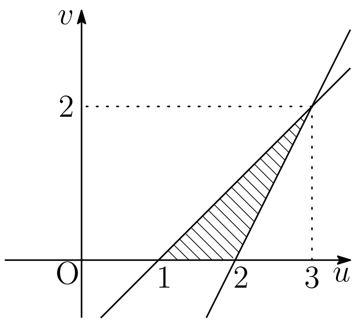
よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．

(2) 2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 x, y が $0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \leqq 0$，$f(2) \geqq 0$ より

$$v \geqq 0, \quad 1-u+v \leqq 0, \quad 4-2u+v \geqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} v \geqq 0 \\ v \leqq u-1 \\ v \geqq 2u-4 \end{cases}$$



よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．

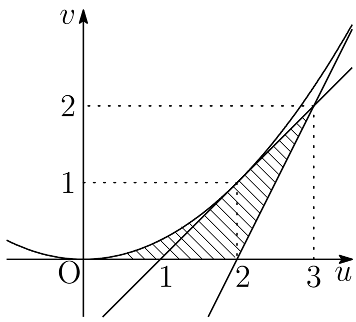
(3) $A = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$，$B = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2\}$ とすると，$(x,\ y)$ が 4 点 $(0,0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部は $A \cup B$ である．(1)，(2) で求めた領域をそれぞれ E，F とすると

$$\text{点}\,(x+y,\ xy)\quad \text{すなわち}\quad \text{点}\,(u,\ v)$$

の表す領域は $E \cup F$ で，右の図のようになる．

よって，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$= \left[\,\frac{u^3}{12}\,\right]_0^2 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{7}{6}}$$



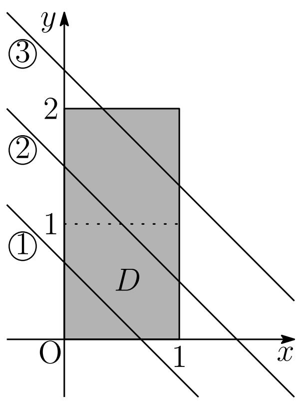
別解　$D = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$ とし，直線 $x + y = u$ 上の点 $(x,\ y) \in D$ における $v = xy$ のとる値の範囲を求める．

$$v = x(u-x) = -\left(x - \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{4}$$

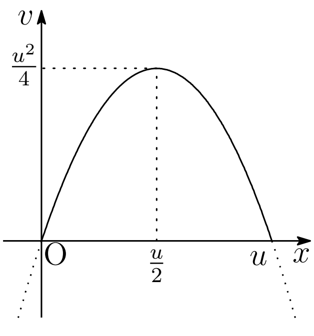
① $0 \leqq u \leqq 1$ のとき　$0 \leqq x \leqq u$

② $1 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq x \leqq 1$

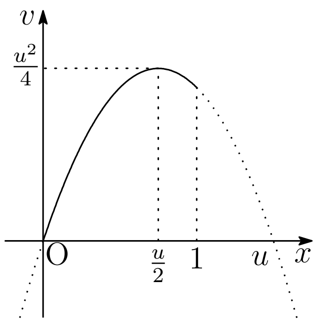
③ $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$u - 2 \leqq x \leqq 1$



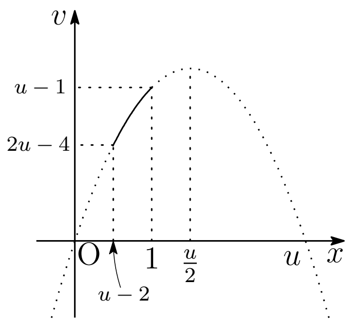
① $0 \leqq u \leqq 1$



② $1 \leqq u \leqq 2$



③ $2 \leqq u \leqq 3$

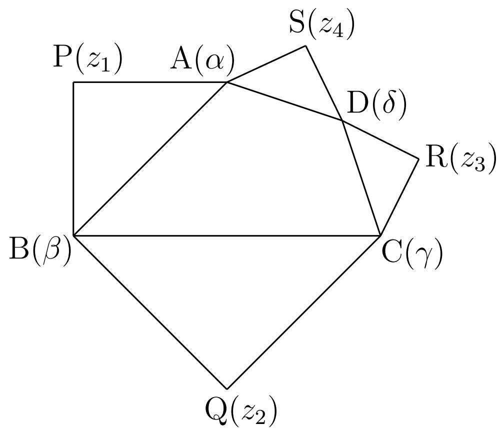


(i) $0 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq v \leqq \dfrac{u^2}{4}$

(ii) $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$2u - 4 \leqq v \leqq u - 1$

よって　$S = \displaystyle\int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du + \int_2^3 \{(u-1) - (2u-4)\}\,du = \frac{7}{6}$　■

2 (1) P(z_1) とすると



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BA}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \angle\alpha\beta z_1=\frac{\pi}{4}$$

したがって

$$\frac{z_1-\beta}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに　$z_1-\beta=\frac{1}{2}(1+i)(\alpha-\beta)$

よって　$z_1=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1+i)\alpha+\frac{1}{2}(1-i)\beta}$

(2) Q(z_2)，R(z_3)，S(z_4) とおくと，(1) と同様にして

$$z_2=\frac{1}{2}(1+i)\beta+\frac{1}{2}(1-i)\gamma,\quad z_3=\frac{1}{2}(1+i)\gamma+\frac{1}{2}(1-i)\delta$$
$$z_4=\frac{1}{2}(1+i)\delta+\frac{1}{2}(1-i)\alpha$$

ゆえに
$$\begin{aligned}-z_1+z_2-z_3+z_4&=\frac{1}{2}(1+i)(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\\&\quad+\frac{1}{2}(1-i)(-\beta+\gamma-\delta+\alpha)\\&=i(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\end{aligned}$$

したがって　$-z_1+z_2-z_3+z_4=0 \iff -\alpha+\beta-\gamma+\delta=0$

すなわち　$z_2-z_1=z_3-z_4 \iff \beta-\alpha=\gamma-\delta$

よって，四角形 ABCD が平行四辺形であることは四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件である．

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるから，(2) の結果より，$\delta-\gamma=\alpha-\beta$

$$\begin{aligned}z_1-z_2&=\frac{1}{2}(1+i)(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}(1-i)(\beta-\gamma),\\z_3-z_2&=\frac{1}{2}(1+i)(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}(1-i)(\delta-\gamma)\\&=\frac{1}{2}(1+i)(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}(1-i)(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

したがって　$i(z_3-z_2)=\frac{1}{2}(i-1)(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}(i+1)(\alpha-\beta)=z_1-z_2$

上式から　$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=i$　ゆえに　PQ $=$ QR，$\angle$PQR $=90^\circ$

四角形 PQRS は平行四辺形でもあるから，四角形 PQRS は正方形．■

3　(1) $f(t) = e^t - 1 - t$ とおくと　$f'(t) = e^t - 1$

t	$\cdots$	0	$-$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，すべての実数 t に対し，次式が成立する．

$$e^t - 1 - t \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 1 + t \leqq e^t \quad \cdots (*)$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$
$$= \left[\tan x - \frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathbf{2 - \sqrt{2}}$$

(3) $(*)$ より　$1 - t \leqq e^{-t}$

$t > -1$ のとき，$1 + t > 0$ であるから，$(*)$ より　$e^{-t} \leqq \dfrac{1}{1+t}$

したがって，$t > -1$ のとき　$1 - t \leqq e^{-t} \leqq \dfrac{1}{1+t}$　$\cdots (**)$

$t = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$ とすると，$(**)$ を満たすから

$$1 - \sin x \leqq e^{-\sin x} \leqq \frac{1}{1+\sin x}$$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin x)\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

このとき　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin x)\,dx = \Big[x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) および上の結果から

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2 - \sqrt{2}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $X_1 = \alpha$，すなわち，$Z_1 = 1$ となる確率であるから　$\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$，すなわち，$Z_{n+1} = 0,\ 3$ となる確率であるから　$\dfrac{2}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) $X_n = 1$ となる確率を R_n とすると　$P_n + Q_n + R_n = 1$　$\cdots(*)$

よって　　$R_n = \boldsymbol{1 - P_n - Q_n}$

(4) 条件により，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}Q_n + \frac{1}{4}R_n \\ Q_{n+1} &= \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{4}R_n \\ R_{n+1} &= \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}Q_n + \frac{1}{2}R_n \end{aligned}$$

上の第 2 式と第 3 式の辺々を加えると

$$Q_{n+1} + R_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{3}{4}(Q_n + R_n)$$

$(*)$ より，$Q_n + R_n = 1 - P_n$ であるから，これを上式に代入すると

$$1 - P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{3}{4}(1 - P_n) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{P_{n+1} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}}$$

(5) (4) の結果から　　$P_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}\left(P_n - \dfrac{1}{3}\right)$

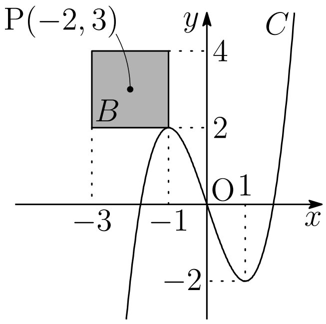
ゆえに　　$P_n - \dfrac{1}{3} = \left(P_1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

(1) の結果を代入して　　$\boldsymbol{P_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right)}$　■

5　(1) $y = x^3 - 3x$ より

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



曲線 C の概形は右の図のようになる．

P が $(-2,\ 3)$ のとき，領域 B は　　$|x+2| \leqq 1,\quad |y-3| \leqq 1$

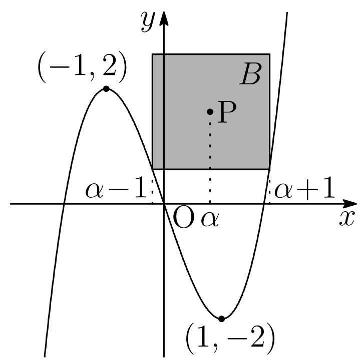
よって，右の図のようになる．

(2) $g(x) = x^3 - 3x$ とおくと，P は $C : y = g(x)\ (x < -1)$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから

$$y = g(x+1) + 1 \quad (x+1 < -1)$$

よって　　$\boldsymbol{y = x^3 + 3x^2 - 1 \quad (x < -2)}$

(3) 右の図のように B と C が 2 点で接するときの P の x 座標を α とすると



$$g(\alpha - 1) = g(\alpha + 1)$$

$$(\alpha-1)^3 - 3(\alpha-1) + 1 = (\alpha+1)^3 - 3(\alpha+1) + 1$$

整理すると　　$3\alpha^2 - 2 = 0$

このとき，$\alpha > 0$ であることに注意して

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$g(x) = x^3 - 3x$ とおくと，点 P の軌跡の方程式は

$$y = \begin{cases} g(x+1)+1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ g(x-1)+1 & (0 < x \leqq \alpha) \\ g(x+1)+1 & (\alpha < x) \end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 3 & \left(0 < x \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \\ x^3 + 3x^2 - 1 & \left(\frac{\sqrt{6}}{3} < x\right) \end{cases}}$$

(4) (3) の結果から

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 3 & (0 < x \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}) \\ x^3 + 3x^2 - 1 & (\frac{\sqrt{6}}{3} < x) \end{cases}$$

したがって
$$\lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{3 - 3}{x} = 0,$$
$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{(x^3 - 3x^2 + 3) - 3}{x} = 0$$

ゆえに
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

よって，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である．

補足 $f(x)$ は微分可能 (C^1級) である．
実際，$f(x) = 3\ (-2 \leqq x \leqq 0)$，$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3\ (0 \leqq x < \frac{\sqrt{6}}{3})$ より

$$f''(x) = 0 \quad (-2 < x < 0), \qquad f''(x) = 6x - 6 \quad \left(0 < x < \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$\displaystyle\lim_{x \to -0} f''(x) = 0$，$\displaystyle\lim_{x \to +0} f''(x) = -6$ より，C^2 級ではない． ■

9.5　2019 年 (150 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5]

1 $a>0$，$r>0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする．また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される．

$$b_1=a_1,\quad b_{n+1}=b_na_{n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) b_n を a，r および n を用いて表せ．

(2) 一般項が
$$c_n=\frac{\log_2 b_n}{n}$$
である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ．

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする．すなわち，
$$M_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k$$
とする．このとき，一般項が
$$d_n=2^{M_n}$$
である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ．

2 箱の中に 1 から N までの数が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．ただし，N を 2 以上の自然数とする．「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し，そのカードに書かれた数を読み取り，そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す．1 回目，2 回目，3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を，それぞれ a_1，a_2，a_3，a_4 とする．また，座標平面上に 4 点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{P}_3(a_1-a_3,\ a_2)$，$\mathrm{P}_4(a_1-a_3,\ a_2-a_4)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) P_4 が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ．

(2) P_4 が連立不等式 $x\geqq 0$，$y\leqq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ．

(3) P_4 が直線 $y=x$ 上にある確率を N を用いて表せ．

(4) $N=2^m$ とする．ただし，m を自然数とする．P_4 が原点 O に一致し，かつ，四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ．

3 関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt$$

を満たすとする．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．また，$f'(x) = 2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲にただ一つの解をもつことを示せ．

(4) (3) のただ一つの解を α とする．曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y = f(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \pi)$，$x$ 軸および直線 $x = \pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 の大小を判定せよ．

4 i を虚数単位とし，複素数 z に対して，

$$w = z^2 + 2z + 1 - 2i$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ．

(2) $w = 0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し，それぞれを $a + bi$ (a, b は実数) の形に書き表せ．

(3) (2) で求めた二つの複素数のうち実部の大きい方を α，実部の小さい方を β とし，対応する複素数平面上の点をそれぞれ A，B とする．また，線分 AB の中点を M とする．複素数 z に対応する複素数平面上の点が，線分 AM 上 (両端を含む) を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(4) 複素数 z に対応する複素数平面上の点が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

5 原点を O とする座標平面上において，点 A$(0,\ 3)$，B$(0, -1)$ および x 軸上の正の部分を動く点 P$(t,\ 0)$ があり，∠APB は鈍角でないとする．△ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする．次の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている．その交点のことを，三角形の垂心という．

(1) ∠APB が直角となる t の値を求めよ．

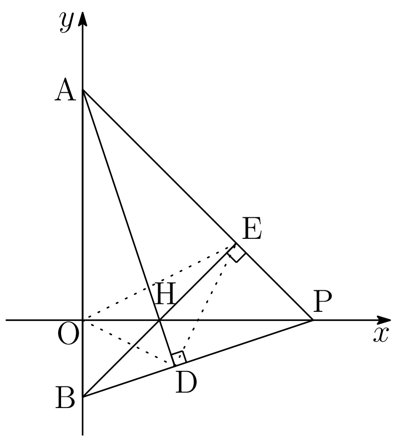
(2) 点 H の座標を t を用いて表せ．

以下では，t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする．

(3) 点 H が △ODE の内心であることを証明せよ．ただし，1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい．

(4) △ODE の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ．

(5) (4) で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ．ただし，最大値を与える t の値を求める必要はない．



解答例

$\boxed{1}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 r の等比数列であるから $(a > 0,\ r > 0)$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$b_1 = a_1 = a$，$b_{n+1} = b_n a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ より $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$

$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} ar^k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{a} = a^{n-1} r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$n = 1$ のときも，上式は成立することから　$\boldsymbol{b_n = a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$

(2) (1) の結果から　$\log_2 b_n = n \log_2 a + \dfrac{1}{2} n(n-1) \log_2 r$

したがって　$c_n = \dfrac{\log_2 b_n}{n} = \log_2 a + \dfrac{1}{2}(n-1) \log_2 r$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $\log_2 a$，公差 $\dfrac{1}{2} \log_2 r$ の等差数列

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \log_2 a + \frac{1}{2}(k-1) \log_2 r \right\} = n \log_2 a + \frac{1}{4} n(n-1) \log_2 r$$

ゆえに

$$\begin{aligned} M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k &= \frac{1}{n} \left\{ n \log_2 a + \frac{1}{4} n(n-1) \log_2 r \right\} \\ &= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1) \log_2 r \end{aligned}$$

したがって　$d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$

よって，数列 $\{d_n\}$ は，初項 a，公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列である． ■

2 (1) $a_1 - a_3 = 0$，すなわち，$a_1 = a_3$ を満たす $(a_1,\ a_3)$ の組は　N (組)

同様に，$a_2 - a_4 = 0$ を満たす $(a_2,\ a_4)$ の組も　N (組)

よって，求める確率は　$\dfrac{N\cdot N}{N^4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{N^2}}$

(2) $a_1 - a_3 > 0$，すなわち，$a_1 > a_3$ を満たす $(a_1,\ a_3)$ の組は　${}_N\mathrm{C}_2$ (組)

$a_1 - a_3 = 0$ を満たす $(a_1,\ a_3)$ の組は，(1) で示した　N (組)

ゆえに，$a_1 - a_3 \geqq 0$ を満たす組は　${}_N\mathrm{C}_2 + N = \dfrac{1}{2}N(N+1)$

同様に，$a_2 - a_4 \geqq 0$ を満たす組も　$\dfrac{1}{2}N(N+1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{\left\{\frac{1}{2}N(N+1)\right\}^2}{N^4} = \boldsymbol{\dfrac{(N+1)^2}{4N^2}}$

(3) P_4 が直線 $y = x$ 上にあるとき

$$a_1 - a_3 = a_2 - a_4 = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(N-1))$$

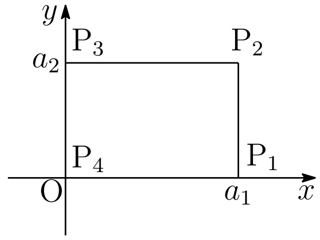
それぞれの k に対する $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ の組数は　$N - |k|$

その総数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=-(N+1)}^{N+1}(N-|k|)^2 &= N^2 + 2\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)^2 = N^2 + 2\sum_{k=1}^{N-1}k^2 \\ &= N^2 + 2\cdot\frac{1}{6}N(N-1)(2N-1) \\ &= \frac{1}{3}N(2N^2+1)\end{aligned}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{\frac{1}{3}N(2N^2+1)}{N^4} = \boldsymbol{\dfrac{2N^2+1}{3N^3}}$

(4) $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(a_1,\ a_2)$．P_4 が原点に一致するとき，$a_1 - a_3 = 0$ より，$\mathrm{P}_3(0,\ a_2)$．ゆえに，四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ は右の図のようになる．
この四角形の面積が $2^m\ (= N)$ となるとき



$$(a_1,\ a_2) = (2^j,\ 2^{m-j}) \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{m+1}{N^4} = \dfrac{m+1}{(2^m)^4} = \boldsymbol{\dfrac{m+1}{2^{4m}}}$　■

3　(1) 与えられた関数 $f(x)$ から

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt \quad \cdots(*)$$

これに $x=0$ を代入すると　　$\boldsymbol{f(0)=1}$

$(*)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)\cos x + x\sin x - e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt - e^x{\cdot}e^{-x}f(x) \\ &= (x-1)\cos x + x\sin x - e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt - f(x) \end{aligned}$$

上式および $(*)$ から $f(x)$ を消去すると　$f'(x) = 2(x-1)\cos x$

(2) (1) の結果から

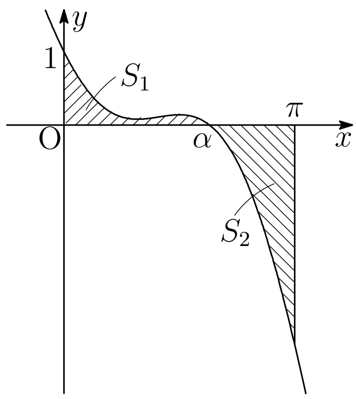
$$f(x) = \int 2(x-1)\cos x\,dx = 2(x-1)\sin x + 2\cos x + C$$

$f(0)=1$ より　$2+C=1$　ゆえに　$C=-1$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = 2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1}$

(3) (1)，(2) の結果から

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{2})$	$\searrow$	-3



$1 < \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\cos 1 > \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ より

$$f(1) = 2\cos 1 - 1 > 0$$

よって，方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲にただ一つの解をもつ．

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)\,dx &= \int_0^\pi \{2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1\}\,dx \\ &= \Big[-2(x-1)\cos x + 4\sin x - x\Big]_0^\pi = \pi - 4 < 0 \end{aligned}$$

$S_1 = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx$，$S_2 = -\displaystyle\int_\alpha^\pi f(x)\,dx$ であるから

$$S_1 - S_2 = \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi f(x)\,dx < 0$$

よって　　$\boldsymbol{S_1 < S_2}$　■

$\boxed{4}$ (1) $w=(z+1)^2-2i$ であるから，$z=x+yi$ とすると

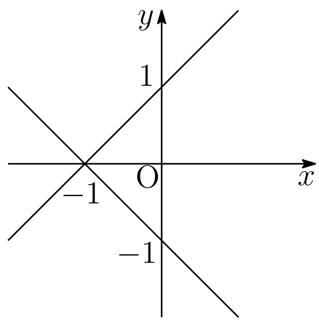
$$\begin{aligned} w &= (x+yi+1)^2-2i=(x+1)^2+2(x+1)yi-y^2-2i \\ &= (x+1)^2-y^2+2\{(x+1)y-1\}i \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

w の実部が0のとき，$(*)$ より

$$(x+1)^2-y^2=0$$

したがって　　$y=\pm(x+1)$

よって，z の表す図形は右の図のとおり．



(2) $w=0$ のとき，$(*)$ より $\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ (x+1)y-1=0 \end{cases}$

第1式から，次の場合分けを行う．

(i) $y=x+1$ のとき，これを第2式に代入して

$$(x+1)^2-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad x(x+2)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=0,-2$$

したがって　$x=0$ のとき $y=1$，$x=-2$ のとき $y=-1$

(ii) $y=-(x+1)$ のとき，これを第2式に代入して

$$-(x+1)^2-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)^2=-1$$

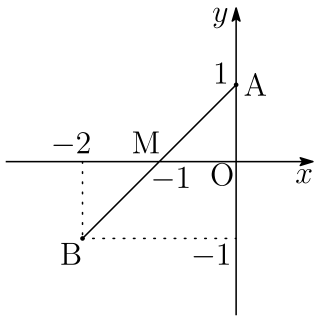
これを満たす実数 x は存在しない．

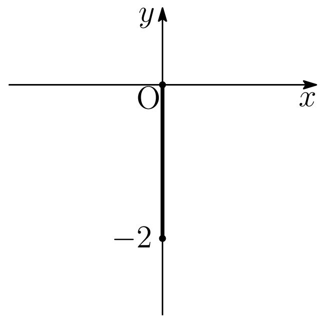
(i)，(ii) より，求める複素数は　　$\boldsymbol{i,\ -2-i}$

(3) 条件より，A(i)，B$(-2-i)$ であり，線分 AB の中点は M(-1)
線分 AM 上 (両端を含む) の点 $x+yi$ は $y=x+1$ $(-1 \leqq x \leqq 0)$ であるから，これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} w &= (x+1)^2-(x+1)^2+2\{(x+1)(x+1)-1\}i \\ &= \{2(x+1)^2-2\}i \end{aligned}$$

$-1 \leqq x \leqq 0$ より，$-2 \leqq 2(x+1)^2-2 \leqq 0$ であるから，w は，右下の図のように，虚軸上の 2 点 $-2i$ と 0 を結ぶ線分 (両端を含む) 上を動く．





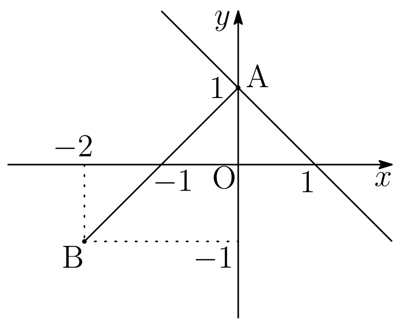
(4) 点 z が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線 $y=-x+1$ 上を動くとき，これを $(*)$ に代入して

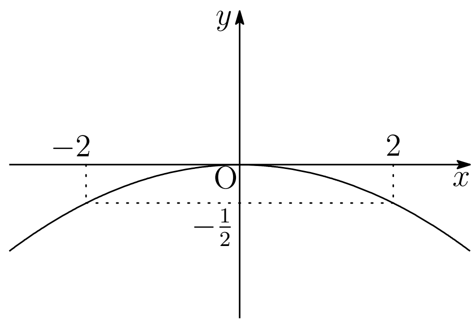
$$\begin{aligned} w &= (x+1)^2-(-x+1)^2+2\{(x+1)(-x+1)-1\}i \\ &= 4x-2x^2 i \end{aligned}$$

上式において，x を $\dfrac{x}{4}$ に置き換えると

$$w = 4\cdot\frac{x}{4}-2\left(\frac{x}{4}\right)^2 i = x-\frac{x^2}{8}i$$

よって，複素数平面上の点 $z=x+yi$ は，右下の図のように放物線 $y=-\dfrac{x^2}{8}$ 上を動く．





■

5 (1) 3 点 A(0, 3)，B(0, −1)，P(t, 0) $(t>0)$ により

$$\text{直線 AP の傾きは } -\frac{3}{t},\quad \text{直線 BP の傾きは } \frac{1}{t}$$

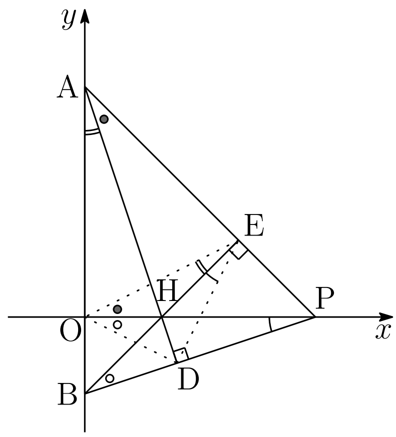
2 直線 AP，BP は直交するから　$-\dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{1}{t}=-1$　よって　$\boldsymbol{t=\sqrt{3}}$

(2) 直線 BE は点 B(0, −1) を通り，傾き $\dfrac{t}{3}$ であるから (直線 AP に垂直)

$$y=\frac{t}{3}x-1 \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{t}{3}\left(x-\frac{3}{t}\right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{3}{t}},\ \mathbf{0}\right)$$

(3) 四角形 AOHE，四角形 OBDH，四角形 HDPE は，それぞれ対角の和が 180° であるから，円に内接する．

四角形 AOHE において　$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{EAH}$
$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{OAH}$
四角形 OBDH において　$\angle\mathrm{HOD}=\angle\mathrm{HBD}$
四角形 HDPE において　$\angle\mathrm{HED}=\angle\mathrm{HPD}$
$\triangle\mathrm{AHE}\backsim\triangle\mathrm{BHD}$ より　$\angle\mathrm{EAH}=\angle\mathrm{HBD}$
$\triangle\mathrm{AHO}\backsim\triangle\mathrm{PHD}$ より　$\angle\mathrm{OAH}=\angle\mathrm{HPD}$



上の第 1，第 3，第 5 式から

$$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{HOD} \quad \cdots ①$$

同様に，上の第 2，第 4，第 6 式から

$$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{HED} \quad \cdots ②$$

①，② より，△ODE において，線分 OH，EH は，それぞれ ∠O，∠E の二等分線である．よって，点 H は △ODE の内心である．

(4) 点 E は，直線 AP : $y=-\dfrac{3}{t}x+3$ と (2) の直線 $y=\dfrac{t}{3}x-1$ 交点である．

これらの連立方程式を解くと　$\mathrm{E}\left(\dfrac{12t}{t^2+9},\ \dfrac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$

ゆえに，直線 OE の方程式は　$y=\dfrac{3t^2-9}{12t}x$　すなわち　$(t^2-3)x-4ty=0$

△ODE の内接円の半径 $f(t)$ は，点 $\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ から直線 OE までの距離であるから $(t>\sqrt{3})$

$$f(t)=\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}-4t\cdot 0\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+(-4t)^2}}=\boldsymbol{\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}}$$

(5) (4) の結果から

$$f(t)^2 = \frac{9(t^2-3)^2}{t^2\{(t^2-3)^2+16t^2\}}$$

$t > \sqrt{3}$ より，$t^2 - 3 = \dfrac{1}{u}$ とおくと $(u > 0)$

$$f(t)^2 = \frac{9\left(\frac{1}{u}\right)^2}{\left(\frac{1}{u}+3\right)\left\{\left(\frac{1}{u}\right)^2+16\left(\frac{1}{u}+3\right)\right\}} = \frac{9}{\left(\frac{1}{u}+3\right)\{1+16u(1+3u)\}}$$

$g(u) = \left(\frac{1}{u}+3\right)\{1+16u(1+3u)\}$ とおくと $(u > 0)$

$$\begin{aligned} g(u) &= 144u^2 + 96u + 19u + \frac{1}{u} \\ g'(u) &= 288u + 96 - \frac{1}{u^2} \\ g''(u) &= 288 + \frac{2}{u^3} > 0 \end{aligned}$$

$g'(u)$ は単調増加，$\displaystyle\lim_{u\to+0} g'(u) < 0$，$\displaystyle\lim_{u\to\infty} g'(u) > 0$
したがって，$g'(u) = 0$ を満たす u_0 が唯一存在する．

u	(0)	$\cdots$	u_0	$\cdots$
$g'(u)$		$-$	0	$+$
$g(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに，$g(u)$ は最小値 $g(u_0)$ をとる．

よって，$t = \sqrt{3 + \dfrac{1}{u_0}}$ のとき $f(t)$ は最大値をとる．■

9.6　2020 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 $a,\ b$ を正の定数とする．$0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の三つの条件 (i)，(ii)，(iii) を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える．

(i) $\mathrm{PA} = a$，$\mathrm{PB} = b$，$\angle\mathrm{APB} = \theta$ である．

(ii) 2 点 C，D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある．

(iii) $\mathrm{AB} = 3\mathrm{AD}$ である．

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(2) S を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする．M を $a,\ b$ を用いて表せ．また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) $a = 16,\ b = 25$ とする．また，β を (3) で定めた値とする．$\theta = \beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ．

2 i を虚数単位とする．$z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し，

$$w = \frac{z-i}{z+1}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $z \neq -1$ のとき $w \neq 1$ であることを示せ．また，$w \neq 1$ のとき，z を w を用いて表せ．

(2) t を -1 と異なる実数とする．複素数平面において，実部が t である複素数全体の描く直線を ℓ_t とおく．点 z が直線 ℓ_t 上を動くとき，点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く．この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ．

(3) P_t を (2) で定義した点とする．t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を，複素数平面上に図示せよ．

3 関数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ．また，極大値をとるときの x の値，および極小値をとるときの x の値を求めよ．

(2) $a > 0$ とし，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える．また，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ_t とおく．ℓ_t が点 A を通るような実数 t がちょうど二つあるとする．このとき，a の値を求めよ．さらに，その二つの t の値を $p,\ q$ (ただし，$p < q$) とおくとき，$p,\ q$ を求めよ．

(3) q を (2) で定めた値とする．曲線 $y = f(x)$，直線 $x = q$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

4 n を正の整数とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\, dx$$

の値を求めよ．

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi} |\sin nx|\, dx$$

の値を求めよ．

(3) 座標平面において連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}, \quad y \leqq |\sin nx|$$

の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(4) 座標平面において連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\,|\sin nx|$$

の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

5 1 個のさいころを 3 回投げる．1 回目に出た目を a_1，2 回目に出た目を a_2，3 回目に出た目を a_3 とする．次に，1 枚の硬貨を 3 回投げる．$k = 1, 2, 3$ に対し，k 回目に表が出た場合は $b_k = 1$，裏が出た場合は $b_k = a_k$ とおく．ベクトル

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3),\quad \vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である確率を求めよ．

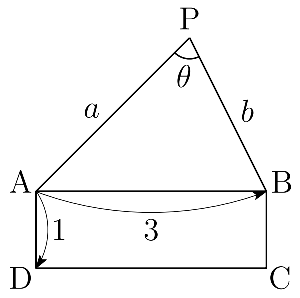
(2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ．

(3) $\vec{b} = (1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a} = (1,\ 1,\ 5)$ である条件付き確率を求めよ．

(4) $\vec{b} = (1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である条件付き確率を求めよ．

解答例

1 (1) $\triangle$PAB に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

AB > 0 であるから

$$\mathbf{AB} = \boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$$

(2) $\mathrm{AD} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$ であるから

$$\text{長方形 ABCD の面積} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$$

また，$\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{6}(3\sin\theta - 4\cos\theta)} \end{aligned}$$

(3) $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$，$\sin\varphi = -\dfrac{4}{5}$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < 0\right)$，(2) の結果から

$$S = \frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{5ab}{6}\sin(\theta + \varphi)$$

$0 < \theta < \pi$ より，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta + \varphi < \pi$ であるから，S が最大なるとき，$\theta = \beta$ であるから

$$\beta + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

よって　$\sin\beta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi = \boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \boldsymbol{-\frac{4}{5}}$$

(4) $a = 16$，$b = 25$，$\theta = \beta$ のとき　$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot16\cdot25\cdot\dfrac{3}{5} = 120$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{16^2 + 25^2 - 2\cdot16\cdot25\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1521} = 39$$

点 P から直線 AB までの距離を h とすると，$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h$ であるから

$$120 = \frac{1}{2}\cdot39h \quad \text{よって} \quad h = \boldsymbol{\frac{80}{13}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $w=\dfrac{z-i}{z+1}$ より　$w-1=-\dfrac{1+i}{z+1}\neq 0$

したがって，$z\neq -1$ のとき，$w-1\neq 0$，すなわち，$w\neq 1$

また　$w(z+1)=z-i$　ゆえに　$(w-1)z=-w-i$

$w\neq 1$ に注意して　$\boldsymbol{z=-\dfrac{w+i}{w-1}}$

(2) 実部が t の直線 ℓ_t 上の点 z において　$z+\overline{z}=2t$

これに (1) の結果を代入すると　$-\dfrac{w+i}{w-1}-\dfrac{\overline{w}-i}{\overline{w}-1}=2t$

$$(w+i)(\overline{w}-1)+(w-1)(\overline{w}-i)+2t(w-1)(\overline{w}-1)=0$$
$$2(t+1)|w|^2-(2t+1+i)w-(2t+1-i)\overline{w}+2t=0$$

$t\neq -1$ より，$t+1\neq 0$ であるから

$$|w|^2-\frac{2t+1+i}{2(t+1)}w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\overline{w}=-\frac{t}{t+1}$$
$$\left|w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\right|^2=\frac{(2t+1)^2+1}{4(t+1)^2}-\frac{t}{t+1}$$

したがって　$\left|w-\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}|t+1|}$

上式および (1) の結果から，点 w は点 $\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}|t+1|}$ の点1を除く円周上を動く．よって，求める円 S_t の中心 P_t は $\boldsymbol{\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}}$

補足 ℓ_t の点を $z=t+(t+1)i\tan\theta$ とおくと[3] $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned}
w&=1-\frac{1+i}{z+1}=1-\frac{1+i}{(t+1)(1+i\tan\theta)}\\
&=1-\frac{(1+i)\cos\theta}{(t+1)(\cos\theta+i\sin\theta)}=1-\frac{(1+i)\cos\theta(\cos\theta-i\sin\theta)}{t+1}\\
&=1-\frac{(1+i)(1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta)}{2(t+1)}\\
&=1-\frac{1+i}{2(t+1)}-\frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\{\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\}}{2(t+1)}\\
&=\frac{2t+1-i}{2(t+1)}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\theta\right)}{\sqrt{2}(t+1)}
\end{aligned}$$

$-\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-2\theta<\frac{5\pi}{4}$ であるから，点1を除く円周上を動く．

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2019.pdf $\boxed{5}$ の解説を参照．

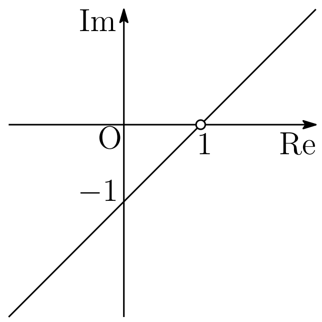
(3) (2) の結果から

$$\frac{2t+1-i}{2(t+1)} = x + yi \quad (x,\ y \text{ は実数})$$

ゆえに　$x = \dfrac{2t+1}{2(t+1)},\quad y = -\dfrac{1}{2(t+1)}$

したがって　$x - 1 = y = -\dfrac{1}{2(t+1)} \neq 0$

よって　$\boldsymbol{y = x - 1 \ \ (x \neq 1)}$



■

3 (1) $f(x) = xe^{-2x^2}$ より

$$f'(x) = e^{-2x^2} + x(-4x)e^{-2x^2} = (1+2x)(1-2x)e^{-2x^2}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって　$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{e}}}$**，**$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}}$

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ_t の方程式は

$$y - te^{-2t^2} = (1-4t^2)e^{-2t^2}(x-t)$$

ℓ_t が点 $(a,\ 0)$ を通ることから

$$-t = (1-4t^2)(a-t) \quad \text{ゆえに} \quad 4t^3 - 4at^2 + a = 0 \quad \cdots(*)$$

$g(t) = 4t^3 - 4at^2 + a$ とおくと　$g'(t) = 12t^2 - 8at = 4t(3t-2a)$
$a > 0$ より，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

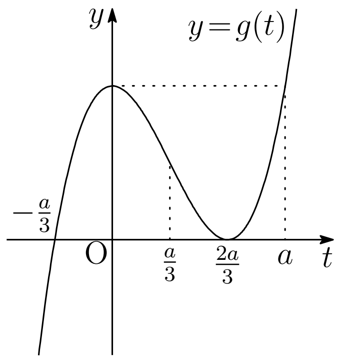
t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2a}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	a	↘	$-\frac{16}{27}a^3 + a$	↗

$g(t) = 0$ の解がちょうど 2 個であるから，$a \neq 0$ に注意して

$$-\frac{16}{27}a^3 + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a\left(a^2 - \frac{27}{16}\right) = 0$$

$a > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$

このとき，$p<0<q=\dfrac{2a}{3}$ であり，方程式 $(*)$ の解は $p,\ q$ (q は2重解) であるから，解と係数の関係により

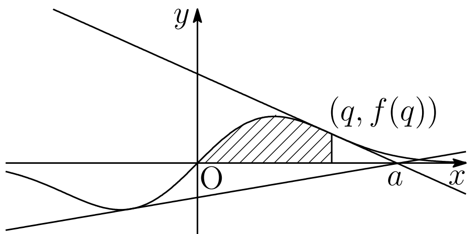


$$p+\frac{2a}{3}+\frac{2a}{3}=a \quad \text{ゆえに} \quad p=-\frac{a}{3}$$

よって $\quad p=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

$\quad q=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

補足 右上の $y=g(t)$ のグラフの t 座標 $-\dfrac{a}{3},\ 0,\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{2a}{3},\ a$ は等差数列をなす[4]．
$f'(x)=(1-4x^2)e^{-2x^2}$ より，$f''(x)=4x(4x^2-3)e^{-2x^2}$ であるから，曲線 $y=f(x)$ 上の変曲点は $(-q,\ f(-q))$，$(0,\ 0)$，$(q,\ f(q))$ である．点 $(q, f(q))$ における接線が点 A$(a,\ 0)$ を通る $(a>0)$．3次関数のグラフに引いた接線の本数についても，変曲点を通る場合が2本である[5]．



(3) (2) の結果から，求める図形の面積は

$$\int_0^q xe^{-2x^2}=\left[-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\right]_0^q=\frac{1}{4}(1-e^{-2q^2})=\boldsymbol{\frac{1}{4}(1-e^{-\frac{3}{2}})}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{n}}=\boldsymbol{\frac{2}{n}}$

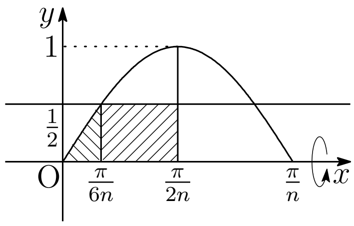
(2) $\left|\sin n\left(x+\dfrac{\pi}{n}\right)\right|=|\sin nx|$ より，$y=|\sin nx|$ は周期 $\dfrac{\pi}{n}$ の周期関数であるから，求める面積を S とすると

$$\frac{S}{n}=\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\sin nx|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{n}{\pi}}=\frac{2}{n}$$

よって $\quad S=\boldsymbol{2}$

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2015.pdf (p.4 の解説を参照)
[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf $\boxed{2}$ の解説を参照

(3) 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_n とすると



$$
\begin{aligned}
\frac{V_n}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{6n}} \sin^2 nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{6n}}^{\frac{\pi}{2n}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6n}} \frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{6n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{4}\,dx \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4n}\sin 2nx\right]_0^{\frac{\pi}{6n}} + \left[\frac{x}{4}\right]_{\frac{\pi}{6n}}^{\frac{\pi}{2n}} \\
&= \frac{\pi}{6n} - \frac{\sqrt{3}}{8n}
\end{aligned}
$$

よって，求める体積は　$2nV_n = 2n\left(\frac{\pi}{6n} - \frac{\sqrt{3}}{8n}\right)\pi = \boldsymbol{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\pi}$

別解 y 軸を元に $y = |\sin nx|$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ を x 軸方向に n 倍に拡大したものは，$y = |\sin x|$ $(0 \leqq x \leqq n\pi)$ であり，x 軸の周りの回転体の体積が n 倍される．求める体積を V_0 とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{V_0}{2\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,dx \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[\frac{x}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}
$$

(4) 求める回転体の体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\pi} (\sqrt{x}\,|\sin nx|)^2\,dx = \int_0^{\pi} x\sin^2 nx\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{x}{2}(1-\cos 2nx)\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4n}x\sin 2nx - \frac{1}{8n^2}\cos 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}
$$

よって　$\boldsymbol{V = \frac{\pi^3}{4}}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a_1+a_2+a_3=7$ の場合の数の総数は，7 個の○を一列に並べ，間の 6 カ所のうち 2 カ所に仕切りを作り，区切られた○の個数を順番に a_1, a_2, a_3 としたときの場合の総数に等しい．よって，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{72}}$$

(2) $b_1=1$ となるのは，次の事象である．

- 1 回目に投げた硬貨が表である．
- 1 回目に投げた硬貨が裏で，$a_1=1$ である．

これらの事象は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{7}{12}}$$

(3) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$，$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ となる事象をそれぞれ A，B とする．(2) の結果から

$$P(B)=\left(\frac{7}{12}\right)^3$$

$A\cap B$ は，さいころの出た目が順に 1, 1, 5 で，硬貨は，1，2 回目は表・裏どちらでもよく，3 回目が裏となる事象であるから

$$P(A\cap B)=\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{12}{7}\right)^3=\mathbf{\frac{4}{343}}$$

(4) $a_1+a_2+a_3=7$ となる事象を C とする．$B\cap C$ は，$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ の組合せが $\{1,\ 1,\ 5\}$，$\{1,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 3,\ 3\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$ の場合であるから

$$\begin{aligned}P(B\cap C)&=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left\{\frac{3!}{2!}\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}+3!\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3!}{2!}\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3!}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\\&=\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{33}{8}\end{aligned}$$

求める条件付き確率は　$P_B(C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(B)}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\dfrac{33}{8}\times\left(\dfrac{12}{7}\right)^3=\mathbf{\dfrac{33}{343}}$

■

9.7　2021 年 (150 分)

出題分野　[1] [2] [3] [4] 必答，[5] [6] から 1 題

1 a を実数とする．関数 $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ．

(1) a の満たす条件を求めよ．

(2) 次の不等式を解け．

$$|x+1| + |x-2| \leqq 4$$

(3) x が (2) の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ．

2 座標平面において，二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 A(1, 1)，点 C($\sqrt{2}-1$, $\sqrt{2}+1$) をとる．次の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする．このとき，B の座標を求めよ．

(2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする．このとき，D の座標を求めよ．

(3) B，D はそれぞれ (1)，(2) で定めたものとする．このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ．

3 1 個のさいころを 3 回投げる．1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c とする．また，

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ．

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，$f'(1) = 7$ である条件付き確率を求めよ．

(4) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，少なくとも一つが正の解である条件付き確率を求めよ．

4 $a,\ b,\ c$ を実数とし，2 次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ が実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつとする．さらに，二つの等式 $a+b=c^2$，$a\alpha+b\beta+c=0$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) α，β および $b-a$ を，それぞれ c を用いて表せ．

以下において，a，b，c を自然数とする．

(2) $\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき，自然数 a，b，c の組を求めよ．

(3) 自然数 s を用いて，$4c-3=s^2$ と表されるとき，s と a は等式

$$s^5-s^4+6s^3+2s^2+(9-32a)s=-15$$

を満たすことを示せ．

(4) (3) のとき，自然数 a，b，c の組をすべて求めよ．

5 座標平面において，曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における法線を ℓ とし，ℓ と y 軸との交点を Q とする．$t\neq 0$ のとき，線分 PQ の中点を R とし，$t=0$ のときは $\mathrm{R}(0,\ 1)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) t が実数全体を動くとき，点 R のえがく曲線 C の方程式を求めよ．

(3) (2) の曲線 C，y 軸，直線 $y=e^{-2}+e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ．

(4) (3) の図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ．

6 座標平面において，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{P}(3,\ 0)$ とする．線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする $\triangle\mathrm{OAB}$ を考える．ただし，円 C の中心は第 1 象限にあるとする．次の問いに答えよ．

(1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ．

(2) 円 C の半径を r とするとき，r のとる値の範囲を求めよ．

(3) r が (2) の範囲で変化するとき，点 B の軌跡の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ より

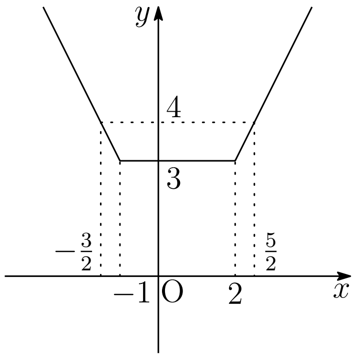
$$f'(x)=-2x^2+(2a+1)x-a=-(2x-1)(x-a)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{2},\ a$

$x=a$ で極大となるから，$f(x)$ の増減により　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<a}$

(2) $y=|x+1|+|x-2|$ とすると

$$y=\begin{cases}-2x+1 & (x\leqq -1)\\ 3 & (-1\leqq x\leqq 2)\\ 2x-1 & (2\leqq x)\end{cases}$$



グラフから，$|x+1|+|x-2|\leqq 4$ の解は

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2}\leqq x\leqq\frac{5}{2}}$$

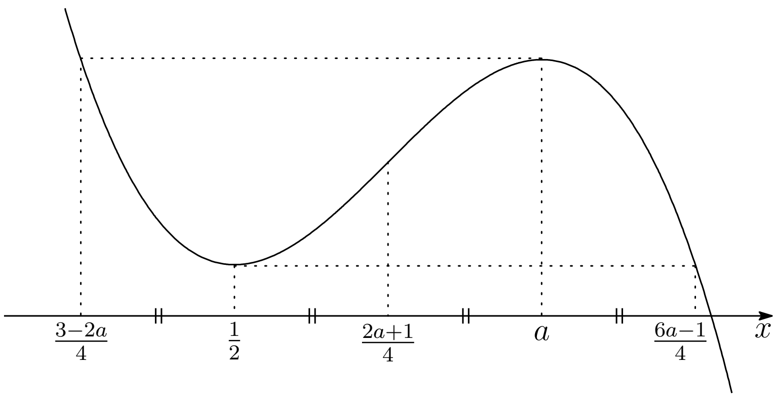
(3) $x=\dfrac{1}{2}$ は定義域 $-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}$ の中央であるから，$f(x)$ の最大値は

$$\max\left(f\left(-\frac{3}{2}\right),\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)=\max\left(\frac{15}{4}a+\frac{27}{8},\ \frac{15}{4}a-\frac{175}{24}\right)=\boldsymbol{\frac{15}{4}a+\frac{27}{8}}$$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{24}=f\left(\dfrac{6a-1}{4}\right)$ であるから

$\dfrac{5}{2}<\dfrac{6a-1}{4}$　すなわち　$\boldsymbol{a>\dfrac{11}{6}}$ のとき　最小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{24}}$

$\dfrac{6a-1}{4}\leqq\dfrac{5}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<a\leqq\dfrac{11}{6}}$ のとき　最小値 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{15}{4}a-\dfrac{175}{24}}$



補足 $x=\dfrac{1}{2}$ で極小，$x=a$ で極大となるから，その中央 $x=\dfrac{2a+1}{4}$ が変曲点の x 座標となる．ここで，等差数列

$$\frac{3-2a}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{2a+1}{4},\ a,\ \frac{6a-1}{4}$$

をとると，次式が成立する[6]．

$$f\left(\frac{3-2a}{4}\right)=f(a),\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{6a-1}{4}\right)$$

$x=\dfrac{1}{2}$ を極として，$f(x)$ を展開すると

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\\&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2a-1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\end{aligned}$$

$d>0$ とし，$x=\dfrac{1}{2}-d$，$x=\dfrac{1}{2}+d$ に対する $f(x)$ を求めると

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}-d\right)&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2a-1}{2}d^2+\frac{2}{3}d^3\\f\left(\frac{1}{2}+d\right)&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2a-1}{2}d^2-\frac{2}{3}d^3\end{aligned}$$

上の2式から　$f\left(\dfrac{1}{2}-d\right)>f\left(\dfrac{1}{2}+d\right)$

特に，$d=2$ とすると　$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)>f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ ■

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TSdai/TSdai_2017.pdf (p.6 を参照)

2　(1) A(1, 1) と異なる点 B の座標を $(b,\ b^2)$ とすると $(b \neq 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b-1 \\ b^2-1 \end{pmatrix} = (b-1)\begin{pmatrix} 1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

また，$\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} b-\sqrt{2}+1 \\ b^2-\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 1\cdot(b-\sqrt{2}+1)+(b+1)(b^2-\sqrt{2}-1) &= 0 \\ b^3+b^2-\sqrt{2}b-2\sqrt{2} &= 0 \\ (b-\sqrt{2})\{b^2+(\sqrt{2}+1)b+2\} &= 0 \\ (b-\sqrt{2})\left\{\left(b+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2+\frac{5-2\sqrt{2}}{4}\right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって　$b=\sqrt{2}$　よって　$\mathbf{B(\sqrt{2},\ 2)}$

(2) 点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ と異なる点 D の座標を $(d, -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2})$ とすると $(d \neq \sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} d-\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d-1 \end{pmatrix} = (d-\sqrt{2}+1)\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

また，A(1, 1)，$\mathrm{D}(d, -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} d-1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 1\cdot(d-1)+(-\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1) &= 0 \\ 2d^3-(2+4\sqrt{2})d^2+(2+4\sqrt{2})d &= 0 \\ d\{d^2-(1+2\sqrt{2})d+(1+2\sqrt{2})\} &= 0 \\ d\left\{\left(d-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{4\sqrt{2}-5}{4}\right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって　$d=0$　よって　$\mathbf{D(0,\ \sqrt{2})}$

(3) (1)，(2) の結果から

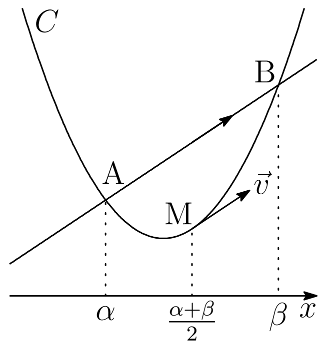
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\sqrt{2}-1,\ 1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-1,\ \sqrt{2}-1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したもの，すなわち，点 B を点 A を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものが D である．また $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-1,\ \sqrt{2}-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって，四角形 ABCD は正方形である．

補足 放物線 $C : y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線は C 上の $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ における接線と平行である．



$f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるから

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

本題の放物線について，$f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ とすると

$$f'(x) = -2\sqrt{2}x + 3$$

2 点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1, f(\sqrt{2}-1))$，$\mathrm{D}(d,\ f(d))$ を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\sqrt{2}-1+d}{2}\right) &= -2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1+d}{2} + 3 \\ &= -\sqrt{2}d + \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

■

3 (1) $b^2 > 4c$ より　$c < \dfrac{1}{4}b^2$　これを満たす $(b,\ c)$ の組は，次の 17 組

- $b = 1, 2$ のとき　c はなし
- $b = 3$ のとき　$c = 1, 2$
- $b = 4$ のとき　$c = 1, 2, 3$
- $b = 5, 6$ のとき　$c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

よって，求める確率は　$\dfrac{17}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{17}{36}}$

(2)　(i)　$a=1,3,5$ のとき，$f(x)=-x^2+bx+c$ であるから，係数について

$$D=b^2+4c>0$$

このとき，つねに異なる 2 つの実数解をもつ．

(ii)　$a=2,4,6$ のとき，$f(x)=x^2+bx+c$ であるから，$f(x)=0$ が異なる二つの実数解をもつ条件は

$$b^2-4c>0 \quad \text{すなわち} \quad b^2>4c$$

よって，求める確率は，(i),(ii) および (1) の結果から

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{17}{36}=\boldsymbol{\frac{53}{72}}$$

(3)　まず，2 つの事象を次のように定める．

A :「2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる二つの実数解をもつ」

B :「$f'(1)=7$ である」

(2) の結果から　$P(A)=\dfrac{53}{72}$

$f'(x)=2(-1)^ax+b$ より，$f'(1)=7$ のとき

$$2(-1)^a+b=7$$

これを満たす $(a,\ b)$ は，次の 3 組

$$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (4,\ 5),\ (6,\ 5)$$

(ii) より　$B\Longrightarrow A$　ゆえに　$P(B)=P(A\cap B)=\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{53}{72}}=\boldsymbol{\frac{6}{53}}$$

(4) $a=2,4,6$ のとき，$x>0$ に対し，$f(x)=x^2+bx+c>0$ であるから，このとき，方程式 $f(x)=0$ は正の解をもたない．

$a=1,3,5$ のとき，(i) より，$f(x)=0$ は，異なる二つの実数解をもち，それらを α, β とすると，解との係数の関係により

$$\alpha\beta=-c<0$$

このとき，少なくとも一つの正の解をもつ．

「$f(x)=0$ が少なくとも一つの正の解をもつ」事象を C とすると

$$P(A\cap C)=\frac{3}{6}\times 0+\frac{3}{6}\times 1=\frac{1}{2}$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{53}{72}}=\boldsymbol{\frac{36}{53}}$$

■

4 (1) α, β $(\alpha<\beta)$ は，2次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ の解であるから

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{-1-\sqrt{4c-3}}{2},\quad \beta=\frac{-1+\sqrt{4c-3}}{2}}$$

$a+b=c^2\cdots$①，$a\alpha+b\beta+c=0$ より，$\beta-\alpha\neq 0$ に注意して

$$a=\frac{c}{\beta-\alpha}(c\beta+1),\quad b=\frac{c}{\beta-\alpha}(-c\alpha-1) \qquad (*)$$

上の2式および $\alpha+\beta=-1$ から

$$b-a=\frac{c}{\beta-\alpha}\{-c(\alpha+\beta)-2\}=\boldsymbol{\frac{c}{\sqrt{4c-3}}(c-2)} \qquad (**)$$

(2) $\sqrt{4c-3}$ が自然数でない有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{4c-3} = \frac{p}{q}$$

とする ($p,\ q$ は互いに素である整数, $q \neq 1$)．この両辺を平方すると

$$4c-3 = \frac{p^2}{q^2}$$

c は自然数より，左辺は自然数であるから，$q=1$ となり矛盾．
したがって，$\sqrt{4c-3}$ は無理数である．(1) の結果から

$$(b-a)\sqrt{4c-3} = c(c-2)$$

$b-a \neq 0$ と仮定すると，$a,\ b$ は自然数であるから，上式の左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾．したがって，$b-a=0$ より

$$c(c-2) = 0$$

c は自然数であるから　$\boldsymbol{c=2}$　さらに ① より　$\boldsymbol{a=b=2}$

(3) (1) の結果から

$$\beta-\alpha = \sqrt{4c-3} = s \quad さらに \quad c = \frac{s^2+3}{4} \cdots ②, \quad \beta = \frac{-1+s}{2}$$

これらを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$a = \frac{1}{s}\cdot\frac{s^2+3}{4}\left(\frac{s^2+3}{4}\cdot\frac{-1+s}{2}+1\right)$$

したがって　　$32as = (s^2+3)\{(s^2+3)(s-1)+8\}$

これを整理すると　$s^5-s^4+6s^3+2s^2+(9-32a)s = -15$

(4) (3) の結果から

$$s\{s^4 - s^3 + 6s^2 + 2s + (9 - 32a)\} = -15$$

s は自然数であるから，$s = 1,\ 3,\ 5,\ 15$ の場合について調べればよい．

(∗∗) より　　$b - a = \dfrac{c(c-2)}{s}$　$\cdots$③

(i) $s = 1$ のとき，②より　$c = 1$　これらを ①，③ に代入すると

$$a + b = 1,\quad b - a = -1$$

このとき，$b = 0$ となり，条件に反し，不適

(ii) $s = 3$ のとき，② より　$c = 3$　これらを ①，③ に代入すると

$$a + b = 9,\quad b - a = 1$$

これを解いて　$a = 4,\ b = 5$

(iii) $s = 5$ のとき，② より　$c = 7$　これらを ①，③ に代入すると

$$a + b = 49,\quad b - a = 7$$

これを解いて　$a = 21,\ b = 28$

(iv) $s = 15$ のとき，② より　$c = 57$　これらを ①，③ に代入すると

$$a + b = 3249,\quad b - a = 209$$

これを解いて　$a = 1520,\ b = 1729$

(5) よって，求める $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (4,\ 5,\ 3),\ (21,\ 28,\ 7),\ (1520,\ 1729,\ 57)}$$

■

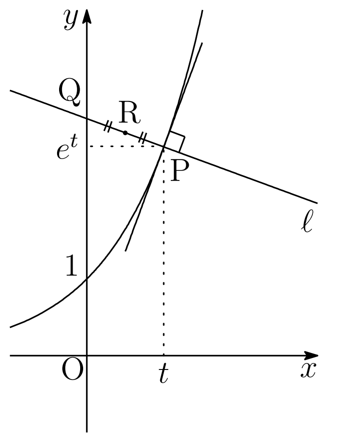
5 (1) $y=e^x$ を微分すると

$$y'=e^x$$

したがって，曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における法線の方程式は

$$y-e^t=-\frac{1}{e^t}(x-t)$$

よって　$\boldsymbol{y=-e^{-t}x+te^{-t}+e^t}$



(2) (1) の結果から，2 点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$，$\mathrm{Q}(0,\ te^{-t}+e^t)$ の中点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は

$$x=\frac{t}{2},\quad y=\frac{1}{2}(te^{-t}+2e^t)$$

上の 2 式から t を消去することにより，点 R のえがく軌跡 C の方程式は

$$\boldsymbol{C : y=xe^{-2x}+e^{2x}}$$

(3) $f(x)=xe^{-2x}+e^{2x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^{-2x}-2xe^{-2x}+2e^{2x}\\ &=e^{-2x}(2e^{4x}-2x+1)\end{aligned}$$

ここで，$g(x)=e^x-x-1$ とおくと　$g'(x)=e^x-1$

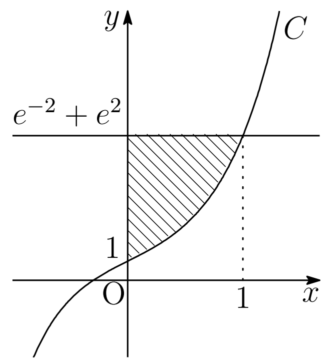
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$g(x)\geqq 0$ より　$g(4x)=e^{4x}-4x-1\geqq 0$

これを利用すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{2}e^{-2x}(4e^{4x}-4x+2)\\ &=\frac{1}{2}e^{-2x}\{(e^{4x}-4x-1)+3(e^{4x}+1)\}>0\end{aligned}$$

$f(x)$ は単調増加で，$f(1)=e^{-2}+e^2$ であるから，図形 F は右の図の斜線部分である．



図形 F の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= 1(e^{-2}+e^{2}) - \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= e^{-2}+e^{2} - \int_0^1 xe^{-2x}\,dx - \int_0^1 e^{2x}\,dx \\
&= e^{-2}+e^{2} + \frac{1}{2}\Big[\, e^{-2x}\left(x+\frac{1}{2}\right)\,\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[\, e^{2x}\,\Big]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{7}{4}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{2} + \frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

(4) 求める回転体の体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= (e^{-2}+e^{2})^2 - \int_0^1 (xe^{-2x}+e^{2x})^2\,dx \\
&= (e^{-2}+e^{2})^2 - \int_0^1 x^2e^{-4x}\,dx - \int_0^1 2x\,dx - \int_0^1 e^{4x}\,dx \\
&= (e^{-2}+e^{2})^2 + \frac{1}{4}\Big[\, e^{-4x}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)\,\Big]_0^1 - \Big[\, x^2\,\Big]_0^1 - \frac{1}{4}\Big[\, e^{4x}\,\Big]_0^1 \\
&= \frac{45}{32}e^{-4} + \frac{3}{4}e^{4} + \frac{39}{32}
\end{aligned}
$$

よって $\quad \boldsymbol{V = \pi\left(\frac{45}{32}e^{-4} + \frac{3}{4}e^{4} + \frac{39}{32}\right)}$

補足 次の積分公式が利用できる[7].

$$
\int e^{px}f(x)\,dx = \frac{e^{px}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C
$$

$$
\int e^{-px}f(x)\,dx = -\frac{e^{-px}}{p}\left\{f(x) + \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} + \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C
$$

上の第 2 式は第 1 式の p を $-p$ に置き換えたものである．本題では

$$
\begin{aligned}
\int x^2e^{-4x}\,dx &= -\frac{1}{4}e^{-4x}\left\{x^2 + \frac{(x^2)'}{4} + \frac{(x^2)''}{4^2}\right\} + C \\
&= -\frac{1}{4}e^{-4x}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right) + C
\end{aligned}
$$

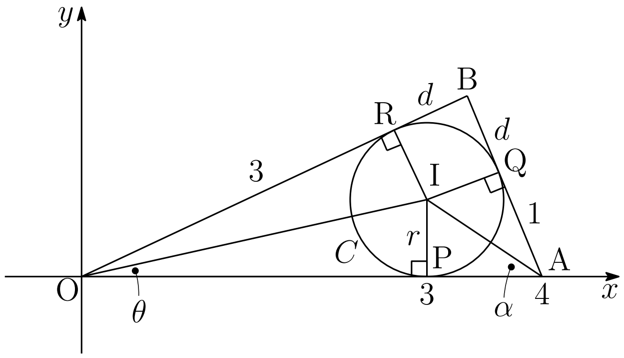
■

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7)

6 (1) 2 辺 AB，BO と C の接点をそれぞれ Q，R とし，$\mathrm{BQ}=\mathrm{BR}=d$ とすると

$$\mathrm{OB}=3+d,\quad \mathrm{AB}=1+d$$

よって　$\mathrm{OB}-\mathrm{AB}=(3+d)-(1+d)=2$



(2) C の中心を I とし，$\angle\mathrm{IOA}=\theta$，$\angle\mathrm{OAI}=\alpha$ とすると

$$r=3\tan\theta=\tan\alpha$$

$B=\pi-(2\theta+2\alpha)>0$　ゆえに　$\theta+\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$\tan(\theta+\alpha)>0$ であるから

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}=\frac{\frac{r}{3}+r}{1-\frac{r}{3}\cdot r}=\frac{4r}{3-r^2}>0$$

したがって　$3-r^2>0$　よって　$\boldsymbol{0<r<\sqrt{3}}$

(3) $\mathrm{B}(x,\ y)$ とおくと $(y>0)$，(1) の結果から

$$\mathrm{OB}-2=\mathrm{AB}$$

これに $\mathrm{OB}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$ を代入すると

$$\sqrt{x^2+y^2}-2=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

両辺を平方すると

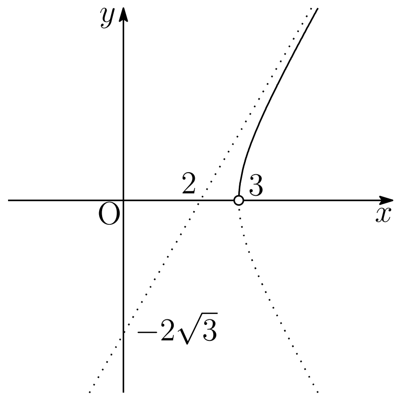
$$x^2+y^2-4\sqrt{x^2+y^2}+4=(x-4)^2+y^2$$

整理すると　$2x-3=\sqrt{x^2+y^2}$　$\cdots$①

さらに両辺を平方すると

$$4x^2-12x+9=x^2+y^2\quad \text{ゆえに}\quad (x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1 \qquad (*)$$

$y > 0$ および ① から，双曲線 $(*)$ の $x > 3$, $y > 0$ の部分で，その概形は下の図の実線部分である．また漸近線は $y = \sqrt{3}(x-2)$ である．



■

9.8　2022 年 (150 分)

出題分野　1　2　3　4　5

1 座標平面上の曲線 $y = x^3 + x^2$ を C とする．また，a を実数とし，L_a を点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C と L_a がちょうど二つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ．

(2) a が (1) の条件を満たすそれぞれの場合について，C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) C と L_a がちょうど三つの共有点をもち，さらに C と L_a で囲まれた二つの部分の面積の差の絶対値が $\dfrac{3}{2}$ となるとき，a の値を求めよ．

2 a を正の実数，t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が $\mathrm{I}(0,\ t)$ であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{IBC}$ を θ とおく．t と a を，それぞれ θ を用いて表せ．

(2) a を t を用いて表せ．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ．

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ．

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ．

3 $a,\ b$ を整数とする．また，整数の数列 $\{c_n\}$ を $c_1=a$，$c_2=b$ および漸化式

$$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a=39$，$b=13$ とする．このとき，二つの整数 c_5 と c_6 の最大公約数を求めよ．

(2) a と b はともに奇数であるとする．このとき，自然数 n に対して次の命題 P_n が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示せ．

P_n : c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である．

(3) d を自然数とし，a と b はともに d の倍数であるとする．このとき，自然数 n に対して c_n が d の倍数になることを示せ．ただし，数学的帰納法を用いて証明すること．

(4) c_{2022} が奇数であるならば，$a+b$ も奇数であることを示せ．

4 n を自然数とする．袋の中に赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個，合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている．また，空箱 A，B，C，D，E，F が用意されている．この準備の下で次の試行 1，試行 2 を順に行う．

試行 1 袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる．箱 A に入れた玉が白玉なら $i=0$，赤玉なら $i=1$ とおく．

試行 2 次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱 B に入れる．この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は $(3-i)$ 個，白玉は $(4+i)$ 個である．この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる．

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A，B，C の玉をすべて元通り袋に戻す．そして次の試行 3 を行う．

試行 3 袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる．次に，袋から玉を n 個取り出して，箱 E に入れる．最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ．また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ．

(2) 試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率 q_{A} を n を用いて表せ．また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_{C} を n を用いて表せ．

(3) 試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする．事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X \cap Y)$ を n を用いて表せ．また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y \cap Z)$ を n を用いて表せ．

(4) (3) の事象 Y が起こったとき，(3) の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3) の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ．

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式を，実数 $m,\ k$ を用いて $y=mx+k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ．

(3) $f(x)$ および m と k を (2) のように定める．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq mx+k$ が成り立つことを示せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により定義する．自然数 n に対して

$$2-a_{n+1} \leqq (\log 2)\cdot(2-a_n)$$

が成り立つことを示し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．必要ならば，自然対数の底が $e=2.718\cdots$ であることを用いてよい．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $C: y = x^3 + x^2$ と点 $(-1,\ 0)$ を通り傾き a 直線 $L_a: y = a(x+1)$ の方程式から y を消去すると

$$x^3 + x^2 = a(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x^2 - a) = 0 \qquad (*)$$

この方程式が重解もつ次の場合である．

(i) $x^2 - a = 0$ が重解をもつとき　$a = 0$

(ii) $x^2 - a = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき　$a = 1$

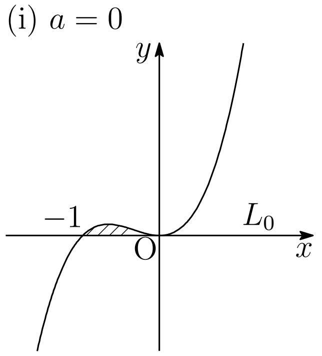
(i)，(ii) から，求める a の値は　$\boldsymbol{a = 0,\ 1}$

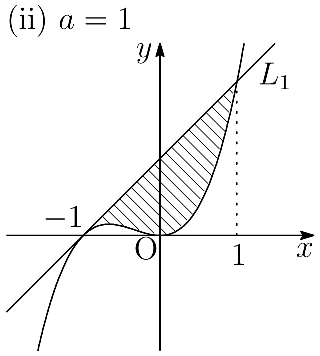
(2) (i) $a = 0$ のとき，$(*)$ の解は　$x = -1,\ 0$

$$\int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

(ii) $a = 1$ のとき，$(*)$ の解は　$x = -1,\ 1$

$$\int_{-1}^{1} \{(x+1) - (x^3 + x^2)\}\,dx = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$





補足　積分公式[8] $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \{(x+1) - (x^3 + x^2)\}\,dx &= \int_{-1}^{1} (x+1)^2(1-x)\,dx \\ &= \frac{1}{12}\{1 - (-1)\}^4 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(3) C と L_a がちょうど三つの共有点をもつとき，方程式 $(*)$ は異なる 3 つの実数解をもつから，a の値は次の範囲にある．

(i) $0 < a < 1$ のとき，下の図に示した S_1，S_2 の面積について，(2) の結果から

$$0 < S_1 < \frac{1}{12},\quad 0 < S_2 < \frac{4}{3}\quad \text{ゆえに}\quad |S_2 - S_1| < \frac{4}{3}$$

このとき，$|S_2 - S_1| \neq \dfrac{3}{2}$ であり，不適．

(ii) $a > 1$ のとき，$f(x) = a(x+1) - (x^3 + x^2)$ とおくと，下の図の二つの部分の面積 T_1，T_2 は

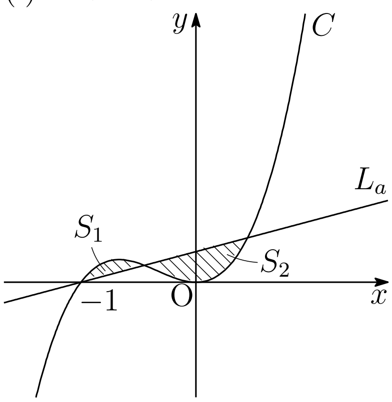
$$T_1 = -\int_{-\sqrt{a}}^{-1} f(x)\,dx,\quad T_2 = \int_{-1}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx$$

したがって

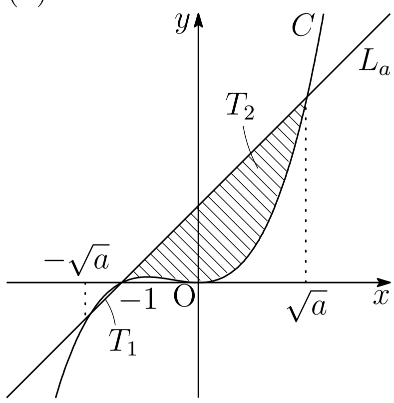
$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= \int_{-1}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx + \int_{-\sqrt{a}}^{-1} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx \\ &= 2\left[\,ax - \frac{x^3}{3}\,\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

条件より　$\dfrac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$　ゆえに　$a^{\frac{3}{2}} = \dfrac{9}{8}$　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{3^{\frac{4}{3}}}{4}}$

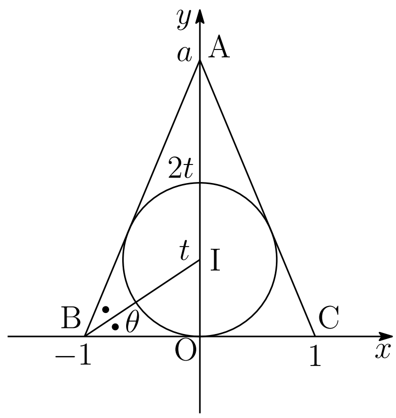
(i) $0 < a < 1$



(ii) $a > 1$



2　(1) 右の図から



$$\boldsymbol{t = \tan\theta,\quad a = \tan 2\theta}$$

(2) (1) の結果より

$$a = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \boldsymbol{\frac{2t}{1-t^2}}$$

(3) $\triangle$ABC の重心の座標は　$\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$

これが円周上の点 $(0,\ 2t)$ と一致するから

$$\frac{a}{3} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad a = 6t$$

これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{2t}{1-t^2} = 6t \quad \text{ゆえに} \quad t(3t^2-2) = 0$$

$0 < t < 1$ に注意して　$\boldsymbol{t = \dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(4) 点 B$(-1,\ 0)$ を通り，直線 AC に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{a}(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{x}{a} + \frac{1}{a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ が，$(0,\ 2t)$ と一致するから

$$\frac{1}{a} = 2t$$

これに (2) の結果を代入すると $(0 < t < 1)$

$$\frac{1-t^2}{2t} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad 5t^2 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

(5) AC の垂直二等分線，すなわち，AC の中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{a}$ の直線の方程式は

$$y-\frac{a}{2}=\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{x}{a}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}\right)$ が，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ または $(0,\ 2t)$ に一致するときである．

(i) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$ のとき $(a>0)$

$$a^2=1\quad \text{ゆえに}\quad a=1$$

これに (2) の結果を代入すると $\quad \dfrac{2t}{1-t^2}=1$

$$t^2+2t-1=0\quad t\text{ の値の範囲に注意して}\quad t=-1+\sqrt{2}$$

(ii) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$ のとき，これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{t}{1-t^2}-\frac{1-t^2}{4t}=2t\quad \text{整理すると}\quad 7t^4-2t^2-1=0$$

したがって $\quad t^2=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}\quad t$ の範囲に注意して $\quad t=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$

(i)，(ii) より $\quad \boldsymbol{t=-1+\sqrt{2},\ \sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}}$ ■

3　(1) $c_1=39,\ c_2=13,\ c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ より

$$c_3=52,\quad c_4=65,\quad c_5=117,\quad c_6=182$$

$117=13{\cdot}3^2$，$182=13{\cdot}2{\cdot}7$ より，c_5 と c_6 の最大公約数は　**13**

補足　n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記すると

$$(x,y)\,|\,x,\quad (x,y)\,|\,y$$

が成り立つ．

$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ より，$(c_{n+1},c_n)\,|\,c_{n+2}$，また，$(c_{n+1},c_n)\,|\,c_{n+1}$ であるから，(c_{n+1},c_n) は，c_{n+2} と c_{n+1} の公約数，したがって

$$(c_{n+1},c_n)\,|\,(c_{n+2},c_{n+1}) \tag{A}$$

$c_n=c_{n+2}-c_{n+1}$ より，$(c_{n+2},c_{n+1})\,|\,c_n$，また，$(c_{n+2},c_{n+1})\,|\,c_{n+1}$ であるから，(c_{n+2},c_{n+1}) は，c_{n+1} と c_n の公約数，したがって

$$(c_{n+2},c_{n+1})\,|\,(c_{n+1},c_n) \tag{B}$$

(A)，(B) より　$(c_{n+2},c_{n+1})=(c_{n+1},c_n)$　一般に　$(c_{n+1},c_n)=(c_2,\ c_1)$

(2)　　$P_n : c_{3n-2}$ と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である．

[1] $n=1$ のとき，c_1 と c_2 がともに奇数であるから，c_3 は偶数．
よって，P_1 が成立する．

[2] P_k が成立すると仮定すると

c_{3k-1} が奇数，c_{3k} が偶数より　c_{3k+1} は奇数，
c_{3k} が偶数，c_{3k+1} が奇数より　c_{3k+2} は奇数，
c_{3k+1} が奇数，c_{3k+2} が奇数より　c_{3k+3} は偶数

よって，P_{k+1} も成立する．

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，P_n が成立する．　(証終)

(3) $Q_n : c_{2n-1}$ と c_{2n} はともに d の倍数である.

［1］c_1 と c_2 はともに d の倍数であるから，Q_1 は成立する.

［2］Q_k が成立すると仮定すると

$$c_{2k-1} = dx_{2k-1}, \quad c_{2k} = dx_{2k}$$

となる整数 x_{2k-1}，x_{2k} が存在するから

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= c_{2k} + c_{2k-1} = d(x_{2k} + x_{2k-1}), \\ c_{2k+2} &= c_{2k+1} + c_{2k} = d(x_{2k} + x_{2k-1}) + dx_{2k} \\ &= d(2x_{2k} + x_{2k-1}) \end{aligned}$$

よって，Q_{k+1} も成立する.

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，Q_n が成立する.

よって，a と b がともに d の倍数であるとき，c_n は d の倍数である.

(4) $a + b$ が偶数であるのは，次の場合である.

(i) a と b がともに奇数であるとき，(2) の結論から，$c_{2022} = c_{3\cdot 674}$ は偶数であるから不適.

(ii) a と b がともに偶数 (2 の倍数) であるとき，(3) の結論から，c_{2022} は偶数 (2 の倍数) であるから不適.

(i)，(ii) より，$a + b$ は偶数ではない，すなわち，$a + b$ は奇数である. ■

4 (1) 条件付き確率 p_0 は，赤玉 3 個，白玉 4 個の計 7 個から 2 個取り出し，2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_0 = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{3}{21} = \boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

条件付き確率 p_1 は，赤玉 2 個，白玉 5 個の計 7 個から 2 個取り出し，2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{21}}$$

(2) $q_\mathrm{A} = \boldsymbol{\frac{3}{n+8}}$

箱 A に白玉が入る確率を $\overline{q_\mathrm{A}}$ とすると　$\overline{q_\mathrm{A}} = 1 - q_\mathrm{A} = \dfrac{n+5}{n+8}$

$$\begin{aligned} q_\mathrm{C} &= \overline{q_\mathrm{A}}p_0 + q_\mathrm{A}p_1 \\ &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{3}{n+8}\cdot\frac{1}{21} = \boldsymbol{\frac{n+6}{7(n+8)}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(X\cap Y) &= \frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n} = \frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7} = \frac{3}{n+8}\cdot\frac{(n+5)!}{n!5!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!} \\ &= \frac{3}{n+8}\cdot\frac{7\cdot6}{(n+7)(n+6)} = \boldsymbol{\frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X\cap Y\cap Z) &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)}, \\ P(\overline{X}\cap Y\cap Z) &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_4}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{(n+4)!}{n!4!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!}\cdot\frac{1}{7} = \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P(Y\cap Z) &= P(X\cap Y\cap Z) + P(\overline{X}\cap Y\cap Z) \\ &= \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \\ &= \boldsymbol{\frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)}} \end{aligned}$$

(4)

$$P(\overline{X}\cap Y) = \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n} = \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_4}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7}$$
$$= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{(n+4)!}{n!4!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!} = \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)}$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}P(Y) &= P(X\cap Y) + P(\overline{X}\cap Y)\\ &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)}\\ &= \frac{336}{(n+8)(n+7)(n+6)}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}P_Y(X) &= \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}\\ &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \boldsymbol{\frac{3}{8}},\\ P_Y(Z) &= \frac{P(Y\cap Z)}{P(Y)}\\ &= \frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \boldsymbol{\frac{3}{28}}\end{aligned}$$

■

5 (1) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{2}\right)} > \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$

よって $\boldsymbol{\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)} < \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}}$

(2) $f(x) = \sqrt{2}^{\,x}$ より $f'(x) = \sqrt{2}^{\,x}\log\sqrt{2}$

$f(2) = 2,\ f'(2) = 2\log\sqrt{2} = \log 2$ であるから，求める接線の方程式は

$$y - 2 = (x-2)\log 2 \quad すなわち \quad y = x\log 2 + 2 - 2\log 2$$

よって $\boldsymbol{m = \log 2,\ \ k = 2 - 2\log 2}$

(3) $f'(x) = \sqrt{2}^{\,x}\log\sqrt{2} > 0,\quad f''(x) = \sqrt{2}^{\,x}(\log\sqrt{2})^2 > 0$
$mx + k = f'(2)(x-2) + f(2)$ より

$$g(x) = f(x) - f'(2)(x-2) - f(2)$$

とおくと　$g(2) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - f'(2)$$

$f'(x)$ は単調増加であるから，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，すべての実数 x に対して

$$g(x) \geqq 0 \quad \text{よって} \quad f(x) \geqq mx + k$$

(4) $\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x),\ f'(x)$ は単調増加である．平均値の定理により

$$\frac{f(2)-f(x)}{2-x} = f'(c) \quad (x < c < 2)$$

を満たす c が存在する．$f(2) = 2$ および $f'(c) \leqq f'(2) = \log 2$ より

$$\frac{2-f(x)}{2-x} \leqq \log 2 \qquad \text{(A)}$$

$f(2) = 2$ で，$\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x) \leqq f(2) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq 2 - f(x) \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) より，$\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ のとき，次式が成立する．

$$0 \leqq 2 - f(x) \leqq (2-x)\log 2 \qquad (*)$$

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = \sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ で定義されたとき，すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$a_n < a_{n+1} < 2 \qquad (**)$$

[1] $n = 1$ のとき，$a_1 = \sqrt{2}$，$a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ について

$$\sqrt{2} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{\,2} \quad \text{ゆえに} \quad a_1 < a_2 < 2$$

よって，$n = 1$ のとき，$(**)$ が成立する．

[2] $n = k$ のとき，$(**)$ が成立する，すなわち，$a_k < a_{k+1} < 2$ であると仮定すると，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(a_k) < f(a_{k+1}) < f(2) \quad \text{ゆえに} \quad a_{k+1} < a_{k+2} < 2$$

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．(証終)

$(**)$ より，すべての自然数 n について

$$\sqrt{2} \leqq a_n < 2$$

が成立するから，これを $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq 2 - a_{n+1} \leqq (2 - a_n)\log 2$$

したがって　　$0 \leqq 2 - a_n \leqq (2 - \sqrt{2})(\log 2)^{n-1}$

$0 < \log 2 < 1$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2 - \sqrt{2})(\log 2)^{n-1} = 0$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(2 - a_n) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$$

■

9.9　2023 年 (150 分)

出題分野　1　2　3　4　5

1　箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．ただし，N は 4 以上の自然数である.「この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える．この試行を 4 回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X，Y，Z，W とする．次の問いに答えよ．

(1) $X = Y = Z = W$ となる確率を求めよ．

(2) X，Y，Z，W が四つの異なる番号からなる確率を求めよ．

(3) X，Y，Z，W のうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率を求めよ．

(4) X，Y，Z，W が三つの異なる番号からなる確率を求めよ．

2　原点を O とする座標平面上の 2 点 A(3, 0)，B(1, 1) を考える．α，β を実数とし，点 P(α, β) は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないとする．直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 Q および点 R の座標を，α，β を用いて表せ．

(2) 直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．さらに，このときの交点 S の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．

(3) 直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．さらに，このときの交点 T の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．

(4) α，β は (2) と (3) の両方の条件を満たすとし，S，T は (2)，(3) で定めた点であるとする．このとき，直線 OA と直線 BS が垂直となり，直線 OB と直線 AT が垂直となる α，β の値を求めよ．

3 空間内の 6 点 A，B，C，D，E，F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり，四角形 ABCD は正方形であるとする．$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{d}$，$\vec{b}\cdot\vec{e}$，$\vec{d}\cdot\vec{e}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ を満たす実数 p，q，r の値を求めよ．

(3) 辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とする．また，$0<t<1$ を満たす実数 t に対し，辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする．t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$\triangle$AGH の面積が最小となる t の値とそのときの $\triangle$AGH の面積を求めよ．

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=\left(\frac{n^6(n+1)}{{a_n}^3}\right)^2\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．また

$$b_n=\log_2\frac{a_n}{n^2}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

とおく．次の問いに答えよ．必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$ であることを用いてよい．

(1) b_1，b_2 を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$ であることを示せ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

(2) s を定数とするとき，次の x についての方程式 $(*)$ の異なる実数解の個数を調べよ．

$$(*)\qquad f(x)=s$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx$ の値を求めよ．

(4) (2) の $(*)$ が実数解をもつ s に対して，(2) の $(*)$ の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする．ただし，(2) の $(*)$ の実数解が一つだけであるときには $g(s)=0$ とする．関数 $f(x)$ の最大値を α とおくとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha} g(s)\,ds$ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 1種類の数だけが取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_1}{N^4} = \boldsymbol{\frac{1}{N^3}}$$

(2) 4種類の数が取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_4 \cdot 4!}{N^4} = \boldsymbol{\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}}$$

(3) $\{A,\ A,\ A,\ B\}$ のとなる $A,\ B$ の選び方は ${}_N\mathrm{P}_2$ 通りあり，これらが取り出される順序は4通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_N\mathrm{P}_2 \cdot 4}{N^4} = \boldsymbol{\frac{4(N-1)}{N^3}}$$

(4) 3種類の数が取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_3\{3^4 - {}_3\mathrm{C}_2(2^4-2) - {}_3\mathrm{C}_1\}}{N^4} = \boldsymbol{\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}}$$

補足　2種類の数が取り出される確率は[9]

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_2(2^4-2)}{N^4} = \boldsymbol{\frac{7(N-1)}{N^3}}$$

■

[9] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2013.pdf $\boxed{1}$ (2)

2 (1) 2 点 Q，R は点 P$(\alpha,\ \beta)$ とそれぞれ，x 軸，直線 $y = x$ に関して対称より

$$\boldsymbol{\mathrm{Q}(\alpha, -\beta),\quad \mathrm{R}(\beta,\ \alpha)}$$

(2) P$(\alpha,\ \beta)$ は直線 $y = x$ 上にないから　$\beta - \alpha \neq 0$
したがって，2 点 Q$(\alpha, -\beta)$，R$(\beta,\ \alpha)$ を通る直線の方程式は

$$y + \beta = \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha}(x - \alpha)\quad \text{ゆえに}\quad y = \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha}x - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta - \alpha}\quad \cdots ①$$

点 P$(\alpha,\ \beta)$ は x 軸上の点ではないから　$\beta \neq 0$　$\cdots ②$

$-(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0$ となるから，$\alpha + \beta = 0$ のとき，① は　$y = -\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta - \alpha}$

このとき，$-\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta - \alpha} \neq 0$ となり，直線 QR は x 軸と共有点をもたない．
直線 QR が x 軸と共有点をもつための条件は

$$\boldsymbol{\alpha + \beta \neq 0}$$

このとき，① と直線 $y = 0$ を連立して　$\mathbf{S}\left(\boldsymbol{\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta},\ 0}\right)$

(3) ② から，直線 OB と直線 QR が一致することはないから，直線 OB と直線 QR が交点を持つための条件は

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} \neq 1\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\alpha \neq 0}$$

このとき，① と直線 $y = x$ を連立して　$\mathbf{T}\left(\boldsymbol{\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha},\ \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha}}\right)$

(4) (2)，(3) で示した条件は

$$\alpha \neq 0,\quad \beta \neq 0,\quad \alpha \neq \beta,\quad \alpha \neq -\beta \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{BS}} = \left(\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} - 1, -1\right)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BS}}$ より

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} - 1 = 0\quad \text{ゆえに}\quad \alpha^2 + \beta^2 = \alpha + \beta\quad \cdots ③$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AT}} = \left(\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} - 3,\ \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha}\right)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AT}}$ より

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} - 3 = 0\quad \text{ゆえに}\quad \alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha\quad \cdots ④$$

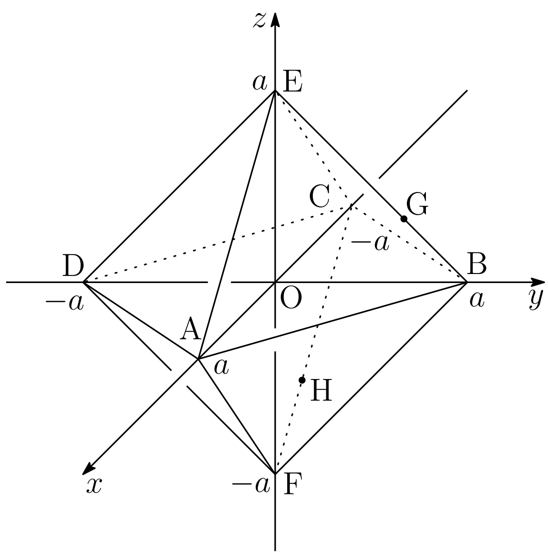
$(*)$ に注意して，③，④ を解くと　　$\boldsymbol{\alpha = \dfrac{3}{5},\ \beta = \dfrac{6}{5}}$　■

3 (1) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおく．

Oを原点とする座標空間に6点

A$(a,\ 0,\ 0)$,　B$(0,\ a,\ 0)$,
C$(-a,\ 0,\ 0)$,　D$(0, -a,\ 0)$,
E$(0,\ 0,\ a)$,　F$(0,\ 0, -a)$

をとると



$$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a,\ a,\ 0),$$
$$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-a, -a,\ 0),$$
$$\vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} = (-a,\ 0,\ a)$$

したがって　$\vec{b}\cdot\vec{d} = \mathbf{0}$,　$\vec{b}\cdot\vec{e} = a^2 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$,　$\vec{d}\cdot\vec{e} = a^2 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = (-a,\ 0, -a)$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = p\vec{b} + q\vec{d} + r\vec{e}$ より

$$(-a,\ 0, -a) = p(-a,\ a,\ 0) + q(-a, -a,\ 0) + r(-a,\ 0,\ a)$$
$$a(-1,\ 0, -1) = a(-p - q - r,\ p - q,\ r)$$

したがって　$-p - q - r = -1$,　$p - q = 0$,　$r = -1$

これを解いて　$\boldsymbol{p = 1,\ q = 1,\ r = -1}$

(3) Gは辺BEを $1:2$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{2}{3}(0,\ a,\ 0) + \frac{1}{3}(0,\ 0,\ a) = \frac{a}{3}(0,\ 2,\ 1)$$

Hは辺CFを $t : 1 - t$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (1 - t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (1 - t)(-a,\ 0,\ 0) + t(0,\ 0, -a)\\ &= a(t - 1,\ 0, -t)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{a}{3}(0,\ 2,\ 1) - a(1,\ 0,\ 0) = \frac{a}{3}(-3,\ 2,\ 1) \\
\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= a(t-1,\ 0, -t) - a(1,\ 0,\ 0) = a(t-2,\ 0, -t) \\
|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 &= \frac{a^2}{9}(9+4+1) = \frac{7}{9} \\
|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 &= a^2\{(t-2)^2 + t^2\} = t^2 - 2t + 2 \\
\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \frac{a^2}{3}\{-3(t-2) + 2\cdot 0 + 1\cdot(-t)\} = \frac{1}{3}(3-2t)
\end{aligned}$$

$\triangle$AGH の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}})^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}(t^2-2t+2) - \frac{1}{9}(3-2t)^2} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{7(t^2-2t+2) - (3-2t)^2} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{3t^2-2t+5} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}
\end{aligned}$$

$0 < t < 1$ より，$\boldsymbol{t = \frac{1}{3}}$ のとき，S は最小値 $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{14}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{42}}{18}}$ をとる． ■

4 (1) $a_{n+1} = \left(\dfrac{n^6(n+1)}{{a_n}^3}\right)^2$ より

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = \left(\frac{n^2}{a_n}\right)^6 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = -6\log_2 \frac{a_n}{n^2}$$

$a_1 = 2$，$b_n = \log_2 \dfrac{a_n}{n^2}$ より　$b_1 = \log_2 \dfrac{2}{1^2} = \mathbf{1}$，$b_{n+1} = -6b_n$　$\cdots(*)$

また　$b_2 = -6b_1 = -6\cdot 1 = \mathbf{-6}$

(2) $(*)$ より，$\{b_n\}$ は公比 -6 の等比数列である．

(3) $0 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log_2 k = \log_2 n! < \log_2 n^n = n\log_2 n$ より

$$0 < \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 k < \frac{n\log n}{6^{2n}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{6^{2n}} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 k = 0$$

(4) $\log_2 a_{2k} = \log_2 \dfrac{a_{2k}}{(2k)^2} + \log_2 (2k)^2 = b_{2k} + 2 + 2\log_2 k$

$(*)$ より　$b_n = 1\cdot(-6)^{n-1}$　ゆえに　$b_{2k} = (-6)^{2k-1} = -6\cdot 6^{2(k-1)}$

求める極限値を I とすると

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 a_{2k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (b_{2k} + 2 + 2\log_2 k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \{-6\cdot 6^{2(k-1)} + 2 + 2\log_2 k\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{-6(6^{2n}-1)}{6^{2n}(6^2-1)} + \frac{2n}{6^{2n}} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\log_2 k}{6^{2n}} \right\} \\
&= -\frac{6}{35} + 0 + 0 = \mathbf{-\frac{6}{35}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = \log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ より，$f(x)$ の定義域は

$$\frac{3x+3}{x^2+3} > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > -1$$

$f(x)$ を微分すると

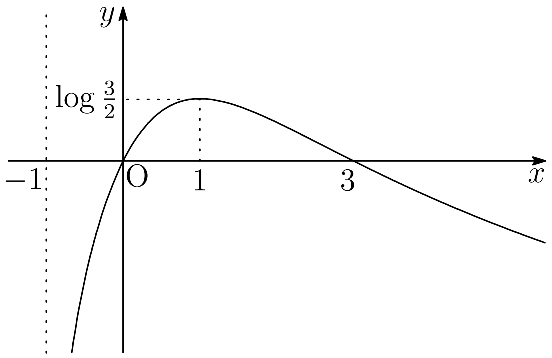
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2+3}{3x+3}\cdot\frac{3(x^2+3)-(3x+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+3)} \qquad \cdots ① \\ &= -\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2+3)} \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\log\frac{3}{2}$	$\searrow$

また $\displaystyle\lim_{x\to-1+0} f(x) = -\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log\frac{\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}} = -\infty$

よって，$y = f(x)$ の概形は，次のようになる．



(2) $f(x) = s$ の実数解の個数は，$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = s$ の共有点の個数である．したがって，(1) のグラフから

$$\begin{cases} \boldsymbol{s > \log\dfrac{3}{2}} \textbf{のとき}\quad \mathbf{0}\,\textbf{個} \\ \boldsymbol{s = \log\dfrac{3}{2}} \textbf{のとき}\quad \mathbf{1}\,\textbf{個} \\ \boldsymbol{s < \log\dfrac{3}{2}} \textbf{のとき}\quad \mathbf{2}\,\textbf{個} \end{cases}$$

(3) $$\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx = \int_0^3 \left(2 - \frac{6}{x^2+3}\right) dx = 6 - 6\int_0^3 \frac{1}{x^2+3}\,dx \qquad (*)$$

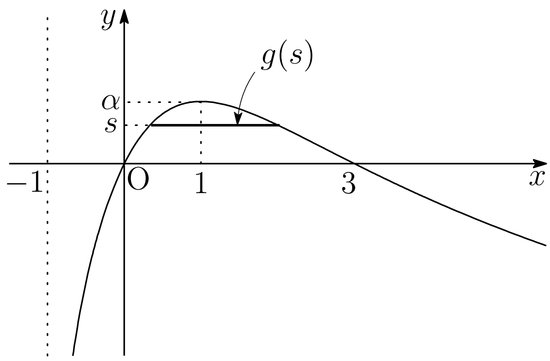
$x = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 3$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} J = \int_0^3 \frac{1}{x^2+3}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$(*)$ より　$\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx = \boldsymbol{6 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

(4) 下の図から　$\displaystyle\int_0^\alpha g(s)\,ds = \int_0^3 f(x)\,dx$



$f(0) = 0$，$f(3) = 0$ および ① に注意して

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha g(s)\,ds = \int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^3 (x+1)' f(x)\,dx \\ &= \Big[\,(x+1)f(x)\,\Big]_0^3 - \int_0^3 (x+1)f'(x)\,dx \\ &= \int_0^3 \frac{x^2+2x-3}{x^2+3}\,dx \\ &= \int_0^3 \left(1 + \frac{2x}{x^2+3} - \frac{6}{x^2+3}\right) dx \\ &= \Big[\,x + \log(x^2+3)\,\Big]_0^3 - 6J \\ &= 3 + 2\log 2 - 6\cdot\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \boldsymbol{3 + 2\log 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

■

9.10　2024 年 (150 分)

出題分野　1　2　3　4　5

1 A，B，C，D，E の 5 人が，それぞれゲーム α とゲーム β の 2 種類のゲームを行った．ゲーム α の得点を x，ゲーム β の得点を y で表す．下の表はそれぞれのゲームにおける得点である．ただし，a，b は整数である．なお，得点が負になることもあり得る．

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点 x の平均値は 7 であるとし，ゲーム β の得点 y の平均値を m とする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) p，q は実数で，$p \neq 0$ とする．ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し，新たな変量 z を作成する．z の分散を ${s_z}^2$，二つの変量 x，z の共分散を s_{xz} とする．このとき，${s_z}^2$ と s_{xz} を p，q，m のうちの必要なものを用いて表せ．ただし，変量 x と z の共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である．

(3) 変量 x と (2) で作った変量 z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ であるとき，m と b の値を求めよ．また，p が正であるか負であるかを答えよ．

2 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(0, 1, 1)，C(1, 2, -1) に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(2) 点 O，A，B を通る平面を α とする．点 C から平面 α に下した垂線と平面 α の交点を M とする．点 M の座標を求めよ．

(3) 点 M を (2) で定めた点とする．点 D を直線 CM 上の点であって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

となるものとする．ただし，点 D は点 C とは異なる点である．このとき，点 D の座標を求めよ．

(4) 点 D を (3) で定めた点とする．三角形 CAD の面積 S を求めよ．

3 x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点と呼ぶことにする．座標平面上の3点を頂点にもつ三角形上の格子点とは，頂点，辺または内部に含まれている格子点のことをいう．四角形に対しても同様に四角形上の格子点を定めるものとする．

O(0, 0) を座標平面の頂点とする．a と b を互いに素な自然数，n を自然数として，座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(an,\ 0)$，$\mathrm{Q}_n(0,\ bn)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点 $(x,\ y)$ で $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たすものは

$$(ak,\ b(n-k)) \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

のみであることを示せ．

(2) P_1 と Q_1 をそれぞれ P，Q と表す．点 $\mathrm{R}(a,\ b)$ に対し，長方形 OPRQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ．また，三角形 OPQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ．

(3) 三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点の個数を a，b，n を用いて表せ．

(4) 座標空間内の原点 O(0, 0, 0) と3点 $\mathrm{X}(an,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Y}(0,\ bn,\ 0)$，$\mathrm{Z}(0,\ 0,\ n)$ をとる．点 O，X，Y，Z を4頂点とする四面体 OXYZ 上の格子点の個数を a，b，n を用いて表せ．ただし，x 座標，y 座標，z 座標のすべてが整数である座標空間内の点を格子点と呼ぶことにする．また，四面体上の格子点とは，頂点，辺，面または内部に含まれている格子点のことをいう．

4 複素数平面において，点1を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 α が円 C と虚軸との交点であるとき，$\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ を求めよ．

(2) 円 C 上の点 z に対し，点 $-\dfrac{1}{z}$ も円 C 上にあることを示せ．

(3) 円 C の点 z に対し，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とする．複素数 w，z は

$$|w-2| = \frac{2}{|z|}$$

を満たすことを示せ．

(4) 円 C 上の点 z に対し，(3) で定めた複素数 w は

$$|w-2||w+2| = 4$$

を満たすことを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ に対し，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ は $x > 0$ で上に凸であることを示せ．

(2) すべての $x \geqq 0$ に対し，不等式 $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leqq f(x) \leqq x$ が成り立つことを示せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx$ の値 S を求めよ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ 上の点で，x 座標が $\dfrac{3}{4}$ であるものを A とする．また，点 A における曲線 $y = f(x)$ の接線を ℓ とする．ℓ と直線 $y = x$ の交点を B とする．点 O$(0,\ 0)$，A，B と点 C$\left(\dfrac{3}{4},\ 0\right)$ を頂点にもつ四角形 ABOC の面積 T を求めよ．

(5) (1)～(4) を利用して，$\log 2$ の小数第 1 位の数字を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 得点 x の平均が 7 であるから

$$\frac{7+6+8+a+4}{5}=7 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=10}$$

(2) 得点 y の平均値が m であるから

$$\frac{0+(-4)+(-1)+2+b}{5}=m \quad \text{ゆえに} \quad b=5m+3 \quad \cdots ①$$

したがって，得点 y の分散 ${s_y}^2$ は

$$\begin{aligned} {s_y}^2 &= \frac{0^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2+(5m+3)^2}{5}-m^2 \\ &= 4m^2+6m+6 \end{aligned}$$

$z=py+q$ より　${s_z}^2=p^2{s_y}^2=\boldsymbol{p^2(4m^2+6m+6)}$

x と y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{7\cdot 0+6\cdot(-4)+8\cdot(-1)+10\cdot 2+4\cdot(5m+3)}{5}-7\cdot m \\ &= -3m \end{aligned}$$

$z=py+q$ より　$s_{xz}=ps_{xy}=p\cdot(-3m)=\boldsymbol{-3pm}$

(3) 得点 x の分散 ${s_x}^2$ は

$${s_x}^2=\frac{(7-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(4-7)^2}{5}=4$$

$s_x=2$，$s_z=|p|\sqrt{4m^2+6m+6}$，$\dfrac{s_{xz}}{s_xs_z}=\dfrac{3}{4}$ より

$$\frac{-3pm}{2\cdot|p|\sqrt{4m^2+6m+6}}=\frac{3}{4} \qquad (*)$$

上式の辺々を平方することにより

$$\frac{9m^2}{4(4m^2+6m+6)}=\frac{9}{16} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{m=-1} \quad \cdots ②$$

これを $(*)$ に代入して整理すると　$\dfrac{p}{|p|}=1$　ゆえに　$\boldsymbol{p>0}$

② を ① に代入すると　$b=5\cdot(-1)+3=\boldsymbol{-2}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(0,\ 1,\ 1)$, $\vec{c}=(1,2,-1)$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot0+1\cdot1+0\cdot1=\mathbf{1}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-1)=\mathbf{3}$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-1)=\mathbf{1}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,-1,\ 1)$ より，平面 α 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ より，平面 α の方程式は

$$x-y+z=0$$

点 $\mathrm{C}(1,\ 2,-1)$ を通り，方向ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の直線の方程式は

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}=t\quad(t\text{ は媒介変数})$$

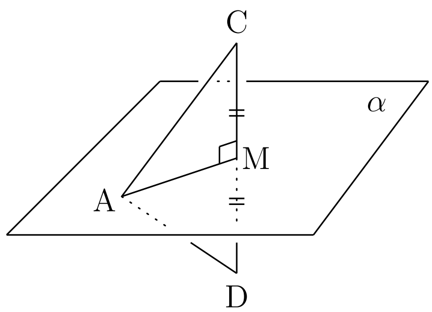
これから　　$x=t+1,\quad y=-t+2,\quad z=t-1\quad\cdots(*)$

$(*)$ を平面 α の方程式に代入すると

$$(t+1)-(-t+2)+(t-1)=0\quad\text{ゆえに}\quad t=\frac{2}{3}$$

これを $(*)$ に代入して　$x=\frac{5}{3},\ y=\frac{4}{3},\ z=-\frac{1}{3}$　よって　$\mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$

(3) 条件から，M は CD の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=2\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)-(1,\ 2,-1)\\&=\left(\frac{7}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{D}\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ より

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{6}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{2}}$$

■

3 (1) 2 点 $\mathrm{P}_n(an,\ 0)$，$\mathrm{Q}_n(0,\ bn)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{an}+\frac{y}{bn}=1 \quad \text{ゆえに} \quad bx+ay=abn$$

$x,\ y$ は整数であるから，上の第 2 式から　$bx \equiv 0 \pmod{a}$

a と b は互いに素であるから，整数 k を用いて　$x=ak$　$\cdots$ ①

① を直線の方程式に代入すると

$$abk+ay=abn \quad \text{ゆえに} \quad y=b(n-k) \quad \cdots ②$$

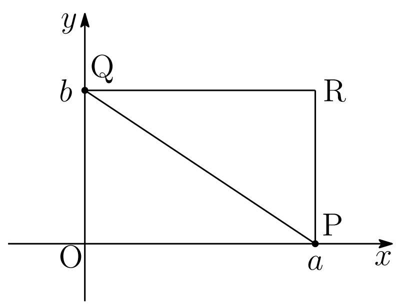
①，② において，$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ であるから，条件を満たす格子点は

$$(ak,\ b(n-k)) \qquad (k=0, 1, \cdots, n)$$

(2) 四角形 OPRQ 上の格子点の個数は　$\boldsymbol{(a+1)(b+1)}$

三角形 OPQ 上と三角形 RPQ 上の格子点の個数 S は等しく，格子点 $(a,\ 0)$ および $(0,\ b)$ の 2 個を共有しているから

$$S+S-2=(a+1)(b+1) \quad \text{ゆえに} \quad S=\boldsymbol{\frac{ab+a+b+3}{2}}$$



(3) $\mathrm{R}_n(an,\ bn)$ とすると，四角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点の個数は

$$(an+1)(bn+1)$$

三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ 上と三角形 $\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n\mathrm{Q}n$ 上の格子点の個数 S_n は等しく，(1) で示した格子点 $n+1$ 個を共有しているから

$$S_n+S_n-(n+1)=(an+1)(bn+1)$$

したがって　$S_n=\boldsymbol{\dfrac{abn^2+(a+b+1)n+2}{2}}$

(4) 4 点 O(0, 0, 0)，X(an, 0, 0)，Y(0, bn, 0)，Z(0, 0, n) を頂点とする四面体 OXYZ の境界および内部を含む領域は

$$\frac{x}{an}+\frac{y}{bn}+\frac{z}{n} \leqq 1, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0$$

上の領域と平面 $z=k$ の共有部分は $(k=0, 1, \cdots, n)$

$$bx+ay=ab(n-k), \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

求める格子点の個数は，(3) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} S_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\{abk^2+(a+b+1)k+2\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{ab\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}(a+b+1)n(n+1)+2(n+1)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{12}(n+1)\{abn(2n+1)+3(a+b+1)n+12\}}\end{aligned}$$

■

4 (1) 点αは円$C : |z-1| = \sqrt{2}$の点であるから

$$|\alpha-1|^2 = 2 \quad ゆえに \quad \alpha\overline{\alpha} - (\alpha+\overline{\alpha}) = 1$$

このとき，αは虚軸上の点であるから，$\alpha+\overline{\alpha} = 0$より

$$\alpha\overline{\alpha} = 1 \quad ゆえに \quad \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$$

したがって $\quad \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \alpha + \overline{\alpha} = \mathbf{0}$

別解 円$(x-1)^2+y^2 = 2$とy軸との交点は$(0,\ \pm 1)$であるから，$\alpha = \pm i$より

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \mathbf{0}$$

(2) $\mu = -\dfrac{1}{z}$とおくと，$\mu z = -1$であるから，$|z-1| = \sqrt{2}$より

$$|\mu||z-1| = \sqrt{2}|\mu| \quad ゆえに \quad |\mu z - \mu| = \sqrt{2}|\mu|$$

したがって $\quad |-1-\mu| = \sqrt{2}|\mu| \quad$ ゆえに $\quad \sqrt{2}|\mu| = |\mu+1|$

$$2\mu\overline{\mu} = \mu\overline{\mu} + \mu + \overline{\mu} + 1 \quad ゆえに \quad \mu\overline{\mu} - \mu - \overline{\mu} + 1 = 2$$

すなわち $\quad |\mu - 1| = \sqrt{2} \quad$ よって 点$-\dfrac{1}{z}$はC上の点である．

(3) $w = z + \dfrac{1}{z}$より $\quad w - 2 = \dfrac{(z-1)^2}{z}$

zはC上の点であるから $\quad |w-2| = \dfrac{|z-1|^2}{|z|} = \dfrac{2}{|z|}$

(4) C上の点zに対し，$|z-1|^2 = 2$より $\quad |z|^2 = z + \overline{z} + 1 \quad \cdots(*)$

$w = z + \dfrac{1}{z}$より $\quad w + 2 = \dfrac{(z+1)^2}{z}$

$(*)$より $\quad |w+2| = \dfrac{|z+1|^2}{|z|} = \dfrac{|z|^2 + z + \overline{z} + 1}{|z|} = \dfrac{2|z|^2}{|z|} = 2|z|$

上式および(3)の結果から

$$|w-2||w+2| = \frac{2}{|z|} \cdot 2|z| = 4$$

■

$\boxed{5}$ (1) $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ より

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad f''(x)=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$x>0$ で，$f''(x)<0$ より，$x>0$ で $y=f(x)$ は上に凸である．

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$t\geqq 0$ のとき，$\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\leqq 1$ より

$$\int_0^x\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\leqq\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\leqq\int_0^x dt\quad(x\geqq 0)$$

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$f(0)=0$ であるから

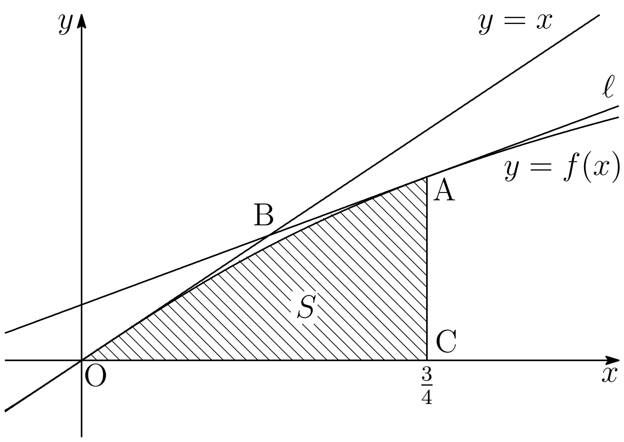
$$x\geqq 0\text{ のとき}\quad\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x)\leqq x$$

(3) $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$，$xf'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=(\sqrt{1+x^2})'$ より

$$f(x)=\left\{xf(x)-\sqrt{1+x^2}\right\}'$$

$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\log 2$ であるから

$$S=\int_0^{\frac{3}{4}}f(x)\,dx=\Big[\,xf(x)-\sqrt{1+x^2}\,\Big]_0^{\frac{3}{4}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4}}$$



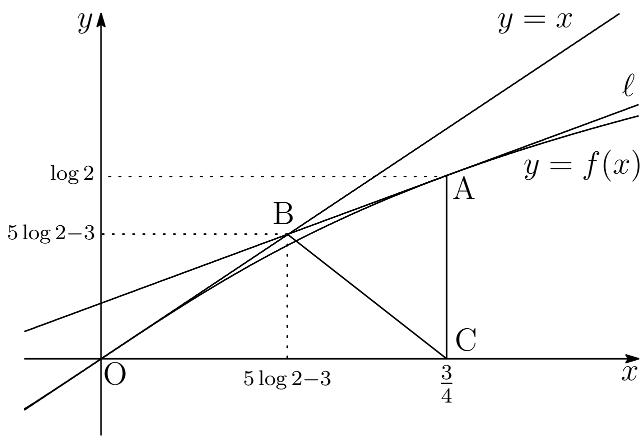
(4) $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\log 2$，$f'\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{4}{5}$ より，ℓ の方程式は

$$y-\log 2=\frac{4}{5}\left(x-\frac{3}{4}\right)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{4}{5}x+\log 2-\frac{3}{5}$$

ℓ と直線 $y=x$ の交点 B は　$(5\log 2-3,\ 5\log 2-3)$

したがって，四角形 ABOC の面積 T は

$$\begin{aligned}T&=\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ABC}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(5\log 2-3)+\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4}-(5\log 2-3)\right\}\log 2\\&=\boldsymbol{-\frac{5}{2}(\log 2)^2+\frac{15}{4}\log 2-\frac{9}{8}}\end{aligned}$$



(5) (2) の結論に $x=\dfrac{3}{4}$ を代入すると　$\dfrac{3}{5}\leqq\log 2\leqq\dfrac{3}{4}$　$\cdots$①

$S<T$ であるから，これに (3)，(4) の結果を代入すると

$$\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4}<-\frac{5}{2}(\log 2)^2+\frac{15}{4}\log 2-\frac{9}{8}$$

整理すると　　$20(\log 2)^2-24\log 2+7<0$

$$(2\log 2-1)(10\log 2-7)<0\quad\text{ゆえに}\quad \frac{1}{2}<\log 2<\frac{7}{10}\quad\cdots②$$

①，② より　$\dfrac{3}{5}\leqq\log 2<\dfrac{7}{10}$

よって，$\log 2$ の小数第 1 位の数字は　**6**　■

9.11　2025 年 (150 分)

出題分野　1　2　3　4　5

1 次の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数を表す．

(1) $x > 0$ で定義された次の関数の最大値を求めよ．

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

(2) 次の不定積分をそれぞれ求めよ．

$$\int \log x \, dx, \quad \int (\log x)^2 \, dx$$

(3) (1) で求めた最大値を a として，座標平面上の二つの曲線 $C_1 : y = a\sqrt{x}$，$C_2 : y = \log x$ を考える．x 軸と二つの曲線 C_1，C_2 によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

2 $a>0$ とし，p を実数とする．座標平面上の3点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を考える．P_n，Q_n，R_n $(n=1,2,3,\cdots)$ が以下の二つの条件を満たすとする．

(i) 点 P_1 は直線 AB 上にあり，x 座標が p である．

(ii) 自然数 n に対し，

- 点 P_n から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点が Q_n である．ただし，点 P_n が x 軸上にあるときは，点 Q_n は P_n と同じ点であるとする．
- 点 Q_n から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC との交点が R_n である．ただし，点 Q_n が直線 AC 上にあるときは，点 R_n は Q_n と同じ点であるとする．
- 点 R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB との交点が P_{n+1} である．

点 P_n の x 座標を x_n とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 R_1 の座標を a，p を用いて表せ．

(2) 命題

「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば，点 R_1 は線分 AC 上にある」が真であるような a の値の範囲を求めよ．ただし，線分は両端を含むものとする．

(3) x_n を a，n，p を用いて表せ．

(4) $a=2$，$p=0$ であるとき，不等式

$$|x_{n+1}-x_n|<10^{-10}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

3 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ を満たす θ に対し，座標平面上の原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円上の 4 点

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{C}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta),\ \mathrm{D}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$$

を考え，△OAD の面積を $S(\theta)$，△ABC の面積を $T(\theta)$，△ABD の面積を $U(\theta)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{\theta^3}$ を求めよ．

(3) $t=\cos\theta$ とおく．$\dfrac{U(\theta)}{\sin\theta}$ を t の整式で表せ．

(4) 関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta)=\frac{T(\theta)}{U(\theta)}$$

と定義する．$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}f(\theta)$ を求めよ．また，θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき，$f(\theta)$ のとり得る値の範囲を求めよ．

4 n を自然数とする．$(3n+1)$ 個の箱 A_1，A_2，$\cdots$，A_{3n+1} があり，1 から $3n+1$ までの各自然数 k に対して，k 番目の箱 A_k には，1 から k までの整数が一つずつ書かれた k 枚のカードが入っている．これを初期状態とする．次の問いに答えよ．

(1) 箱 A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 L を n を用いて表せ．

(2) 箱 A_1，A_2，$\cdots$，A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 M を n を用いて表せ．

(3) 初期状態から，箱 A_1，A_2，$\cdots$，A_{3n+1} に入っているすべてのカードを箱 B に移す．箱 B から 1 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれた整数が (2) で求めた値 M に等しくなる確率を $P(n)$ とする．$P(n)$ を n を用いて表せ．

(4) M を (2) で求めた値とする．初期状態から，箱 A_M，A_{M+1}，$\cdots$，A_{3n+1} だけ集めて，ケース C に収納する．ケース C から一つの箱を選び，さらにその箱から 1 枚のカードを取り出す．カードに書かれた整数が M に等しいとき，そのカードが箱 A_{3n+1} から取り出されている条件付き確率を $Q(n)$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nQ(n)$ を求めよ．

5 i を虚数単位とする．複素数 z_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を

$$z_1=\sqrt{3}+2i,\quad z_{n+1}=2(z_n-i)^2+i\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) z_2-i と z_3-i を極形式で表せ．

(2) z_n-i を極形式で

$$z_n-i=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

と表したとき，$\log_2 r_n$ を n を用いて表せ．

(3) z_n を n を用いて表せ．

(4) 複素数 z_n が表す複素数平面上の点を P_n とする．3 点 P_3，P_5，P_{2025} が同一直線上にあることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ より　$f'(x)=\dfrac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって　　**最大値** $\boldsymbol{f(e^2)=\dfrac{2}{e}}$

(2)

$$\begin{aligned}\int\log x\,dx&=\int(x)'\log x\,dx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\&=\boldsymbol{x(\log x-1)+C}\quad(\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数}),\\\int(\log x)^2\,dx&=\int(x)'(\log x)^2-\int x\cdot\frac{2\log x}{x}\,dx\\&=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx\\&=x(\log x)^2-2x(\log x-1)+C\\&=\boldsymbol{x\{(\log x)^2-2\log x+2\}+C}\quad(\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数})\end{aligned}$$

別解　$t=\log x$ とおくと，$x=e^t$ より　$\dfrac{dx}{dt}=e^t$

$$\begin{aligned}\int\log x\,dx&=\int te^t\,dt=\{t-(t)'\}e^t+C\\&=\boldsymbol{(\log x-1)x+C},\\\int(\log x)^2\,dx&=\int t^2e^t\,dx=\{t^2-(t^2)'+(t^2)''\}e^t+C\\&=\boldsymbol{\{(\log x)^2-2\log x+2\}x+C}\end{aligned}$$

補足　別解は次の積分公式を利用している[10].

$$\int e^{kx}f(x)\,dx=\frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}+C$$
$$\int e^{x}f(x)\,dx=e^{x}\{f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\cdots\}+C$$
$$\int e^{-x}f(x)\,dx=-e^{-x}\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\}+C$$

[10] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2023.pdf (p.10 を参照)

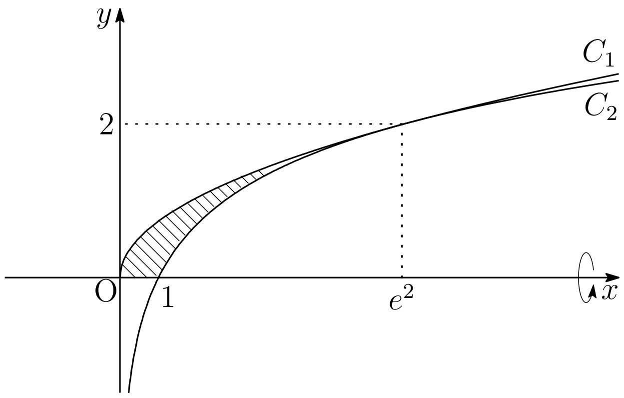
(3) (1) の結果より，$a=\dfrac{2}{e}=f(e^2)\geqq f(x)$ であるから

$$a\sqrt{x}-\log x=\sqrt{x}\left(a-\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}\left\{f(e^2)-f(x)\right\}\geqq 0$$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^{e^2}(a\sqrt{x})^2\,dx-\int_1^{e^2}(\log x)^2\,dx\\&=\frac{2}{e^2}\Big[\,x^2\,\Big]_0^{e^2}-\Big[\,x\{(\log x)^2-2\log x+2\}\,\Big]_1^{e^2}\\&=2e^2-(2e^2-2)=2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=2\pi}$



別解　$C_1: x=\dfrac{e^2y^2}{4}\ (y\geqq 0)$，$C_2: x=e^y$ であるから [11]

$$V=2\pi\int_0^2 y\left(e^y-\frac{e^2y^2}{4}\right)dy=2\pi\Big[\,e^y(y-1)-\frac{e^2y^4}{16}\,\Big]_0^2=\boldsymbol{2\pi}$$

バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■

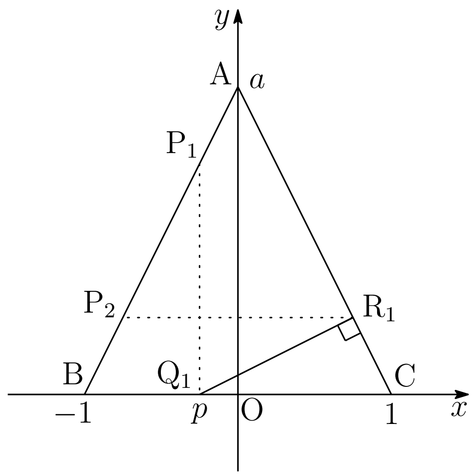
[11] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf $\boxed{2}$

2 (1) 点 P_1 の x 座標が p であるから，
点 Q_1 の座標は　$(p,\ 0)$
直線 AC の方程式は $(a>0)$

$$y=-ax+a \quad \cdots ①$$

点 Q_1 を通り，直線 AC に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{a}(x-p) \quad \cdots ②$$



点 R_1 は 2 直線 ①，② の交点であるから，これを解いて

$$\mathbf{R_1}\left(\boldsymbol{\frac{p+a^2}{1+a^2},\ \frac{a(1-p)}{1+a^2}}\right)$$

(2) 「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば，点 R_1 は線分 AC 上にある」から，2 点 P_1，R_1 のそれぞれの x 座標に着目すると

$$-1\leqq p\leqq 0 \quad\Longrightarrow\quad 0\leqq\frac{p+a^2}{1+a^2}\leqq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad -a^2\leqq p\leqq 1$$

この命題が真であるから　$-a^2\leqq -1$

$a>0$ に注意して解くと　$\boldsymbol{a\geqq 1}$

(3) 点 P_2 は，直線 AB : $y=ax+a$ 上の点であり，その y 座標は点 R_1 の y 座標と等しい．したがって，P_2 の x 座標 x_2 は

$$\frac{a(1-p)}{1+a^2}=ax_2+a \quad ゆえに \quad x_2=-\frac{p+a^2}{1+a^2}$$

よって，次の $\{x_n\}$ の漸化式を得る．

$$x_1=p,\quad x_{n+1}=-\frac{x_n+a^2}{1+a^2}$$

これから　$$x_{n+1}+\frac{a^2}{2+a^2}=-\frac{1}{1+a^2}\left(x_n+\frac{a^2}{2+a^2}\right)$$

$$x_n+\frac{a^2}{2+a^2}=\left(p+\frac{a^2}{2+a^2}\right)\left(-\frac{1}{1+a^2}\right)^{n-1}$$

$$\boldsymbol{x_n=\left(p+\frac{a^2}{2+a^2}\right)\left(-\frac{1}{1+a^2}\right)^{n-1}-\frac{a^2}{2+a^2}}$$

(4)　$a = 2$，$p = 0$ を (3) の結果に代入すると

$$x_n = \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1\right\}$$

したがって

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} - 1\right\} - \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1\right\} \\ &= -\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 4\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} \end{aligned}$$

$|x_{n+1} - x_n| = 4{\cdot}5^{-n}$ であるから，$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-10}$ を満たすとき

$$\log_{10}(4{\cdot}5^{-n}) < -10 \quad \text{ゆえに} \quad n > \frac{10 + \log_{10} 4}{\log_{10} 5} \qquad (*)$$

$$\frac{10 + \log_{10} 4}{\log_{10} 5} = \frac{10 + 2\log_{10} 2}{1 - \log_{10} 2} = \frac{10 + 2 \times 0.3010}{1 - 0.3010} = \frac{10.6020}{0.6990} = 15.1\cdots$$

よって，$(*)$ を満たす最小の自然数 n は　　$\boldsymbol{n = 16}$　■

3 A$(1,\ 0)$, B$(\cos\theta,\ \sin\theta)$, C$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$, D$(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ より $(0<3\theta<\pi)$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\sin 3\theta \quad \text{よって} \quad \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin 3\theta}{2\theta}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos\theta-1,\ \sin\theta)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\cos 2\theta-1,\ \sin 2\theta)$ より $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}T(\theta)&=\frac{1}{2}|\sin 2\theta(\cos\theta-1)-\sin\theta(\cos 2\theta-1)|\\&=\frac{1}{2}|(\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta)-\sin 2\theta+\sin\theta|\\&=\frac{1}{2}|2\sin\theta-\sin 2\theta|=\frac{1}{2}|2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta|\\&=\sin\theta(1-\cos\theta)\end{aligned}\qquad(*)$$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{\theta^3}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}\\&=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\frac{1}{1+\cos\theta}=1^3\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos\theta-1,\ \sin\theta)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(\cos 3\theta-1,\ \sin 3\theta)$ より $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}U(\theta)&=\frac{1}{2}|\sin 3\theta(\cos\theta-1)-\sin\theta(\cos 3\theta-1)|\\&=\frac{1}{2}|(\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta)+\sin\theta-\sin 3\theta|\\&=\frac{1}{2}|\sin 2\theta+(\sin\theta-\sin 3\theta)|\\&=\frac{1}{2}|2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta\cos 2\theta|\\&=|\sin\theta(\cos\theta-\cos 2\theta)|=|\sin\theta(\cos\theta-2\cos^2\theta+1)|\\&=|\sin\theta(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)|\\&=\sin\theta(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)\end{aligned}\qquad(**)$$

$t=\cos\theta$ とおくと

$$\frac{U(\theta)}{\sin\theta}=(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)=\boldsymbol{(1-t)(1+2t)}$$

(4) (∗)，(∗∗) より $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$f(\theta)=\frac{T(\theta)}{U(\theta)}=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)}=\frac{1}{1+2\cos\theta}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=\boldsymbol{\frac{1}{3}},\quad \boldsymbol{\frac{1}{2}<f(\theta)<\frac{1}{3}}$ ■

4 (1)

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{3n+1}\{1+2+\cdots+(3n+1)\}\\&=\frac{1}{3n+1}\cdot\frac{1}{2}(3n+1)\{1+(3n+1)\}=\boldsymbol{\frac{3n+2}{2}}\end{aligned}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{3n+1}k=\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2),$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3n+1}\sum_{j=1}^{k}j&=\sum_{k=1}^{3n+1}\frac{1}{2}k(k+1)\\&=\sum_{k=1}^{3n+1}\frac{1}{6}k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{3n+1}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\&=\frac{1}{6}(3n+1)(3n+2)(3n+3)\\&=\frac{1}{2}(n+1)(3n+1)(3n+2)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}M&=\sum_{k=1}^{3n+1}\sum_{j=1}^{k}j\bigg/\sum_{k=1}^{3n+1}k\\&=\frac{1}{2}(n+1)(3n+1)(3n+2)\bigg/\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)\\&=\boldsymbol{n+1}\end{aligned}$$

(3) $n+1$ と書かれたカードの枚数は，A_{n+1}，A_{n+2}，$\cdots$，A_{3n+1} にあったカードの枚数で，$(3n+1)-(n+1)+1=2n+1$ (枚).

よって，求める確率は

$$P(n)=2n+1 \Big/ \frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)=\boldsymbol{\frac{2(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}}$$

(4) 取り出されたカードが $M(=n+1)$ である事象を X，取り出されたカードが箱 A_{3n+1} からである事象を Y とすると

$$P(X)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k},$$
$$P(X\cap Y)=\frac{1}{2n+1}\times\frac{1}{3n+1}=\frac{1}{(2n+1)(3n+1)}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}Q(n)&=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}\\&=\frac{1}{(2n+1)(3n+1)}\Big/\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}\\&=1\Big/(3n+1)\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{nQ(n)}=\left(3+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nQ(n)}&=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\&=3\int_0^2\frac{1}{1+x}\,dx=3\Big[\log(1+x)\Big]_0^2=3\log 3\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nQ(n)=\boldsymbol{\frac{1}{3\log 3}}$　■

5 $z_1=\sqrt{3}+2i$，$z_{n+1}=2(z_n-i)^2+i$ より　$2(z_{n+1}-i)=\{2(z_n-i)\}^2$

$$
\begin{aligned}
2(z_n-i)&=\{2(z_1-i)\}^{2^{n-1}}=\{2(\sqrt{3}+i)\}^{2^{n-1}}\\
&=\left\{4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{2^{n-1}}\\
&=4^{2^{n-1}}\left(\cos\frac{2^{n-1}}{6}\pi+i\sin\frac{2^{n-1}}{6}\pi\right)\\
&=(2^2)^{2^{n-1}}\left(\cos\frac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\frac{2^{n-2}}{3}\pi\right)\\
&=2^{2^n}\left(\cos\frac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\frac{2^{n-2}}{3}\pi\right)
\end{aligned}
$$

したがって　$z_n-i=2^{2^n-1}\left(\cos\frac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\frac{2^{n-2}}{3}\pi\right)\quad\cdots(*)$

(1) $(*)$ に $n=2,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$$
\begin{aligned}
z_2-i&=\mathbf{8}\left(\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}\right),\\
z_3-i&=\mathbf{128}\left(\boldsymbol{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}\right)
\end{aligned}
$$

(2) $(*)$ より，$r_n=2^{2^n-1}$ であるから　$\boldsymbol{\log_2 r_n=2^n-1}$

(3) $(*)$ より　$\boldsymbol{z_n-i=2^{2^n-1}\left(\cos\frac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\frac{2^{n-2}}{3}\pi\right)}$

(4) $(*)$ より　$\arg(z_n-i)=\frac{2^{n-2}}{3}\pi$

$2^{n-2}\equiv(-1)^{n-2}\equiv(-1)^n \pmod 3$ であるから

$$(-1)^3\equiv(-1)^5\equiv(-1)^{2025}\equiv 2 \pmod 3$$

よって，$\arg(z_3-i)$，$\arg(z_5-i)$，$\arg(z_{2025}-i)$ は $\frac{2\pi}{3}$ または $\frac{5\pi}{3}$

$$\frac{z_{2025}-z_3}{z_5-z_3}=\frac{(z_{2025}-i)-(z_3-i)}{(z_5-i)-(z_3-i)}$$

は実数であるから，3点 P_3，P_5，P_{2025} は同一直線上にある．■

第 10 章　九州大学

出題分野 (2015-2025) 150 分

◀	九州大学	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	数と式											
I	2 次関数											
	図形と計量											
	データの分析											
	式と証明					2		5				
	複素数と方程式						2					
II	図形と方程式											4
	三角関数											
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法	1										
	関数											
	極限		1			1·4			2	2		
III	微分法とその応用			1			1	3				
	積分法	2							4	4	5	2
	積分法の応用	3	1	1	2		5	3	5	5		
	場合の数と確率	4	3	4	3	3	4				4	5
A	整数の性質	5	4	3	4		2		3		3	3
	図形の性質		2									
B	数列			3								
	確率分布と統計											
	平面上のベクトル									3		
C	空間のベクトル			2			3	1	1		1	1
	複素数平面		5	5	5	3·5		2·4		1	2	
	式と曲線				1							

10.1　2015年(150分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leqq x \leqq 2$$
$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leqq x \leqq 0$$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ と C_1 が異なる2つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が(1)の条件を満たすとする。このとき，ℓ と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を求めよ。

(3) n を3以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

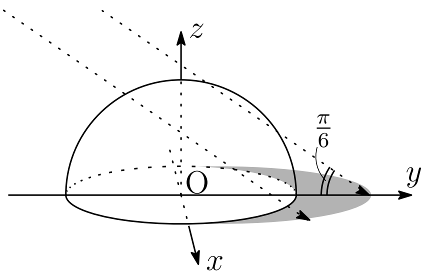
が成り立つことを示せ。

3 座標空間内に，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当っている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当らない部分の y 座標を k を用いて表せ。

(2) xy 平面上において，球の外で光が当らない部分の面積を求めよ。

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当らない部分の体積を求めよ。



4 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

(1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

5 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。

(3) p，q を異なる素数とする。$2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ。

解答例

1　(1) $y = -x^2 + 2x\ (0 \leqq x \leqq 2)$ と $y = a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2 + 2x = a(x+4) \quad \text{すなわち} \quad x^2 + (a-2)x + 4a = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と ℓ が接するとき，$(*)$ より

$$(a-2)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}4a = 0, \quad 0 < -\frac{a-2}{2{\cdot}1} < 2$$

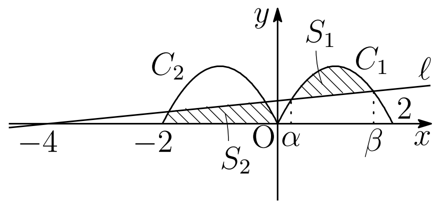
上の第 1 式および第 2 式から

$$a = 10 \pm 4\sqrt{6}, \quad -2 < a < 2 \quad \text{すなわち} \quad a = 10 - 4\sqrt{6}$$

よって，求める a の値の範囲は　　$\boldsymbol{0 \leqq a < 10 - 4\sqrt{6}}$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$\alpha + \beta = -(a-2), \quad \alpha\beta = 4a,$$
$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{a^2 - 20a + 4}$$



したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_\alpha^\beta \{(-x^2 + 2x) - a(x+4)\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \{x^2 + (a-2)x + 4a\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}(a^2 - 20a + 4)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(3) $y = -x^2 - 2x\ (-2 \leqq x \leqq 0)$ と $y = a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2 - 2x = a(x+4) \quad \text{すなわち} \quad x^2 + (a+2)x + 4a = 0 \quad \cdots (**)$$

方程式 $(**)$ の解を γ，δ とすると $(\gamma < \delta)$

$$\gamma + \delta = -(a+2), \quad \gamma\delta = 4a,$$
$$\delta - \gamma = \sqrt{(\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta} = \sqrt{a^2 - 12a + 4}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^0 \{-x^2 - 2x\}\,dx + \int_\gamma^\delta \{-x^2 - 2x - a(x+4)\}\,dx \\ &= -\int_{-2}^0 x(x+2)\,dx - \int_\gamma^\delta (x-\gamma)(x-\delta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}{\cdot}2^3 - \frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}(a^2 - 12a + 4)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$S_1 = S_2$ より　$\dfrac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}}$

整理すると　$(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$

ここで，$f(a) = (a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8$ とおくと

$$f(0) = 8 > 0, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{41\sqrt{41}-999}{125} < \frac{41\cdot 7 - 999}{125} < 0,$$

$$10 - 4\sqrt{6} = 2(5-2\sqrt{6}) = \frac{2}{5+2\sqrt{6}} > \frac{2}{5+5} = \frac{1}{5}$$

$f(a)$ は連続であるから，中間値の定理により，$f(a)=0$，すなわち $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する．　■

2　(1)　$y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ を微分すると　$y' = -\dfrac{\log x + 2}{x^2(\log x)^3}$

したがって，$x > 1$ において　$y' < 0$

よって，$y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において，単調減少．

(2)　$\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2}\,dx = \boldsymbol{-\frac{1}{\log x} + C}$　**(C は積分定数)**

別解　$t = \log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ であるから

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\log x} + C$$

(3)　(1)，(2) の結果から，n が 3 以上の整数であるとき

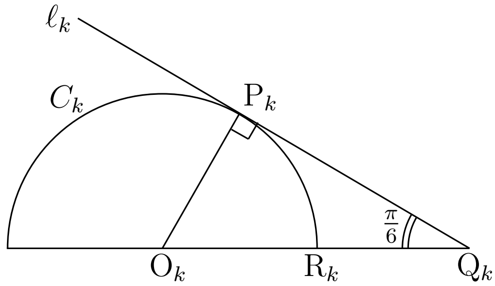
$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} &= \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k(\log k)^2}\,dx \\ &< \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{2}^{n} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n = -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log 2}\end{aligned}$$

■

3 (1) 球 $x^2+y^2+z^2=1$ の $z \geqq 0$ の部分の平面 $x=k$ $(-1<k<1)$ による断面の表す図形は，中心 $\mathrm{O}_k(k,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{1-k^2}$ の半円

$$y^2+z^2=1-k^2\ (-1<k<1),\quad z \geqq 0$$

この半円を C_k とし，C_k 上の点を $\mathrm{R}_k(k, \sqrt{1-k^2},\ 0)$ とする．方向ベクトルが $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ で C_k に接する直線を ℓ_k とし，ℓ_k と C_k の接点を P_k，ℓ_k と xy 平面との共有点を Q_k とすると



$$\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=\sqrt{1-k^2}$$
$$\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k=2\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=2\sqrt{1-k^2}$$

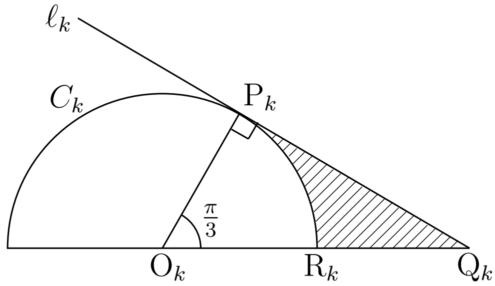
よって　　$\boldsymbol{\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq 2\sqrt{1-k^2}}$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{R}_k\mathrm{Q}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k-\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\sqrt{1-k^2}$

よって　　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(3) 右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k\cdot\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k-\frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k{}^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k^2)-\frac{\pi}{6}(1-k^2)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}(1-k^2)$$



よって，求める体積を V とすると

$$V=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\int_{-1}^{1}(1-k^2)\,dk=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 求める確率は，2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

(3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個である．青玉 1 個の状態からその後の 2 回目の操作で青玉が 1 個となる確率を p とすると

$$p=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p)=p^3(1-p)=\left(\frac{7}{9}\right)^3\frac{2}{9}=\mathbf{\frac{686}{6561}}$$

(4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp=p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp=p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q=p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}3\times p^2(1-p)q+p^3(1-p)&=2p^2(1-p)+p^3(1-p)\\&=p^2(1-p)(2+p)\\&=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{25}{9}=\mathbf{\frac{2450}{6561}}\end{aligned}$$

研究

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が 3 個とも青玉になることなしに，青玉の個数が 1 個である確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき

(2) で示したように奇数回目に青玉が 1 個になることはないから　$p_n=0$

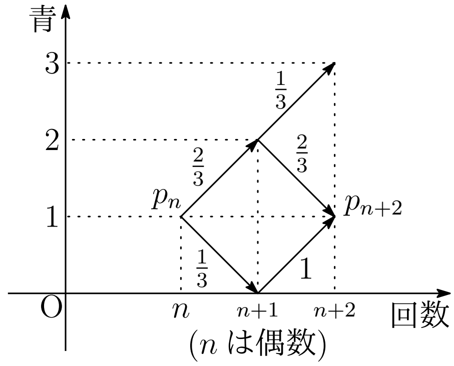
(ii) n が偶数のとき　$p_0=1$

$$p_{n+2}=p_n\times\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\frac{7}{9}p_n$$

ゆえに　　$p_n=\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2}\times\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



東大理科 2008 年

白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (**A**) を考える．

(**A**) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

以下の問 (1)，(2) に答えよ．

(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

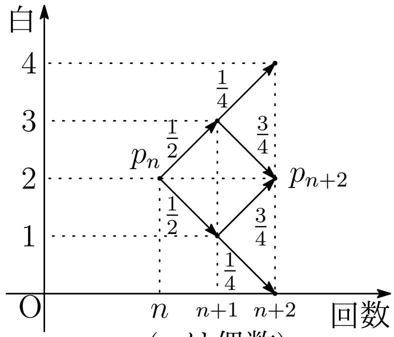
(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

解答　(1) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 4 枚とも同じ色になることなしに，白と黒のカードが 2 枚づつである確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき
奇数回目に 4 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　**0**

(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4}p_n$$



(n は偶数)

ゆえに　$p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

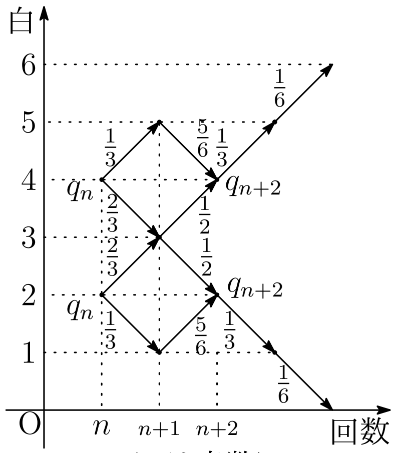
求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

(2) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 6 枚とも同じ色になることなしに，白のカードが 2 枚である確率を q_n とすると，対称性により白のカードが 4 枚である確率も q_n である．

(i) n が奇数のとき　$q_1 = \frac{1}{2}$

$$q_{n+2} = q_n \times \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} + q_n\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{17}{18}q_n$$



(n は奇数)

ゆえに　$q_n = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

求める確率は，3 以上の奇数のとき

$$q_{n-2} \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}}$$

(ii) n が 1 または偶数のとき
6 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　**0**

5　(1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，$2^n - 1$ は 3 の倍数である．

(2) n が自然数のとき，$2^n - 1$ は奇数である．

i) $n = 1$ のとき，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である．

ii) $n \geqq 2$ のとき

$$2^n + 1 = 1(2^n - 1) + 2$$

上式より，$2^n + 1$ を $2^n - 1$ で割った余りは 2.
$2^n - 1$ を 2 で割った余りは 1 であるから，ユークリッドの互除法により，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ の最大公約数は 1 である．

よって，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である．

(3) $2^{p-1} - 1 = pq^2$　($p,\ q$ は異なる素数)　$\cdots(*)$

$(*)$ について，$p = 2$ のとき　　$1 = 2q^2$

これを満たす素数 q は存在しない．

$p \neq 2$ となり，p は奇素数であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数である．

(1) の結果から，$2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数であるから，pq^2 は 3 を因数にもつ．

i) $p = 3$ のとき，$(*)$ より　　$3 = 3q^2$

q は素数であるから，不適．

ii) $q = 3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{p-1} - 1 = 9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}} + 1)(2^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 9p$$

i) より，奇素数 p は $p \geqq 5$ であること，(2) の結果から，$2^{\frac{p-1}{2}} + 1$ と $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は互いに素であることに注意して

$$\text{(A)}\begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 9 \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = p \end{cases} \quad \text{または} \quad \text{(B)}\begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = p \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 9 \end{cases}$$

(A) を解いて，$p = 7$.　(B) の第 2 式を満たす奇素数 p は存在しない．

よって　　$\boldsymbol{(p,\ q) = (7,\ 3)}$　■

10.2　2016 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし，a は実数である。n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が 2 点 P，Q で交わり，P，Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている。また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域を T_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする。また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $\mathrm{P}_0(1,\ 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し，1 つのサイコロを 1 回投げ，出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

(規則)　(i) 1 から 5 までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば，コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii) 6 の目が出た場合は，x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときは動かさない。例えば，コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き，1 つのサイコロを続けて何回か投げて，1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

(2) 3 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

(3) n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

4 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

5 以下の問いに答えよ。

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ。

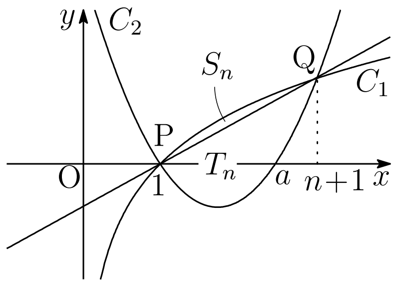
$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

解答例

$\boxed{1}$ (1) C_1 と C_2 の交点 Q の x 座標が $n+1$ であるから



$$\log(n+1) = (n+1-1)(n+1-a)$$

$n \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{a = n + 1 - \frac{\log(n+1)}{n}}$$

上式より $\quad a - 1 = \dfrac{n^2 - \log(n+1)}{n}$

ここで $\quad \displaystyle\int_0^n \frac{t}{t+1}\,dt = \Big[\, t - \log(t+1) \,\Big]_0^n = n - \log(n+1) > 0$

上の 2 式から $\quad a - 1 = \dfrac{n^2 - \log(n+1)}{n} > \dfrac{n^2 - n}{n} = n - 1 \geqq 0$

よって $\quad \boldsymbol{a > 1}$

(2) $\displaystyle S_n = \int_1^{n+1} \log x\,dx - \frac{1}{2}\{(n+1)-1\}\log(n+1)$

$$= \Big[\, x\log x - x \,\Big]_1^{n+1} - \frac{n}{2}\log(n+1) = \boldsymbol{\frac{n+2}{2}\log(n+1) - n}$$

C_2 の x^2 の係数および 2 点 P，Q の x 座標に注意して

$$T_n = \frac{1}{6}\{(n+1)-1\}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3}$$

(3) (2) の結果から

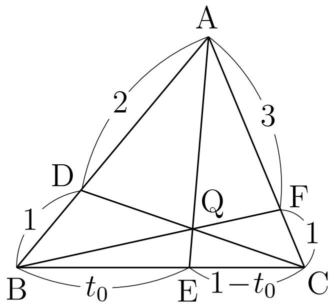
$$\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\frac{n+2}{2}\log(n+1) - n}{n\log\frac{n^3}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - 1}{3\log n - \log 6}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left\{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} - 1}{3\log n - \log 6}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)\left\{1 + \dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\} - \dfrac{1}{\log n}}{3 - \dfrac{\log 6}{\log n}}$$

よって $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}+0\right)(1+0) - 0}{3 - 0} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$ ■

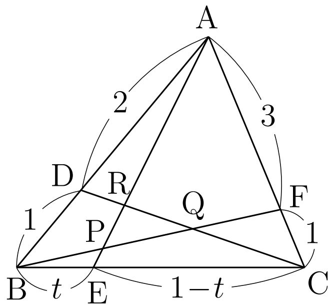
2 (1) チェバの定理により



$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{t_0=\dfrac{3}{5}}$

(2) △AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad ゆえに \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\dfrac{3}{t}$

よって　$k=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{3+t}}$

△BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\dfrac{3(1-t)}{2t}$

よって　$\ell=\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\dfrac{3(1-t)}{3-t}}$

(3) (2) の図について，△BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{3(1-t)}{4t}$　$\cdots$①

$t=\dfrac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので　$\dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\dfrac{1}{2}$　$\cdots$②

よって　$\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 1=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-t)}{3(1-t)+4t}-\frac{1}{3}=3+t:3-5t$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5t)^2$$

(3) の結果から　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$

解説 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると [1]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると　$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

3 (1) n 回サイコロ投げた後に，コインが P_i $(i = 0, 1, \cdots, 5)$ の位置にある確率を $P_i(n)$ とすると

$$\begin{aligned} P_0(n+1) &= \frac{1}{6}P_0(n) + \frac{1}{6}P_1(n) + \frac{1}{6}P_2(n) + \frac{1}{6}P_3(n) + \frac{1}{6}P_4(n) + \frac{1}{6}P_5(n) \\ &= \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n)\} \end{aligned}$$

自然数 n に対して　$P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n) = 1$

したがって　$P_0(n) = \dfrac{1}{6} \times 1 = \dfrac{1}{6}$　$\cdots(*)$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(2) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

解説 $P_i(n+1)$ は $P_j(n)$ によって決定する確率過程 (マルコフ連鎖) である．

$$\begin{aligned} P_0(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n)\} \\ P_1(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + 2P_5(n)\} \\ P_2(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_3(n) + 2P_4(n) + P_5(n)\} \\ P_3(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n)\} \\ P_4(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + 2P_2(n) + P_3(n) + P_5(n)\} \\ P_5(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n) + 2P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n)\} \end{aligned}$$

したがって　$P_0(n) = P_3(n) = \dfrac{1}{6}$,

$$\begin{aligned} P_1(n+1) - P_5(n+1) &= -\frac{1}{3}\{P_1(n) - P_5(n)\}, \\ P_2(n+1) - P_4(n+1) &= -\frac{1}{3}\{P_2(n) - P_4(n)\} \end{aligned}$$

$P_1(1) = P_2(1) = P_4(1) = P_5(1) = \dfrac{1}{6}$ より　$P_1(n) = P_5(n)$，$P_2(n) = P_4(n)$

これらの結果から　$P_1(n+1) = P_2(n+1) = \dfrac{1}{3}\left\{P_1(n) + P_2(n) + \dfrac{1}{6}\right\}$

ゆえに　$P_1(n+1) = \dfrac{2}{3}P_1(n) + \dfrac{1}{18}$

$P_1(1) = \dfrac{1}{6}$ であるから　$P_1(n) = \dfrac{1}{6}$　よって　$P_i(n) = \dfrac{1}{6}$ $(i = 0, 1, \cdots 5)$

■

4 (1) 仮定から $10^n \equiv a_n,\quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より $\boldsymbol{a_1 = 10}$

(1) の結果を用いると，法 13 について

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9 \\ a_3 &\equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12 \\ a_4 &\equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3 \\ a_5 &\equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4 \\ a_6 &\equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1 \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N = p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q$$

とおくと，法 13 に関して

$$\begin{aligned} N &\equiv p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q \\ &\equiv p\cdot 4 + 2\cdot 3 + 9 + 6\cdot 10 + q = 4p + q + 75 \\ &\equiv 4p + q - 3 \end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

■

5 (1) ド・モアブルの定理により

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i \sin n\theta \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の辺々を加えると

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

$(*)$ の辺々を引くと

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
\cos 2x &= \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1 \\
\cos 3x &= \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1, \quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = 1$$

整理すると　$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$　ゆえに　$(t-1)(t+2)(t-2) = 0$

これを解いて　$t = 1, -2, 2$　したがって　$\cos x = \dfrac{1}{2}, \ -1, \ 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$\boldsymbol{x = 0, \ \dfrac{\pi}{3}, \ \pi, \ \dfrac{5}{3}\pi}$

(3) (1) の結果から

$$\sin^2 n\theta = \left\{-\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\right\}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$$

$\theta = 20^\circ$ とすると，$z^{18} = 1$ であるから

$$(z^2-1)(z^{16}+z^{14}+\cdots+z^2+1) = 0$$

$z^2 \neq 1$ であるから　$z^{16}+z^{14}+\cdots+z^2+1 = 0$

また，$z \neq 0$ であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n}+\frac{1}{z^{2n}}\right) = -1$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4}\sin^2 n\theta &= \sum_{n=1}^{4}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n}+\frac{1}{z^{2n}}\right)\right\} \\ &= 4\times\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n}+\frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{4}\times(-1) = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

別解 $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ および $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ により

$$\begin{aligned}&\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ =&\frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ}{2}\end{aligned}$$

方程式 $\cos 3\theta + \dfrac{1}{2} = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の解は　$\theta = 40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

ここで，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから，方程式

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \frac{1}{2} = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

の解と係数の関係により　$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

補足 また，解と係数の関係により　$\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\dfrac{1}{8}$

参考 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$，$\alpha=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ とおくと

$$z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)$$

また　$z^n-1=(z-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)=\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\prod_{k=1}^{n-1}(1-\cos 2k\theta-i\sin 2k\theta)=\prod_{k=1}^{n-1}(2\sin^2 k\theta-2i\sin k\theta\cos k\theta)\\&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}(\sin k\theta-i\cos k\theta)\\&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)\right\}\\&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\times(\cos 0-i\sin 0)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\\(\text{右辺})&=n\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$

たとえば，$n=9$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9}=\frac{9}{256}$

したがって　$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\dfrac{3}{16}$　$\cdots$①

同様に，$n=18$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{17}\sin\frac{k\pi}{18}=\frac{9}{2^{16}}$

したがって　$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\cdots\sin 80^\circ=\dfrac{3}{256}$　$\cdots$②

さらに，①，② から　$\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\dfrac{1}{16}$　■

10.3　2017 年 (150 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 定数 $a > 0$ に対し，曲線 $y = a\tan x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_1，曲線 $y = \sin 2x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。

(2) a が (1) の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし，P の x 座標を p とする。P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき，a および $\cos 2p$ の値を求めよ。

(3) a が (2) で求めた値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 つの定数 $a > 0$ および $b > 0$ に対し，座標空間内の 4 点を

$$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を a，b を用いて表せ。

(2) さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a，b を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 初項 $a_1 = 1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

$\boxed{4}$ 赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A，B，C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール (a)，(b)，(c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

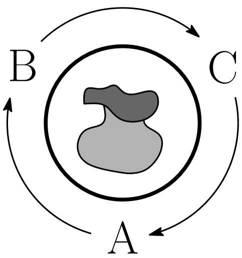
(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A，B，C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ。

(3) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。

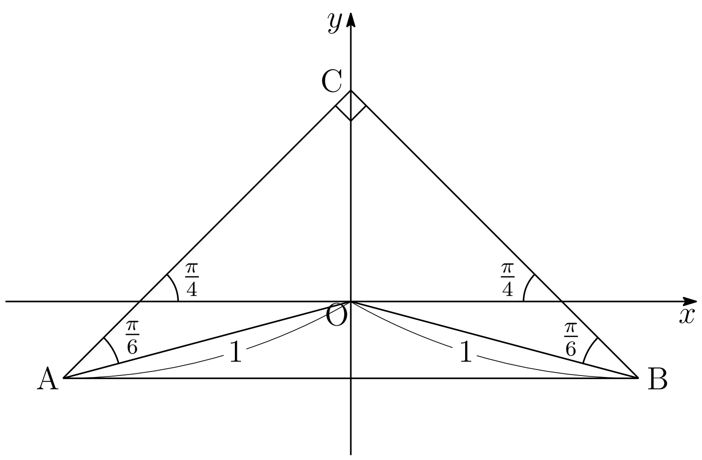


$\boxed{5}$ 2 つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ により定める。ただし，i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2) $|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3) 下図のように，複素数平面上の $\triangle\mathrm{ABC}$ は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお A，B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A，B の距離はともに 1 である。点 P_n が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



解答例

$\boxed{1}$ (1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y = a\tan x$ と $y = \sin 2x$ から y を消去すると

$$a\tan x = \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sin 2x}{\tan x} = 2\cos^2 x \quad \cdots ①$$

このとき，$0 < 2\cos^2 x < 2$ より　　$\boldsymbol{0 < a < 2}$

(2) $f(x) = a\tan x$，$g(x) = \sin 2x$ とおいて，これらを微分すると

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2 x}, \quad g'(x) = 2\cos 2x$$

交点 P の x 座標が p であるから，① より　　$a = 2\cos^2 p \quad \cdots ②$

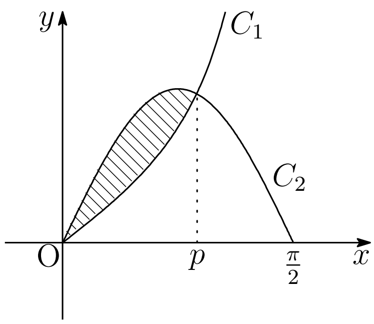
$f'(p)g'(p) = -1$ であるから　　$\dfrac{a}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1$

② を上式に代入すると

$$\frac{2\cos^2 p}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\cos 2p = -\frac{1}{4}}$$

したがって　　$a = 2\cos^2 p = \cos 2p + 1 = -\dfrac{1}{4} + 1 = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(3) 求める面積は右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left(\sin 2x - \frac{3}{4}\tan x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\log|\cos x|\right]_0^p \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2p + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log|\cos p| \end{aligned}$$

ここで，(2) の結果から　　$\log|\cos p| = \dfrac{1}{2}\log\cos^2 p = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8}$

よって　　$S = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8} = \boldsymbol{\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\log\dfrac{3}{8}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A$(a,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$，D$(a,\ b,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a,\ 0, -1), \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (a,\ b,\ 0)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$

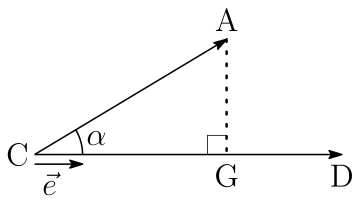
ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} = (0,\ 0,\ 1) + \dfrac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$

$$= \left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$$

よって　$\mathbf{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{a^3}{a^2+b^2}},\ \boldsymbol{\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}},\ \mathbf{1}\right)$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を α とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|} \quad \cdots ①$$



とすると，A から CD に下ろした垂線と CD の交点 G について

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = (|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha)\vec{e} \quad \cdots ②$$

また，$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$

これと ① を ② に代入すると　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

(2) B$(0,\ b,\ 0)$ から，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0,\ b, -1)$ であるから，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\ &= (0,\ 0,\ 1) + \frac{b^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0) = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right) - (a,\ 0,\ 0) \\ &= \left(-\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right), \\ \overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right) - (0,\ b,\ 0) \\ &= \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ -\frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)\end{aligned}$$

$\vec{u} = (a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\vec{v} = (a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ とおくと

$$\vec{u} = (-ab^2,\ a^2b,\ a^2+b^2), \quad \vec{v} = (ab^2, -a^2b,\ a^2+b^2)$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= -a^2b^4 - a^4b^2 + (a^2+b^2)^2 \\ &= (a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2), \\ |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 &= a^2b^4 + a^4b^2 + (a^2+b^2)^2 \\ &= (a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)\end{aligned}$$

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は θ であるから

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)} = \boldsymbol{\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2+a^2b^2}}$$

■

3 (1) 初項 $a_1 = 1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3 \cdots ①$$

a_n が 7 の倍数であるとき，$4n - 3 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8n \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -1 \pmod 7$$

このとき，n は整数 m を用いて

$$n = 7m - 1 \quad \cdots ②$$

したがって，$1 \leqq 7m - 1 \leqq 600$ を満たす整数 m の個数は

$$\frac{2}{7} \leqq m \leqq \frac{601}{7} \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq m \leqq 85$$

よって，求める個数は　**85** (個)

(2) ② を ① に代入すると

$$a_n = 4(7m-1) - 3 = 7(4m-1)$$

a_n が 7^2 の倍数であるとき，$4m - 1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8m \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv 2 \pmod 7$$

このとき，m は整数 l を用いて

$$m = 7l + 2$$

これを ② に代入すると

$$n = 7(7l+2) - 1 = 49l + 13 \quad \cdots ③$$

したがって，$1 \leqq 49l + 13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) ③ を ① に代入すると

$$a_n = 4(49l + 13) - 3 = 7^2(4l + 1)$$

a_n が 7^3 の倍数であるとき，$4l + 1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8l \equiv -2 \quad \text{ゆえに} \quad l \equiv -2 \pmod 7$$

このとき，l は整数 k を用いて

$$l = 7k - 2$$

これを ③ に代入すると

$$n = 49(7k - 2) + 13 = 343k - 85 \quad \cdots ④$$

$1 \leqq 343k - 85 \leqq 600$ を満たす整数 k は 1 で，このとき　$n = 258$

④ を ① に代入すると

$$a_n = 4(343k - 85) - 3 = 7^3(4k - 1)$$

これから，a_n が 7^4 の倍数となることはない．

以上の結果および ②，③ より，$1 \leqq n \leqq 600$ に対して

a_n が 7 の倍数であるとき　$n \equiv -1 \pmod 7$
a_n が 7^2 の倍数であるとき　$n \equiv 13 \pmod{49}$
a_n が 7^3 の倍数であるとき　$n = 258$

数列 $\{a_n\}$ のうち，7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

上の表で 2 列目のみ 7^2 を因数にもち，それ以外の列は 7 を因数にもつ．
ただし，第 6 行目第 2 列の a_{258} のみ 7^3 を因数にもつ．
したがって，2 列目以外の 32 項 (7 を因数にもつ)，2 列目の第 1 行から第 5 行目までの 5 項 (7^2を因数にもつ) および第 6 行目第 2 列の a_{258} より

$$32 \times 1 + 2 \times 5 + 3 = 45$$

よって，求める n の最小値は　　$\boldsymbol{n = 265}$

別解　(2) $a_n = 4n-3$ より，a_n が 7^2 の倍数であるとき

$$4n-3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 12(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 13 \pmod{7^2}$$

n は整数 l を用いて　$n = 49l + 13$

したがって，$1 \leqq 49l + 13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) $a_n = 4n-3$ より，a_n が 7^3 の倍数であるとき

$$4n-3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 86(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 258 \pmod{7^3}$$

n は整数 m を用いて　$n = 343m + 258$

したがって，$1 \leqq 343m + 258 \leqq 600$ を満たす整数 m は $m = 0$ の1個で

$$a_{258} = 4 \cdot 258 - 3 = 1029 = 3 \cdot 7^3$$

また，$\{a_n\}$ の初項から第600項のうち，7^4 で割り切れる項はない．

(1),(2) の結果から，数列 $\{a_n\}$ のうち，7の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

これら38個の項をそれぞれ7で割ると，さらに7で割り切れる項が第2列に6個あり，これらをまた7で割ると，最後に残った a_{258} だけが7で1回割れる．

したがって，これら38個の積は7で $38+6+1$，すなわち，45回割り切れる．

よって，求める n の最小値は　$\boldsymbol{n = 265}$　■

$\boxed{4}$ (1) 定められたルールにより，次の確率漸化式が得られる．

$$(*)\quad a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+c_n),\quad b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+b_n),\quad c_{n+1}=\frac{1}{4}(b_n+c_n)$$

$d_n=a_n+b_n+c_n$ $(n=1,2,\cdots)$ とすると

$$d_1=a_1+b_1+c_1=1+0+0=1$$

$(*)$ の辺々を加えることにより

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n\quad \text{ゆえに}\quad d_n=\frac{1}{2^{n-1}}\qquad\cdots ①$$

したがって，$(*)$ は

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-b_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}b_n\\
b_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-c_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}c_n\\
c_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-a_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}a_n
\end{aligned}$$

上の 3 式から，$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}c_{n-1}\right)=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}c_{n-1}\\
&=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4}a_{n-2}\right)=\frac{3}{2^{n+3}}-\frac{1}{64}a_{n-2}\qquad\cdots ②
\end{aligned}$$

② に $n=3,\ 6$ を代入することにより

$$\begin{aligned}
a_4&=\frac{3}{2^6}-\frac{1}{64}a_1=\frac{3}{64}-\frac{1}{64}\cdot 1=\frac{1}{32}\\
a_7&=\frac{3}{2^9}-\frac{1}{64}a_4=\frac{3}{512}-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{32}=\frac{11}{2048}
\end{aligned}$$

よって　A が 4 回目に勝つ確率は　$a_4\times\frac{2}{4}=\frac{1}{32}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{64}}$

A が 7 回目に勝つ確率は　$a_7\times\frac{2}{4}=\frac{11}{2048}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{11}{4096}}$

(2) ① より　$\boldsymbol{d_n=\frac{1}{2^{n-1}}}$

(3) ② より　$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{3}{2^{n+3}}-\frac{1}{64}a_{n-2}}$　■

$\boxed{5}$ (1)

$$\alpha = 10000 + 10000i = 10000\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに $z_n = \alpha w^n = \dfrac{10000\sqrt{2}}{2^n}\left\{\cos\left(\dfrac{n}{6} + \dfrac{1}{4}\right)\pi + i\sin\left(\dfrac{n}{6} + \dfrac{1}{4}\right)\pi\right\}$

よって $\boldsymbol{|z_n| = \dfrac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}},\quad \arg z_n = \left(\dfrac{n}{6} + \dfrac{1}{4}\right)\pi}$

(2) (1) の結果から，$|z_n| \leqq 1$ のとき

$$\frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-\frac{1}{2}} \geqq 10^4$$

両辺の常用対数をとると

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\log_{10} 2 \geqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2}$$

ここで $\dfrac{4}{\log_{10} 2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{0.301} + 0.5 = 13.7\cdots$

よって，求める最小の自然数 n は $\boldsymbol{n = 14}$

(3) (1),(2) の結果から

$$|z_{14}| = \frac{10000}{2^{14-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4{\cdot}5^4}{2^{13}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^9}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{512}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg z_{14} = \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{7}{12}\pi + 2\pi$$

$$|z_{15}| = \frac{10000}{2^{15-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4{\cdot}5^4}{2^{14}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^{10}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{1024}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}{\cdot}\frac{125}{128}{\cdot}\frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}{\cdot}\frac{125}{128}\sqrt{\frac{25}{32}} < \frac{1}{2}$$

$$\arg z_{15} = \left(\frac{15}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi$$

したがって，P_{14} は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外部にあり，P_{15} は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部にある．

よって，求める最小の自然数 n は $\boldsymbol{n = 15}$ ■

10.4　2018 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 座標空間において，xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geqq 1$ を満たす部分を C とする。また，z 軸上の点 A$(0,\ 0,\ 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき，直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，d は正の定数とする。

2 原点を中心とする半径 3 の半円 $C : x^2 + y^2 = 9\ (y \geqq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2) 点 P を $(-3,\ 0)$ に固定する。Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

3 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが $0,\ 1,\ 2,\ 3$ である確率をそれぞれ $p_n,\ q_n,\ r_n,\ s_n$ とする。$p_n,\ q_n,\ r_n,\ s_n$ を求めよ。

4 整数 $a,\ b$ は 3 の倍数ではないとし，

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

(3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

5 α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\overline{z} = 0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ C 上の点 P を $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,\ 0\right)$ とおく $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 直線 AP と平面 $x=d$ との交点を Q とすると，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(0,\ 0,\ 1)+k\left(\frac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,-1\right)\\&=\left(\frac{k}{\cos\theta},\ k\tan\theta,\ 1-k\right)\quad\cdots①\end{aligned}$$

点 Q の x 座標が d であるから

$$\frac{k}{\cos\theta}=d \quad ゆえに \quad k=d\cos\theta$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(d,\ d\sin\theta,\ 1-d\cos\theta)\\&=(d,\ 0,\ 1)+d(0,\ \sin\theta,-\cos\theta)\end{aligned}$$

ここで
$$\begin{aligned}\sin\theta&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\-\cos\theta&=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(d,\ 0,\ 1)+d\left(0,\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

このとき，$-\pi<\theta-\dfrac{\pi}{2}<0$ であるから，求める軌跡は，

平面 $\boldsymbol{x=d}$ 上の点 $\boldsymbol{(d,\ 0,\ 1)}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{d}$ の円周上で $\boldsymbol{z<1}$.

別解 軌跡の方程式を，次のように表してもよい.

$$\begin{cases}x=d\\y^2+(z-1)^2=d^2\\z<1\end{cases}$$

双曲線の媒介変数表示

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$ により，

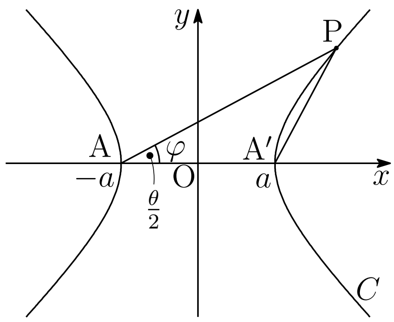
$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{y}{b}=\tan\theta$$

とおくと，双曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，次のように媒介変数表示ができる．

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$

とくに，$a=b$ のとき，直角双曲線となる．

直角双曲線 $C:x^2-y^2=a^2$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，2 頂点を $\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(a,0)$ とおく．



直線 AP の傾きを m，直線 A′P の傾きを m' とすると

$$m=\frac{y}{x+a},\quad m'=\frac{y}{x-a}\quad ゆえに\quad mm'=\frac{y^2}{x^2-a^2}=1$$

P は 2 直線 $\mathrm{AP}:y=m(x+a)$，$\mathrm{A'P}:y=\dfrac{1}{m}(x-a)$ の交点であるから

$$x=\frac{1+m^2}{1-m^2}a,\quad y=\frac{2m}{1-m^2}a$$

ここで，$m=\tan\varphi$ とおくと　$x=\dfrac{a}{\cos 2\varphi}$，$y=a\tan 2\varphi$

さらに，$\theta=2\varphi$ とおくことにより　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=a\tan\theta$

直角双曲線の漸近線が $y=x$ と $y=-x$ であるから，$0\leqq\theta<2\pi$，すなわち，$0\leqq\varphi<\pi$ において，$\varphi\neq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$ である．$\varphi=\frac{\pi}{4}-0$ のとき P は第 1 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{\pi}{4}+0$ のとき P は第 3 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi-0$ のとき P は第 2 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi+0$ のとき P は第 4 象限の無限遠点にある．■

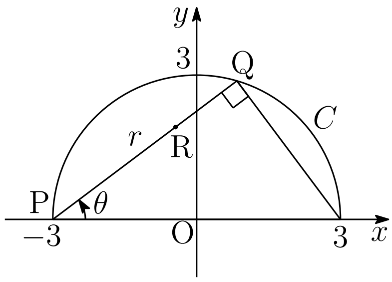
2 (1) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$ であるから，$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}\mathrm{PQ}$ より

$$S = \int_0^3 \mathrm{PR}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{3\pi}$$

(2) $\theta = \angle\mathrm{OPQ}$，$r = \mathrm{PQ}$ とおくと $(r = 6\cos\theta)$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{9}{2}\pi$$

$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}r$ より



$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}r\right)^2 d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{2\pi}$$

(3) $C : x^2 + y^2 = 9\ (y \geqq 0)$ の第 1 象限と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は，半径 3 の半球の体積であるから

$$\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 18\pi$$

$\mathrm{P}(-x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ を $2:1$ に内分する点は　$\left(\dfrac{x}{3},\ y\right)$　$(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

この点の軌跡は C の第 1 象限の部分を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ だけ縮小したものであるから，図形 S と第 1 象限の共通部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi\int_0^3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{9}\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{9}\cdot 18\pi = 2\pi$$

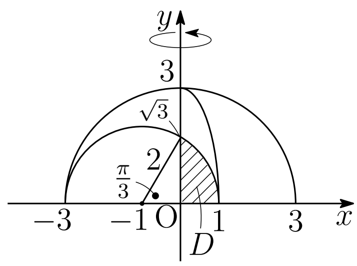
$\mathrm{P}(-3,\ 0)$，$\mathrm{Q}(s,\ t)$ を $2:1$ に内分する点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{2s-3}{3},\quad y = \frac{2t}{3}\quad \text{ゆえに}\quad s = \frac{3}{2}(x+1),\quad t = \frac{3}{2}y$$

Q は C 上の点であるから　$s^2 + t^2 = 9\ \ (t \geqq 0)$

これに上の結果を代入することにより，R の軌跡の方程式は

$$\frac{9}{4}(x+1)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9\quad \text{ゆえに}\quad (x+1)^2 + y^2 = 4\ \ (y \geqq 0)\quad \cdots(*)$$



$(*)$ の y 軸との交点の y 座標は，$(*)$ に $x=0$ を代入して

$$y=\sqrt{3}$$

右の図の領域 D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,dy \\ &= \pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy-2\pi\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy \qquad \cdots(**) \end{aligned}$$

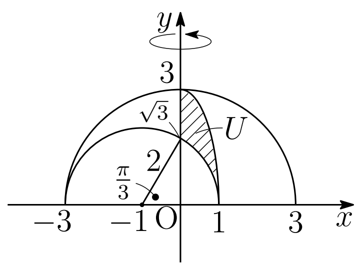
ここで　$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy &= \int_0^{\sqrt{3}}(3-y^2)\,dy \\ &= \left[\ 3y-\frac{1}{3}y^3\ \right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

また，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy$ は，D の面積であるから

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これらを $(**)$ に代入すると

$$V_2=2\sqrt{3}\pi-2\pi\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

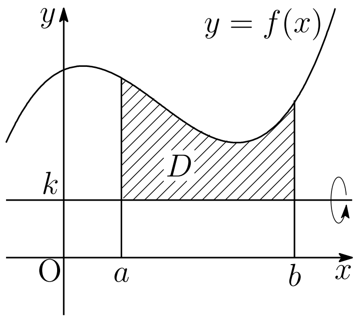


U の表す領域は右の図の斜線部分で，これを y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

$$\begin{aligned} V_1-V_2 &= 2\pi-\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi \\ &= \boldsymbol{\left(2-3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)\pi} \end{aligned}$$

注意　$(**)$ の $\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy$ は，D を直線 $x=-1$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を表す．

解説

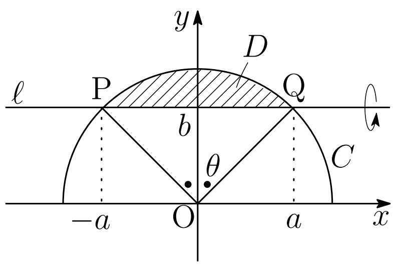


$k>0$ とする．曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ が，区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq k$ であるとき，この区間において，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ で囲まれた領域 D を直線 $y=k$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_a^b (y-k)^2\,dy$$
$$=\pi\int_a^b (y^2-k^2)\,dx-2\pi k\int_a^b (y-k)\,dx$$

D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると

$$\boldsymbol{V=V_x-2\pi kS}$$



半円 $C: x^2+y^2=a^2+b^2\ (y \geqq 0)$ と直線 $\ell: y=b\ (b \geqq 0)$ で囲まれた領域を D とする．D を ℓ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V，D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると

$$V_x=\pi\int_{-a}^{a}(y^2-b^2)\,dx=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi a^3$$

とくに，V_x は C の半径 r に関係なく a の値により決定する．
C と ℓ の 2 つの交点 P，Q に対し，$\angle\mathrm{POQ}=2\theta$，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=r$ とおくと

$$S=\frac{1}{2}r^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=r^2\theta-ab,$$
$$V=V_x-2\pi bS=\frac{4}{3}\pi a^3-2\pi b(r^2\theta-ab)$$
$$=2\pi\left(\frac{2}{3}a^3+ab^2-br^2\theta\right)$$

例えば，$C: x^2+y^2=4$，$\ell: y=1$ のとき，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$r=2$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ より

$$V=2\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

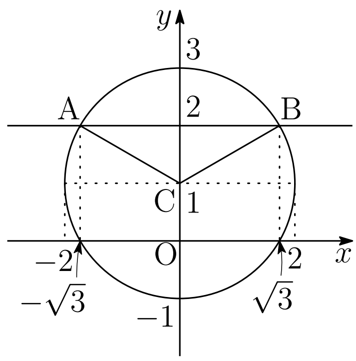
これは，前ページで求めた V_2 の 2 倍に等しい．

このように，領域 D を回転させた回転体の体積 V は，D の面積 S を利用すると，簡単に求めることができる．

例題 次の領域 D_1 および D_2 をそれぞれ x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$$D_1 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

解答 D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．



右図において，$\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi\cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$y = 1 + \sqrt{4-x^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2) \cdots (*)$ とすると

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx = S_1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

D_1 および D_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする．$(*)$ より，$x^2+(y-1)^2 = 4$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y^2 - 2^2)\,dx \\ &= 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)\,dx \\ &= 2\pi S_1 + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)\,dx \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{6}(2\sqrt{3})^3 \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{4 - x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 2 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{4 - x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

とすると

$$f(x) + g(x) = 2, \quad \int_{-2}^{2} \{f(x) - g(x)\}\,dx = S_2$$

したがって

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x)^2 - g(x)^2\}\,dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x) + g(x)\}\{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} 2\{f(x) - g(x)\}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2} \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= 2\pi S_2 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

補足　D_2 の重心は $(0,\ 1)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理[2] により

$$V_2 = 2\pi S_2 \cdot 1 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$$

九大理系 2012 年

円 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答　求める体積は　$V_1 + V_2 = 2\pi \left(\dfrac{8\pi}{3} + 3\sqrt{3}\right)$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 参照)

九大理系 2013 年

原点 O を中心とし，点 A(0, 1) を通る円を S とする。点 B$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

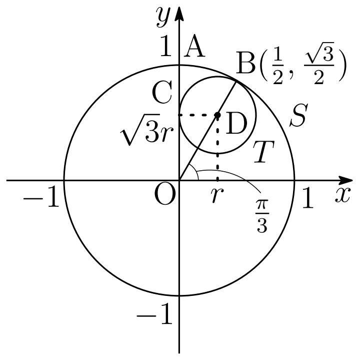
(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答　(1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから，T の半径を r とすると，D の座標は $(r,\ \sqrt{3}r)$，$\mathrm{OD} = 2r$ である．
右の図より，$\mathrm{OD} + \mathrm{DB} = 1$ であるから

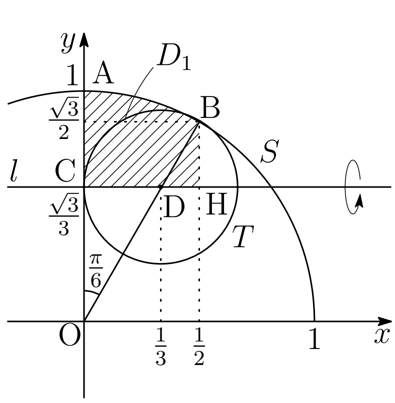
$$2r + r = 1 \quad ゆえに \quad r = \frac{1}{3}$$

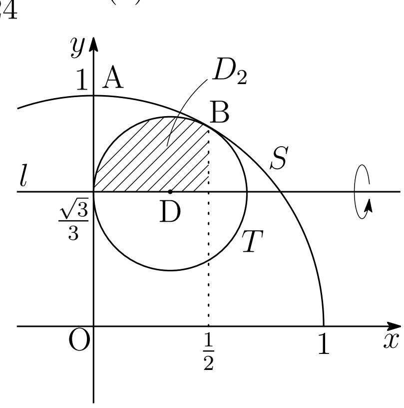
よって　　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$



(2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ とすると，S と y 軸，l，直線 $x = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた領域 D_1 の面積は，左下の図から

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \triangle\mathrm{OCD} + \triangle\mathrm{BDH}$$
$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \quad \cdots (*)$$





D_1 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると，$x^2+y^2=1$ および $(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\frac{1}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right)\end{aligned}$$

D_2 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると，

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

に注意して

$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}x-x^2\right) dx$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{V_1}{\pi}-\frac{V_2}{\pi} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\,dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left[\,x-\frac{x^2}{2}\,\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi+\frac{1}{12} = \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{V=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\right)}$ ■

3 法 4 に関する 0，1，2，3 の積は，右のようになる．
したがって，次の確率漸化式が成立する．

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$p_1 = q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4}$$
$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ①$$
$$q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ②$$
$$r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ③$$
$$s_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ④$$

$q_1 = s_1 = \frac{1}{4}$ および ②，④ より，$q_n = s_n$ であるから

$$q_1 = \frac{1}{4},\quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \quad ゆえに \quad q_n = q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

したがって　$\boldsymbol{q_n = s_n = \frac{1}{2^{n+1}}}$　これを ③ に代入すると

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2^{n+2}} \quad ゆえに \quad 2^{n+1}r_{n+1} = 2^n r_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{2^n r_n\}$ は初項 $2r_1 = \frac{1}{2}$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$2^n r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} \quad ゆえに \quad \boldsymbol{r_n = \frac{n}{2^{n+1}}}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - q_n - r_n - s_n \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \boldsymbol{1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

■

4 (1) 整数 $a,\ b$ は 3 の倍数ではないから

$$a \equiv \pm 1,\ b \equiv \pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 1 \pmod 3 \qquad \cdots(*)$$

$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$ より，法 3 に関して

$$\begin{aligned} f(1) &= a^2 + 2b^2 + 3 \equiv 1 + 2\cdot 1 + 3 \equiv 0 && \pmod 3 \\ f(2) &= 4a^2 + 4b^2 + 17 \equiv 4\cdot 1 + 4\cdot 1 + 17 \equiv 1 && \pmod 3 \end{aligned}$$

よって，$f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りはそれぞれ **0** と **1**

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x が m であるとき

$$2m^3 + a^2m^2 + 2b^2m + 1 = 0$$

したがって　$m(2m^2 + a^2m + 2b^2) = -1$

上式より，次の (i), (ii) の場合分けができる．

(i) $m = 1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = -1$ のとき，
第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 + a^2 + 2b^2 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 2b^2 = -3$$

$a^2 + 2b^2 \geqq 0$ であるから，不適．

(ii) $m = -1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = 1$ のとき，
第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 - a^2 + 2b^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad -a^2 + 2b^2 = -1$$

$(*)$ より，$-a^2 + 2b^2 \equiv 1 \pmod 3$ であるから，不適．

(i), (ii) より，$f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しない．

補足 x を整数とするとき　$x + 3 \equiv x \pmod 3$
n を自然数とするとき　$(x+3)^n \equiv x^n \pmod 3$
ゆえに　$f(x+3) \equiv f(x) \pmod 3$

これと (1) の結果および $f(0) = 1$ から，$x \equiv 1 \pmod 3$ が $f(x) = 0$ を満たす x であるための必要条件である．したがって，(2) は，(ii) の $m = 1$ の場合についてのみ調べればよい．

(3) $f(x)=0$ を満たす x は負である．(2) の結果に注意すると，$f(x)=0$ を満たす有理数 x は整数ではないから，x を $\dfrac{p}{q}$ とすると (p, q は互いに素である整数，$p<0$, $q>1$)

$$2\left(\frac{p}{q}\right)^3+a^2\left(\frac{p}{q}\right)^2+2b^2\cdot\frac{p}{q}+1=0$$
$$2p^3+a^2p^2q+2b^2pq^2+q^3=0$$
$$\frac{2p^3}{q}+a^2p^2+2b^2pq+q^2=0 \quad \cdots ①$$

上式の $a^2p^2+2b^2pq+q^2$ が整数であるから，$\dfrac{2p^3}{q}$ は整数である．このとき，p と q は互いに素であるから ($q>1$)，$q=2$．これを ① に代入すると

$$p^3+a^2p^2+4b^2p+4=0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p^2+a^2p+4b^2)=-4 \quad \cdots ②$$

負の整数 p は -4 の約数で，$q\ (=2)$ と互いに素であるから　$p=-1$

$p=-1$ を ② に代入すると

$$-(1-a^2+4b^2)=-4 \quad \text{ゆえに} \quad |a|^2-4|b|^2=-3$$

したがって　$(|a|+2|b|)(|a|-2|b|)=-3$

条件より a, b は 0 でない整数であるから，$|a|+2|b| \geqq 3$ に注意すると

$$\begin{cases} |a|+2|b|=3 \\ |a|-2|b|=-1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |a|=|b|=1$$

a, b は，3 の倍数でないことに注意して

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,-1),\ (-1,\ 1),\ (-1,-1)}$$

■

5 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ より

$$\frac{\alpha}{2|\alpha|^2+1}+\frac{\overline{z}i}{|z|^2+2}=0 \quad ゆえに \quad \frac{\overline{z}}{|z^2|+2}=\frac{\alpha i}{2|\alpha|^2+1}$$

上の第 2 式の共役複素数は　$\dfrac{z}{|z|^2+2}=\dfrac{-\overline{\alpha}i}{2|\alpha|^2+1}$　$\cdots(*)$

(i) $\alpha=0$ のとき，$(*)$ より　$z=0$

(ii) $\alpha\neq 0$ のとき，$(*)$ より，$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ とおくと $(k>0)$

$|z|=k|\alpha|$ であるから，これを $\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ に代入すると

$$\frac{k^2|\alpha|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k \quad ゆえに \quad |\alpha|^2k^2-(2|\alpha|^2+1)k+2=0$$

したがって　$(k-2)(|\alpha|^2k-1)=0$　これを解いて　$k=2,\ \dfrac{1}{|\alpha|^2}$

$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=k$ であるから　$z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}$

(i), (ii) より　$\boldsymbol{\alpha=0}$ **のとき**　$\boldsymbol{z=0}$

$\boldsymbol{\alpha\neq 0}$ **のとき**　$\boldsymbol{z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}}$

■

10.5　2019 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 n を自然数とする。x，y がすべての実数を動くとき，定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\,dt$$

の最小値を I_n とおく。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

2 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} f(x^2) &= (x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3) &= x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

3 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に a，b，c とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解 z_1，z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ とする。また，複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。

(2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3) P_1 と O を通る直線を ℓ_1 とし，P_2 と O を通る直線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 のなす鋭角が 60° である確率を求めよ。

4 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2，P_3，$\cdots\cdots$ を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \to \infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

5 a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az+b}{cz+1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり，$z = -i$ のときに $w = -i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a，b，c の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

解答例

$\boxed{1}$ まず，次の定積分を計算する．

$$\int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 4n\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\,t - \frac{1}{4n\pi}\sin 4n\pi t\,\Big]_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt = \Big[-\frac{t}{2n\pi}\cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi t\,\Big]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi},$$
$$\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi}\Big[\,\cos 2n\pi t\,\Big]_0^1 = 0,$$
$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3},\quad \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2},\quad \int_0^1 dt = 1$$

上の結果により

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\,dt \\
&\qquad = \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt + x^2\int_0^1 t^2\,dt + y^2\int_0^1 dt \\
&\qquad\qquad - 2x\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt - 2y\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt + 2xy\int_0^1 t\,dt \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 - 2x\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) - 2y\cdot 0 + 2xy\cdot\frac{1}{2} \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \frac{x}{n\pi} + xy \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2} \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \qquad \cdots (*)
\end{aligned}$$

したがって　$x = -\dfrac{6}{n\pi}$，$y = \dfrac{3}{n\pi}$ のとき，$(*)$ は最小値 $I_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{n^2\pi^2}$ をとる．

よって　　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}}$

別解 $\displaystyle\int_0^1 dt = 1$，$\displaystyle\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ より，$f(t) = t - \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0, \quad \int_0^1 f(t)^2\,dt = \frac{1}{3}\Big[\ \left(t - \frac{1}{2}\right)^3\ \Big]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$\displaystyle\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt = 0$，$\displaystyle\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi}$ より

$$\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi} = -\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{1}{12} = -\frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)^2\,dt$$

したがって $$\int_0^1 f(t)\left\{\sin 2n\pi t + \frac{6}{n\pi}f(t)\right\}dt = 0$$

$g(t) = \sin 2n\pi t + \dfrac{6}{n\pi}f(t)$ とおくと $\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(t)\,dt &= \int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt + \frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)\,dt = 0,\\
\int_0^1 g(t)^2\,dt &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt + \frac{12}{n\pi}\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt + \frac{36}{n^2\pi^2}\int_0^1 f(t)^2\,dt\\
&= \frac{1}{2} + \frac{12}{n\pi}\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) + \frac{36}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

$\sin 2n\pi t = -\dfrac{6}{n\pi}f(t) + g(t)$，$t = f(t) + \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
\sin 2n\pi t - xt - y &= -\frac{6}{n\pi}f(t) + g(t) - x\left(f(t) + \frac{1}{2}\right) - y\\
&= -\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)f(t) + g(t) - \left(\frac{x}{2} + y\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\sin 2n\pi t - xt - y)^2\,dt &= \left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2\int_0^1 f(t)^2\,dt + \int_0^1 g(t)^2\,dt + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2\\
&= \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2\\
&\geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} = I_n
\end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}}$$ ■

2 (1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2) = (x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3) = x^4f(x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とする．$(*)$ の第 1 式から，$f(x)$ と $g(x)$ の最高次の係数が等しいことに注意して

$$\begin{cases} 2m = 2+n & \cdots ① \\ 3n = \max(4+m,\ 2+n) & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n = 4+m$　ゆえに　$m = 3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m = n = 2$

(ii) $4+m < 2+n$ のとき，② より　$3n = 2+n$　ゆえに　$n = 1$
これを ① に代入すると，$m = \dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x) = g(x)$　$\cdots ③$
また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(-x) - 6x^2 - 2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x) = f(x)$
また，$(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0)+7,\quad g(0) = -2 \quad ゆえに \quad f(0) = 3$$

以上の結果から，$f(x) = ax^2+3$，$g(x) = ax^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4+3 = (x^2+2)(ax^2-2)+7 \\ ax^6-2 = x^4(ax^2+3) - 3x^2(ax^2-2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

整理すると　$\begin{cases} 2(a-1)x^2 = 0 \\ -3(a-1)x^4 = 0 \end{cases}$　ゆえに　$a = 1$

よって　$\boldsymbol{f(x) = x^2+3,\ \ g(x) = x^2-2}$ ■

3 (1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\cdots(*)$ の解 z_1，z_2 が $z_1=z_2$，すなわち，2 次方程式 $(*)$ が重解をもつ確率である．係数について，$b^2-4ac=0$ であるから，$b^2=4ac$ より

$b=2$ のとき，$ac=1$ より　$(a,\ c)=(1,\ 1)$
$b=4$ のとき，$ac=4$ より　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b=6$ のとき，$ac=9$ より　$(a,\ c)=(3,\ 3)$

よって，求める確率は　$\dfrac{1+3+1}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{216}}$

(2) (i) 2 次方程式 $(*)$ が単位円周上に実数解をもつとき，その解は 1 ではないから，$(*)$ は -1 を重解にもち，その方程式は

$$a(x+1)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=2a,\ \ c=a$$

これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の 3 組である．

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 2),\ (3,\ 6,\ 3)$$

(ii) 2 次方程式 $(*)$ が単位円周上に虚数解をもつとき　$b^2-4ac<0$　$\cdots①$
$(*)$ の解と係数の関係および $z_2=\overline{z_1}$，$|z_1|=1$ に注意して

$$z_1z_2=\frac{c}{a} \quad \text{ゆえに} \quad |z_1|^2=\frac{c}{a} \quad \text{すなわち} \quad c=a \quad \cdots②$$

② を ① に代入して　$b^2-4a^2<0$　ゆえに　$\dfrac{b}{2}<a=c$

$b=1$ のとき　$a=c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=2,\ 3$ のとき　$a=c=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=4,\ 5$ のとき　$a=c=3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=6$ のとき　$a=c=4,\ 5,\ 6$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$6+2\cdot5+2\cdot4+3=27$ 組

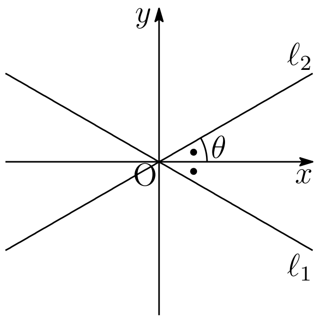
よって，求める確率は　$\dfrac{3+27}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$

(3) 条件を満たす z_1，z_2 は虚数であるから

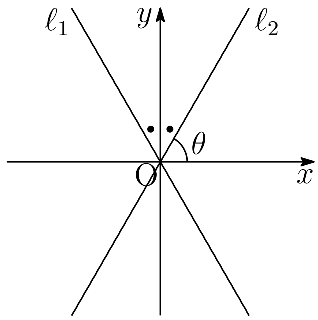
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}$$

ℓ_2 の偏角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{b}$

(i)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



(ii)　$\tan\theta = \sqrt{3}$



(i) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より

$$\sqrt{3(4ac - b^2)} = b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 3ac$$

$b = 3$ のとき，$ac = 3$ より　$(a,\ c) = (1,\ 3),\ (3, 1)$
$b = 6$ のとき，$ac = 12$ より　$(a,\ c) = (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$2 + 4 = 6$ 組

(ii) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \sqrt{3}$ より

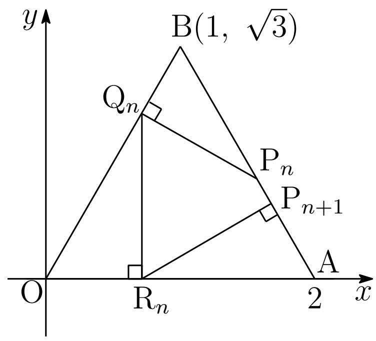
$$\sqrt{4ac - b^2} = \sqrt{3}b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = ac$$

$b = 1$ のとき，$ac = 1$ より　$(a,\ c) = (1,\ 1)$
$b = 2$ のとき，$ac = 4$ より　$(a,\ c) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b = 3$ のとき，$ac = 9$ より　$(a,\ c) = (3,\ 3)$
$b = 4$ のとき，$ac = 16$ より　$(a,\ c) = (4,\ 4)$
$b = 5$ のとき，$ac = 25$ より　$(a,\ c) = (5,\ 5)$
$b = 6$ のとき，$ac = 36$ より　$(a,\ c) = (6,\ 6)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$5 \cdot 1 + 3 = 8$ 組

よって，求める確率は　$\dfrac{6 + 8}{6^3} = \mathbf{\dfrac{7}{108}}$　■

4 点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を通り，直線 OB に垂直な直線は



$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$

これと直線 OB : $y = \sqrt{3}x$ の交点の x 座標は

$$\sqrt{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$

これを解くことにより，点 Q_n の x 座標は　$x = \dfrac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$

次に，点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

これを解くことにより，点 R_n の x 座標は　$x = x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1}$

点 Q_n と点 R_n の x 座標は等しいから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$$

2 点 P_n，P_{n+1} は直線 AB : $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上の点であるから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_{n+1} + 2\sqrt{3}) = \frac{x_n + \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3})}{4}$$

整理すると　$x_{n+1} = -\dfrac{1}{8}x_n + \dfrac{15}{8}$　ゆえに　$x_{n+1} - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{1}{8}\left(x_n - \dfrac{5}{3}\right)$

数列 $\left\{x_n - \dfrac{5}{3}\right\}$ は初項 $x_1 - \dfrac{5}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$x_n - \frac{5}{3} = \left(x_1 - \frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{5}{3}$$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}\cdot\frac{5}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

よって，求める点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}$ ■

5

$$C : w = \frac{az+b}{cz+1} \quad \cdots (*)$$

条件 (ア) により　$i = \dfrac{ai+b}{ci+1},\quad -i = \dfrac{a(-i)+b}{c(-i)+1}$

ゆえに　$b+c+(a-1)i = 0,\quad b+c-(a-1)i = 0$

上の 2 式から　$a = 1,\quad b = -c$

これを $(*)$ に代入すると　$w = \dfrac{z-c}{cz+1} \cdots$ ①　ゆえに　$z = -\dfrac{w+c}{cw-1}$

点 z は虚軸全体を動くから，$z+\overline{z} = 0$ より　$-\dfrac{w+c}{cw-1} - \dfrac{\overline{w}+\overline{c}}{\overline{c}\,\overline{w}-1} = 0$

整理すると　$(c+\overline{c})|w|^2 + (|c|^2-1)(w+\overline{w}) - (c+\overline{c}) = 0 \quad \cdots$ ②

条件 (イ) に注意すると，① により　$c \neq 0$

さらに，c は純虚数ではないから　$c+\overline{c} \neq 0$

$k = \dfrac{|c|^2-1}{c+\overline{c}} \cdots$ ③ とおいて (k は実数)，② に適用すると

$$|w|^2 + k(w+\overline{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w+k|^2 = k^2+1$$

条件 (イ) により　$k^2+1 = 1$　ゆえに　$k = 0$　よって　$|w| = 1 \quad \cdots (**)$

また，③ により　$|c|^2 - 1 = 0$　ゆえに　$c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき，① により

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2z}{z+1}$$

$z = 0$ のとき，$w = -1$ となり，条件 (ウ) に反する．

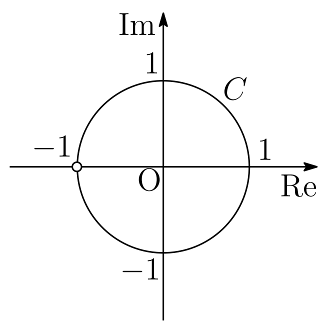
(ii) $c = -1$ のとき，① により

$$w = \frac{z+1}{-z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2}{-z+1} \neq 0$$

これは，条件 (ウ) を満たす．

よって　$\boldsymbol{a = 1,\ \ b = 1,\ \ c = -1}$

$(**)$ および $w \neq -1$ により，C の概形は右の図のようになる．



補足 $z = i\tan\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $w = \dfrac{z+1}{-z+1}$ に代入すると

$$w = \frac{i\tan\theta + 1}{-i\tan\theta + 1} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ より，w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある．

解説 一般に，1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は複素数},\ ad - bc \neq 0)$$

は，拡縮 (回転)kz，平行移動 $z + \alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換である．
特に反転に関して，次の性質がある[3]．

- 原点を通らない円は，原点を通らない円に移る．
- 原点を通る円は，原点を通らない直線に移る．
- 原点を通らない直線は，原点を通る円から原点を除いた図形に移る．
- 原点を通る直線は，原点を通る直線から原点を除いた図形に移る．

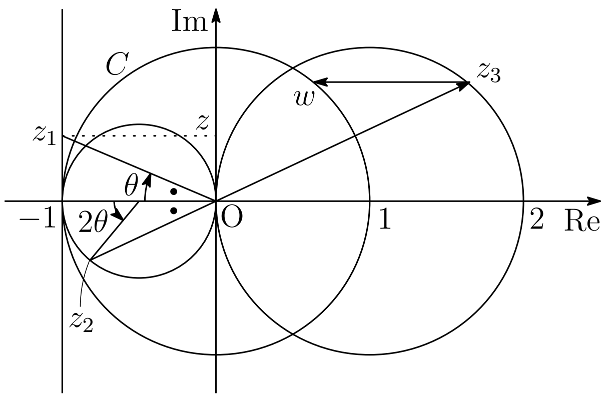
次の変換 (平行移動，反転，拡縮，平行移動)

$$f_1(z) = z - 1, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -2z, \quad f_4(z) = z - 1$$

について，合成変換 $f(z) = f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1(z)$ は $\quad f(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$

$z = i\tan\theta$，$z_1 = f_1(z)$，$z_2 = f_2(z_1)$，$z_3 = f_3(z_2)$，$w = f_4(z_3)$ とすると

$$z_2 = f_2\circ f_1(z) = \frac{1}{i\tan\theta - 1} = \frac{-\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$
$$= -\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$



■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照．

10.6　2020 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 点 $(a,\ 0)$ を通り，曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

2 a，b，c，d を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) c，d を a，b を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り，11 で割ると 10 余るとする。また，$f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り，11 で割ると 10 余るとする。a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

3 四面体 OABC において，辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を ℓ，辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m，辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。$\ell \perp m$，$m \perp n$，$n \perp \ell$ であり，$\mathrm{AB} = \sqrt{5}$，$\mathrm{BC} = \sqrt{3}$，$\mathrm{CA} = 2$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(2) 四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

4 4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

5 座標空間において，中心 $(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。D を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱 (内部を含む) を E とする。点 $(0,\ 2,\ 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また，T の体積を求めよ。

(2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ $y = e^{-x} - e^{-2x}$ より　$y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$

曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ 上の点 $(t,\ e^{-t} - e^{-2t})$ における接線の方程式は

$$y - (e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(x - t)$$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るから

$$-(e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(a - t)$$

したがって　$(e^t - 2)(a - t) = (e^t - 1)$　$\cdots(*)$

$e^t - 2 = 0$，すなわち，$t = \log 2$ は，$(*)$ は満たさない．

$t \neq \log 2$ のとき，$(*)$ から

$$a - t = \frac{e^t - 1}{e^t - 2} \quad \text{ゆえに} \quad a = t + 1 + \frac{1}{e^t - 2}$$

$f(t) = t + 1 + \dfrac{1}{e^t - 2}$ とおくと

$$f'(t) = 1 - \frac{e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 2)^2 - e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 1)(e^t - 4)}{(e^t - 2)^2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$(\log 2)$	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{3}{2} + 2\log 2$	$\nearrow$

このとき　$\displaystyle\lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty,\quad \lim_{t \to \infty} f(t) = \infty$

$\displaystyle\lim_{t \to \log 2 - 0} f(t) = -\infty,\quad \lim_{t \to \log 2 + 0} f(t) = \infty,$

したがって，$f(t)$ のとり得る値の範囲は　$f(t) \leqq 0,\ \dfrac{3}{2} + 2\log 2 \leqq f(t)$

よって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a \leqq 0,\ \dfrac{3}{2} + 2\log 2 \leqq a}$　■

2 (1) $w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x) = 0$ の解であるから，$f(x)$ は，$(x-w)(x-\overline{w})$，すなわち，$x^2 - x + 1$ を因数にもつ．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + ax^2 + bx^2 + cx + d \\ &= (x^2 - x + 1)\{x^2 + (a+1)x + a + b\} \\ &\qquad + (b + c - 1)x - a - b + d \end{aligned}$$

したがって　$b + c - 1 = 0,\quad -a - b + d = 0$

よって　$\boldsymbol{c = 1 - b,\quad d = a + b}$

(2) (1) の結果から　$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + (1-b)x + a + b$

ゆえに　$f(1) = 2a + b + 2,\quad f(-1) = 3b$

$f(1)$，$f(-1)$ を 7 で割った余りが，それぞれ 1，3 であるから

$$2a + b + 2 \equiv 1,\quad 3b \equiv 3 \pmod 7$$

上の第 2 式から　$b \equiv 1 \pmod 7$　これを第 1 式に代入すると

$$2a + 1 + 2 \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \equiv -1 \pmod 7$$

$f(1)$，$f(-1)$ を 11 で割った余りが，ともに 10 であるから

$$2a + b + 2 \equiv 10,\quad 3b \equiv 10 \pmod{11}$$

上の第 2 式から　$b \equiv 7 \pmod{11}$　これを第 1 式に代入すると

$$2a + 7 + 2 \equiv 10 \quad \text{ゆえに} \quad 2a \equiv 1 \pmod{11}$$

さらに　$6 \cdot 2a \equiv 6 \cdot 1$　ゆえに　$a \equiv 6 \pmod{11}$

ゆえに　$(*)\begin{cases} a \equiv -1 \pmod 7 \\ a \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$　　$(**)\begin{cases} b \equiv 1 \pmod 7 \\ b \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$

$(*)$ の第 1 式から，$a = -1 + 7k$ とおき (k は整数)，これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$-1 + 7k \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad k \equiv 1 \pmod{11}$$

$k = 1 + 11\ell$ とおくと (ℓ は整数)

$$a = -1 + 7(1 + 11\ell) = 6 + 77\ell$$

a の絶対値が 40 以下であるから，$\ell = 0$ より　$a = 6$　$\cdots$①

$(**)$ の第2式から，$b=7+11m$ とおき (m は整数)，これを $(**)$ の第1式に代入すると

$$7+11m \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4m \equiv 1 \quad \text{したがって} \quad m \equiv 2 \pmod 7$$

$m=2+7n$ とおくと (n は整数)

$$b=7+11(2+7n)=29+77n$$

b の絶対値が 40 以下であるから，$n=0$ より　$b=29$　$\cdots$②

(1) の結果から

$$f(x)=(x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+a+b\}$$

①，② をこれに代入して

$$f(x)=(x^2-x+1)(x^2+7x+35)$$

$f(x)=0$ の解は，$x^2-x+1=0$，$x^2+7x+35=0$ を解いて

$$\boldsymbol{x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-7\pm\sqrt{91}i}{2}}$$

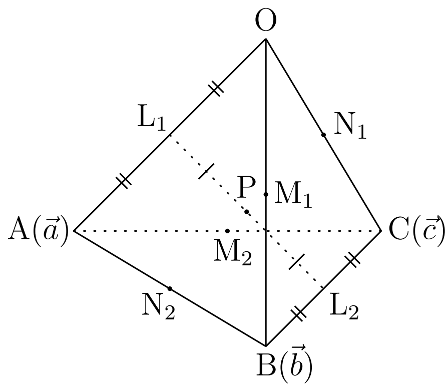
補足 $(*)\begin{cases} a\equiv -1 \pmod 7 \\ a\equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$　　$(**)\begin{cases} b\equiv 1 \pmod 7 \\ b\equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$ より

$$\begin{cases} a-6\equiv 0 & \pmod 7 \\ a-6\equiv 0 & \pmod{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} b-29\equiv 0 & \pmod 7 \\ b-29\equiv 0 & \pmod{11} \end{cases}$$

したがって　$a-6\equiv 0,\ \ b-29\equiv 0 \pmod{77}$

$a,\ b$ の絶対値がともに 40 以下であるから　$a=6$，$b=29$ ■

3 (1) 点 O を始点とし，3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする．線分 OA，OB，OC の中点をそれぞれ $\mathrm{L_1}$，$\mathrm{M_1}$，$\mathrm{N_1}$ とし，線分 BC，CA，AB の中点をそれぞれ $\mathrm{L_2}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{N_2}$ とすると



$$2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}} = \vec{b}+\vec{c}-\vec{a},$$
$$2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}} = \vec{c}+\vec{a}-\vec{b},$$
$$2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}} = \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$$

直線 $\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{M_1M_2}$，$\mathrm{N_1N_2}$ はそれぞれ直線 ℓ，m，n であるから，$\ell\perp m$ より，$\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}\perp\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ であるから

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}) &= (\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})\\ &= |\vec{c}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 0 \quad \cdots①\end{aligned}$$

$m\perp n$，$n\perp\ell$ であるから，同様にして

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}}) &= (\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\\ &= |\vec{a}|^2-|\vec{c}-\vec{b}|^2 = 0 \quad \cdots②\\ (2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) &= (\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\\ &= |\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{c}|^2 = 0 \quad \cdots③\end{aligned}$$

①～③ より
$$\begin{aligned}|\vec{c}| &= |\vec{b}-\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \mathrm{AB} = \sqrt{5}\\ |\vec{a}| &= |\vec{c}-\vec{b}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \mathrm{BC} = \sqrt{3}\\ |\vec{b}| &= |\vec{a}-\vec{c}| = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \mathrm{CA} = 2\end{aligned}$$

①～③ をそれぞれ整理すると

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2 = 3+4-5 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$$
$$2\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2 = 4+5-3 = 6 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 3$$
$$2\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2 = 5+3-4 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{c}\cdot\vec{a} = 2$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}-\vec{c}$ のなす角を φ とすると $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})}{|\vec{b}||\vec{a}-\vec{c}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1-3}{2^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

よって，直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ は

$$\theta = \pi-\varphi = \pi-\frac{2\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2 = 1+2-3=0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) &= (\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 5-4+1-2=0\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{OA}\perp\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{BC}\perp\mathrm{L_1L_2}$

2 点 $\mathrm{L_1}$，$\mathrm{L_2}$ の中点を P とすると　$\mathrm{PO}=\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$

点 P は，四面体 OABC の 4 頂点を通る球面の中心である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OL_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OL_2}}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

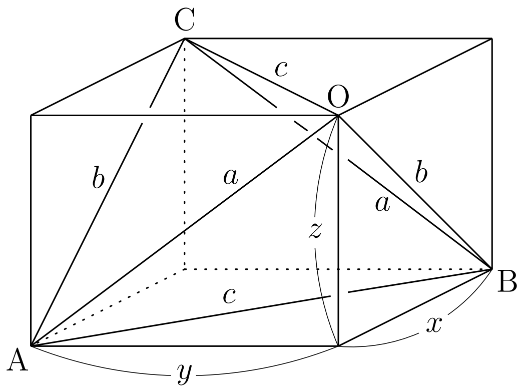
このとき　$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$$= 3+4+5+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot2 = 24$$

よって，求める半径は　$\frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \frac{1}{4}\sqrt{24} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

補足 四面体 OABC のすべての面が合同である四面体を等面四面体という．$a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$c=\mathrm{OC}$ とすると，直方体の縦，横，高さがそれぞれ x，y，z で

$$y^2+z^2=a^2$$
$$z^2+x^2=b^2$$
$$x^2+y^2=c^2$$



を満たすものが唯一存在する．

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

したがって，等面四面体はこの直方体に埋め込まれ，求める球面の半径はこの長方形に外接する球面の半径 R に等しい．

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

等面四面体の体積を V とすると [4](直方体から 4 つの直角四面体を除く)

$$\begin{aligned}V &= xyz-4\cdot\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz\\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\end{aligned}$$

■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.11-12)

$\boxed{4}$ (1) X が 5 で割り切れない，すなわち，4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0，X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \boldsymbol{\frac{19}{144}}$$

(2) X が 2 で割り切れない，すなわち，4 回とも奇数の目が出る確率を q_0，X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{37}{48}}$$

(3) X が 100 の倍数となるは，出る目の組合せが次の (i)〜(iv) の場合である．

(i) $\{\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ 5,\ 5\}$ のとき $(\mathrm{A} = 2,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

(ii) $\{4,\ 5,\ 5,\ \mathrm{B}\}$ のとき $(\mathrm{B} = 1,\ 2,\ 3,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

(iii) $\{4,\ 4,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

(iv) $\{4,\ 5,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は　$\dfrac{24 + 48 + 6 + 4}{1296} = \dfrac{82}{1296} = \boldsymbol{\dfrac{41}{648}}$　■

5 (1) T の表す領域は

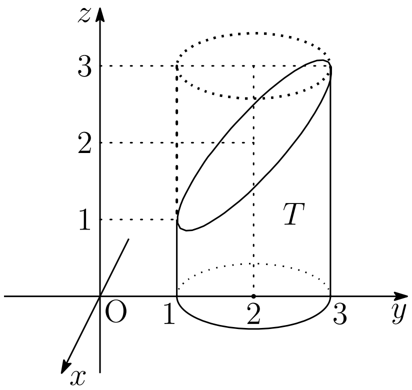
$$x^2 + (y-2)^2 \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

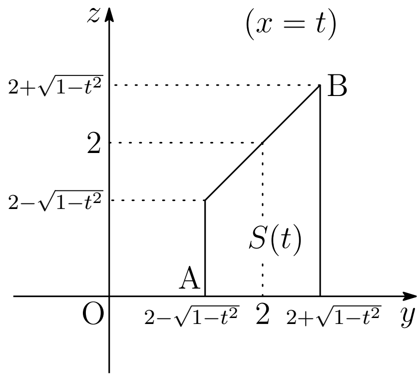
T を平面 $x = t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの断面を表す領域は

$$x = t, \quad 2 - \sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 2 + \sqrt{1-t^2}, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

右下の図で中央の z 座標が 2 であることに注意して

$$S(t) = 2\{(2 + \sqrt{1-t^2}) - (2 - \sqrt{1-t^2})\} = \boldsymbol{4\sqrt{1-t^2}}$$

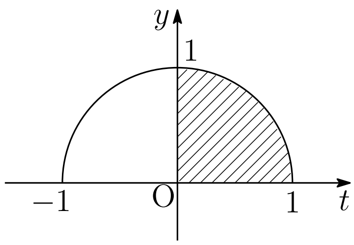




右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

よって，求める T の体積を V_1 とすると



$$V_1 = \int_{-1}^1 S(t)\,dt = \int_{-1}^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt = 8\int_0^1 \sqrt{1-t^2} = 8\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{2\pi}$$

(2) 2点A，Bを (1) の図のようにとると

$$\mathrm{OA} = 2 - \sqrt{1-t^2}, \quad \mathrm{OB} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{1-t^2})$$

求める立体の体積を V_2 とすると，T が yz 平面に関して対称であるから

$$\frac{V_2}{2\pi} = \int_0^1 (\mathrm{OB}^2 - \mathrm{OA}^2)\,dt = \int_0^1 \{2(2 + \sqrt{1-t^2})^2 - (2 - \sqrt{1-t^2})^2\}\,dt$$

$$= \int_0^1 (5 - t^2)\,dt + 12\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \left[\,5t - \frac{t^3}{3}\,\right]_0^1 + 12\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{14}{3} + 3\pi$$

よって $\quad V_2 = \boldsymbol{2\pi\left(\frac{14}{3} + 3\pi\right)}$ ■

10.7　2021 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 2) を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 四面体 OABC に内接する球の中心の座標を求めよ。

(2) 中心の x 座標，y 座標，z 座標がすべて正の実数であり，xy 平面，yz 平面，zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わるとき，その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。

2 θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ をみたす定数とし，x の 2 次方程式

$$x^2 - (4\cos\theta)x + \frac{1}{\tan\theta} = 0 \qquad \cdots(*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。

(2) θ が (1) で求めた範囲にあるとし，$(*)$ の 2 つの虚数解を α，β とする。ただし，α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，O(0) を通る円の中心を C(γ) とするとき，θ を用いて γ を表せ。

(3) 点 O，A，C を (2) のように定めるとき，三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan\theta$ の値を求めよ。

3 座標平面上の点 $(x,\ y)$ について，次の条件を考える。

条件：すべての実数 t に対して $y \leqq e^t - xt$ が成立する。　　$\cdots(*)$

以下の問いに答えよ。必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を使ってよい。

(1) 条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

(2) 条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ のうち，$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 0$ をみたすもの全体の集合を S とする。S を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4 自然数 n と実数 $a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n\ (a_n \neq 0)$ に対して，2 つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

を考える。$\alpha,\ \beta$ を異なる複素数とする。複素数平面上の 2 点 $\alpha,\ \beta$ を結ぶ線分上にある点 γ で，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき，

$\alpha,\ \beta,\ f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) $n=2$ のとき，どのような $\alpha,\ \beta,\ f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。

(2) $\alpha = 1-i,\ \beta = 1+i,\ f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための，実数 $a,\ b,\ c$ に関する必要十分条件を求めよ。

(3) $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}},\ \beta = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ f(x) = x^7$ は，平均値の性質をもたないことを示せ。

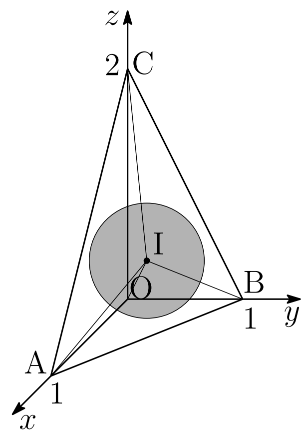
5 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 $n,\ k$ が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ。

(2) p を素数とする。$k \leqq n$ をみたす自然数の組 $(n,\ k)$ で ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ。

解答例

1 (1) 四面体 OABC に内接する球の中心を I，半径を d とすると，I から xy 平面, yz 平面，zx 平面，平面 ABC までの距離はともに d であり，$\mathrm{I}(d,\ d,\ d)$ とおける $(d > 0)$．△OAB，△OBC，△OCA，△ABC の面積は



$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot1\cdot1 = \frac{1}{2},$$
$$\triangle\mathrm{OBC} = \triangle\mathrm{OCA} = \frac{1}{2}\cdot1\cdot2 = 1$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 0,\ 2)$ より

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot5 - 1^2} = \frac{3}{2}$$

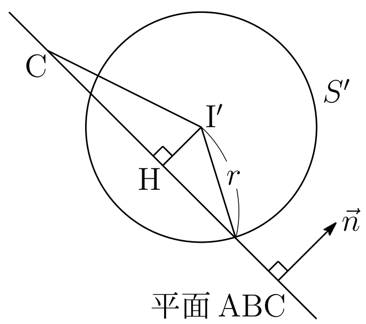
したがって，四面体 OABC の表面積を S，体積を V とすると

$$S = \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{3}{2} = 4,\quad V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{OC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2 = \frac{1}{3}$$

上の結果を $V = \frac{1}{3}Sd$ に代入すると

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot4d \quad \text{ゆえに} \quad d = \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad \mathrm{I}\left(\boldsymbol{\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}}\right)$$

(2) 条件を満たす球を S' とし，S' の中心を $\mathrm{I}'(r,\ r,\ r)$，半径を r とする $(r > 0)$．
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを



$$\vec{n} = (2,\ 2,\ 1)$$

とおき，I′ から平面 ABC に垂線 I′H を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{CI'}} = (r,\ r,\ r-2)$$

したがって　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CI'}} = 2r + 2r + r - 2 = 5r - 2$

$\overrightarrow{\mathrm{CI'}} = \overrightarrow{\mathrm{CH}} + \overrightarrow{\mathrm{HI'}}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HI'}} = 5r - 2$

$\vec{n}/\!/\overrightarrow{\mathrm{HI'}}$ であるから　$|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{HI'}}| = |5r-2|$

$$|\overrightarrow{\mathrm{HI'}}| = \frac{|5r-2|}{|\vec{n}|} = \frac{|5r-2|}{3}$$

S' が平面 ABC と共有点をもつとき，$|\mathrm{HI'}| \leqq r$ であるから

$$\frac{|5r-2|}{3} \leqq r \quad ゆえに \quad -3r \leqq 5r-2 \leqq 3r$$

これを解いて　$\dfrac{1}{4} \leqq r \leqq 1 \quad \cdots ①$

S' と平面 ABC が交わってできる円の半径を R とすると

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 - |\overrightarrow{\mathrm{HI'}}|^2 = r^2 - \left(\frac{|5r-2|}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{9}(16r^2 - 20r + 4) \\ &= -\frac{16}{9}\left(r - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

① に注意すると，$r = \dfrac{5}{8}$ のとき，R^2 の最大値は　$\dfrac{1}{4}$

よって，求める円の面積の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

補足　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 0,\ 2)$ の外積 (ベクトル積) は[5]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (1 \cdot 2 - 0 \cdot 0,\ 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2,\ -1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) \\ &= (2,\ 2,\ 1) \end{aligned}$$

は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に直交する．

3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1 \quad すなわち \quad 2x + 2y + z - 2 = 0$$

この平面の法ベクトルは[6]　$\vec{n} = (2,\ 2,\ 1)$

点 I$'(r,\ r,\ r)$ から平面 $2x + 2y + z - 2 = 0$ までの距離は

$$\frac{|2r + 2r + r - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|5r-2|}{3}$$

■

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.179 (物理ページ p.184))
[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.171 (物理ページ p.176))

2 (1) x の 2 次方程式

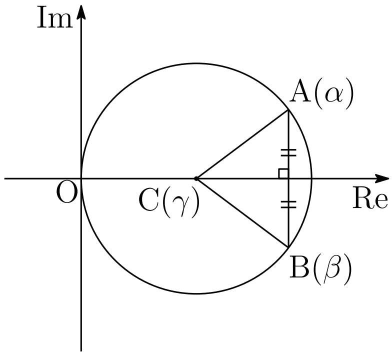
$$x^2 - (4\cos\theta)x + \frac{1}{\tan\theta} = 0 \qquad \cdots (*)$$

が実数解をもたないから，係数について

$$D/4 = (2\cos\theta)^2 - \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\theta}(4\sin\theta\cos\theta - 1) = \frac{2\sin 2\theta - 1}{\tan\theta} < 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ に注意して解くと　$0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{6}$　よって　$\boldsymbol{0 < \theta < \dfrac{\pi}{12}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係により



$$\alpha + \beta = 4\cos\theta, \quad \alpha\beta = \frac{1}{\tan\theta}$$

α，β は互いに共役で，中心 C(γ) は A，B の垂直二等分線上，すなわち，実軸上の点であるから，γ は実数である．

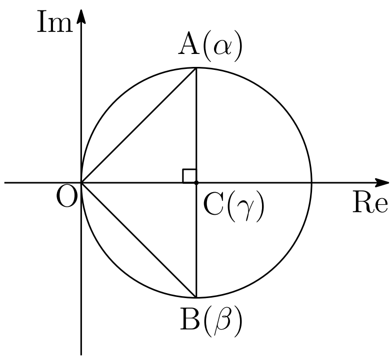
OC = AC より　$|\gamma| = |\gamma - \alpha|$

$$\gamma^2 = (\gamma - \alpha)(\gamma - \overline{\alpha}) = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$$

整理すると　　$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\beta$

よって　　$\gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \dfrac{1}{4\cos\theta\tan\theta} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4\sin\theta}}$

(3) OC = AC より，$\triangle$OAC が直角三角形であるとき，$\angle\text{OCA} = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，C は AB の中点であるから，$\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \gamma$ より，(2) の結果から



$$\frac{4\cos\theta}{2} = \frac{1}{4\sin\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2\theta = \frac{1}{4}$$

$\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}$ であるから

$$\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2\theta - 8\tan\theta + 1 = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 < \tan\theta < 1$ に注意して　$\boldsymbol{\tan\theta = 4 - \sqrt{15}}$　■

3　(1)　$f(t) = e^t - xt - y$ とおく．条件 $(*)$ をみたすとき，すべての実数 t に対して

$$f(t) \geqq 0 \qquad \text{(A)}$$

をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を求めればよい．

(i)　$x < 0$ のとき

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty}(e^t - xt - y) = -\infty$$

このとき，(A) をみたさない．

(ii)　$x = 0$ のとき，$f(t) = e^t - y$ は，単調増加であるから

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty}(e^t - y) = -y \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leqq 0$$

(iii)　$x > 0$ のとき，$f'(t) = e^t - x$ より

t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	極小	↗

極小値 $f(\log x) = x - x\log x - y$ であるから，(A) をみたすとき

$$x - x\log x - y \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leqq x - x\log x$$

(i)〜(iii) より

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x - x\log x & (x > 0) \end{cases}$$

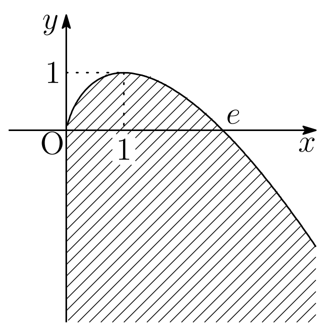
とおくと，条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ は

$$x \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad y \leqq g(x)$$

$x > 0$ のとき　$g'(x) = -\log x,\ g''(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$

したがって，$x \geqq 0$ における $g(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g''(x)$		$-$	$-$	$-$
$g(x)$	0	↗	1	↘



$$\lim_{x\to+0} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

よって，点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，右上の図の斜線部分で境界線を含む．

(2)　求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_1^e x^2(1-\log x)^2\,dx$$

$x = e^t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = e^t$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 (e^t)^2(1-t)^2\cdot e^t\,dt = \int_0^1 e^{3t}(t-1)^2\,dt \\ &= \frac{1}{3}\left[\,e^{3t}\left\{(t-1)^2 - \frac{\{(t-1)^2\}'}{3} + \frac{\{(t-1)^2\}''}{3^2}\right\}\,\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left[\,e^{3t}\left\{(t-1)^2 - \frac{2(t-1)}{3} + \frac{2}{9}\right\}\,\right]_0^1 = \frac{2e^3}{27} - \frac{17}{27}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi(2e^3-17)}{27}}$

補足　対数型から指数型の積分に置換すると，次の積分公式が利用できる [7]．

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx = \frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C$$

補足　まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す．

$h(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき}\quad h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$h(x)$ は単調減少で，$h(1) = 2$ であるから

$$h(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

よって　　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$$

■

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7)

$\boxed{4}$ (1) $n=2$ のとき，$f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$，$f'(x)=2a_2x+a_1$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{a_2(\beta^2-\alpha^2)+a_1(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=a_2(\alpha+\beta)+a_1$$
$$f'(\gamma)=2a_2\gamma+a_1$$

γ を複素数平面上の 2 点 α, β の中点，すなわち，$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とすると

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$$

よって，どのような α, β, $f(x)$ も平均値の性質をもつ．

(2) $\alpha=1-i$, $\beta=1+i$, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}&=\frac{\beta^3-\alpha^3+a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+a(\alpha+\beta)+b\\&=2+2a+b\end{aligned}$$

γ は，複素数平面上の線分 α, β 上の点であるから

$$\gamma=1+ti \quad (-1\leqq t\leqq 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned}f'(\gamma)&=3(1+ti)^2+2a(1+ti)+b\\&=3-3t^2+2a+b+2t(3+a)i\end{aligned}$$

平均値の性質をもつとき

$$2+2a+b=3-3t^2+2a+b+2t(3+a)i$$

整理すると　$1-3t^2=0$　かつ　$2t(3+a)=0$

$-1\leqq t\leqq 1$ に注意して　$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $a=-3$

このとき，平均値の性質をもつ．

よって，実数 a, b, c, に関する必要十分条件は

$a=-3$，2 数 b，c は任意の実数

(3) $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}$，$\beta = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\alpha^7 = \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)^7 = \cos\frac{7}{4}\pi - i\sin\frac{7}{4}\pi = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \beta$$
$$\beta^7 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^7 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \alpha$$

$f(x) = x^7$，$f'(x) = 7x^6$ について

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{\beta^7-\alpha^7}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha} = -1, \quad f'(\gamma) = 7\gamma^6 \qquad (*)$$

$\arg\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$，$\arg\beta = \dfrac{\pi}{4}$ であるから　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \arg\gamma \leqq \dfrac{\pi}{4}$

平均値の性質をもつと仮定すると，$\arg(7\gamma^6) = \arg(-1)$ であるから

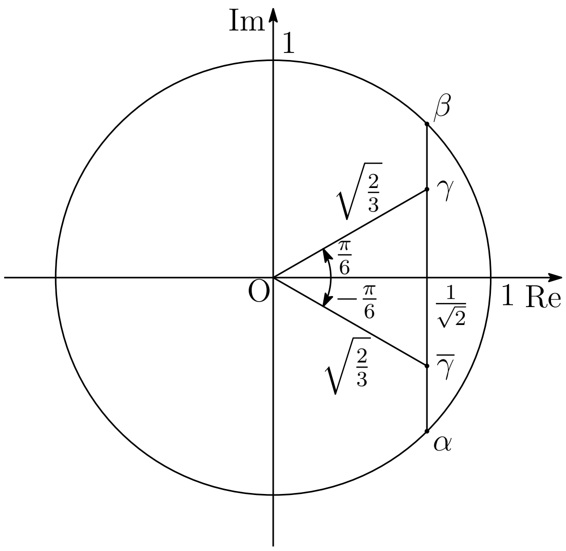
$$6\arg\gamma = \pm\pi \quad \text{ゆえに} \quad \arg\gamma = \pm\frac{\pi}{6}$$

これをみたす 2 点 α，β を結ぶ線分上の点 γ について

$$|\gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$
$$|7\gamma^6| = 7\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^6 = \frac{56}{27} \neq |-1|$$

上の第 2 式から，$7\gamma^6 \neq -1$ となり，平均値の性質に反する．

よって，$\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，$\beta = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$f(x) = x^7$ は，平均値の性質をもたない．



■

5 (1) (i) $2 \leqq k \leqq n-k \leqq n-2$ のとき，$\dfrac{n-j}{j} \geqq 1$ であるから $(j=1,2,\cdots,k)$

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{1\cdot2\cdot3\cdots k} \\ &> n\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdots\frac{n-k}{k} \\ &\geqq n\cdot1\cdot1\cdots1 = n\end{aligned}$$

(ii) $2 \leqq n-k \leqq k \leqq n-2$ のとき，$k' = n-k$ とおくと

$$2 \leqq k' \leqq n-k' \leqq n-2$$

(i) の結果から ${}_n\mathrm{C}_{k'} > n$ ゆえに ${}_n\mathrm{C}_k > n$

(i),(ii) より，自然数 n, k が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき

$${}_n\mathrm{C}_k > n$$

(2) $2 \leqq k \leqq n-2$ について

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{1\cdot2\cdot3\cdots k} = p \qquad (*)$$

が成立するとき，素数 p は n, $n-1, \cdots, n-k+1$ のいずれかの因数で

$${}_n\mathrm{C}_k = p \leqq n$$

これは，(1) の結論に反する．
$k=0$, n のとき，$(*)$ は成立しないから，$k=1$, $n-1$ より

$${}_n\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = p$$

よって $\boldsymbol{(n,\ k) = (p,\ 1),\ (p,\ p-1)}$ ■

10.8　2022 年 (150 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] [5]

[1] 座標空間内の 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 1,\ 2),\ \mathrm{P}(4,\ 0,\ -1),\ \mathrm{Q}(4,\ 0,\ 5)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P$'$ の座標を求めよ。

(3) 点 R が平面 α 上を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}| + |\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

[2] n を 3 以上の自然数，α，β を相異なる実数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 次をみたす実数 A，B，C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x-\alpha)(x-\beta)^2 Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C$$

(2) (1) の A，B，C を n，α，β を用いて表せ。

(3) (2) の A について，n と α を固定して，β を α に近づけたときの極限 $\displaystyle\lim_{\beta \to \alpha} A$ を求めよ。

[3] 自然数 m，n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \quad \cdots ①$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。

(2) $n^2 - 1$ は 168 の倍数であることを示せ。

(3) ① をみたす自然数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ。

4 定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \cdots①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ。

(A) $\displaystyle\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$

(B) $a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(C) 区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b h(x)\,dx$$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数，k，l は定数である。

以下，$f(x)$ を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とし，n を自然数とする。<u>定積分の性質 $\boxed{\text{ア}}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，</u>

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 $\boxed{\text{イ}}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n} \qquad \cdots③$$

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx$ が成り立つ。

(1) 関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，

$$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$$

が成り立つことを，導関数の定義に従って示せ。また，この等式と定積分の定義 ① を用いて，定積分の性質 (A) で $k=l=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて，次を示せ。

$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)>0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx>0$

(3) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式 ② を示せ。

(4) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\text{イ}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式 ③ を示せ。

5 xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x=5\cos t+\cos 5t,\quad y=5\sin t-\sin 5t\quad (-\pi \leqq t<\pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 区間 $0<t<\dfrac{\pi}{6}$ において，$\dfrac{dx}{dt}<0$，$\dfrac{dy}{dx}<0$ であることを示せ。

(2) 曲線 C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分，x 軸，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。

(4) 曲線 C の概形を図示せよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2,\ 1,\ 2)$

$\vec{n} = (x,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$，$\vec{b}\cdot\vec{n} = 0$ であるから

$$x + y = 0,\quad 2x + y + 2z = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = -x,\quad z = -\frac{1}{2}x$$

$\vec{n} = \left(x, -x, -\dfrac{1}{2}x\right)$，$|\vec{n}|^2 = 1$ であるから

$$x^2 + x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2 = 4$$

$x > 0$ に注意して　$x = \dfrac{2}{3}$　よって　$\boldsymbol{\vec{n} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)}$

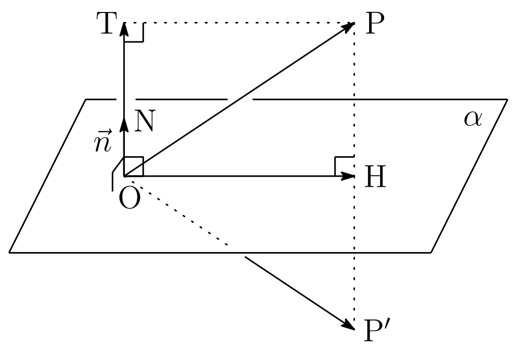
(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \vec{n}$ とし，P から平面 α および直線 ON に引いた垂線の交点をそれぞれ H，T とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{OT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}} = (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n})\vec{n} \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (4,\ 0, -1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n} = 3$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = (2, -2, -1)$

これと $(*)$ の第 1 式により，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (2,\ 2,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + (-\overrightarrow{\mathrm{OT}}) = (0,\ 4,\ 1) \quad \text{よって} \quad \mathbf{P'(0, 4,\ 1)}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n} = 3 > 0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n} = 1 > 0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき，$\mathrm{PR} : \mathrm{RQ} = \mathrm{P'R} : \mathrm{RQ} = 3 : 1$ であるから，R は線分 P′Q を $3 : 1$ に内分する点である．

$$\left(\frac{1\cdot0 + 3\cdot4}{3+1}, \frac{1\cdot4 + 3\cdot0}{3+1}, \frac{1\cdot1 + 3\cdot5}{3+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{R(3,\ 1,\ 4)}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき点 R は，2 点 $\mathrm{P}'(0,\ 4,\ 1)$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ を通る直線上にある．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+t\overrightarrow{\mathrm{P'Q}} \qquad (t\text{ は実数})\\&=(0,\ 4,\ 1)+t(4,-4,\ 4)\\&=(4t,\ 4-4t,\ 1+4t)\end{aligned}$$

点 R は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n}=0$ より

$$\frac{2}{3}\cdot4t-\frac{2}{3}(4-4t)-\frac{1}{3}(1+4t)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{3}{4}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(3,\ 1,\ 4)$　よって　**R(3，1，4)**　■

2　(1) x^n を $x-\alpha$ で割った商を $Q_1(x)$，余りを C とすると

$$x^n=(x-\alpha)Q_1(x)+C$$

$Q_1(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q_2(x)$，余りを B とすると

$$Q_1(x)=(x-\beta)Q_2(x)+B$$

$Q_2(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q(x)$，余りを A とすると

$$Q_2(x)=(x-\beta)Q(x)+A$$

したがって

$$\begin{aligned}x^n&=(x-\alpha)Q_1(x)+C\\&=(x-\alpha)\{(x-\beta)Q_2(x)+B\}+C\\&=(x-\alpha)(x-\beta)Q_2(x)+B(x-\alpha)+C\\&=(x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\beta)Q(x)+A\}+B(x-\alpha)+C\\&=(x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\alpha)(x-\beta)+B(x-\alpha)+C \qquad (*)\end{aligned}$$

(2) $x=\alpha$ を $(*)$ に代入すると $\boldsymbol{C=\alpha^n}$

$$\begin{aligned} x^n-\alpha^n &= (x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\alpha)(x-\beta)+B(x-\alpha) \\ \frac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha} &= (x-\beta)^2Q(x)+A(x-\beta)+B \end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha}$ とおくと $f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}(x-\alpha)-(x^n-\alpha^n)}{(x-\alpha)^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\beta)^2Q(x)+A(x-\beta)+B, \\ f'(x) &= 2(x-\beta)Q(x)+(x-\beta)^2Q'(x)+A \end{aligned}$$

これから，$B=f(\beta)$，$A=f'(\beta)$ より

$$\boldsymbol{B=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha},\quad A=\frac{n\beta^{n-1}(\beta-\alpha)-(\beta^n-\alpha^n)}{(\beta-\alpha)^2}}$$

(3) $g(\beta)=n\beta^{n-1}(\beta-\alpha)-(\beta^n-\alpha^n)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(\beta) &= n(n-1)\beta^{n-2}(\beta-\alpha) \\ g''(\beta) &= n(n-1)\{(n-2)\beta^{n-3}(\beta-\alpha)+\beta^{n-2}\} \end{aligned}$$

$g(\alpha)=0$，$g'(\alpha)=0$，$g''(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$ より，$g(\beta)$ は $(\beta-\alpha)^2$ を因数にもつから，$g(\beta)=(\beta-\alpha)^2H(\beta)$ とおくと $(A=H(\beta))$

$$\begin{aligned} g'(\beta) &= 2(\beta-\alpha)H(\beta)+(\beta-\alpha)^2H'(\beta) \\ g''(\beta) &= 2H(\beta)+4(\beta-\alpha)H'(\beta)+(\beta-\alpha)^2H''(\beta) \end{aligned}$$

$g''(\alpha)=2H(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$，$A=H(\beta)$ より

$$\lim_{\beta\to\alpha}A=\lim_{\beta\to\alpha}H(\beta)=H(\alpha)=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}}$$

補足 n 次式 $g(\beta)$ を α を極としてテイラー展開すると[8]

$$g(\beta)=g(\alpha)+g'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{g''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2+\sum_{k=3}^{n}\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^k$$

このとき $A=\dfrac{g(\beta)}{(\beta-\alpha)^2}=\dfrac{g''(\alpha)}{2!}+\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^{k-2}$

よって $\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A=\frac{g''(\alpha)}{2!}=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$ ■

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2001.pdf (p.7)

3 (1) $n^4 = 1 + 210m^2 \cdots$ ① の右辺は奇数であるから，n は奇数.

$n^2+1,\ n^2-1$ は偶数であるから，$\dfrac{n^2+1}{2},\ \dfrac{n^2-1}{2}$ は整数.

$\dfrac{n^2+1}{2} - \dfrac{n^2-1}{2} = 1$ より，$\dfrac{n^2+1}{2},\ \dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素である.

補足 ユークリッドの互除法により $\dfrac{n^2+1}{2} = \dfrac{n^2-1}{2}\cdot 1 + 1$

$\dfrac{n^2+1}{2},\ \dfrac{n^2-1}{2}$ の最大公約数が 1 であるから，これらの 2 数は互いに素.

(2) n が奇数であるから，$n+1,\ n-1$ はともに偶数で，一方は 4 で割り切れるから，次式から n^2-1 は，8 の倍数である.

$$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

① より　$(n^2+1)(n^2-1) = 2\cdot3\cdot5\cdot7m^2 \quad \cdots$ ①′

ここで　$n^2 \equiv 0,\ 1 \pmod 3$ より　$n^2+1 \not\equiv 0 \pmod 3 \quad \cdots$ ②

$n^2 \equiv 0,\ 1,\ 4,\ 2 \pmod 7$ より　$n^2+1 \not\equiv 0 \pmod 7 \quad \cdots$ ③

①′，②，③ より，n^2-1 は $3\cdot7$ の倍数である.

よって，n^2-1 は，$8\times3\cdot7$，すなわち，168 の倍数である.

(3) (2) の結論から，$n^2-1 = 168N$ (N は整数) とおくと，①′ より

$$(168N+2)\cdot168N = 2\cdot3\cdot5\cdot7m^2 \quad ゆえに \quad m = 2\sqrt{\frac{2N(84N+1)}{5}}$$

$2N$ は偶数，$84N+1$ は奇数であるから，$N=2k$ (k は整数) とおくと

$$m = 4\sqrt{\frac{k(168k+1)}{5}}, \quad n = \sqrt{336k+1} \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から，整数 k の必要条件は

$$k \equiv 0 \quad または \quad 168k+1 \equiv 0 \quad すなわち \quad k \equiv 0,\ 3 \pmod 5$$

$k=3$ のとき　$m = 4\sqrt{3\cdot101}$，$n = \sqrt{1009}$ より，不適

$k=5$ のとき　$m = 4\sqrt{841} = 4\cdot29 = 116$，$n = \sqrt{1681} = 41$

よって　$\boldsymbol{(m,\ n) = (116,\ 41)}$　■

4 (1) $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるから

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h},\quad G'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$$

$H(x)=F(x)+G(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}H'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{H(x+h)-H(x)}{h}=\frac{F(x+h)+G(x+h)-F(x)-G(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=F'(x)+G'(x)\end{aligned}$$

よって $\quad \{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$

次に，$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ を満たす $F(x)$，$G(x)$ をとり，

$$H(x)=F(x)+G(x),\quad h(x)=H'(x)$$

とすると，次式が成立する．

$$h(x)=H'(x)=\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$$

上式および定積分の定義 ① により

$$\begin{aligned}\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx&=\int_a^b h(x)\,dx=\Big[\,H(x)\,\Big]_a^b=H(b)-H(a)\\&=F(b)+G(b)-\{F(a)+G(a)\}\\&=F(b)-F(a)+G(b)-G(a)\\&=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

(2) $G'(x)=g(x)$ を満たす $G(x)$ をとると，定積分の定義により

$$\int_a^b g(x)\,dx=G(b)-G(a)$$

上式の右辺は平均値の定理により

$$\frac{G(b)-G(a)}{b-a}=G'(c)\quad(a<c<b)$$

$G'(c)=g(c)>0$ であるから，以上の結果から

$$\int_a^b g(x)\,dx=(b-a)g(c)>0$$

(3) 答 **(C)**

(2) と同様に $\displaystyle\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$ に平均値の定理を適用すると $(i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx = \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) f(c_i) = \frac{1}{n} f(c_i) \quad \left(\frac{i-1}{n} < c_i < \frac{i}{n}\right)$$

$f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数であるから

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq f(c_i) \leqq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

以上の結果から，次式を得る．

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(4) 答 **(B)**

S_n の定義により

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) \\
&= S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n}
\end{aligned}$$

上式に注意すると，② より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx &\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
S_n \leqq \int_0^1 f(x)\,dx &\leqq S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n}
\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle 0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n}$　■

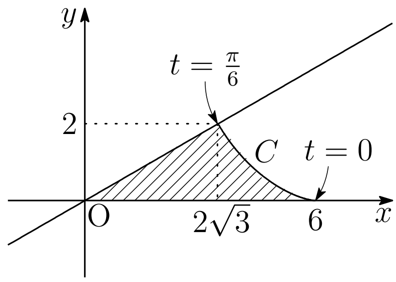
$\boxed{5}$ (1) $x = 5\cos t + \cos 5t,\quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = -5(\sin t + \sin 5t) = -10\sin 3t\cos 2t,$$
$$\frac{dy}{dt} = 5(\cos t - \cos 5t) = 10\sin 3t\sin 2t,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = -\tan 2t$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$0 < 2t < 3t < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\boldsymbol{\dfrac{dx}{dt} < 0,\quad \dfrac{dy}{dx} < 0}$

(2) (1) の結果および $\dfrac{dy}{dt} > 0$ より

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	
$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$		$\nwarrow$	
$(x,\ y)$	$(6,\ 0)$	$\cdots$	$(2\sqrt{3},\ 2)$



右上の図の斜線部分が求める面積で，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 + \int_{2\sqrt{3}}^{6} y\,dx = 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} y\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} (5\sin t - \sin 5t)(-5\sin t - 5\sin 5t)\,dt$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (5\sin^2 t - \sin^2 5t + 4\sin 5t\sin t)\,dt$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left\{5\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} - \frac{1-\cos 10t}{2} - 2(\cos 6t - \cos 4t)\right\} dt$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\left[\,2t - \frac{5}{4}\sin 2t + \frac{1}{20}\sin 10t - \frac{1}{3}\sin 6t + \frac{1}{2}\sin 4t\,\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}$$

(3) $f(t) = 5\cos t + \cos 5t,\quad g(t) = 5\sin t - \sin 5t$ とおくと

$$f(-t) = f(t), \quad g(-t) = -g(t)$$

よって，C 上の 2 点 $(f(t),\ g(t))$ と $(f(-t),\ g(-t))$ は x 軸に関して対称.

xy 直交座標系の原点 O を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた直交座標系を XY 系とすると

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$X = f(t)$，$Y = g(t)$ とすると

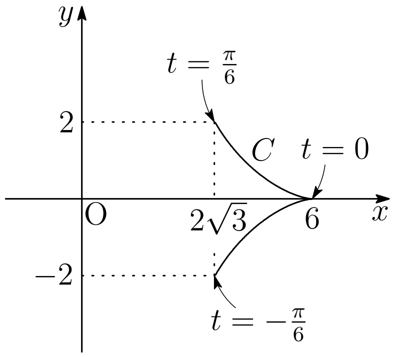
$$\begin{aligned} x &= (5\cos t + \cos 5t)\cos\frac{\pi}{3} - (5\sin t - \sin 5t)\sin\frac{\pi}{3} \\ &= 5\left(\cos t\cos\frac{\pi}{3} - \sin t\sin\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5t\cos\frac{\pi}{3} + \sin 5t\sin\frac{\pi}{3} \\ &= 5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(5t-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = f\left(t+\frac{\pi}{3}\right), \\ y &= (5\cos t + \cos 5t)\sin\frac{\pi}{3} + (5\sin t - \sin 5t)\cos\frac{\pi}{3} \\ &= 5\left(\cos t\sin\frac{\pi}{3} + \sin t\cos\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5t\sin\frac{\pi}{3} - \sin 5t\cos\frac{\pi}{3} \\ &= 5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(5t-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) - \sin 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = g\left(t+\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

XY 系における点 $(f(t),\ g(t))$ は，xy 系における点 $\left(f\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right),\ g\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ であるから，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にある.

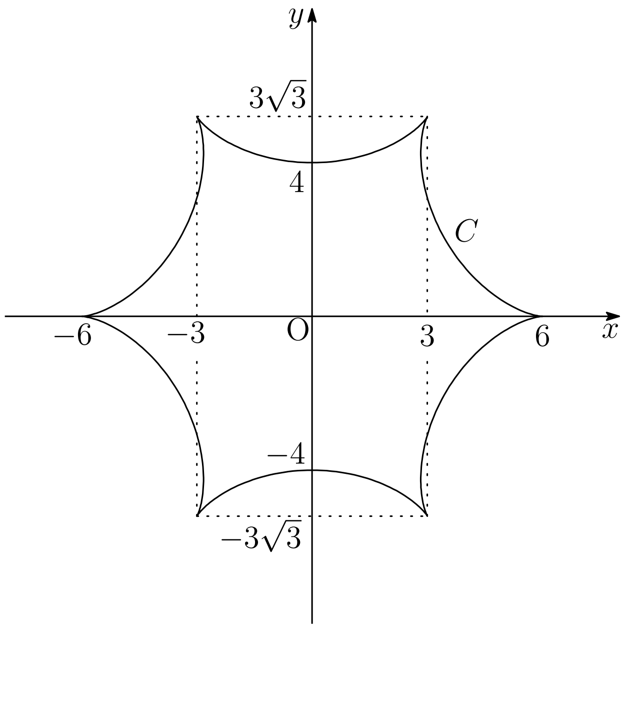
(4) $\dfrac{dy}{dx} = -\tan 2t$ および $\dfrac{dx}{dt} < 0$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{6}\right)$ により，$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ において

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-\tan 2t)\Bigg/\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{\cos^2 2t}\Bigg/\frac{dx}{dt} > 0$$

(3) の結果から，C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分と $-\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq 0$ の部分は x 軸に関して対称であるから，C の $-\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の概形は次のようになる．



さらに，これを原点を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた部分も C 上にある．よって，C の $-\pi \leqq t < \pi$ の概形は，次のようになる．



■

解説 C 上の点 $(x,\ y) = (f(t),\ g(t))$ における接ベクトルは $(f'(t),\ g'(t))$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}$$

逆関数定理により，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{1}{f'(t)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^2}\cdot\frac{1}{f'(t)} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}$$

本題において

$$f(t) = 5\cos t + \cos 5t, \quad g(t) = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(t) &= -5(\sin t + \sin 5t), & g'(t) &= 5(\cos t - \cos 5t) \\ f''(t) &= -5(\cos t + 5\cos 5t), & g''(t) &= -5(\sin t - 5\sin 5t) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t) &= 25(\sin t - 5\sin 5t)(\sin t + \sin 5t) \\ &\qquad + 25(\cos t - \cos 5t)(\cos t + 5\cos 5t) \\ &= -100 + 100(\cos 5t\cos t - \sin 4t \sin t) \\ &= -100(1 - \cos 6t) \end{aligned}$$

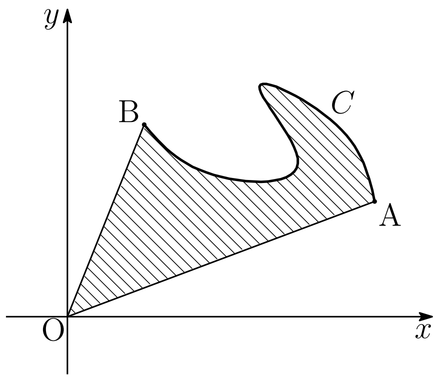
$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ において　$f'(t) < 0, \quad g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t) < 0$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3} > 0$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



本題 (2) は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (5\cos t + \cos 5t)\cdot 5(\cos t - \cos 5t) \\ &\qquad + 5(\sin t + \sin 5t)\cdot(5\sin t - \sin 5t) \\ &= 20 - 20(\cos 5t\cos t - \sin 5t\sin t) \\ &= 20(1 - \cos 6t) \end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt \\ &= 10\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1 - \cos 6t)\,dt = 10\Big[\ t - \frac{1}{6}\sin 6t\ \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi} \end{aligned}$$

10.9　2023 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。

(2) 複素数平面上の △ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$$

が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。

2 α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(2) $\alpha > 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(3) $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

3 点 O を原点とする座標平面上の $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\overrightarrow{m} = (a,\ c),\quad \overrightarrow{n} = (b,\ d)$$

に対して，$D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して，次の条件を考える。

条件 I　$r\overrightarrow{m} + s\overrightarrow{n} = \overrightarrow{q}$ を満たす実数 r，s が存在する。

条件 II　$r\overrightarrow{m} + s\overrightarrow{n} = \overrightarrow{q}$ を満たす整数 r，s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての $\overrightarrow{q}$ に対して成り立つとする。$D \neq 0$ であることを示せ。

以下，$D \neq 0$ とする。

(2) 座標平面上のベクトル $\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ で

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w} = 1,\quad \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに $a,\ b,\ c,\ d$ が整数であるとし，x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して条件 II が成り立つとする。D のとりうる値をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ 以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$，$\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x，y について $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$

(B) すべての x，y について $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

(C) $f(0)\neq 0$

(D) $f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$，$g'(0)=1$

①<u>条件 (A), (B), (C) から $f(0)=1$, $g(0)=0$ がわかる</u>。以上のことから ②<u>$f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で，$f'(x)=-g(x)$，$g'(x)=f(x)$ が成立する</u>ことが示される。
③<u>上のことから $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)=1$ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる</u>。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$ であることが示される。

さらに，a，b を実数で $b\neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)$'$ $f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$，$g'(0)=b$

におきかえて，条件 (A)，(B)，(C)，(D)$'$ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件 (A)，(B)，(C) から $f(0)=1$，$g(0)=0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right),\quad q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④<u>条件 (A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる</u>。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x)=\boxed{\text{ア}}$，$g(x)=\boxed{\text{イ}}$ が得られる。

(1) 下線部 ① について，$f(0)=1$，$g(0)=0$ となることを示せ。

(2) 下線部 ② について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。

(3) 下線部 ③ について，下線部 ①，下線部 ② の事実を用いることにより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)=1$ となることを示せ。

(4) 下線部 ④ について，条件 (B)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

(B) すべての x, y について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$

(D) $p(x)$，$q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0$，$q'(0)=1$

を満たすことを示せ。空欄 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に入る関数を求めよ。

5 xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x=t+2\sin^2 t,\quad y=t+\sin t \quad (0<t<\pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。

(2) 曲線 C のうち $y \leqq x$ の領域にある部分と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答例

1 (1) $(*)\quad x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$

$x=0$ は方程式 $(*)$ の解ではないから，$(*)$ の両辺を x^2 で割ると

$$x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad ゆえに \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

したがって　$\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2=0$　すなわち　$(x^2-x+1)^2=0$

これを解いて　$\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(2) $(**)\quad (\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$

$\alpha\neq\beta$ であるから，$(**)$ の両辺を $(\beta-\alpha)^4$ で割ると

$$1+\left\{\frac{(\beta-\alpha)-(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha}\right\}^4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^4=0$$

$z=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおくと　$1+(1-z)^4+z^4=0$

整理すると　$z^4-2z^3+3z^2-2z+1=0$

(1) の結果から，これを解くと　$z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\imath}{2}$

したがって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$　(複号同順)

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，$\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{\pi}{3}$ より　**△ABC は正三角形**　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_1 = \alpha,\quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1$ より $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \max(a_n - 1, -a_n + 1) + a_n - 1 \\ &= \max(2(a_n - 1),\ 0) \end{aligned}$$

k を自然数とすると，上の漸化式から

(i) $a_k \leqq 1$ のとき，$2(a_k - 1) \leqq 0$ より，$a_{k+1} = 0$

(ii) $a_k > 2$ のとき，$2(a_k - 1) > 2$ より，$a_{k+1} = 2(a_k - 1) > 2$

(iii) $1 < a_k < \dfrac{3}{2}$ のとき，$0 < 2(a_k - 1) < 1$ より，$0 < a_{k+1} < 1$

(iv) $\dfrac{3}{2} \leqq a_k < 2$ のとき，$1 < 2(a_k - 1) < 2$ より，$a_{k+1} = 2(a_k - 1)$
このとき，$a_{k+1} - a_k = a_k - 2 < 0$ より　$a_{k+1} < a_k$

が成立する．

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，(i) より　$a_2 = 0$
順次，(i) を適用すると　$a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ \cdots$
よって　$\boldsymbol{\{a_n\}}$ **は収束し，** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

(2) $\alpha > 2$ のとき，(ii) より　$a_{n+1} = 2(a_n - 1)$
ゆえに　$a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$　すなわち　$a_n = 2 + (\alpha - 2)\cdot 2^{n-1}$
よって　$\boldsymbol{\{a_n\}}$ **は発散し，** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$

(3) $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ のとき，(iii) より　$0 < a_2 < 1$
さらに，(i) を順次適用すると　$a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ \cdots$
よって　$\boldsymbol{\{a_n\}}$ **は収束し，** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき，すべての自然数 n について

$$\frac{3}{2} \leqq a_n < 2$$

であると仮定すると，(iv) より　$a_{n+1} = 2(a_n - 1)$

$$a_n = 2 + (\alpha - 2)\cdot 2^{n-1}$$

このとき，十分大きな k に対して，$a_k < \dfrac{3}{2}$ となり，仮定に反する．

よって，$a_k < \dfrac{3}{2}$ となる整数 k が存在するので，(i)，(iii) より

$$\boldsymbol{\{a_n\}}\ \text{は収束し，}\ \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

■

3 (1) $\overrightarrow{m}=(a,\ c)$，$\overrightarrow{n}=(b,\ d)$ より $(\overrightarrow{m}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{n}\neq\overrightarrow{0})$

$$(*)\left\{\begin{array}{r}d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n}=(ad-bc,\ 0)=(D,\ 0)\\ -b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n}=(0,\ ad-bc)=(0,\ D)\end{array}\right.$$

$D=0$ のとき　$d\overrightarrow{m}=c\overrightarrow{n}$，$b\overrightarrow{m}=a\overrightarrow{n}$　ゆえに　$\overrightarrow{m}/\!/\overrightarrow{n}$

このとき，$\overrightarrow{m}$，$\overrightarrow{n}$ は 1 次従属であるから，$\overrightarrow{q}$ がこれらのベクトルと平行でないならば，条件 I

$$r\overrightarrow{m}+s\overrightarrow{n}=\overrightarrow{q}$$

を満たす実数 r，s は存在しない．

$D\neq 0$ のとき，基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$ は，$(*)$ より

$$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)=\frac{d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n}}{D},\quad \overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)=\frac{-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n}}{D}\qquad(**)$$

のように，これらの基本ベクトルは $\overrightarrow{m}$，$\overrightarrow{n}$ の線形結合で表される．

したがって，任意のベクトル $\overrightarrow{q}=(x,\ y)$ を

$$(x,\ y)=x(1,\ 0)+y(0,\ 1)=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}\qquad(***)$$

とすると，$\overrightarrow{q}$ は $\overrightarrow{m}$，$\overrightarrow{n}$ の線形結合で表される．

よって，$D\neq 0$ のとき，条件 I を満たす実数 r，s が存在する．　［証終］

(2) $(**)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{v}$ の内積をとると

$$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{(d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}-c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{d}{D}$$
$$\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{(-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}+a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D}=-\frac{b}{D}$$

よって　$\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{D}(d,-b)}$

同様に，$(**)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{w}$ の内積をとると

$$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{w}=\frac{(d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}-c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D}=-\frac{c}{D}$$
$$\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{w}=\frac{(-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}+a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{a}{D}$$

よって　$\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{D}(-c,\ a)}$

(3) $(**)$ を $(***)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{q} &= x\left(\frac{d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n}}{D}\right)+y\left(\frac{-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n}}{D}\right)\\ &= \frac{dx-by}{D}\overrightarrow{m}+\frac{-cx+ay}{D}\overrightarrow{n} \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

条件 II を満たすとき，$\dfrac{dx-by}{D}$, $\dfrac{-cx+ay}{D}$ が整数である．とくに

$\overrightarrow{q}=(1,\ 0)$ のとき　　$\overrightarrow{q}=\dfrac{d}{D}\overrightarrow{m}-\dfrac{c}{D}\overrightarrow{n}$

$\overrightarrow{q}=(0,\ 1)$ のとき　　$\overrightarrow{q}=-\dfrac{b}{D}\overrightarrow{m}+\dfrac{a}{D}\overrightarrow{n}$

上の 2 式から，$\dfrac{a}{D}$, $\dfrac{b}{D}$, $\dfrac{c}{D}$, $\dfrac{d}{D}$ は整数である．

$$\frac{a}{D}\cdot\frac{d}{D}-\frac{b}{D}\cdot\frac{c}{D}=\frac{ad-bc}{D^2}=\frac{1}{D}$$

は整数であるから　$D=\pm1$

逆に，$D=\pm1$ のとき，(A) より，条件 II を満たす．

したがって　　$\boldsymbol{D=\pm1}$ ■

4 (1) 条件式 (A)，(B) に $x=y=0$ を代入すると

$$f(0)=f(0)^2-g(0)^2,\quad g(0)=2f(0)g(0) \tag{$*$}$$

上の第 2 式から　$\{2f(0)-1\}g(0)=0$

したがって　$f(0)=\dfrac{1}{2}$ または $g(0)=0$

- $f(0)=\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ の第 1 式に代入して整理すると　$g(0)^2=-\dfrac{1}{4}$
  $g(0)$ は実数値であるから，$f(0)=\dfrac{1}{2}$ は不適．
- $g(0)=0$ のとき，これを $(*)$ の第 1 式に代入して整理すると

$$f(0)\{f(0)-1\}=0 \quad f(0)\neq 0 \text{ に注意して} \quad f(0)=1$$

よって，題意は成立する．

(2) (1) の結論および条件 (A)，(D) より

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}-g(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\right\}\\
&=f(x)f'(0)-g(x)g'(0) \qquad (**)\\
&=f(x)\cdot 0-g(x)\cdot 1=-g(x)
\end{aligned}$$

(3) (2) と同様に，(1) の結論および条件 (B)，(D) より

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+g(x)f(h)-g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\}\\
&=f(x)g'(0)+g(x)f'(0) \qquad (***)\\
&=f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 0=f(x)
\end{aligned}$$

$\pi(x)=\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$ とおくと，(2) および上式から

$$\begin{aligned}
\pi'(x)&=\{f(x)+ig(x)\}'(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)'\\
&=\{f'(x)+ig'(x)\}(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(-\sin x-i\cos x)\\
&=\{-g(x)+if(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)\\
&=i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=0
\end{aligned}$$

$\pi(x)$ は定数関数であるから　$\pi(x)=\pi(0)=\{f(0)+ig(0)\}\cdot 1=1$

よって　$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$

(4) (3) の結論から　$f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$

$f(x),\ g(x)$ は実関数 (実数値関数) であるから

$$f(x)=\cos x,\quad g(x)=\sin x$$

ここで，$\varphi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\varphi'(x)=f'(x)+ig'(x)=-g(x)+if(x)=i\{f(x)+ig(x)\}=i\varphi(x)$$

$\varphi(0)=\cos 0+i\sin 0=1$ および上式を満たす $\varphi(x)$ を求める．

$$\varphi'(x)e^{-ix}-i\varphi(x)e^{-ix}=0\quad ゆえに\quad \{\varphi(x)e^{-ix}\}'=0$$

したがって　$\varphi(x)e^{-ix}=C$　(C は積分定数)　ゆえに　$\varphi(x)=Ce^{ix}$

$\varphi(0)=1$ より　$C=1$　すなわち　$\varphi(x)=e^{ix}$

$\varphi(x)=f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$ であるから

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{\#}$$

(#) により，条件 (A)，(B)，(C)，(D′) を満たす関数 $f(x),\ g(x)$ を求める．

(D′) を (∗∗)，(∗∗∗) に代入すると

$$f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)$$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=f'(x)+ig'(x)=\{af(x)-bg(x)\}+i\{bf(x)+ag(x)\}\\&=(a+bi)\{f(x)+ig(x)\}=(a+bi)\phi(x)\end{aligned}$$

$\phi(0)=f(0)+ig(0)=1+i\cdot 0=1$ および上式を満たす $\phi(x)$ を求める．

$$\phi'(x)e^{-(a+bi)x}-(a+bi)e^{-(a+bi)x}=0\quad ゆえに\quad \{\phi(x)e^{-(a+bi)x}\}'=0$$

したがって

$$\phi(x)e^{-(a+bi)x}=C_0\ \ (C_0 は積分定数)\quad ゆえに\quad \phi(x)=C_0e^{(a+bi)x}$$

$\phi(0)=1$ より　$C_0=1$　すなわち　$\phi(x)=e^{(a+bi)x}$

(#) より　　$\phi(x)=e^{ax}e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ であるから ($f(x),\ g(x)$ は実関数)

$$\boldsymbol{f(x)=e^{ax}\cos bx,\quad g(x)=e^{ax}\sin bx}$$

これから　$f\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\cos x,\quad g\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\sin x$

これらを $p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\dfrac{x}{b}\right),\quad q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\dfrac{x}{b}\right)$ に代入すると

$$p(x)=\cos x,\quad q(x)=\sin x$$

［**B** の証明］ このとき，加法定理を用いて

$$\begin{aligned} q(x+y)&=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\ &=q(x)p(y)+p(x)q(y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)\end{aligned}$$

［**D** の証明］ $p'(x)=-\sin x,\quad q'(x)=\cos x$ より

$$p'(0)=0,\quad q'(0)=1$$

［証終］

補足 本題の線形の連立微分方程式

$$\begin{aligned} &f(0)=1,\ g(0)=0,\ f'(0)=a,\ g'(0)=b,\\ &f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)\end{aligned}$$

から $g(x),\ g'(x)$ を消去して，2 階の微分方程式

$$f(0)=1,\ f'(0)=a,\ f''(x)-2af'(x)+(a^2+b^2)f(x)=0$$

を解いてもよい．特性方程式 $X^2-2aX+a^2+b^2=0$ の解を

$$\alpha=a+bi,\quad \beta=a-bi$$

とおくと　$f(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$　($C_1,\ C_2$ は積分定数)[9]

このとき，$f(0)=1,\ f'(0)=a$ より

$$C_1+C_2=1,\quad \alpha C_1+\beta C_2=a$$

上の第 2 式について　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}(C_1+C_2)+\dfrac{\alpha-\beta}{2}(C_1-C_2)=a$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a,\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=bi$ を代入すると　$a(C_1+C_2)+bi(C_1-C_2)=a$

$C_1+C_2=1,\ b\neq 0$ より　$C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$　よって　$f(x)=e^{ax}\cos bx$

同様に，2 階の微分方程式

$$g(0)=0,\ g'(0)=b,\ g''(x)-2ag'(x)+(a^2+b^2)g(x)=0$$

を解くと，$g(x)=e^{ax}\sin bx$ を得る．■

[9] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2010.pdf (p.17 例 2)

5　(1) $C:(x,\ y)=(f(t),\ g(t))=(t+2\sin^2 t,\ t+\sin t)$ とおくと $(0<t<\pi)$

$f'(t)=0$ とすると　$1+4\sin t\cos t=0$

$$1+2\sin 2t=0\ (0<t<\pi) \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

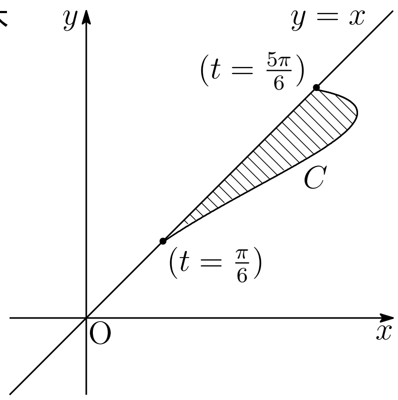
このとき
$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{7\pi}{12}+1-\cos\frac{7\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{11\pi}{12}+1-\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{11\pi}{12}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，C の $t=\dfrac{7\pi}{12},\ \dfrac{11\pi}{12}$ における 2 接線

$$x=f\left(\frac{7\pi}{12}\right),\quad x=f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

が異なるから，求める接線の本数は　**2 本**

(2) 求める面積を右の図の斜線部分である．この面積を S とすると，ガウス・グリーンの定理により



$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt$$

このとき

$$\begin{aligned}f(t)g'(t)-f'(t)g(t)&=(t+2\sin^2 t)(1+\cos t)-(1+4\sin t\cos t)(t+\sin t)\\&=t(\cos t-4\sin t\cos t)+2\sin^2 t-\sin t-2\sin^2 t\cos t\\&=t(\sin t-2\sin^2 t)'+2\sin^2 t-\sin t-2\sin^2 t\cos t\\&=\{t(\sin t-2\sin^2 t)\}'+2(2\sin^2 t-\sin t)-\frac{2}{3}(\sin^3 t)'\end{aligned}$$

よって [10]

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\Big[\,t(\sin t-2\sin^2 t)\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(2\sin^2 t-\sin t)\,dt-\frac{1}{3}\Big[\,\sin^3 t\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\\&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(1-\cos 2t-\sin t)\,dt=\Big[\,t-\frac{1}{2}\sin 2t+\cos t\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

[10] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf 5

別解 $\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{5\pi}{6}$ で $y = g(t)$ は単調増加であることに注意して

$$S = \int_{g(\frac{\pi}{6})}^{g(\frac{5\pi}{6})} (x-y)\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t)\,dt - \left[\ \frac{y^2}{2}\ \right]_{g(\frac{\pi}{6})}^{g(\frac{5\pi}{6})}$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right\} \quad \cdots ①$$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = g\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$ に注意して変形すると

$$S = \left[\ f(t)g(t)\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right\}$$
$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t)\,dt + \frac{1}{2}\left\{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right\} \quad \cdots ②$$

①，② の辺々を加えることにより，次式を得る．

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt$$

$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}$，$g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{1}{2}$ であるから，① より

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + 2\sin^2 t)(1+\cos t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right\}$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + t\cos t + 2\sin^2 t + 2\sin^2 t\cos t)\,dt - \frac{\pi}{3}(\pi+1)$$
$$= \left[\ \frac{t^2}{2} + t\sin t + \cos t + t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\sin^3 t\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{\pi}{3}(\pi+1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

■

10.10　2024 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 a を実数とし，座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1, -1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $a \neq -1,\ a \neq 1$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にないことを示せ。

(2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

2 整式

$$f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して，$|z| = 1$ が成り立つことを示せ。

(2) 次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ。

条件：　$f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して
$f(wz) = 0$ が成り立つ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 $a,\ b$ が $a < b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2) $2{\cdot}a! = b!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3) $a! + b! = 2{\cdot}c!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

4 n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $L(3)$ を求めよ。

(2) $L(4)$ を求めよ。

(3) $L(5)$ を求めよ。

5 自然数 $m,\ n$ に対して

$$I(m,\ n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n \, dx$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $I(m+1,\ n+1)$ を $I(m,\ n+1)$，$I(m,\ n)$，m，n を用いて表せ。

(2) すべての自然数 m に対して，$\lim_{n \to \infty} I(m,\ n) = 0$ が成り立つことを示せ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 3点 $\mathrm{P}(-1,\ 1, -1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (2,\ 0,\ 2), \quad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = (a+1,\ a^2-1,\ a^3+1)$$

3点P，Q，Rが一直線上にあると仮定すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の y 成分から

$$a^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm 1$$

これは，$a \neq -1,\ a \neq 1$ に反する．

よって，3点P，Q，Rは一直線上にない．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = 8$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = 2(a^3+a+2)$

点Rから直線PQに垂線RHを引くと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{2(a^3+a+2)}{8}(2,\ 0,\ 2)\\ &= \left(\frac{a^3}{2}+\frac{a}{2}+1,\ 0,\ \frac{a^3}{2}+\frac{a}{2}+1\right),\\ \overrightarrow{\mathrm{RH}} &= \overrightarrow{\mathrm{PH}} - \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{2},\ 1-a^2,\ \frac{a}{2}-\frac{a^3}{2}\right)\\ &= (1-a^2)\left(-\frac{a}{2},\ 1,\ \frac{a}{2}\right)\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ より，$1-a^2 > 0$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{RH}}| &= (1-a^2)\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-a^2)\sqrt{2+a^2}\\ \triangle\mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{RH}}| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-a^2)\sqrt{2+a^2}\\ &= (1-a^2)\sqrt{2+a^2}\end{aligned}$$

ここで，$t = 1-a^2$ とおくと　$0 < t \leqq 1$

$$\triangle\mathrm{PQR} = t\sqrt{3-t} = \sqrt{3t^2 - t^3}$$

$f(t) = 3t^2 - t^3$ とおくと　$f'(t) = 6t - 3t^2 = 3t(2-t) > 0$

$f(t)$ は単調増加であるから，$t=1$，すなわち，$a=0$ のとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ をとる．

補足 (外積を用いる解法)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= (2(1-a^2),\ 2a(1-a^2), -2(1-a^2))\\ &= 2(1-a^2)(1,\ a, -1)\end{aligned}$$

$-1<a<1$ に注意して

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=(1-a^2)\sqrt{2+a^2}$$

(面積公式を用いる解法)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= 2^2+0^2+2^2=8,\\ |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 &= (a+1)^2+(a^2-1)^2+(a^3+1)^2\\ &= (a+1)^2\{1+(a-1)^2+(a^2-a+1)^2\}\\ &= (a+1)^2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3),\\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= 2(a+1)+0+2(a^3+1)\\ &= 2(a+1)(a^2-a+2)\end{aligned}$$

$-1<a<1$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot(a+1)^2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3)-\{2(a+1)(a^2-a+2)\}^2}\\ &= (a+1)\sqrt{2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3)-(a^2-a+2)^2}\\ &= (a+1)\sqrt{a^4-2a^3+3a^2-4a+2}\\ &= (a+1)\sqrt{(a-1)^2(a^2+2)}\\ &= (a+1)(1-a)\sqrt{a^2+2}\\ &= (1-a^2)\sqrt{2+a^2}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1 = (z^2+1)(z^4+1)$

$f(z) = 0$ をみたすとき　$z^2 = -1,\ z^4 = -1 \quad \cdots (*)$

$$|z^2| = |z|^2 = 1,\ |z^4| = |z|^4 = 1 \quad \text{よって} \quad |z| = 1$$

補足 $z^8 - 1 = (z^2-1)(z^2+1)(z^4+1)$，$f(z) = z^6+z^4+z^2+1 = (z^2+1)(z^4+1)$ より，$z^8-1 = (z^2-1)f(z)$ であるから，z は実数以外の 1 の 8 乗根である．

(2) $(*)$ より　$z^2 = -1,\ \pm i$

$f(z) = (z^2+1)(z^2+i)(z^2-i)$ より

$$f(wz) = (w^2z^2+1)(w^2z^2+i)(w^2z^2-i)$$

(i) $z^2 = -1$ のとき

$$f(wz) = (-w^2+1)(-w^2+i)(-w^2-i) = 0$$

したがって　$w^2 = 1,\ \pm i \quad \cdots ①$

(ii) $z^2 = i$ のとき

$$\begin{aligned} f(wz) &= (iw^2+1)(iw^2+i)(iw^2-i) \\ &= -i(w^2-i)(w^2+1)(w^2-1) = 0 \end{aligned}$$

したがって　$w^2 = \pm 1,\ i \quad \cdots ②$

(iii) $z^2 = -i$ のとき

$$\begin{aligned} f(wz) &= (-iw^2+1)(-iw^2+i)(-iw^2-i) \\ &= i(w^2+i)(w^2-1)(w^2+1) = 0 \end{aligned}$$

したがって　$w^2 = \pm 1, -i \quad \cdots ③$

①〜③ を同時にみたすとき　$w^2 = 1$　よって　$\boldsymbol{w = \pm 1}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $b > a$ のとき，$b-1 \geqq a$ であるから　$(b-1)! \geqq a!$

$$b! = b\cdot(b-1)! \geqq b\cdot a! \quad \text{よって} \quad \frac{b!}{a!} \geqq b$$

(2) $2\cdot a! = b!$ より $\dfrac{b!}{a!} = 2 > 1$ であるから

$$a! < b! \quad \text{すなわち} \quad a < b$$

$a < b$ より，(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{b!}{a!} \geqq b > a \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 2)}$$

(3) (i) $a \leqq c,\ b \leqq c$ のとき

$$\frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} = 2, \quad \frac{a!}{c!} \leqq 1, \quad \frac{b!}{c!} \leqq 1$$

このとき　$\dfrac{a!}{c!} = 1,\ \dfrac{b!}{c!} = 1$　すなわち　$a = c,\ b = c$　$\cdots(*)$

(ii) $a > c$ または $b > c$ のとき，一般性を失うことなく，$b > c$ とし，(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geqq \frac{a!}{c!} + b > b > c \geqq 1$$

これをみたす $b,\ c$ は存在しない．

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (n,\ n,\ n)}$ **(**$\boldsymbol{n}$ **は自然数)**

■

4 (1) 条件を満たす直線は，次の 8 本より　$\boldsymbol{L(3) = 8}$

$$y = x, \quad y = -x + 4, \quad x = k, \quad y = k\ (k = 1, 2, 3)$$

(2) 条件を満たす直線は，次の 14 本より　$\boldsymbol{L(4) = 14}$

$$\begin{aligned} & y = x - 1, \quad y = x, \quad y = x + 1, \\ & y = -x + 4, \quad y = -x + 5, \quad y = -x + 6, \\ & x = k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

(3) 条件を満たす直線で傾きが 0 以上の直線は，(i)〜(iv) の 16 本ある．

(i) 条件を満たす x 軸に平行な直線は　$y = k\ (k = 1, 2, 3, 4, 5)$

(ii) 条件を満たす傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線は　$y - k = \dfrac{x-1}{2}\ (k = 1, 2, 3)$

(iii) 条件を満たす傾き 1 の直線は　$y = x + k\ (k = 0, \pm 1, \pm 2)$

(iv) 条件を満たす傾き 2 の直線は　$y - 1 = 2(x - k)\ (k = 1, 2, 3)$

(i)〜(iv) の直線を点 $(3,\ 3)$ を中心に 90° 回転させた直線も条件を満たす．

よって　$L(5) = 16 \times 2 = \boldsymbol{32}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $I(m,\ n)=\displaystyle\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx$ より ($m,\ n$ は自然数)

$$\begin{aligned}
&I(m+1,\ n+1)\\
&\quad=\int_1^e (e^x)' x^{m+1}(\log x)^{n+1}\,dx\\
&\quad=\Big[\ e^x x^{m+1}(\log x)^{n+1}\ \Big]_1^e\\
&\qquad\quad-\int_1^e e^x\left\{e^x(m+1)x^m(\log x)^{n+1}+x^{m+1}(n+1)(\log x)^n\frac{1}{x}\right\}dx\\
&\quad=e^{m+e+1}\\
&\qquad\quad-(m+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^{n+1}\,dx-(n+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx\\
&\quad=\boldsymbol{e^{m+e+1}-(m+1)I(m,\ n+1)-(n+1)I(m,\ n)}
\end{aligned}$$

(2) $1\leqq x\leqq e$ において，$x^m e^x(\log x)^n\geqq 0$ であるから ($m,\ n$ は自然数)

$$I(m,\ n)=\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx\geqq 0$$

上式および (1) の結果から

$$0\leqq(n+1)I(m,\ n)\leqq e^{m+e+1}-(m+1)I(m,\ n+1)\leqq e^{m+e+1}$$

したがって　$0\leqq I(m,\ n)\leqq\dfrac{e^{m+e+1}}{n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{m+e+1}}{n+1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}I(m,\ n)=0$$

別解 $1 \leqq x \leqq e$ において，$0 \leqq x^m e^x (\log x)^n \leqq e^{m+e}(\log x)^n$ であるから

$$0 \leqq I(m,\ n) \leqq e^{m+e}\int_1^e (\log x)^n\,dx$$

$x = e^t$ とおくと $\quad \dfrac{dx}{dt} = e^t$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned} 0 \leqq \int_1^e (\log x)^n\,dx &= \int_0^1 t^n e^t\,dt = \int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n e^t\,dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 t^n e^t\,dt \\ &\leqq e\int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n\,dt + e\int_{1-\frac{1}{n}}^1 dt \\ &= \frac{e}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n} \end{aligned}$$

ここで $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-1} = \frac{1}{e}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{e}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n}\right\} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^e (\log x)^n\,dx = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} I(m,\ n) = \mathbf{0}$$

■

10.11　2025 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 座標空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 1, -5)$，$\mathrm{B}(-1, -1,\ 7)$，$\mathrm{C}(1, -1,\ 3)$ を通る平面を α とする。点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ t)$ を通り α に垂直な直線と xy 平面との交点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を求めよ。

(2) t がすべての実数値をとって変化するときの OQ の最小値が 1 以下となるような a，b の条件を求めよ。ただし，O は原点である。

2 以下の問いに答えよ。

(1) $y = \tan x$ とするとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を y の整式で表せ。

(2) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4}\,dx$$

3 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，n^2 を 8 で割った余りは 0，1，4 のいずれかであることを示せ。

(2) $2^m = n^2 + 3$ をみたす 0 以上の整数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

4 半径 1 の円周上に反時計回りに A，B，C，D を順にとり，線分 AD は直径で，$\mathrm{AC} = \mathrm{CD}$，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$ が成り立つとする。

(1) $\angle\mathrm{ACB}$ を求めよ。

(2) BC を求めよ。

(3) 線分 AC と線分 BD の交点を E とするとき，三角形 BCE の面積を求めよ。

5 1 個のさいころを 3 回投げ，出る目を順に a，b，c とする。整式

$$f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ をみたす実数 x の個数が 1 個である確率を求めよ。

(2) $f(x) = 0$ をみたす自然数 x の個数が 3 個である確率を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,-2,\ 12)=2(-1,-1,\ 6)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ -2,\ 8)=2(0,-1,\ 4)$ より，α の法線ベクトルを

$$\vec{n}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 4,\ 1)$$

とすると，点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ t)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{n}$ である直線の方程式は

$$\frac{x-a}{2}=\frac{y-b}{4}=z-t$$

であり，この直線と xy 平面の交点は，上式に $z=0$ を代入して

$$x=-2t+a,\quad y=-4t+b$$

よって　　$\mathbf{Q(-2t+a,-4t+b,\ 0)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2&=(-2t+a)^2+(-4t+b)^2\\&=20t^2-4(a+2b)t+a^2+b^2\\&=20\left\{t^2-\frac{1}{5}(a+2b)t\right\}+a^2+b^2\\&=20\left\{t-\frac{1}{10}(a+2b)\right\}^2+\frac{1}{5}(2a-b)^2\end{aligned}$$

したがって，OQ の最小値は　$\dfrac{|2a-b|}{\sqrt{5}}$

OQ の最小値が 1 以下となる $a,\ b$ の条件は

$$\frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}\leqq 1\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{|2a-b|\leqq\sqrt{5}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \tan x$ を微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \boldsymbol{1 + y^2}$$

(2) (1) の結果を利用すると

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
y	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4}\,dx &= \int_0^1 \frac{y^4 - y^2 - 2}{y^2 - 4} \cdot \frac{dy}{1 + y^2} \\ &= \int_0^1 \frac{y^2 - 2}{y^2 - 4} dy = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{y^2 - 4}\right) dy \\ &= \left[\, y + \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right| \,\right]_0^1 = \mathbf{1 - \frac{1}{2}\log 3}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 法 8 について

$$
\begin{array}{lll}
n \equiv 0 \text{ のとき} & n^2 \equiv 0 & \pmod 8 \\
n \equiv \pm 1 \text{ のとき} & n^2 \equiv 1 & \pmod 8 \\
n \equiv \pm 2 \text{ のとき} & n^2 \equiv 4 & \pmod 8 \\
n \equiv \pm 3 \text{ のとき} & n^2 \equiv 1 & \pmod 8 \\
n \equiv 4 \text{ のとき} & n^2 \equiv 0 & \pmod 8
\end{array}
$$

よって，n^2 を 8 で割った余りは (n は自然数)　0，1，4 のいずれかである．

(2) $(*)$　$2^m = n^2 + 3$ について (m，n は 0 以上の整数)

$2^1 < n^2 + 3$ であるから，$m \geqq 2$

(i) $m = 2$ のとき，$(*)$ は　$2^2 = n^2 + 3$

$$n^2 = 1 \quad n \text{ は 0 以上の整数であるから} \quad n = 1$$

(ii) $m \geqq 3$ のとき $2^m \equiv 0 \pmod 8$ であるから

$$n^2 + 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n^2 \equiv 5 \pmod 8$$

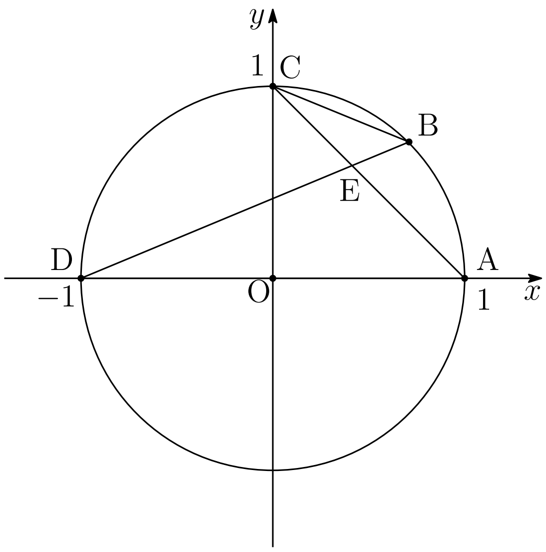
(1) の結論から，上の第 2 式を満たす n は存在しない．

(i)，(ii) から　　$\boldsymbol{(m,\ n) = (2,\ 1)}$　■

4 (1) AD は半径 1 の円の直径であるから，O を原点とする座標平面上に A(1, 0)，D(−1, 0) をとると，OB，OC の偏角はそれぞれ $\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}$ である．

円周角と中心角の定理により

$$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{ADB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$



(2) $\mathrm{B}\left(\cos\dfrac{\pi}{4},\ \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{C}\left(\cos\dfrac{\pi}{2},\ \sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ より　$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, C(0, 1)

よって　$\mathrm{BC} = \sqrt{\left(0-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \boldsymbol{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

(3) 直線 AC の方程式は　$x + y = 1$

直線 BD の方程式は

$$y = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}(x+1) \quad \text{すなわち} \quad y = (\sqrt{2}-1)(x+1)$$

直線 AC と BD の方程式から x を消去すると，点 E の y 座標は

$$y = (\sqrt{2}-1)(2-y) \quad \text{これを解いて} \quad y = 2-\sqrt{2}$$

したがって　　$\triangle\mathrm{ADE} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}$

$\triangle\mathrm{BCE} \backsim \triangle\mathrm{ADE}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCE} = \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AD}}\right)^2 \triangle\mathrm{ADE} = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 (2-\sqrt{2}) = \boldsymbol{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}$$ ■

5 (1) (i) $x^2 - ax + b = 0$ が実数解をもたないとき $(c = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$$a^2 - 4b < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a^2}{4} < b \leqq 6$$

このとき，$a \leqq 4$ に注意して

$a = 1$ のとき　$b = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$a = 2$ のとき　$b = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$a = 3$ のとき　$b = 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$a = 4$ のとき　$b = 5,\ 6$

(ii) $x = c$ が $f(x) = 0$ の 3 重解であるとき

$$f(x) = (x - c)^3 = (x^2 - 2cx + c^2)(x - c)$$

$a = 2c,\ b = c^2$ であるから，このとき

$$(a,\ b,\ c) = (2,\ 1,\ 1),\ (4,\ 4,\ 2)$$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$\frac{(6+5+4+2)\times 6 + 2}{6^3} = \mathbf{\frac{13}{27}}$$

(2) $a^2 - 4b$ が平方数であることは，$x^2 - ax + b = 0$ が自然数を解にもつための必要条件である．$a \geqq 2$ に注意して

$a = 2$ のとき　$b = 1$
$a = 3$ のとき　$b = 2$
$a = 4$ のとき　$b = 3,\ 4$
$a = 5$ のとき　$b = 4,\ 6$
$a = 6$ のとき　$b = 5$

これらを係数とする 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ で異なる 2 つの実数解をもつのは，次の 5 通りである．

$$x^2 - 3x + 2 = 0,\quad x^2 - 4x + 3 = 0,\quad x^2 - 5x + 4 = 0,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0,\quad x^2 - 6x + 5 = 0$$

それぞれの場合について，c のとり方は 4 通りあるから

$$\frac{5 \times 4}{6^3} = \mathbf{\frac{5}{54}}$$

■