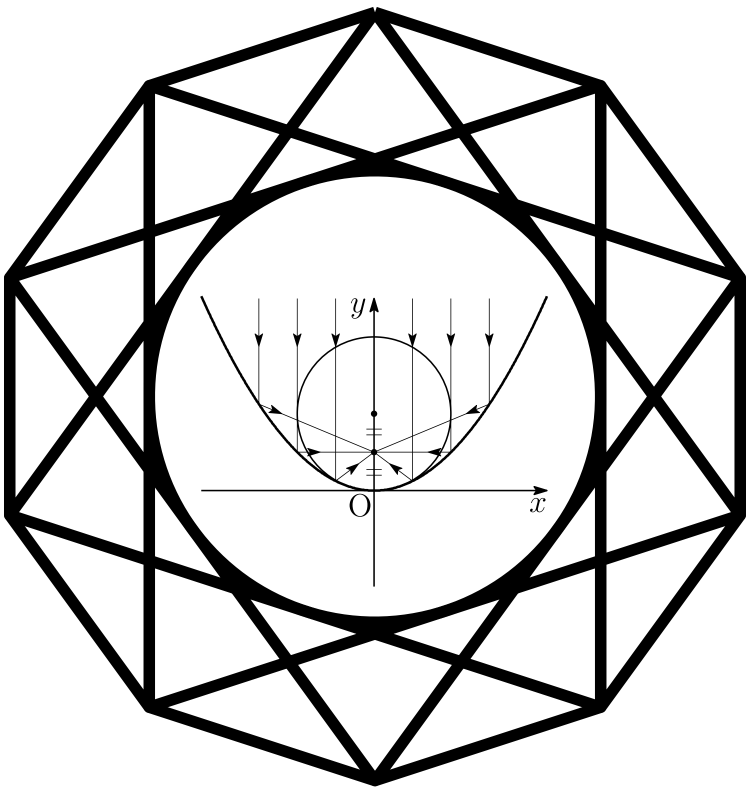
入試の軌跡

難関大学　理系

2015 － 2020

数　学



2020 年 10 月 17 日

Typed by LaTeX 2ε

序

本書には，主な難関国立大学 (理系)

北海道大学	東北大学	東京大学	東京工業大学	名古屋大学
京都大学	大阪大学	神戸大学	広島大学	九州大学

が実施した平成 27 年 (2015 年) 度から令和 2 年 (2020 年) 度までの一般前期試験問題 (数学) および解答例をすべて掲載した．

本書の作成にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. ICT 教材として，電子黒板やプロジェクターでの使用を視野に入れており，この機能を利用する際には，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなる．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには$\boxed{\text{ESC}}$.

3. スマートフォンでの使用も想定し，ページリンクの操作性を配慮した ICT 教材でもある．問題および解答には相互リンクを施した．各問の解答の終わりにある ■ をクリックすると，各大学の出題分野に戻る．また，出題分野の左上にある ◀ をクリックすると，最初のページに戻る．

上の 2，3 の機能をサポートする PDF ブラウザとして，Adobe Reader をご使用ください (フリーソフト)．スマートフォンには，同アプリがインストールされていない場合が多いので，同アプリをインストールされてからご使用ください．

令和 2 年 5 月　編者

目 次

第 1 章　北海道大学

出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	北海道大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数	1									
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式		4	3				5	4		
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法		2		1						
III	式と曲線						5				
	複素数平面						1	3	2		
	関数										
	極限										4
	微分法とその応用					1				3	
	積分法	5	3	5	5	5	2	2		5	
	積分法の応用			1					5		5
A	場合の数と確率	4	5	4	4	4	3	4	3	4	3
	整数の性質							1		2	2
	図形の性質										
B	平面上のベクトル										1
	空間のベクトル	3			2	3	5		1	1	
	数列					2	4				
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	2	1	2	3						

数字は問題番号

1.1　2015年(120分)

1　a は実数とし，2つの曲線

$$C_1 : y = (x-1)e^x, \quad C_2 : y = \frac{1}{2e}x^2 + a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

(1) a を t で表せ．

(2) t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

2　$p,\ q$ は正の実数とし，$a_1 = 0$，$a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ とする．数列 $\{b_n\}$ の一般項を $p,\ q,\ n$ で表せ．

(2) $q = 1$ とする．すべての自然数 n について $a_{n+1} \geqq a_n$ となるような p の値の範囲を求めよ．

3　空間の3点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(-1,\ 1,\ 1)$ の定める平面を α とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．α 上の点 C があり，その x 座標が正であるとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが1であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．

(1) C の座標を求めよ．

(2) $\vec{b} = s\vec{a} + t\vec{c}$ をみたす実数 $s,\ t$ を求めよ．

(3) α 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$ から α に垂線を下ろし，α との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\vec{a} + l\vec{c}$ をみたす実数 $k,\ l$ を $x,\ y,\ z$ で表せ．

4 初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある．その袋に対して以下の試行を繰り返す．

(i) まず同時に 2 個の玉を取り出す．

(ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる．

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える．n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする．

(1) $X_1 = 3$ となる確率を求めよ．

(2) $X_2 = 3$ となる確率を求めよ．

(3) $X_2 = 3$ であったとき，$X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ．

5 n は自然数，a は $a > \dfrac{3}{2}$ をみたす実数とし，実数 x の関数

$$f(x) = \int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$$

を考える．ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta = 1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\, d\theta = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\, d\theta$ を示せ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ をみたす n と a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

解答例

1 (1) $C_1 : y = (x-1)e^x$ より　$y' = xe^x$

C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線を l_1 とすると，その方程式は

$$y - (t-1)e^t = te^t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y = te^t x + (-t^2+t-1)e^t$$

$C_2 : y = \dfrac{1}{2e}x^2 + a$ より　$y' = \dfrac{x}{e}$

C_2 上の点 $\left(s,\ \dfrac{1}{2e}s^2 + a\right)$ における接線を l_2 とすると，その方程式は

$$y - \left(\frac{1}{2e}s^2 + a\right) = \frac{s}{e}(x-s) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{s}{e}x - \frac{s^2}{2e} + a$$

l_1 と l_2 の方程式は一致するから

$$te^t = \frac{s}{e}, \quad (-t^2+t-1)e^t = -\frac{s^2}{2e} + a$$

第1式から，$s = te^{t+1}$．これを第2式に代入すると

$$(-t^2+t-1)e^t = -\frac{(te^{t+1})^2}{2e} + a$$

よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1} + (-t^2+t-1)e^t}$

(2) $f(t) = a$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t^2+t)e^{2t+1} - (t^2+t)e^t \\ &= t(t+1)e^t(e^{t+1}-1) \end{aligned}$$

$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$

よって，a は，$\boldsymbol{t=0}$ のとき，極小値 $\boldsymbol{-1}$ をとる．■

$\boxed{2}$ (1) $a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1}$ より $(q \neq 0)$　　$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \dfrac{a_n}{p^n} + \left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$

$b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ より $(a_1 = 0)$　　$b_1 = \dfrac{a_1}{p} = 0,\quad b_{n+1} = b_n + \left(-\dfrac{q}{p}\right)^n$

$n \geqq 2$ のとき，$p,\ q > 0$ より，$-\dfrac{q}{p} \neq 1$ に注意して

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{q}{p}\right)^{k+1}$$

$$b_n - b_1 = \frac{(-\frac{q}{p})^2\left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)}$$

$$b_n = \frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{b_n = \frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}$$

(2) $a_n = p^n b_n$ であるから，(1) の結果から

$$a_n = p^n b_n = p^n \cdot \frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\} = \frac{q^2}{p+q}\left\{p^{n-1} - (-q)^{n-1}\right\}$$

これに $q = 1$ を代入して　$a_n = \dfrac{1}{p+1}\left\{p^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{p+1}\left\{p^n - (-1)^n\right\} - \frac{1}{p+1}\left\{p^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{p+1}\left\{p^{n-1}(p-1) - 2(-1)^n\right\} \end{aligned}$$

すべての自然数 n について，$a_{n+1} \geqq a_n$ が成立する条件は $(p + 1 > 0)$

$$p^{n-1}(p-1) - 2(-1)^n \geqq 0 \quad ゆえに \quad p^{n-1}(p-1) \geqq 2(-1)^n \quad \cdots(*)$$

$n = 1$ のとき　$p - 1 \geqq -2$ より，$(*)$ は成立する．

$n = 2$ のとき　$(*)$ は　$p(p-1) \geqq 2$　ゆえに　$(p+1)(p-2) \geqq 0$

$p > 0$ に注意してこれを解くと　$p \geqq 2$

逆に，$p \geqq 2$ であるとき，$n \geqq 2$ について

$$p^{n-1}(p-1) \geqq 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1} \geqq 2 \geqq 2(-1)^n$$

よって，求める p の値の範囲は　$p \geqq 2$　■

3 (1) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 1)$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$|\vec{a}|^2=3$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}$ は α に平行なベクトルで $\vec{a}$ に垂直である．

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)-3(-1,\ 1,\ 1)=2(2,-1,-1)$$

$\vec{d}=(2,-1,-1)$ とすると，$\vec{c}$ は $\vec{d}$ と平行な単位ベクトルであるから，x 成分の符号に注意して

$$\vec{c}=\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\quad \text{よって}\quad \mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{6}}},-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}},-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\right)$$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は α に平行で，$\vec{a}\perp\vec{c}$ であるから，$\vec{b}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$ より [1]

$$s=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\qquad t=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=-\frac{4}{\sqrt{6}}=-\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{3}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ について，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{c}$$

(2) と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ より

$$k=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\boldsymbol{x+y+z}}{\mathbf{3}}$$
$$l=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=\frac{\boldsymbol{2x-y-z}}{\sqrt{\mathbf{6}}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/HKdai/HKdai_ri_2016.pdf 5 の補足を参照．

4 (1) $X_1=3$ となる事象を A とすると，A は赤玉 2 個，白玉 2 個の 4 個から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す事象であるから，求める確率は

$$P(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2\cdot2}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2) $X_2=3$ となる事象を B とする．

(i) 事象 A が起きたとき，袋の中は赤玉 3 個と白玉 2 個となる．$X_2=3$ となるのは，2 回目の試行で色違いの玉を取り出さない場合であるから

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P(B)\\&=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\right)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3\cdot2}{10}\right)=\frac{4}{15}\end{aligned}$$

(ii) 事象 $\overline{A}$ が起きたとき，袋の中は赤玉 2 個と白玉 3 個となる．$X_2=3$ となるのは，2 回目の試行で色違いの玉を取り出す場合であるから

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap B)&=P(\overline{A})P(B)=(1-P(A))P(B)\\&=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{2\cdot3}{10}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{7}{15}}$$

(3) 求める条件付き確率は，(2) の結果から

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{4}{15}\div\frac{7}{15}=\mathbf{\frac{4}{7}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta$ とおくと [2]

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta(\cos\theta)'\,d\theta \\
&= -\Big[\ \sin^n\theta\cos\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin^{n-1}\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= n(I_{n-1} - I_{n+1})
\end{aligned}$$

ゆえに　$I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\,d\theta = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\,d\theta$

(2) $f(x) = \displaystyle\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$ より

$$f(x) = x\int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta - \int_0^x \theta(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$$

これを微分して $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入すると，(1) の結果より

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta + x(a\sin^{n+1}x - \sin^{n-1}x) \\
&\qquad\qquad\qquad - x(a\sin^{n+1}x - \sin^{n-1}x \\
&= \int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta,
\end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = aI_{n+1} - I_{n-1} = a\cdot\frac{n}{n+1}I_{n-1} - I_{n-1} = \frac{(a-1)n-1}{n+1}I_{n-1}$$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ より　$(a-1)n-1 = 0$　ゆえに　$a = 1 + \dfrac{1}{n}$　$\cdots$①

$a > \dfrac{3}{2}$ であるから　$1 + \dfrac{1}{n} > \dfrac{3}{2}$　ゆえに　$\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2}$

n は自然数であるから　$\boldsymbol{n = 1}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{a = 2}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2018_kouki.pdf $\boxed{1}$ を参照.

(3) (2) の結果により

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(2\sin^2\theta - 1)d\theta \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos 2\theta\, d\theta \\ &= \left[-\frac{\pi}{4}\sin 2\theta + \frac{\theta}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

別解 $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ とおくと $\dfrac{d\theta}{d\varphi} = -1$

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
φ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos 2\theta\, d\theta \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \varphi\cos(\pi - 2\varphi)\cdot(-d\varphi) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos 2\varphi\, d\varphi \\ &= \left[\frac{\varphi}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{4}\cos 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

1.2 2016年(120分)

1 複素数平面上の点0を中心とする半径2の円 C 上に点 z がある．a を実数の定数とし，

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく．

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ．

(2) 点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ．

2 $a > 0$ に対し，関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t)\sin t \right\} dt$$

をみたすとする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $0 < a \leqq 2\pi$ において，

$$g(a) = \int_{-a}^{a} f(t)\sin t\, dt$$

の最小値とそのときの a の値を求めよ．

3 机のひきだしAに3枚のメダル，ひきだしBに2枚のメダルが入っている．ひきだしAの各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだしBの各メダルの色は金，銀のどちらかである．

(1) ひきだしAのメダルの色が2種類である確率を求めよ．

(2) ひきだしA，Bをあわせたメダルの色が2種類である確率を求めよ．

(3) ひきだしA，Bをあわせてちょうど3枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだしAのメダルの色が2種類である確率を求めよ．

4 (1) 次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ．

$$x^3+x^2-2x-1=0 \quad \cdots ①$$

(2) 方程式 ① の 3 つの実数解を $s,\ t,\ u$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める．このとき，

$$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(3) (2) の a_n がすべて整数であることを示せ．

5 空間の 2 点 A(0, 0, 2)，B(0, 1, 3) を通る直線を ℓ とし，2 点 C(1, 0, 0)，D(1, 0, 1) を通る直線を m とする．a を定数として，ℓ 上にも m 上にもない点 P$(s,\ t,\ a)$ を考える．

(1) P から ℓ に下ろした垂線と ℓ の交点を Q とし，P から m に下ろした垂線と m の交点を R とする．Q，R の座標をそれぞれ $s,\ t,\ a$ を用いて表せ．

(2) P を中心とし，ℓ と m がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ．

(3) $s,\ t$ と定数 a が (2) の条件をみたすとき，平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し，その焦点と準線を a を用いて表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $w = z^2 - 2az + 1$ (a は実数，$|z| = 2$) より

$$\begin{aligned}|w|^2 &= w\overline{w} = (z^2 - 2az + 1)(\overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1)\\ &= \{(z^2 - 2az) + 1\}\{(\overline{z}^2 - 2a\overline{z}) + 1\}\\ &= (z^2 - 2az)(\overline{z}^2 - 2a\overline{z}) + (z^2 - 2az) + (\overline{z}^2 - 2a\overline{z}) + 1\\ &= z\overline{z}(z - 2a)(\overline{z} - 2a) + z^2 + \overline{z}^2 - 2a(z + \overline{z}) + 1\\ &= z\overline{z}\{z\overline{z} - 2a(z + \overline{z}) + 4a^2\} + (z + \overline{z})^2 - 2z\overline{z} - 2a(z + \overline{z}) + 1\end{aligned}$$

$z\overline{z} = |z|^2 = 4$，$z + \overline{z} = 2x$ であるから

$$\begin{aligned}|w|^2 &= 4\{4 - 2a\cdot 2x + 4a^2\} + (2x)^2 - 2\cdot 4 - 2a\cdot 2x + 1\\ &= \boldsymbol{4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$f(x) = 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9$ とおくと

$$f(x) = 4\left(x - \frac{5a}{2}\right)^2 + 9 - 9a^2$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を m とする．

(i) $\dfrac{5a}{2} \leqq -2$，すなわち，$a \leqq -\dfrac{4}{5}$ のとき

$$m = f(-2) = 16a^2 + 40a + 25 = (4a + 5)^2$$

(ii) $-2 \leqq \dfrac{5a}{2} \leqq 2$，すなわち，$-\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq \dfrac{4}{5}$ のとき

$$m = f\left(\frac{5a}{2}\right) = 9 - 9a^2$$

(iii) $2 \leqq \dfrac{5a}{2}$，すなわち，$\dfrac{4}{5} \leqq a$ のとき

$$m = f(2) = 16a^2 - 40a + 25 = (4a - 5)^2$$

(i)〜(iii) より，$|w|$ の最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -\dfrac{4}{5}} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{|4a + 5|}\\ \boldsymbol{-\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq \dfrac{4}{5}} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{3\sqrt{1 - a^2}}\\ \boldsymbol{\dfrac{4}{5} \leqq a} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{|4a - 5|}\end{cases}$$

■

2 (1) 与えられた関数 $f(x)$ から $(a>0)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt \\ &= \frac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a}dt+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt = e^{-x}+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt \end{aligned}$$

$k=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，$f(x)=e^{-x}+k$ より

$$\begin{aligned} k &= \int_{-a}^{a}(e^{-t}+k)\sin t\,dt = \int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt+k\int_{-a}^{a}\sin t\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\Big[\,e^{-t}(\sin t+\cos t)\,\Big]_{-a}^{a}+k\Big[-\cos t\,\Big]_{-a}^{a} \\ &= -\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a}$

(2) $k=g(a)$ であるから

$$\begin{aligned} g(a) &= -\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a \\ g'(a) &= -(e^{a}-e^{-a})\sin a \end{aligned}$$

したがって，$0\leqq a\leqq 2\pi$ における $g(a)$ の増減は，次のようになる．

a	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	極小	↗	

よって，求める最小値は　　$g(\pi)=\boldsymbol{\dfrac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}}$　■

3　(1) ひきだし A のメダルの色が 1 種類または 3 種類である確率は

$$\frac{3}{3^3}+\frac{3!}{3^3}=\frac{1}{3}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(2) 2 種類のメダルの色が金，銀である確率は　$\frac{2^5-2}{3^3{\cdot}2^2}=\frac{30}{108}$

2 種類のメダルの色が金，銅である確率は　$\frac{(2^3-1)\times 1}{3^3{\cdot}2^2}=\frac{7}{108}$

2 種類のメダルの色が銀，銅である確率は　$\frac{(2^3-1)\times 1}{3^3{\cdot}2^2}=\frac{7}{108}$

よって，求める確率は　$\frac{30}{108}+\frac{7}{108}+\frac{7}{108}=\boldsymbol{\frac{11}{27}}$

(3) (i) A に 3 枚の金メダルが入る場合は　$1\times 1=1$ (通り)

(ii) A に 2 枚の金メダルが入る場合は　${}_3\mathrm{C}_2{\cdot}2\times{}_2\mathrm{C}_1{\cdot}1=12$ (通り)

(iii) A に 1 枚の金メダルが入る場合は　${}_3\mathrm{C}_1{\cdot}2^2\times{}_2\mathrm{C}_2=12$ (通り)

ひきだし A のメダルの色が 2 種類であるのは，(ii) の場合と，(iii) において 1 枚の金メダル以外の残りの 2 枚のメダルが同色である場合であるから，その総数は

$$12+{}_3\mathrm{C}_1{\cdot}2\times{}_2\mathrm{C}_2=18\ (\text{通り})$$

よって，求める条件付き確率は　$\frac{18}{1+12+12}=\boldsymbol{\frac{18}{25}}$　■

4 (1) $f(x)=x^3+x^2-2x-1$ とおくと　$f'(x)=3x^2-2x-2$
2 次方程式 $f'(x)=0$ の係数について

$$D/4=(-1)^2-3\cdot(-2)=7>0$$

したがって，$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それらを α, β とすると ($\alpha<\beta$)，$f(x)$ は極大値 $f(\alpha)$，極小値 $f(\beta)$ をもつ．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(x)=x^3\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$ より　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

また，$f'(x)=0$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{2}{3}$$

$f(x)=f'(x)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{9}\right)-\dfrac{7}{9}(2x+1)$ であるから

$$\begin{aligned}f(\alpha)f(\beta)&=\frac{49}{81}(2\alpha+1)(2\beta+1)=\frac{49}{81}\{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1\}\\&=\frac{49}{81}\left\{4\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\frac{2}{3}+1\right\}=-\frac{49}{243}<0\end{aligned}$$

上の結果と増減表により　$f(\alpha)>0$，$f(\beta)<0$
$f(0)=-1\neq0$ より，$f(x)=0$，すなわち，$x^3+x^2-2x-1=0$ は，異なる 3 つの 0 でない実数解をもつ．

別解
$$f(-2)=-1<0,\ f(-1)=1>0,\ f(0)=-1<0,$$
$$f(1)=-1<0,\ f(2)=7>0$$

$f(x)$ の増減表から，3 区間 $-2<x<-1$，$-1<x<0$，$1<x<2$ において，それぞれ 1 つずつ $f(x)=0$ の実数解が存在する．

(2) $s,\ t,\ u$ は $f(x)=0$ の解であるから　$f(s)=f(t)=f(u)=0$

$$\frac{s^{n-1}f(s)}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}f(t)}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}f(u)}{(u-s)(u-t)}=0$$

$$\frac{s^{n-1}(s^3+s^2-2s-1)}{(s-t)(s-u)} +\frac{t^{n-1}(t^3+t^2-2t-1)}{(t-u)(t-s)} +\frac{u^{n-1}(u^3+u^2-2u-1)}{(u-s)(u-t)}=0$$

$$\frac{s^{n+2}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n+2}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n+2}}{(u-s)(u-t)} +\frac{s^{n+1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n+1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n+1}}{(u-s)(u-t)} -2\left\{\frac{s^{n}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n}}{(u-s)(u-t)}\right\} -\left\{\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}\right\}=0$$

よって　　　　$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$

(3) a_n の定義式から

$$\begin{aligned}
a_1&=\frac{1}{(s-t)(s-u)}+\frac{1}{(t-u)(t-s)}+\frac{1}{(u-s)(u-t)}\\
&=\frac{-(t-u)-(u-s)-(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0,\\
a_2&=\frac{s}{(s-t)(s-u)}+\frac{t}{(t-u)(t-s)}+\frac{u}{(u-s)(u-t)}\\
&=\frac{-s(t-u)-t(u-s)-u(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0,\\
a_3&=\frac{s^2}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^2}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^2}{(u-s)(u-t)}\\
&=\frac{-s^2(t-u)-t^2(u-s)-u^2(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}\\
&=\frac{(s-t)(t-u)(u-s)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=1
\end{aligned}$$

上式および (2) の結果より $a_{n+3}=-a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n$ であるから，すべての自然数 n について，a_n は整数である．

補足 n 次式 $F_n(s,\ t,\ u) = -(t-u)s^{n-1} - (u-s)t^{n-1} - (s-t)u^{n-1}$ は，$s,\ t,\ u$ に関する対称式である．$s=t$ とおくと $F(s,\ t,\ u)=0$ となるから，$F_n(s,\ t,\ u)$ は $s-t$ を因数にもつ．また，対称性により，$t-u$，$u-s$ も因数にもつ．すなわち，$F_n(s,\ t,\ u)$ は $(s-t)(t-u)(u-s)$ を因数にもつから

$$F_n(s,\ t,\ u) = (s-t)(t-u)(u-s)G_{n-3}(s,\ t,\ u) \quad \cdots (*)$$

とおける．このとき，$G_{n-3}(s,\ t,\ u)$ は基本対称式 $s+t+u$，$st+tu+us$，stu からなる $n-3$ 次式である．次数 n について次が成立する．

(i) $n=1,\ 2$ のとき，$(*)$ の両辺の次数に着目すると

$$G_{n-3}(s,\ t,\ u) = 0 \quad (n=1,2)$$

(ii) $n=3$ のとき，$G_0(s,\ t,\ u)$ は定数となるので，s^2 の係数を比較して

$$G_0(s,\ t,\ u) = 1$$

(iii) $n=4$ のとき，$G_1(s,\ t,\ u)$ は 1 次式であるから

$$G_1(s,\ t,\ u) = k(s+t+u) \quad (k \text{ は定数})$$

とおいて，s^3 の係数を比較すると，$k=1$ より

$$G_1(s,\ t,\ u) = s+t+u$$

(iv) $n=5$ のとき，$G_2(s,\ t,\ u)$ は 2 次式であるから，定数 $a,\ b$ を用いて

$$G_2(s,\ t,\ u) = a(s+t+u)^2 + b(st+tu+us)$$

とおいて，s^4 の係数を比較すると，$a=1$ であるから

$$\begin{aligned}&-(t-u)s^4 - (u-s)t^4 - (s-t)u^4 \\ &\qquad = (s-t)(t-u)(u-s)\{(s+t+u)^2 + b(st+tu+us)\}\end{aligned}$$

$s=1$，$t=0$，$u=-1$ を上式に代入すると，$b=-1$ より

$$G_2(s,\ t,\ u) = (s+t+u)^2 - (st+tu+us)$$

$a_n = \dfrac{F_n(s,\ t,\ u)}{(s-t)(t-u)(u-s)} = G_{n-3}(s,\ t,\ u)$ であるから

$$\begin{aligned}&a_1=0, \quad a_2=0, \quad a_3=1, \\ &a_4 = s+t+u, \quad a_5 = (s+t+u)^2 - (st+tu+us)\end{aligned}$$

$f(x)=0$ の解と係数の関係により　$s+t+u=-1$，$st+tu+us=-2$

ゆえに，$a_4=-1$，$a_5=3$．これらは漸化式から得られる結果と一致する．■

$\boxed{5}$ (1) A(0, 0, 2)，B(0, 1, 3)，C(1, 0, 0)，D(1, 0, 1)，P(s, t, a)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(s,\ t,\ a-2)$ より

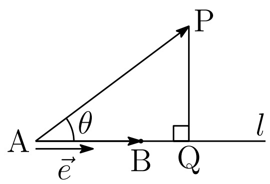
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{t+a-2}{2}(0,\ 1,\ 1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(0,\ 0,\ 2)+\frac{t+a-2}{2}(0,\ 1,\ 1)$$
$$=\left(0,\ \frac{t+a-2}{2},\ \frac{t+a+2}{2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(s-1,\ t,\ a)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}=a(0,\ 0,\ 1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}=(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ 0,\ 1)=(1,\ 0,\ a)$$

よって　$\mathbf{Q}\left(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{t+a-2}{2}},\ \boldsymbol{\frac{t+a+2}{2}}\right)$，$\mathbf{R}(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \boldsymbol{a})$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ方向の単位ベクトルを $\vec{e}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{e}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta)\vec{e}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{e})\vec{e}$

これに $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$ を代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(-2s,-t+a-2,\ t-a+2),\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-s,-t,\ 0)$$

条件を満たすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$ であるから

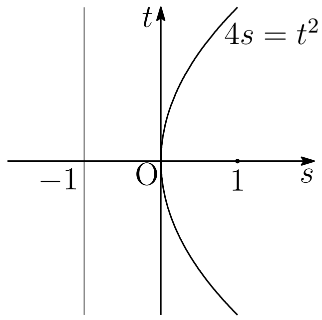
$$\frac{1}{4}\{(-2s)^2+(-t+a-2)^2+(t-a+2)^2\}=(1-s)^2+(-t)^2$$
$$2s^2+(t-a+2)^2=2\{(1-s)^2+t^2\}$$

整理すると　　$\boldsymbol{4s=t^2+2(a-2)t-a^2+4a-2}$

(3) (2) の結果から

$$4\left(s+\frac{a^2-4a+3}{2}\right)=(t+a-2)^2 \quad \cdots (*)$$

st 平面上の放物線 $4s=t^2$ は，焦点 $(1,\ 0)$，準線 $s=-1$ である．



放物線 $(*)$ は放物線 $4s=t^2$ を s 軸方向に $-\dfrac{a^2-4a+3}{2}$，t 軸方向に $-a+2$ だけ平行移動したものである．$(*)$ の焦点は

$$\left(1-\frac{a^2-4a+3}{2}, -a+2\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(\frac{-a^2+4a-1}{2}, -a+2\right)}$$

また，$(*)$ の準線の方程式は

$$s=-1-\frac{a^2-4a+3}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{s=\frac{-a^2+4a-5}{2}}$$

■

1.3 2017 年 (120 分)

1 自然数の 2 乗となる数を平方数という．

(1) 自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

2 関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(3) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

3 複素数平面上に 3 点 O，A，B を頂点とする △OAB がある．ただし，O は原点とする．△OAB の外心を P とする．3 点 A，B，P が表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，

$$\alpha\beta=z$$

が成り立つとする．

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

4 さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う．初め点 P は原点 0 にいる．さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる．この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する．n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする．

(1) $p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ．

(2) p_9 の値を求めよ．

(3) p_3 の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 座標平面上の 3 点 A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2) を頂点とする △ABC の内部および境界を T とおく．実数 a に対して，条件

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 \leqq a$$

を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする．ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す．

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ．

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ．

(3) (1) のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $n(n+1)+a=(n+k)^2 \quad \cdots(*)$ より

$$\begin{aligned} a &= (n+k)^2 - n(n+1) \\ &= k^2 + n(2k-1) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

n，k は自然数であるから，$n \geqq 1$，$2k-1>0$ より

$$a \geqq k^2 + 1(2k-1) \quad \text{ゆえに} \quad a \geqq k^2+2k-1 \quad \cdots(**)$$

(2) $(*)$ において，$a=14$ であるから，このとき，$(**)$ により

$$14 \geqq k^2+2k-1 \quad \text{ゆえに} \quad (k+5)(k-3) \leqq 0$$

これを満たす自然数 k は　1，2，3

① より，$n=\dfrac{14-k^2}{2k-1}$ であるから

k	1	2	3
n	13	$\frac{10}{3}$	1

よって，求める自然数 n は　**1，13**　■

$\boxed{2}$　(1) $f(x) = 1 + \sin x - x\cos x$ を微分すると　$f'(x) = x\sin x$

したがって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は次にようになる．

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\pi$	$\searrow$	$1-2\pi$

よって，最大値 $f(\pi) = \boldsymbol{1+\pi}$，最小値 $f(2\pi) = \boldsymbol{1-2\pi}$

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \boldsymbol{x - 2\cos x - x\sin x + C}$　**(C は積分定数)**

(3) $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ であるから，(1) の増減表により

$$0 \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2} \text{で } f(x) \geqq 0, \quad \frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \text{で } f(x) \leqq 0$$

(2) の結果から $F(x) = x - 2\cos x - x\sin x$ とおくと，

$$F(0) = -2, \quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi, \quad F(2\pi) = 2\pi - 2$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\,dx \\ &= \Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} - \Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(0) - F(2\pi) \\ &= 2\cdot 3\pi - (-2) - (2\pi - 2) = \boldsymbol{4\pi + 4}\end{aligned}$$

■

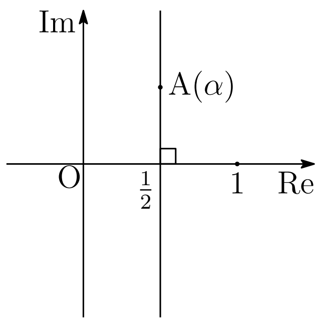
3 (1) O(0)，A(α)，B(β)，P($\alpha\beta$) について，P は △OAB の外心であるから

$$|\mathrm{OP}| = |\mathrm{AP}| = |\mathrm{BP}| \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha\beta| = |\alpha\beta - \alpha| = |\alpha\beta - \beta|$$

したがって　$|\alpha||\beta| = |\alpha||\beta - 1| = |\beta||\alpha - 1|$

すなわち　$|\alpha| = |\alpha - 1|$，$|\beta| = |\beta - 1|$

よって，A(α) が描く描く図形は，右の図のように 2 点 0, 1 を結ぶ垂直二等分線である．



(2) (1) で示したように，B(β) も 2 点 0, 1 を結ぶ垂直二等分線上にあるから

$$\alpha = \frac{1}{2} + si, \quad \beta = \frac{1}{2} + ti, \quad z = x + yi$$

とおくと (s，t，x. y は実数)，$z = \alpha\beta$ より

$$x + yi = \left(\frac{1}{2} + si\right)\left(\frac{1}{2} + ti\right) = \frac{1}{4} - st + \frac{1}{2}(s + t)i$$

したがって　$x = \dfrac{1}{4} - st$，$y = \dfrac{1}{2}(s + t)$　ゆえに　$s + t = 2y$，$st = \dfrac{1}{4} - x$

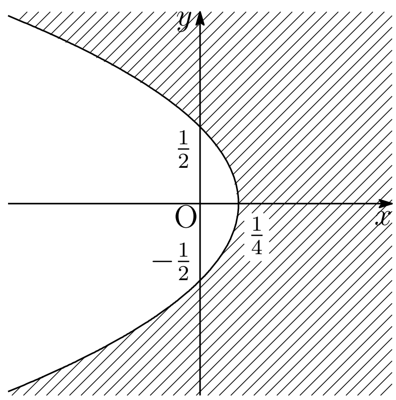
このとき，s，t を解とする 2 次方程式は

$$\lambda^2 - (s + t)\lambda + st = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2 - 2y\lambda + \frac{1}{4} - x = 0 \quad \cdots(*)$$

2 次方程式 $(*)$ は，異なる 2 つの実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-y)^2 - 1\left(\frac{1}{4} - x\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x > -y^2 + \frac{1}{4}$$

よって，P(z) の描く図形は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



■

$\boxed{4}$ (1) 1 回目から 9 回目まで 1 の目が出る確率であるから (10 回目は任意の目)

$$p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

(2) 9 回目で P の座標が 10 以上になるのは，次の場合である．

(i) 8 回目まですべての 1 の目が出て，9 回目で 2 以上出る確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{8} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6^9}$$

(ii) 1 回目から 8 回目までに 1 回だけ 2 の目が出てそれ以外は 1 の目が出る確率は (9 回目は任意の目)

$${}_8\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)^{8} = \frac{8}{6^8}$$

(i)，(ii) より，求める確率は　$\dfrac{5}{6^9} + \dfrac{8}{6^8} = \boldsymbol{\dfrac{53}{6^9}}$

(3) 1，2，3 回目に出た目を順に i，j，k とすると，$4 \leqq i + j \leqq 9$ であるから，このときの (i, j) の組の数および k の場合の数は，次のようになる

$i + j$	4	5	6	7	8	9
(i, j) の個数	3	4	5	6	5	4
k の個数	1	2	3	4	5	6

よって，求める確率は

$$p_3 = \frac{3{\cdot}1 + 4{\cdot}2 + 5{\cdot}3 + 6{\cdot}4 + 5{\cdot}5 + 4{\cdot}6}{6^3} = \frac{99}{216} = \boldsymbol{\frac{11}{24}}$$

■

5　(1)　A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2)

P$(x,\ y)$ とおくと，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq a$ より

$$(x-1)^2+y^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2 \leqq a$$

したがって，D の表す領域は　$(x-2)^2+(y-1)^2 \leqq \dfrac{a-4}{3}$　$\cdots(*)$

よって，D が少なくとも 1 点 P を含む a の値の範囲は

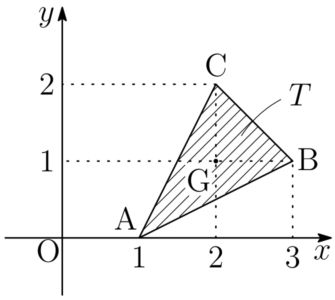
$$\frac{a-4}{a} \geqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a \geqq 4}$$

(2)　$(*)$ より，D は点 $(2,\ 1)$ を中心とする半径

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}$$

の円の内部であるから，G$(2,\ 1)$ とすると

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geqq \mathrm{GA}$$



を満たせばよい．$\mathrm{GA}=\sqrt{(1-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geqq \sqrt{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a \geqq 10}$$

(3)　点 G$(2,\ 1)$ から 3 直線

$$\mathrm{AB}: x-2y-1=0, \quad \mathrm{AC}: 2x-y-2, \quad \mathrm{BC}: x+y-3=0$$

までの距離は，それぞれ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，$(*)$ により

$$0 \leqq \sqrt{\frac{a-4}{3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{4 \leqq a \leqq \frac{23}{5}}$$

■

1.4　2018 年 (120 分)

$\boxed{1}$ 座標空間の 4 点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ に対し，

$$\vec{p} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \vec{q} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とおく．ただし，O は原点，s と t は実数とする．

(1) $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を s，t で表せ．

(2) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\dfrac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ．

(3) s と t が実数を動くとき，$|\vec{p} - \vec{q}|$ の最小値を求めよ．

$\boxed{2}$ $z + \dfrac{4}{z}$ は実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする．

(1) D を複素数平面上に図示せよ．

(2) k を実数とする．D に属する z で方程式

$$k\left(z + \frac{4}{z} + 8\right) = i\left(z - \frac{4}{z}\right)$$

を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ．ただし，i は虚数単位を表す．

$\boxed{3}$ 数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0，1，8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある．これらから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする．ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える．例えば，左から順に 0，0，1，1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である．

(1) a，b，c，d は整数とする．$1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数になることと $a + b + c + d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ．

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ．

(3) n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ．

4 座標平面上に3点O$(0,\ 0)$，A$\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$．B$(11,\ 11)$がある．条件

$$\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$$

を満たす点Q$(x,\ y)$全体をDとする．

(1) Dを座標平面上に図示せよ．また，$\mathrm{BQ} = \mathrm{OQ} = 2\mathrm{AQ}$となるすべての点Qの座標を求めよ．

(2) $0 < p \leqq 11$とし，Pを点$(p,\ 11)$とする．条件$\mathrm{OQ} \geqq \mathrm{PQ}$を満たす$D$の点Qが存在するような$p$の値の範囲を求めよ．

5 2つの関数

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

がある．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき，不等式$\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき，不等式$g(x) \leqq f(x)$が成り立つことを示せ．

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲において，2つの曲線$y = f(x)$，$y = g(x)$および$y$軸が囲む部分の面積を求めよ．

解答例

1 (1) 4 点 A$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，B(0, 0, 1)，C$\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$，D$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$

に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくと

$$\begin{aligned}&|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\quad |\vec{c}|=|\vec{d}|=\sqrt{2},\\&\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{d}=0,\\&\vec{b}\cdot\vec{c}=-1,\quad \vec{b}\cdot\vec{d}=-1,\quad \vec{c}\cdot\vec{d}=0\end{aligned}$$

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{q}=(1-s)\vec{c}+s\vec{d}$ より，上の結果に注意して

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2&=|(1-t)\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1-t)^2|\vec{a}|^2+2(1-t)t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\&=(1-t)^2+t^2=2t^2-2t+1,\\|\vec{q}|^2&=|(1-s)\vec{c}+s\vec{d}|^2=(1-s)^2|\vec{c}|^2+2(1-s)s\vec{c}\cdot\vec{d}+s^2|\vec{d}|^2\\&=2(1-s)^2+2s^2=2(2s^2-2s+1)\end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{|\vec{p}|=\sqrt{2t^2-2t+1}}$，$\boldsymbol{|\vec{q}|=\sqrt{2(2s^2-2s+1)}}$

また　$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot\{(1-s)\vec{c}+s\vec{d}\}\\&=(1-s)(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c}+s(1-t)\vec{a}\cdot\vec{d}+(1-s)t\vec{b}\cdot\vec{c}+st\vec{b}\cdot\vec{d}\\&=(1-s)t\cdot(-1)+st\cdot(-1)=\boldsymbol{-t}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$|\vec{p}|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=-\dfrac{1}{2}$

このとき，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$$\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}\quad \text{ゆえに}\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{q}|}\quad \text{すなわち}\quad |\vec{q}|=1$$

これを (1) の結果に代入すると　$\sqrt{2(2s^2-2s+1)}=1$

したがって　$(2s-1)^2=0$　これを解いて　$\boldsymbol{s=\dfrac{1}{2}}$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}|\vec{p}-\vec{q}|^2&=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2\\&=(2t^2-2t+1)-2(-t)+2(2s^2-2s+1)\\&=(2s-1)^2+2t^2+2\geqq 2\end{aligned}$$

よって，$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値は　$\boldsymbol{\sqrt{2}}$　■

2 (1) $z+\dfrac{4}{z}$ は，実数であるから　$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z+\dfrac{4}{z}}$

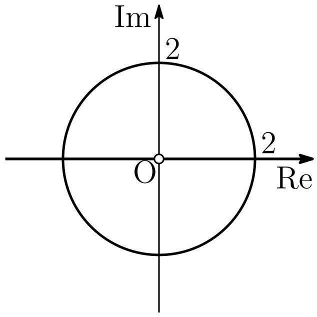
したがって　　$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$

ゆえに　　$(z-\overline{z})\left(1-\dfrac{4}{|z|^2}\right)=0$

すなわち　　$z=\overline{z}$　または　$|z|=2$

よって，D の表す図形は，実軸上 (原点を除く)

または　原点を中心とする半径2の円



(2) 与えられた方程式から

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)+i\left(\frac{4}{z}-z\right)=0 \quad \cdots(*)$$

(i) z が実軸上にあるとき，$k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)$，$\dfrac{4}{z}-z$ は実数であるから

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)=0,\quad \frac{4}{z}-z=0$$

上の第2式から，$z=\pm 2$．これを第1式に代入することにより

$$k=0$$

(ii) z が $|z|=2$ を満たす円周上で -2 を除く点であるとき

$$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

とおいて，$(*)$ に代入すると

$$k(4\cos\theta+8)+i(-4i\sin\theta)=0 \quad ゆえに \quad k(\cos\theta+2)+\sin\theta=0$$

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}(-\infty<t<\infty)$，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ とすると

$$k\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)+\frac{2t}{1+t^2}=0 \quad ゆえに \quad kt^2+2t+3k=0 \quad \cdots(**)$$

$k\neq 0$ のとき，上の t に関する2次方程式 $(**)$ は実数解をもつから

$$D/4=1-3k^2 \geqq 0 \quad ゆえに \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \leqq k \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

特に，$k=0$ のときも方程式 $(**)$ は実数解をもつ．

(i)，(ii) より，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq k \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　■

3 (1) $$1000a+100b+10c+d=9(111a+11b+c)+a+b+c+d$$

上式より，$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数であることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数であることは同値である．

別解 $10\equiv 1 \pmod 9$ より，$10^2\equiv 1,\ 10^3\equiv 1 \pmod 9$ であるから

$$\begin{aligned}1000a+100b+10c+d&=10^3a+10^2b+10c+d\\&\equiv a+b+c+d \pmod 9\end{aligned}$$

(2) 8 枚のカードをすべて区別する．異なる 8 枚のカードから 4 枚を取り出し，一列に並べる方法は

$${}_8\mathrm{P}_4\ (\text{通り})$$

このとき，取り出した 4 枚の数字の和が 9 の倍数となる組合せは

(a) $\{0,\ 0,\ 1,\ 8\}$　(b) $\{0,\ 2,\ 8,\ 8\}$　(c) $\{1,\ 1,\ 8,\ 8\}$

(a) の 1, 8 の選び方は 2^2 通り，(b) の 0, 2 の選び方は 2^2 通り．(a)〜(c) の並べ方は，それぞれ $4!$ 通りあるから，n が 9 の倍数となる事象を A とすると，その総数は

$$2^2\cdot4!+2^2\cdot4!+4!=9\cdot4!\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　$P(A)=\dfrac{9\cdot4!}{{}_8\mathrm{P}_4}=\dfrac{9\times4\cdot3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6\cdot5}=\boldsymbol{\dfrac{9}{70}}$

(3) n が奇数であるのは，一位の数が 1 であるから，その場合の数は

$$2\times{}_7\mathrm{P}_3\ (\text{通り})$$

n が偶数となる事象を B とすると，その確率は

$$P(B)=1-\frac{2\times{}_7\mathrm{P}_3}{{}_8\mathrm{P}_4}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5-2\times7\cdot6\cdot5}{{}_8\mathrm{P}_4}=\frac{6\cdot7\cdot6\cdot5}{{}_8\mathrm{P}_4}$$

n が 9 の倍数で奇数 $A\cap\overline{B}$ となるのは，一位の数が 1 であるから，その場合の数は (a) のときの $2^2\cdot3!$ 通りと (c) のときの $2\cdot3!$ 通り．n が 9 の倍数で偶数となる，すなわち，$A\cap B$ となる確率は

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)-P(A\cap\overline{B})\\&=\frac{9\cdot4!}{{}_8\mathrm{P}_4}-\frac{2^2\cdot3!+2\cdot3!}{{}_8\mathrm{P}_4}=\frac{30\cdot3!}{{}_8\mathrm{P}_4}\end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{30\cdot3!}{{}_8\mathrm{P}_4}\cdot\frac{{}_8\mathrm{P}_4}{6\cdot7\cdot6\cdot5}=\boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

■

4 (1) O$(0,\ 0)$，A$\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$．B$(11,\ 11)$，Q$(x,\ y)$

BQ $\geqq$ OQ $\geqq$ 2AQ より，BQ$^2 \geqq$ OQ$^2 \geqq$ 4AQ^2 であるから

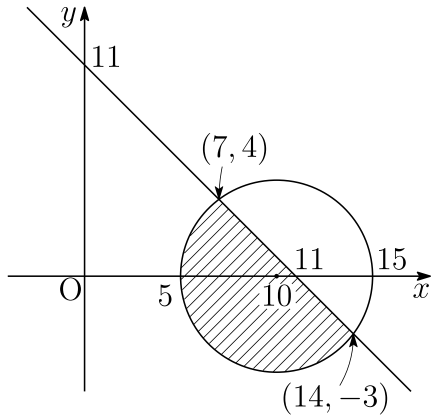
$$(x-11)^2+(y-11)^2 \geqq x^2+y^2 \geqq (2x-15)^2+4y^2$$

整理すると　$x+y \leqq 11,\quad (x-10)^2+y^2 \leqq 25$

よって，求める領域 D は下の図の斜線部分で，境界線を含む．

BQ $=$ OQ $=$ 2AQ が成立するとき

$$(*)\begin{cases} x+y=11 \\ (x-10)^2+y^2=25 \end{cases}$$



第 1 式から　$x-10=1-y$

これを第 2 式に代入して

$$(1-y)^2+y^2=25$$

ゆえに　$(y-4)(y+3)=0$

これを解いて　$y=4,-3$　$(*)$ の第 1 式により　**(7, 4), (14, −3)**

(2) $0<p \leqq 11$，P$(p,\ 11)$，OQ $\geqq$ PQ より，OQ$^2 \geqq$ PQ^2 であるから

$$x^2+y^2 \geqq (x-p)^2+(y-11)^2 \quad \text{ゆえに} \quad y \geqq -\frac{p}{11}x+\frac{p^2}{22}+\frac{11}{2} \quad \cdots(**)$$

領域 $(**)$ は傾き $-\dfrac{p}{11}$ $\left(-1 \leqq -\dfrac{p}{11}<0\right)$ の直線の上側である．$(**)$ で D を満たす点が存在するとき，点 $(7,\ 4)$ が $(**)$ を満たせばよいから

$$4 \geqq -\frac{p}{11}\cdot 7+\frac{p^2}{22}+\frac{11}{2} \quad \text{整理すると} \quad (p-3)(p-11) \leqq 0$$

よって，p の値の範囲に注意して　$\boldsymbol{3 \leqq p \leqq 11}$ ■

5 (1) $h(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ とすると　$h'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}$

$h'(x)$ は，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，単調減少．

$$h'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0, \quad h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$$

ゆえに，$h'(c) = 0$ を満たす c $\left(0 < c < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が唯一存在する．

したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $h(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において　$h(x) \geqq 0$　すなわち　$\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$

解説　$\alpha < x < \beta$ において，$f''(x) < 0$ とする．

$$h(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) - f(\alpha)$$

とおくと　　$h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

$h'(x)$ は単調減少，$h(\alpha) = 0$，$h(\beta) = 0$ であるから，ロルの定理により，$h'(c) = 0$ を満たす c $(\alpha < x < \beta)$ が唯一存在する．

x	α	$\cdots$	c	$\cdots$	β
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

したがって　　$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において　$h(x) \geqq 0$

よって　　$f(x) \geqq \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + f(\alpha)$　　$(\alpha \leqq x \leqq \beta)$

直線 $y = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$ は，曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線．曲線 $y = f(x)$ は，$\alpha < x < \beta$ において上に凸であるから，曲線 $y = f(x)$ は直線 AB の上側にある．

また，$\alpha < x < \beta$ において，$f''(x) > 0$ のとき

$$f(x) \leqq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + f(\alpha) \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta)$$

(2) $\lambda(x) = f(x) - g(x) = \cos x - \sqrt{\dfrac{\pi^2}{2} - x^2} + \dfrac{\pi}{2}$ とおくと

$$\lambda'(x) = -\sin x + \frac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2} - x^2}}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において　$\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2} - x^2}} \leqq \dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2}} = \dfrac{2}{\pi}x$

上の 2 式から，(1) の結果に注意して

$$\lambda'(x) \leqq -\sin x + \frac{2}{\pi}x = -\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right) \leqq 0$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\lambda(x)$ は単調減少で，$\lambda\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{において}\quad \lambda(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad g(x) \leqq f(x)$$

(3) (2) の結果から，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \frac{\pi}{2}\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}\,dx \qquad \cdots (*)$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \left[\ \sin x + \frac{\pi}{2}x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi^2}{4} \qquad \cdots ①$

次式において，$x = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}\,dx &= \frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{4}\left[\ \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② を $(*)$ に代入すると

$$S = 1 + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{16}}$$

■

1.5　2019 年 (120 分)

$\boxed{1}$ p を負の実数とする．座標空間に原点 O と 3 点 A$(-1,\ 2,\ 0)$，B$(2, -2,\ 1)$，P$(p, -1,\ 2)$ があり，3 点 O，A，B が定める平面を α とする．また，点 P から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする．

(1) 点 Q の座標を p を用いて表せ．

(2) 点 Q が △OAB の周または内部にあるような p の範囲を求めよ．

$\boxed{2}$ n を自然数とし，$a_n = n(n+1)$ とする．さらに，a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする．

(1) d_n は偶数であることを示せ．

(2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ．

(3) p を 5 以上の素数とするとき，d_n は p で割り切れないことを示せ．

(4) $d_n \leqq 12$ を示せ．また，$d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ．

$\boxed{3}$ t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．0，$\dfrac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える．

(1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ．

(2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α，極小値を与える x の値を β とし，座標平面上に 2 点 P$(\alpha,\ f(\alpha))$，Q$(\beta,\ f(\beta))$ をとる．t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ．

$\boxed{4}$ n を 3 以上の自然数とする．2 つの箱 X と Y があり，どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている．

A と B の 2 人のうち，A は箱 X から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を得点とする．B は箱 Y から札を 1 枚取り出し，もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし，もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば，その札を箱 Y に戻し，再び箱 Y から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を B の得点とする．

(1) m を n 以下の自然数とする．B の得点が m になる確率を求めよ．

(2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ．

5 $f(x)$ を区間 $[0,\ \pi]$ で連続な関数とする．関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$
$$f_{n+1}(x) = 2\cos x + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin(x-t)\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．さらに，自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin t\,dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\cos t\,dt$$

とおく．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $c_n = a_n - 1$ とおく．このとき，$c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し，一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ．

(3) a_n，b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を1つ求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 2,\ 0)$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,-2,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(2,\ 1,-2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\vec{n}$ とすると ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は実数)

$$\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

したがって $\begin{cases} -\alpha+2\beta+2\gamma=p \\ 2\alpha-2\beta+\gamma=-1 \\ \beta-2\gamma=2 \end{cases}$

これを解いて　$\alpha=\dfrac{p+2}{3},\quad \beta=\dfrac{4(p+2)}{9},\quad \gamma=\dfrac{2p-5}{9}\quad\cdots(*)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{p+2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{4(p+2)}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{p+2}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

よって　$\mathbf{Q}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}(\boldsymbol{p}+\mathbf{2}),-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}(\boldsymbol{p}+\mathbf{2}),\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}(\boldsymbol{p}+\mathbf{2})\right)$

(2) $(*)$ より　$\alpha+\beta=\dfrac{7(p+2)}{9}$

条件を満たすとき，$\alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta\leqq 1$ であるから

$$\frac{p+2}{3}\geqq 0,\quad \frac{4(p+2)}{9}\geqq 0,\quad \frac{7(p+2)}{9}\leqq 1$$

これを解いて　$\mathbf{-2}\leqq \boldsymbol{p}\leqq -\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$

補足 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}$ で表す[3]．■

[3]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

2 (1) $a_n = n(n+1)$，$a_{n+3} = (n+3)(n+4)$ はともに連続する2数の積であるから，ともに2で割り切れる．よって，d_n は偶数である．

(2) 2つの整数 a と b の最大公約数を $\gcd(a,\ b)$ と表すことにする．
a_n と a_{n+3} の最大公約数 d_n は，ユークリッドの互除法により

$$\begin{aligned} d_n = \gcd(a_n,\ a_{n+3}) &= \gcd(n^2+n,\ n^2+7n+12) \\ &= \gcd(n(n+1),\ 2\cdot 3(n+2)) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

d_n が8で割り切れると仮定すると，$n+2$ は4で割り切れるから

$$n+2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -2,\ n+1 \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ 4)$$

$n(n+1) \equiv 2 \pmod 4$ であるから，$(*)$ より，d_n は8で割り切れない．

(3) d_n が5以上の素数 p で割り切れると仮定すると，同様にして

$$n+2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -2,\ n+1 \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$n(n+1) \equiv 2 \pmod p$ であるから，$(*)$ より，d_n は p で割り切れない．

(4) d_n が9で割り切れると仮定すると，$n+2$ は3で割り切れるから

$$n+2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -2,\ n+1 \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ 3)$$

$n(n+1) \equiv 2 \pmod 3$ であるから，$(*)$ より，d_n は9で割り切れない．
これと (2)，(3) の結果から　　$d_n \leqq 3\cdot 4$　　よって　$n \leqq 12$

$d_n = 12$ となるとき，$(*)$ より，$n+2$ が偶数，すなわち，n は偶数であるから，$n = 12$ のとき，$n(n+1)$ は12で割り切れる．
よって，$d_n = 12$ を満たす n の一つは　$\boldsymbol{n = 12}$

補足 n は偶数であるから，$n+1$ は奇数である．$n(n+1)$ が12で割り切れるとき，n は4の倍数であるから，$n = 4k$ とおくと (k は自然数)

$$n(n+1) = 4k(4k+1)$$

このとき　$4k \equiv 0$　または　$4k+1 \equiv 0 \pmod 3$
すなわち　$k \equiv 0$　または　$k+1 \equiv 0 \pmod 3$
一般に　　$n = 4k \quad (k \equiv 0, 2 \mod 3)$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\dfrac{x+t}{x(1-tx)}$ より

$$f'(x)=\frac{1\cdot x(1-tx)-(x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2}=\frac{t(x^2+2tx-1)}{x^2(1-tx)^2}$$

$g(x)=x^2+2tx-1$ とおくと

$$g(0)=-1<0,\quad g\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}+1>0$$

2 次方程式 $g(x)=0$ は，0, $\dfrac{1}{t}$ でない異なる 2 つの実数解をもつ．
これらの解を x_1, x_2 とすると $(x_1<x_2)$

$$f'(x)=\frac{t(x-x_1)(x-x_2)}{x^2(1-tx)^2}\qquad\left(x_1<0<x_2<\frac{1}{t}\right)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	x_2	$\cdots$	$(\frac{1}{t})$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

よって，$f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつ．

(2) (1) の結果から，$\alpha=x_1$，$\beta=x_2$ である．
$g(\alpha)=\alpha^2+2t\alpha-1=0$ であるから，$1-t\alpha=\alpha(\alpha+t)$ より

$$f(\alpha)=\frac{\alpha+t}{\alpha(1-t\alpha)}=\frac{\alpha+t}{\alpha\cdot\alpha(\alpha+t)}=\frac{1}{\alpha^2}\quad \text{同様に}\quad f(\beta)=\frac{1}{\beta^2}$$

2 次方程式 $g(x)=0$ の解が α, β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2t,\quad \alpha\beta=-1\quad\cdots(*)$$

$\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ の中点 M の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(*)$ により

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-2t}{2}=-t,$$
$$y=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2(\alpha\beta)^2}=2t^2+1$$

$0<t<1$ に注意して，上の 2 式から t を消去すると

$$\boldsymbol{y=2x^2+1\quad(-1<x<0)}$$

■

4 (1) 求めるBの得点が m である確率を q_m とする．

(i) $m \leqq 2$ のとき，Bは1回目に1または2の番号札，2回目に m の番号札を取り出すから，その確率は

$$q_m = \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}$$

(ii) $m > 2$ のとき，Bは1回目に m の番号札を取り出すか，1回目に1または2の番号札，2回目に m の番号札を取り出す確率であるから

$$q_m = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n+2}{n^2}$$

(i),(ii) より，求める確率は $\boldsymbol{q_m = \begin{cases} \dfrac{2}{n^2} & (m = 1,\ 2) \\ \dfrac{n+2}{n^2} & (m = 3, 4, \cdots, n) \end{cases}}$

(2) Aの得点が m より小さい確率は $\dfrac{m-1}{n}$

したがって，求める確率 p_n は

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{m=2}^{n} \frac{m-1}{n} q_m = \frac{2-1}{n} q_2 + \sum_{m=3}^{n} \frac{m-1}{n} q_m \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n^2} + \sum_{m=3}^{n} \frac{m-1}{n} \times \frac{n+2}{n^2} \\ &= \frac{2}{n^3} + \frac{n+2}{n^3} \sum_{m=3}^{n} (m-1) \\ &= \frac{2}{n^3} + \frac{n+2}{n^3} \times \frac{1}{2}(n-2)\{2 + (n-1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{n^2+n-4}{2n^2}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f_{n+1}(x) = 2\cos x + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\sin(x-t)\,dt$ および

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin t\,dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\cos t\,dt$$

により

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= 2\cos x + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin(x-t)\,dt \\ &= 2\cos x + \frac{2\sin x}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\cos t\,dt - \frac{2\cos x}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin t\,dt \\ &= b_n \sin x + (2-a_n)\cos x \end{aligned}$$

ここで，次の 3 式を計算する．

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\ &\int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\ &\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt = \int_0^\pi \sin t(\sin t)'\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^\pi = 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

したがって

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_{n+1}(t)\sin t\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \{b_n\sin t + (2-a_n)\cos t\}\sin t\,dt \\ &= \frac{2b_n}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t\,dt + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt \\ &= \frac{2b_n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\cdot 0 = \boldsymbol{b_n}, \\ b_{n+1} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_{n+1}(t)\cos t\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \{b_n\sin t + (2-a_n)\cos t\}\cos t\,dt \\ &= \frac{2b_n}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{2b_n}{\pi}\cdot 0 + \frac{2(2-a_n)}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{2-a_n} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$a_{n+2}=b_{n+1}$，　$b_{n+1}=2-a_n$

上の2式から　$a_{n+2}=2-a_n$　ゆえに　$a_{n+2}-1=-(a_n-1)$

$c_n=a_n-1$ より　$c_{n+2}=-c_n$

$c_1=a_1-1,\ c_2=a_2-1=b_1-1$ であるから

n が奇数のとき　$c_n=c_1\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}=(a_1-1)\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}$

n が偶数のとき　$c_n=c_2\cdot(-1)^{\frac{n-2}{2}}=(b_1-1)\cdot(-1)^{\frac{n-2}{2}}$

よって　$$\boldsymbol{c_n=\begin{cases}(a_1-1)\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{ が奇数})\\ (b_1-1)\cdot(-1)^{\frac{n-2}{2}} & (n\text{ が偶数})\end{cases}}$$

(3) a_n，b_n が n によらない定数となるとき，(2) の結果から

$$a_1=b_1=1\quad\text{すなわち}\quad\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=\frac{\pi}{2}$$

を満たせばよいから，(∗) に注意して　$\boldsymbol{f(x)=\sin x+\cos x}$

別解　$f(x)=px+q$ とし，$\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=\frac{\pi}{2}$ を満たす p，q を求める．

$$\int_0^\pi (pt+q)\sin t\,dt=\Big[-(pt+q)\cos t+p\sin t\Big]_0^\pi$$
$$=p\pi+2q=\frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^\pi (pt+q)\cos t\,dt=\Big[(pt+q)\sin+p\cos t\Big]_0^\pi$$
$$=-2p=\frac{\pi}{2}$$

上の2式から　$p=-\dfrac{\pi}{4},\ q=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi^2}{8}$　よって　$f(x)=-\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi^2}{8}$

■

1.6　2020 年 (120 分)

1　三角形 ABC について

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{6}$$

が成立しているとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とし，直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つような実数 s，t を求めよ．

(3) 直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ．

2　座標平面上 2 点 $\left(\dfrac{1}{16},\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{1}{9}\right)$ を通る直線 ℓ を考える．

(1) ℓ 上にある格子点の座標をすべて求めよ．ただし，格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである．

(2) ℓ 上の格子点のうち，原点との距離が最小となる点を A とする．また，ℓ 上の A 以外の格子点のうち，原点との距離が最小となる点を B とする．さらに，A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする．三角形 ABC の内部および周上にある格子点の個数を求めよ．

3　n を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ．

(2) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ．

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ．

4 α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし，$f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ とする．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定義されるとき，次の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して，$0 < a_n < 1$ かつ $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくとき，すべての自然数 n に対して，$b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

5 a を正の整数とする．微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする．

$$0 < f(x) < 1, \qquad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1 - f(t)\}f(t)}\,dt = ax$$

さらに，$f(0) = \dfrac{1}{3}$ であるとする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．さらに，$\displaystyle\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ．

解答例

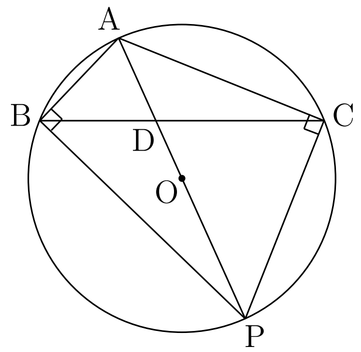
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ の両辺を平方すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{6}$ より

$$4-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+1=6 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

AP は △ABC の外接円の直径であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\{(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}=(s-1)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(s-1)\cdot1+t\left(-\frac{1}{2}\right)=s-\frac{1}{2}t-1=0 \quad \cdots①\\\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\{s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(t-1)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\\&=s\left(-\frac{1}{2}\right)+(t-1)\cdot4=-\frac{1}{2}s+4t-4=0 \quad \cdots②\end{aligned}$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{s=\frac{8}{5},\ t=\frac{6}{5}}$

別解 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．$|\vec{b}|^2\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}$ は，$\vec{b}$ と垂直である．

$$|\vec{b}|^2\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}=\vec{c}-\left(-\frac{1}{2}\right)\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{b}+2\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=k(\vec{b}+2\vec{c})$ とおけるから (k は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(k+1)\vec{b}+2k\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(k+1)\vec{b}+(2k-1)\vec{c}$ は，$\vec{c}$ と垂直であるから

$$(k+1)\vec{b}\cdot\vec{c}+(2k-1)|\vec{c}|^2=-\frac{1}{2}(k+1)+4(2k-1)=0$$

これを解いて　$k=\dfrac{3}{5}$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3)　(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{14}{5}\cdot\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$$

D は直線 BC 上の点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$

$$\begin{aligned} |4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 &= 16|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 24\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 9|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\ &= 16\cdot 1 + 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 9\cdot 4 = 40 \end{aligned}$$

ゆえに　$|4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2\sqrt{10}$　よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \dfrac{|4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}{7} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{10}}{7}}$ ■

2　(1)　直線 ℓ の方程式は　$16x + 9y = 1$　ゆえに　$16(x-4) = -9(y+7)$

16 と 9 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$\begin{cases} x - 4 = 9k \\ y + 7 = -16k \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 9k + 4} \\ \boldsymbol{y = -16k - 7} \end{cases} \quad \textbf{(}\boldsymbol{k}\textbf{ は整数)}$$

別解　$16 \equiv 7,\ 9 \equiv 0 \pmod 9$ であるから，$16x + 9y = 1$ について

$$7x \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4\cdot 7x \equiv 4\cdot 1 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv 4 \pmod 9$$

$x = 9k + 4$ とおけるから (k は整数)

$$16(9k+4) + 9y = 1 \quad \text{よって} \quad y = -16k - 7$$

(2)　(1) の結果から，ℓ 上の格子点を $\mathrm{P}(9k+4, -16k-7)$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (9k+4)^2 + (-16k-7)^2 \\ &= 337k^2 + 296k + 65 \\ &= 337\left(k + \frac{148}{337}\right)^2 - \frac{148^2}{337} + 65 \end{aligned}$$

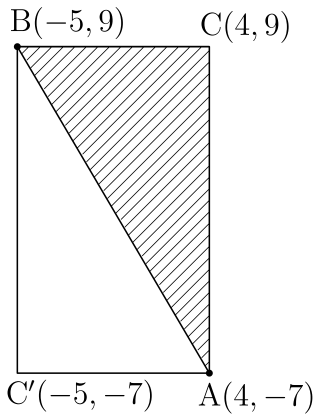
$-\dfrac{1}{2} < -\dfrac{148}{337} < 0$ であるから，原点 O との距離より，$k=0$，$k=-1$ にそれぞれ対応する点が A，B である．

$$\mathrm{A}(4,-7),\quad \mathrm{B}(-5,\ 9)$$

これから　　$\mathrm{C}(4,\ 9)$

ここで，点 $\mathrm{C}'(-5,-7)$ をとると，四角形 ACBC' の内部と周上にある格子点の個数は

$$\{4-(-5)+1\}\{9-(-7)+1\} = 170\ (個)$$



△ABC の内部と周上ある格子点の個数を n とすると，$\triangle\mathrm{ABC}'$ の内部と周上ある格子点の個数も n である．2 点 A，B はこれら 2 つの領域で共有する点であるから

$$2(n-2)+2 = 170 \quad これを解いて \quad n = \mathbf{86}\ (個)$$

定理　m と n は互いに素である正の整数とするとき，次式が成り立つ[4]．

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\,\frac{km}{n}\,\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数とする．

別解　求める個数は，$\triangle\mathrm{ABC}'$ の内部と周上ある格子点の個数と等しいから，

$-5 \leqq x \leqq 4$，$\ell : y = \dfrac{-16x+1}{9}$ および直線 $y=-7$ により

$$\begin{aligned}\sum_{x=-5}^{4}\left(\left[\frac{-16x+1}{9}\right]-(-7)+1\right) &= \sum_{x=-5}^{4}\left[\frac{16(4-x)}{9}\right]+10 \\ &= \sum_{k=0}^{9}\left[\frac{16k}{9}\right]+10 = \sum_{k=1}^{8}\left[\frac{16k}{9}\right]+26 \\ &= \frac{1}{2}(16-1)(9-1)+26 = 86\end{aligned}$$

■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.16-17)

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 出る目が $\{3,\ 6\}$ である確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \dfrac{2^n}{6^n}$

出る目が $\{6\}$ である確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{1}{6^n}$

3 または 6 である確率からすべて 6 である確率を引けばよいから

$$\frac{2^n}{6^n} - \frac{1}{6^n} = \boldsymbol{\frac{2^n - 1}{6^n}}$$

(2) 最大公約数が偶数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^n = \dfrac{3^n}{6^n}$

最大公約数が 3 である確率は $\dfrac{2^n - 1}{6^n}$

最大公約数が 5 である確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{1}{6^n}$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n - 1}{6^n} + \frac{1}{6^n}\right) = \boldsymbol{\frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n}}$$

(3) 出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ である事象を W，出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ で少なくとも 1 回 4 の目が出る事象を A，出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ で少なくとも 1 回 5 の目が出る事象を B とすると，求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(W) - P(\overline{A \cap B}) = P(W) - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= P(W) - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\} \\ &= P(W) - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A} \cap \overline{B}$ は，それぞれ，出る目が $\{1, 2, 4, 5\}$ のうち，4 が出ない，5 が出ない，4 と 5 が出ない事象であるから

$$P(W) = \left(\frac{4}{6}\right)^n, \quad P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{2}{6}\right)^n$$

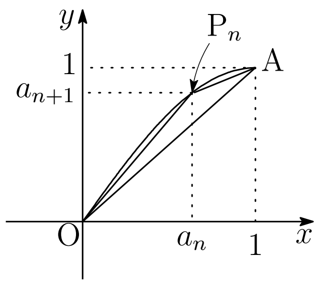
よって $P(A \cap B) = \left(\dfrac{4}{6}\right)^n - \left(\dfrac{3}{6}\right)^n - \left(\dfrac{3}{6}\right)^n + \left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \boldsymbol{\dfrac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}}$

■

4 (1) 上に凸である曲線 $y = f(x)$ 上に 2 点 A$(1,\ 1)$，P$_n(a_n,\ a_{n+1})$ をとると $(0 < a_n < 1)$，直線 P$_n$A の傾きは正で直線 OA の傾き 1 よりも小さいから

$$0 < \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} < 1$$

したがって　　$a_n < a_{n+1} < 1$



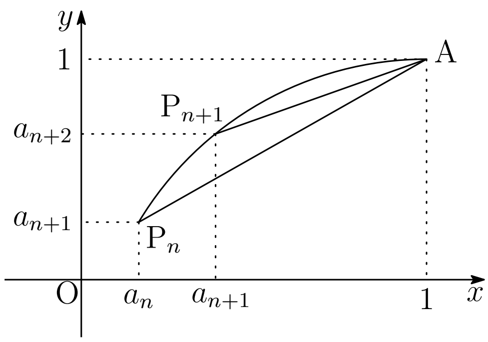
$\{a_n\}$ は単調増加列で，$a_1 = \alpha > 0$ であるから，すべての自然数 n ついて

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1$$

(2) (1) の結果より直線 P$_{n+1}$A の傾きは直線 P$_n$A の傾きより小さいから

$$\frac{1 - a_{n+2}}{1 - a_{n+1}} < \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$$

よって　　$b_{n+1} < b_n$



(3) (2) の結果から　$b_n < b_{n-1} < \cdots < b_2 < b_1 < 1 \quad (n > 2)$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} b_k < \prod_{k=1}^{n-1} b_1$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - a_{k+1}}{1 - a_k} < \prod_{k=1}^{n-1} b_1$　すなわち　$\dfrac{1 - a_n}{1 - a_1} < {b_1}^{n-1}$

$0 < \dfrac{1 - a_n}{1 - a_1} < {b_1}^{n-1}$ において，$0 < b_1 < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} {b_1}^{n-1} = 0$$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1 - a_n) = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{1}$

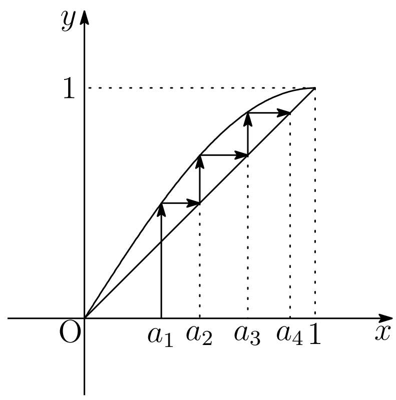
$f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ より，$f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}$　ゆえに　$f'(1) = 0$

$b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} = \dfrac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}$ および上の諸式から

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \mathbf{0}$$

解説　上に凸である曲線 $y = f(x)$ および直線 $y = x$ により，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列であることが分かる．また，その極限は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$



■

5　(1)　$0 < f(x) < 1$，$f(0) = \dfrac{1}{3}$，$\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt = ax$ より

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt = \int_0^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)} - \frac{f'(t)}{f(t)-1}\right)dt = \left[\ \log\frac{f(t)}{1-f(t)}\ \right]_0^x$$
$$= \log\frac{f(x)}{1-f(x)} - \log\frac{f(0)}{1-f(0)} = \log\frac{2f(x)}{1-f(x)}$$

したがって　$\log\dfrac{2(x)}{1-f(x)} = ax$　ゆえに　$\dfrac{2f(x)}{1-f(x)} = e^{ax}$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{e^{ax}}{e^{ax}+2}}$

(2)　(1) の結果から

$$S(a) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}$$
$$= \left[\ \frac{1}{a}\log(e^{ax}+2)\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{a}\log\frac{e^a+2}{3}}$$

$g(a) = \log\dfrac{e^a+2}{3}$ とおくと，$g'(a) = \dfrac{e^a}{e^a+2}$，$g(0) = 0$，$g'(0) = \dfrac{1}{3}$ により

$$\lim_{a\to 0} S(a) = \lim_{a\to 0}\frac{g(a)-g(0)}{a} = g'(0) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

■

第 2 章　東北大学

出題分野 (2011-2020) 150 分

◀	東北大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式	5		1							
	図形と方程式	1	1			5			1		2
	三角関数								4	4	
	指数関数と対数関数									2	
	微分法と積分法					2		1			
III	式と曲線										
	複素数平面						4	5	5		5
	関数										
	極限		6							3	
	微分法とその応用		5		1·6	1				1	
	積分法		4	4	5	4	6	6		5	6
	積分法の応用	2		6					6		
A	場合の数と確率	3	3	3	3	3	3	2	2	6	4
	整数の性質					6	2	3	3		
	図形の性質						1				
B	平面上のベクトル	4						4			1
	空間のベクトル			2	2		5				
	数列										3
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	6	2	5	4						

数字は問題番号

2.1　2015年(150分)

1 xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\quad x>0,\quad y>0$$

Pを C 上の点とする．Pで C に接する直線を l とし，Pを通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．Pが C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときのPの座標を求めよ．

2 xy 平面において，3次関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とし，不等式

$$x^3-x>y>-x$$

の表す領域を D とする．また，Pを D の点とする．

(1) Pを通り C に接する直線が3本存在することを示せ．

(2) Pを通り C に接する3本の直線の傾きの和と積がともに0となるようなPの座標を求めよ．

3 サイコロを3回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の2次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0 \qquad \cdots(*)$$

を考える．

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない2つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ．

(3) 方程式 $(*)$ が実数でない2つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ．

$\boxed{4}$ $a>0$ を実数とする．$n=1,2,3,\ldots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0)\,,\quad \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\quad ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}\,dx,\quad C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx$$

とおく．

(1) $n=1,2,3,\ldots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ．

$\boxed{5}$ $t>0$ を実数とする．座標平面において，3 点 A$(-2,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，P$(t,\ \sqrt{3}\,t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える．

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ．

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ．

(3) 辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく．t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

$\boxed{6}$ $k \geqq 2$ と n を自然数とする．n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，

$$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和と呼ぶことにする．ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである．

(1) n が k-連続和であることは，次の条件 (A)，(B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ．

(A) $\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ は整数である．

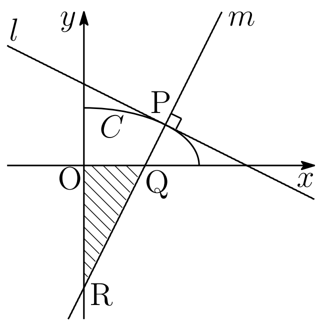
(B) $2n > k^2$ が成り立つ．

(2) f を自然数とする．$n = 2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ．

(3) f を自然数とし，p を 2 でない素数とする．$n = p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ．

解答例

1 曲線 $C: x^2+4y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ を x について微分すると



$$2x+8yy'=0 \quad \text{ゆえに} \quad y'=-\frac{x}{4y'}$$

C の点 $\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における法線 m の傾きは

$$-\frac{1}{y'}=\frac{4y'}{x}=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=2\tan\theta$$

したがって，m の方程式は

$$y-\frac{1}{2}\sin\theta=2\tan\theta\cdot(x-\cos\theta) \quad \text{すなわち} \quad y=2x\tan\theta-\frac{3}{2}\sin\theta$$

m の x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q，R とすると

$$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{4}\cos\theta,\ 0\right),\quad \mathrm{R}\left(0,-\frac{3}{2}\sin\theta\right)$$

$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}$ であるから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta\cdot\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{9}{16}\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}\sin2\theta$$

したがって，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{32}}$ をとる．

このとき，点 P は $\left(\cos\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ すなわち $\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)}$ ■

2 (1) $C: y = x^3 - x$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 1$　$\cdots$ ①
C 上の点 $(t,\ t^3 - t)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

これを t について整理すると　$2t^3 - 3xt^2 + x + y = 0$　$\cdots (*)$
点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，上の t に関する 3 次方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつ P の領域を求める．$f(t) = 2t^3 - 3xt^2 + x + y$ とおくと

$$f'(t) = 6t^2 - 6xt = 6t(t - x) \quad f'(t) = 0 \text{ とすると} \quad t = 0,\ x$$

$(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，$x \neq 0$，$f(0)f(x) < 0$ であるから

$$x \neq 0, \quad (x + y)(-x^3 + x + y) < 0,$$

すなわち　$\begin{cases} x + y > 0 \\ -x^3 + x + y < 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x + y < 0 \\ -x^3 + x + y > 0 \end{cases}$

上の 1 番目の関係式により，$x^3 - x > y > -x$ の表す領域 D の点 P から C に接する直線は 3 本存在する．

(2) P から C に引いた 3 本の接線の接点の x 座標を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると，3 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$(**) \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}x, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{x + y}{2}$$

① より，3 本の接線の傾き $3\alpha^2 - 1,\ 3\beta^2 - 1,\ 3\gamma^2 - 1$ について，条件から

$$(3\alpha^2 - 1) + (3\beta^2 - 1) + (3\gamma^2 - 1) = 0$$
$$(3\alpha^2 - 1)(3\beta^2 - 1)(3\gamma^2 - 1) = 0$$

上の第 1 式から　$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$　$\cdots$ ②
上の第 2 式から，一般性を失うことなく

$$3\gamma^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$(**)$ の第 1，第 2 式および ② を

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

に代入すると

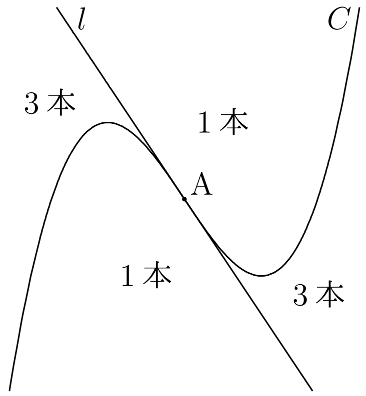
$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 1 + 2\cdot 0 \quad x > 0 \text{ に注意して} \quad x = \frac{2}{3}$$

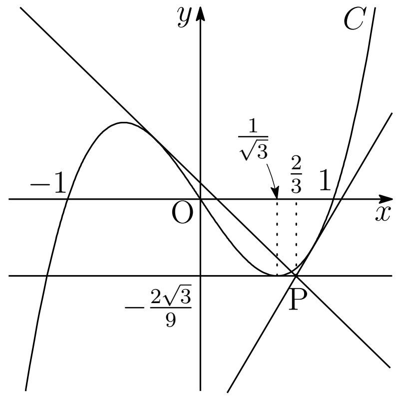
$f(t)=2t^3-2t^2+\dfrac{2}{3}+y$ となり，γ は $f(t)=0$ の解であるから

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}+y=0 \quad \text{ゆえに} \quad y=\mp\frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (\text{複号同順})$$

このとき，D に含まる点 P は $\boldsymbol{\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)}$

解説　3 次関数のグラフを C とし，C の変曲点 A における接線を l とすると，座標平面上の点から曲線 C に引ける接線の本数は，C と l を境界とする領域によって左下の図のようになる．なお，境界線 C と l 上の点からは 2 本，ただし変曲点からは 1 本である．本題の $C: y=x^3-x$ の変曲点 $(0,\ 0)$ における接線が $y=-x$ である．また，右下の図でわかるように，$y=x^3-x$ の極小値 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ を求めて，これを P の y 座標とすればよい．





$\boxed{3}$ (1) 2 次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \cdots (*)$ が実数解をもつとき，

$$p_2{}^2 - 4 \cdot 2p_1 \cdot 2p_3 = p_2{}^2 - 16p_1p_3 \geqq 0$$

p_1，p_2，p_3 はそれぞれ 6 以下の自然数であるから，上式を満たすとき

$p_2 = 4,\ 5$ のとき　$(p_1,\ p_3) = (1,\ 1)$

$p_2 = 6$ のとき　$(p_1,\ p_2) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{2 \times 1 + 3}{6^3} = \mathbf{\dfrac{5}{216}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解 α，β と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{2p_3}{2p_1} = \frac{p_3}{p_1} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3 = p_1$$

このとき，2 次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_1 = 0$ が複素数解をもつとき

$$p_2{}^2 - 4 \cdot 2p_1 \cdot 2p_1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2 < 4p_1$$

上式を満たすとき

$p_1 = p_3 = 1$ のとき　$p_2 = 1,\ 2,\ 3$

$p_1 = p_3 = 2, 3, 4, 5, 6$ のとき　$p_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

よって，求める確率は　$\dfrac{3 + 5 \cdot 6}{6^3} = \mathbf{\dfrac{11}{72}}$

(3) 2 次方程式 $(*)$ の解 α，β と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{2p_3}{2p_1} = \frac{p_3}{p_1} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3 < p_1$$

2 次方程式 $(*)$ が複素数解をもつ確率は，(1) の結果から

$$1 - \frac{5}{216} = \frac{211}{216} \quad \cdots ①$$

2 次方程式が複素数の解をもち，かつ，$p_3 < p_1$ である確率と 2 次方程式が複素数の解をもち，かつ，$p_3 > p_1$ である確率は等しい．

よって，(2) の結果および ① から，求める確率は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{211}{216} - \frac{11}{72}\right) = \mathbf{\frac{89}{216}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において (n は自然数)

$$\sin x \geqq 0, \quad \frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{1}{x^a} \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}$$

したがって

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}\,dx$$

よって　$\displaystyle \frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq B_n \leqq \frac{2}{(2n\pi)^a}$

(2) (1) の結果から　$\displaystyle \frac{(2n\pi)^a}{2} \leqq \frac{1}{B_n} \leqq \frac{\{(2n+1)\pi\}^a}{2}$

$\displaystyle A_n = \frac{\pi}{2\{(2n+\frac{1}{2})\}^a} \cdots ①$ であるから　$\displaystyle \frac{\pi}{4}\left(\frac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a \leqq \frac{A_n}{B_n} \leqq \frac{\pi}{4}\left(\frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$

ここで，$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{4n}} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{2n}}{2+\frac{1}{4n}} = 1$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(3) (1) と同様に，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において (n は自然数)

$$\sin^2 x \geqq 0, \quad \frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{1}{x^a} \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}$$

したがって

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{(2n\pi)^a}\,dx$$

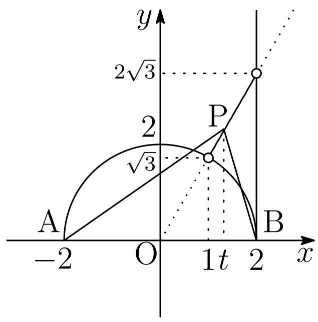
このとき，$\displaystyle \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}$　より　$\displaystyle \frac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq C_n \leqq \frac{\pi}{2(2n\pi)^a}$

上式より，$\displaystyle \frac{2(2n\pi)^a}{\pi} \leqq \frac{1}{C_n} \leqq \frac{2\{(2n+1)\pi\}^a}{\pi}$ であるから，① より

$$\left(\frac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a \leqq \frac{A_n}{C_n} \leqq \left(\frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$$

(2) の計算と同様に，はさみうちの原理により　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \mathbf{1}$　■

5　(1) $t>0$ より，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ は直線 $y=\sqrt{3}x$ の第 1 象限の点である．右の図のように $\angle\mathrm{PAB}$ は鋭角．$\angle\mathrm{APB}$ が鋭角となるとき P は原点を中心とする半径 2 の円の外部にあるから



$$\mathrm{OP}>2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{t^2+(\sqrt{3}\,t)^2}>2$$

これを解いて $(t>0)$ 　　$t>1$ 　$\cdots$ ①

$\angle\mathrm{PBA}$ が鋭角となるのは，P の x 座標に注目して　　$t<2$ 　$\cdots$ ②

①，② より，$\triangle\mathrm{ABP}$ が鋭角三角形となる t の範囲は　　$\boldsymbol{1<t<2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t+2,\ \sqrt{3}\,t)$ に垂直で点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$(t+2)(x-2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}\,t)$ に垂直で点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ を通る直線の方程式は

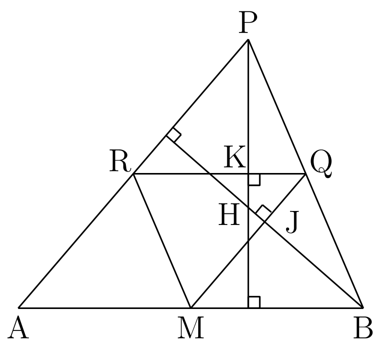
$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

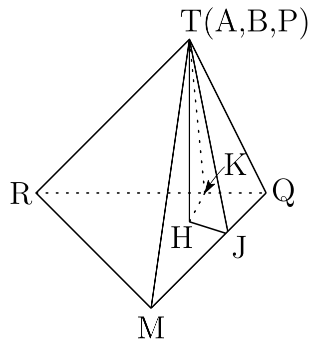
$\triangle\mathrm{ABP}$ の垂心は上の 2 本の直線の交点であるから　　$\boldsymbol{\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right)}$

(3) (2) で求めた $\triangle\mathrm{PAB}$ の垂心を H，直線 BH と直線 QM の交点を J，直線 PH と直線 QR の交点を K とおく．M，Q，R はそれぞれ辺 AB，BP，PA の中点であるから，中点連結定理により

$$\mathrm{MQ}/\!/\mathrm{PA}, \quad \mathrm{QR}/\!/\mathrm{AB} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{HJ}\perp\mathrm{MQ}, \quad \mathrm{HK}\perp\mathrm{QR}$$

A，B，P が重なる四面体の頂点を T とすると，平面 THJ は直線 MQ と垂直，平面 THK は直線 QR と垂直である．これら 2 平面の交線 TH は，直線 MQ および直線 QR に垂直であるから，TH は平面 MQR と垂直である．





A$(-2,\ 0)$，P$(t,\ \sqrt{3}\,t)$ の中点 R の座標は $\left(\dfrac{-2+t}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$

K の x 座標は P の x 座標と等しく，y 座標は R の y 座標と等しいから

$$\mathrm{K}\left(t,\ \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{TK} = \mathrm{PK} = \frac{\sqrt{3}\,t}{2}$$

$1 < t < 2$ に注意して

$$\begin{aligned}
\mathrm{HK} &= \left|\frac{\sqrt{3}\,t}{2} - \frac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right| = \frac{|5t^2-8|}{2\sqrt{3}\,t},\\
\mathrm{TH} &= \sqrt{\mathrm{TK}^2 - \mathrm{HK}^2}\\
&= \sqrt{\frac{3t^2}{4} - \frac{(5t^2-8)^2}{12t^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}
\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}\,t = 2\sqrt{3}\,t$　ゆえに　$\triangle\mathrm{MQR} = \dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}$

四面体 TMQR の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{MQR}\cdot\mathrm{TH} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\
&= \frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}
\end{aligned}$$

よって，$t^2 = \dfrac{5}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{t = \dfrac{\sqrt{10}}{2}}$ のとき，V は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

発展　四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，行列 M を $M=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ とすると，四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{6}|\det M|$$

$a=|\vec{a}|$，$b=|\vec{b}|$，$c=|\vec{c}|$ とし，$\alpha=\angle\mathrm{BOC}$，$\beta=\angle\mathrm{COA}$，$\gamma=\angle\mathrm{AOB}$ とすると

$$\begin{aligned}{}^tMM&=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a}&\vec{a}\cdot\vec{b}&\vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a}&\vec{b}\cdot\vec{b}&\vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a}&\vec{c}\cdot\vec{b}&\vec{c}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&ab\cos\gamma&ac\cos\beta\\ ba\cos\gamma&b^2&bc\cos\alpha\\ ca\cos\beta&cb\cos\alpha&c^2\end{pmatrix}\\&=a^2b^2c^2\begin{pmatrix}1&\cos\gamma&\cos\beta\\ \cos\gamma&1&\cos\alpha\\ \cos\beta&\cos\alpha&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\det M=\det{}^tM$ より，$\det({}^tMM)=\det{}^tM\det M=(\det M)^2$ に注意して

$$\begin{aligned}(\det M)^2&=a^2b^2c^2\det\begin{pmatrix}1&\cos\gamma&\cos\beta\\ \cos\gamma&1&\cos\alpha\\ \cos\beta&\cos\alpha&1\end{pmatrix}\\&=a^2b^2c^2(1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma)\end{aligned}$$

よって　$V=\dfrac{1}{6}abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}$　$\cdots$(A)

とくに，等面四面体のとき，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$ より

$$\begin{aligned}&1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\\&=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\frac{1}{2}(2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\beta-1)-\cos^2\gamma\\&=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)-\cos^2\gamma\\&=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\gamma\\&=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma\\&=\{2\cos\alpha\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}\cos\gamma\\&=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

よって　　$V=\dfrac{1}{3}abc\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$　$\cdots$(B1)

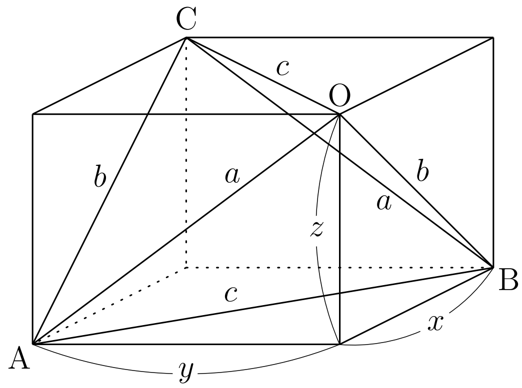
等面四面体において，BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ であるから，余弦定理により

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これらを (B1) に代入すると

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \quad \cdots \text{(B2)}$$

また，等面四面体は直方体に埋め込まれるから，(B2) の結果を次のように求めることもできる．
右の図において



$$\begin{aligned} y^2+z^2 &= a^2 \\ z^2+x^2 &= b^2 \\ x^2+y^2 &= c^2 \end{aligned}$$

したがって

$$x^2 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad z^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

V は直方体の体積から 4 つの直角四面体を引いたものであるから

$$\begin{aligned} V &= xyz - 4\cdot\frac{1}{6}xyz = \frac{1}{3}xyz \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \end{aligned}$$

本題において，TM $= 2$，TQ $= \frac{1}{2}\sqrt{(t-2)^2+3t^2}$，TR $= \frac{1}{2}\sqrt{(t+2)^2+3t^2}$
$a =$ TM，$b =$ TQ，$c =$ TR とおくと

$$a^2 = 4,\quad b^2 = t^2-t+1,\quad c^2 = t^2+t+1$$

これらを (B2) に代入すると

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(2t^2-2)(4+2t)(4-2t)} = \frac{1}{3}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}$$

東北大理系 2013 年

四面体 OABC において，OA = OB = OC とする．$\angle \mathrm{AOB} = 60^\circ$，$\angle \mathrm{BOC} = 45^\circ$，$\angle \mathrm{COA} = 45^\circ$ とし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) CH の長さを求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

解答 (1) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{b} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b})$ は平面 OAB 上のベクトルで $\vec{a}$ に垂直．

これと平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{|\vec{a} - 2\vec{b}|} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{\sqrt{|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2}} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{e} = \frac{\vec{c}(\vec{a} - 2\vec{b})}{\sqrt{3}} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a} - 2\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{a} + (\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b})}$$

(2) (1) の結果から　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}\right|^2 = \frac{2}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}) - \frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{c}) + |\vec{c}|^2$$

$$= \frac{2}{9}\cdot 3 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad \mathrm{CH} = |\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) $\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

別解 (A) により　$V = \dfrac{1}{6}\sqrt{1 + 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right)} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$ ■

6 (1)

$$\begin{aligned} n &= m + (m+1) + \cdots + (m+k-1) \\ &= \frac{1}{2}k\{m + (m+k-1)\} = \frac{k}{2}(2m+k-1) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

(十分性) n が k-連続和，すなわち，自然数 n が $(*)$ を満たす自然数 m，k をもつとき $(k \geqq 2)$

$$\frac{n}{k} = m + \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad m = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$$

m は自然数であるから，(A) は成立する．さらに m は自然数であるから

$$\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{k} \geqq \frac{k+1}{2} > \frac{k}{2}$$

k は自然数であるから $(k \geqq 2)$　$2n > k^2$　よって，(B) は成立する．

(必要性) 条件 (A)，(B) をみたすとき

$$\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2n - k^2}{2k} + \frac{1}{2} > 0$$

は自然数であるから，これを m' とおくと

$$m' = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad n = \frac{1}{2}k(2m' + k - 1)$$

したがって　$n = m' + (m'+1) + \cdots + (m'+k-1)$

よって，n は k-連続和である．

(2) 2^f が k-連続和と仮定すると，(A) より次式を満たす整数 m が存在する．

$$m = \frac{2^f}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad k(2m+k-1) = 2^{f+1}$$

k と $2m+k-1$ は偶奇が異なるから $(k \neq 1)$

$$k = 2^{f+1}, \quad 2n + k - 1 = 1$$

また，(B) より　$2 \cdot 2^f > k^2$　ゆえに　$2^{f+1} > k^2$

このとき　$k > k^2$　ゆえに　$k(k-1) < 0$

これは，$k \geqq 2$ に反するから，不適．

よって，$n = 2^f$ のとき (f は自然数)，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しない

(3) p^f が k-連続和であるとき (p は奇素数)，(A) より次式を満たす整数 m が存在する．

$$m = \frac{p^f}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad k(2m + k - 1) = 2p^f \quad \cdots (**)$$

また，(B) より　$2p^f > k^2$　ゆえに　$k < \sqrt{2}\, p^{\frac{f}{2}}$　$\cdots$ ①

$(**)$ より，k と $2m + k - 1$ は偶奇が異なる．

(i) k が奇数のとき　$k = p^i$　$\left(i = 1, 2, \cdots, \left[\frac{f}{2}\right]\right)$

(ii) k が偶数のとき　$k = 2p^j$　$\left(j = 0, 1, \cdots, \left[\frac{f-1}{2}\right]\right)$

ここで，$[x]$ は，x を超えない最大の整数とする．

したがって　(i) の場合が $\left[\frac{f}{2}\right]$ 個

(ii) の場合が $\left[\frac{f-1}{2}\right] + 1 = \left[\frac{f+1}{2}\right]$ 個．

よって，求める個数は　$\left[\frac{f}{2}\right] + \left[\frac{f+1}{2}\right] = \boldsymbol{f}$　(個)

注意 上の f を偶奇に分けて処理してもよい．

補足 n を自然数，a を整数とすると　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a+k}{n} \right] = a$

証明 $a \equiv 0 \pmod{n}$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a+k}{n} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} = a$$

整数 j $(1 \leqq j \leqq n-1)$ について $a + j \equiv 0 \pmod{n}$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a+k}{n} \right] &= \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{a+j}{n} - 1 \right) + \sum_{k=j}^{n-1} \frac{a+j}{n} \\
&= j \left(\frac{a+j}{n} - 1 \right) + (n-j)\frac{a+j}{n} \\
&= a
\end{aligned}$$

発展

m と n は互いに素である正の整数とするとき，次式が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数とする．

証明 m を n で割った商を q，余りを r とすると

$$m = nq + r \tag{2.1}$$

が成り立つ $(1 \leq r < n)$．k を正の整数とすると

$$\frac{km}{n}=kq+\frac{kr}{n} \quad \text{すなわち} \quad \left[\frac{km}{n}\right]=kq+\left[\frac{kr}{n}\right]$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kq=\frac{1}{2}qn(n-1)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right]=\frac{1}{2}qn(n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{kr}{n}\right] \tag{2.2}$$

(2.1) において m と n は互いに素であるから，ユークリッドの互除法により，n と r は互いに素である．

$1 \leq k, k' \leq n-1$ のとき，kr と $k'r$ を n で割った余りが等しいとき

$$kr - k'r = (k-k')r$$

は n の倍数で，r と n が互いに素であることから　$k = k'$
すなわち，r, $2r$, $3r$, $\cdots$, $(n-1)r$ を n で割った余りは，順序を無視して 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$ である．

kr を n で割った余りを d_k とすると $(1 \leq d_k < n)$

$$\frac{kr}{n} = \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] + \frac{d_k}{n}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} d_k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{kr}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} d_k$$
$$\frac{1}{2}r(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] + \frac{1}{2}(n-1)$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] = \frac{1}{2}(r-1)(n-1) \tag{2.3}$$

(2.3) を (2.2) に代入すると，(2.1) により

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{km}{n}\ \right] &= \frac{1}{2}qn(n-1) + \frac{1}{2}(r-1)(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(nq+r-1)(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(m-1)(n-1)\end{aligned}$$

証終

ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記すると

$$(x,y)\,|\,x, \quad (x,y)\,|\,y$$

が成り立つ．

ユークリッドの互除法

2 整数 a，b について ($a>b>0$)，a を b で割ったときの商を q，余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \qquad (a,b)=(b,c)$$
$$c = 0 \text{ のとき} \qquad (a,b)=b$$

証明 $c \neq 0$ のとき，$a=bq+c$ より $(b,c)\,|\,a$ また，$(b,c)\,|\,b$ であるから，(b,c) は a と b の公約数，したがって

$$(b,c)\,|\,(a,b) \quad \cdots ①$$

同様に，$c=a-bq$ より $(a,b)\,|\,c$ また，$(a,b)\,|\,b$ であるから，(a,b) は b と c の公約数，したがって

$$(a,b)\,|\,(b,c) \quad \cdots ②$$

①，② より $(a,b)=(b,c)$

$c=0$ のとき，自明． 証終

補足 さらに，b を c で割った余りが d であるとき $(b,c)=(c,d)$

すなわち $(a,b)=(b,c)=(c,d)$

2 つの整数 a_1，a_2 について ($a_1>a_2>0$)，a_1 を a_2 で割った余りを a_3，さらに，a_2 を a_3 で割った余りを a_4，順次，a_k を a_{k+1} で割った余りを a_{k+2} とすると

$$(a_1,a_2)=(a_2,a_3)=(a_3,a_4)=\cdots=(a_k,a_{k+1})=(a_{k+1},a_{k+2})=\cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから，互除法を繰り返すことにより，a_1 と a_2 の最小公倍数を求めることができる． ■

2.2　2016年(150分)

$\boxed{1}$ 鋭角三角形△ABCにおいて，頂点A，B，Cから各対辺に垂線AD，BE，CFを下ろす．これらの垂線は垂心Hで交わる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 四角形BCEFとAFHEが円に内接することを示せ．

(2) ∠ADE = ∠ADFであることを示せ．

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 6以上の整数nに対して不等式

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ．

(2) 等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組$(p,\ q)$をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ サイコロを3回振って出た目の数をそれぞれ順に$a,\ b,\ c$とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b,\ c$がある直角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ．

(2) $a,\ b,\ c$がある鈍角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ．

4 多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき，係数 $a_0, \ldots, a_7$ をすべて求めよ．

(2) $0 < \theta < \pi$ に対して，

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1) で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて，多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える．$\theta = \dfrac{\pi}{7}$ として，$k = 1, 2, 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく．このとき，$Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し，$x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ．

5 空間内に，直線 l で交わる 2 平面 α, β と交線 l 上の 1 点 O がある．さらに，平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を，どちらも点 O を通り l に垂直にとる．m, n 上にそれぞれ点 P，Q があり，

$$\mathrm{OP} = \sqrt{3}, \quad \mathrm{OQ} = 2, \quad \mathrm{PQ} = 1$$

であるとする．線分 PQ 上の動点 T について，PT $= t$ とおく．点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ．

(2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく．T が線分 PQ 上を動くとき，$f(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

6 関数

$$f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t-x) - \sin 2t|\, dt$$

の区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ．

解答例

1　(1) $\angle \mathrm{BEC} = \angle \mathrm{BFC}$ より，四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する．
$\angle \mathrm{AEH} = 90^\circ$，$\angle \mathrm{AFH}\ 90^\circ$ であるから，$\angle \mathrm{AEH} + \angle \mathrm{AFH} = 180$ より，四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する．

(2) $\triangle \mathrm{HCE}$ と $\triangle \mathrm{HBF}$ において

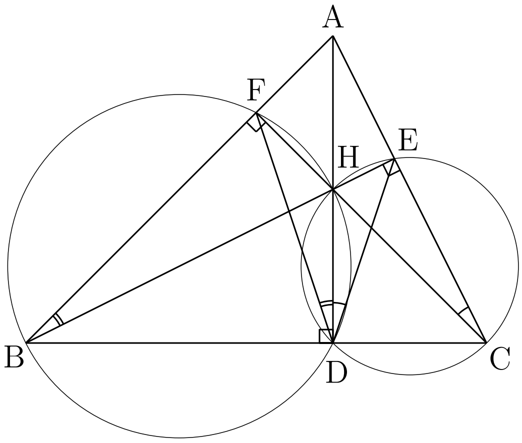
$$\begin{aligned} &\angle \mathrm{CHE} = \angle \mathrm{BHF} \quad (\text{対頂角}), \\ &\angle \mathrm{HEC} = \angle \mathrm{HFB} \quad (\mathrm{H}\ \text{は}\ \triangle \mathrm{ABC}\ \text{の垂心}) \end{aligned}$$

したがって　$\triangle \mathrm{HCE} \backsim \triangle \mathrm{HBF}$　ゆえに　$\angle \mathrm{HCE} = \angle \mathrm{HBF}$　$\cdots$①

四角形 ECDH の対角の和が 180° であるから四角形 ECDH は円に内接し，円周角の定理により　$\angle \mathrm{HCE} = \angle \mathrm{HDE}$　$\cdots$②

四角形 FBDH の対角の和が 180° であるから四角形 FBDH は円に内接し，円周角の定理により　$\angle \mathrm{HBF} = \angle \mathrm{HDF}$　$\cdots$③

①，②，③ より　$\angle \mathrm{HDE} = \angle \mathrm{HDF}$　よって　$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ADF}$



■

2 (1) $$2^n > n^2+7 \quad \cdots (\mathrm{A})$$

［1］$n=6$ のとき，左辺 $=2^6=64$，右辺 $=6^2+7=43$

このとき，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$2^k > k^2+7$ であるから

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &> 2(k^2+7) = (k+1)^2+7+(k-1)^2+5 \\ &> (k+1)^2+7 \end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のとき，(A) は成立する．

［1］，［2］より，6 以上の整数 n に対して，不等式 (A) は成立する．

(2) $p^q=q^p+7$ より　$p^q-q^p=7 \quad \cdots (*)$

$(*)$ を満たす素数 p，q の偶奇は異なるから (p，q の一方は 2)

$$f(n)=2^n-n^2$$

とおいて，$f(n)=\pm 7$ を満たす素数 n を求めればよい．

(1) の結果から，6 以上の整数 n に対して，$f(n)>7$ であるから

$$n=3,\ 5$$

の場合を調べればよい．

$$f(3)=2^3-3^2=-1, \quad f(5)=2^5-5^2=7$$

上の結果から，求める素数の組は　$\boldsymbol{(p,\ q)=(2,\ 5)}$ ■

3 (1) 直角三角形となる 3 辺の長さは，3，4，5 であるから，求める確率は

$$\frac{3!}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{36}}$$

(2) a を最大辺とする鈍角三角形の条件は　$b+c>a, \quad b^2+c^2<a^2$

上式を満たすのは，次の 13 組．

$a=3$ のとき　$(b,\ c)=(2,\ 2)$

$a=4$ のとき　$(b,\ c)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

$a=5$ のとき　$(b,\ c)=(2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$

$a=6$ のとき　$(b,\ c)=(2,\ 5),\ (5,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),$
$(3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (4,\ 4)$

b，c が最大辺であるときも，それぞれ 13 組．

よって，求める確率は　$\dfrac{13\times 3}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{13}{72}}$ ■

4 (1)
$$(x+i)^7-(x-i)^7=\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}i^k-\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}(-i)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{7}\{i^k-(-i)^k\}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}$$

ここで
$$i^k=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}$$
$$(-i)^k=\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k=\cos\frac{k\pi}{2}-i\sin\frac{k\pi}{2}$$

上の2式より，$i^k-(-i)^k=2i\sin\dfrac{k\pi}{2}$ であるから
$$(x+i)^7-(x-i)^7=2i\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}\sin\frac{k\pi}{2}$$
$$P(x)=\frac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}=\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$P(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{7}a_k x^{7-k}$ であるから　$a_k={}_7\mathrm{C}_k\sin\dfrac{k\pi}{2}$　$(k=0,1,2,\ldots,7)$

よって　$\boldsymbol{a_0=0,\ a_1=7,\ a_2=0,\ a_3=-35,}$
$\boldsymbol{a_4=0,\ a_5=21,\ a_6=0,\ a_7=-1}$

(2) $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$ より
$$P\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\right)^7\right\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7\right\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\{(\cos 7\theta+i\sin 7\theta)-(\cos 7\theta-i\sin 7\theta)\}=\frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

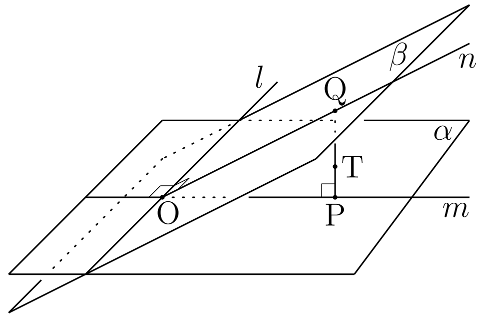
(3) $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，(2) の結果から　$P\left(\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right)=0$　$(k=1,2,3)$

$P(x)=Q(x^2)$ であるから　$Q\left(\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}\right)=0$　$(k=1,2,3)$

$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ $(k=1,2,3)$ は3次方程式 $a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7=0$ の解であるから，解と係数の関係により
$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_5}{a_1}=-\frac{-35}{7}=\mathbf{5}$$
■

5 (1) $\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$ より，
$\triangle\mathrm{OPQ}$ について

$\angle\mathrm{O}=30^\circ$，$\angle\mathrm{P}=90^\circ$，$\angle\mathrm{Q}=60^\circ$



右の図から，直線 PT は平面 α と垂直であるから，$\mathrm{PT}=t$ より，T から α までの距離は t
したがって，S と α の切り口は，半径

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2-t^2}=\sqrt{2-t^2}$$

の円である．したがって，その面積は　$\pi(\sqrt{2-t^2})^2=\boldsymbol{\pi(2-t^2)}$

(2) $\mathrm{QT}=\mathrm{PQ}-\mathrm{PT}=1-t$ より，T から平面 β までの距離を d とすると

$$d=\mathrm{QT}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)$$

したがって，S と β の切り口は，半径

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2-d^2}=\sqrt{2-\frac{3}{4}(1-t)^2}$$

の円であり，その面積は　$\pi\left\{2-\dfrac{3}{4}(1-t)^2\right\}$
これと (1) の結果から

$$\begin{aligned}f(t)&=\pi(2-t^2)+\pi\left\{2-\frac{3}{4}(1-t)^2\right\}\quad(0\leqq t\leqq 1)\\&=\pi\left(-\frac{7}{4}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{13}{4}\right)\\&=\pi\left\{-\frac{7}{4}\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{25}{7}\right\}\end{aligned}$$

よって，$f(t)$ は $\boldsymbol{t=\dfrac{3}{7}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{25}{7}\pi}$ をとる．■

6 $g(t)=\sin 2t-\sin(t-x)$ とおくと $g(t)=2\sin\dfrac{t+x}{2}\cos\dfrac{3t-x}{2}$

$0 \leqq t \leqq \pi$，$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$0 \leqq \dfrac{t+x}{2} \leqq \pi$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{3t-x}{2} \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ であるから

$\dfrac{3t-x}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$t \leqq \dfrac{\pi+x}{3}$ のとき $g(t) \geqq 0$

$\dfrac{3t-x}{2} \geqq \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$t \geqq \dfrac{\pi+x}{3}$ のとき $g(t) \leqq 0$

ゆえに $|\sin(t-x)-\sin 2t|=|g(t)|=\begin{cases} g(t) & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi+x}{3}\right) \\ -g(t) & \left(\dfrac{\pi+x}{3} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

$g(t)$ の原始関数の 1 つを

$$G(x)=-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos(t-x) \qquad \cdots(*)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_0^{\pi}|\sin(t-x)-\sin 2t|\,dt=\int_0^{\pi}|g(t)|\,dt \\ &=\int_0^{\frac{\pi+x}{3}} g(t)\,dt-\int_{\frac{\pi+x}{3}}^{\pi} g(t)\,dt \\ &=\Big[\ G(t)\ \Big]_0^{\frac{\pi+x}{3}}-\Big[\ G(t)\ \Big]_{\frac{\pi+x}{3}}^{\pi} \\ &=2G\left(\frac{\pi+x}{3}\right)-G(0)-G(\pi) \end{aligned}$$

$(*)$ より

$$G\left(\frac{\pi+x}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos\frac{2(\pi+x)}{3}+\cos\frac{\pi-2x}{3}=\frac{3}{2}\cos\frac{\pi-2x}{3},$$

$$G(0)=-\frac{1}{2}+\cos x,\quad G(\pi)=-\frac{1}{2}+\cos(\pi-x)=-\frac{1}{2}-\cos x$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x)&=2\times\frac{3}{2}\cos\frac{\pi-2x}{3}-\left(-\frac{1}{2}+\cos x\right)-\left(-\frac{1}{2}-\cos x\right) \\ &=3\cos\frac{\pi-2x}{3}+1 \end{aligned}$$

よって $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 **4**，$x=0,\ \pi$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ ■

2.3　2017年 (150分)

1 a，b を実数とする．$y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし，$y = ax + b$ で表される直線を l とする．

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a，b の条件を求めよ．

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ．

2 A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている．2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする．取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残りの 2 枚のカードに書かれた数の合計とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ．

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数でない確率を求めよ．

3 a，b，c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする．

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ．

(2) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が少なくとも一つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ．

4 s を正の実数とする．鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s : 1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s : 3$ に内分する点を E とする．線分 CD と線分 AE の交点を F とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ．

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする．FG の長さが最大となるときの s を求めよ．

$\boxed{5}$ α，β，γ を複素数とし，

$$z\overline{z} + \alpha z + \beta\overline{z} + \gamma = 0 \qquad \cdots(*)$$

を満たす複素数 z を考える．以下の問いに答えよ．

(1) z は
$$(\alpha - \overline{\beta})z - (\overline{\alpha} - \beta)\overline{z} + \gamma - \overline{\gamma} = 0$$
を満たすことを示せ．

(2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ と仮定し，また γ は負の実数であると仮定する．このとき，$(*)$ を満たす z がちょうど2個あるための必要条件を α，β を用いて表せ．

$\boxed{6}$ a，b，c を実数とし，

$$I(a,\ b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad J(a,\ b,\ c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく．ただし，$a \neq 0$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ．

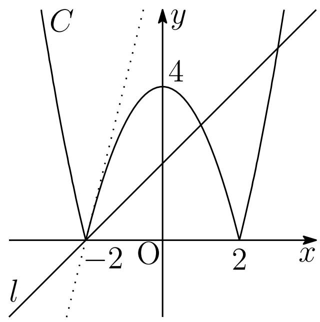
(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ．

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$$

解答例

1　(1) $y = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & (x \leqq -2,\ 2 \leqq x) \\ -x^2+4 & (-2 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$



$l : y = ax+b$ は点 $(-2,\ 0)$ を通るから

$$0 = -2a+b \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a$$

$f(x) = -x^2+4$ とすると　$f'(x) = -2x$

$f'(-2) = 4$ であるから，l の傾きについて

$$0 < a < 4$$

よって，求める条件は　$\boldsymbol{b = 2a\ (0 < a < 4)}$

(2) 条件を満たすのは，次の (i)〜(iii) の場合である．

(i) 点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつとき，
(1) で得られた結果から　$b = 2a\ (0 < a < 4)$

(ii) 点 $(2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつとき，
$y = |x^2-4|$ の y 軸に関する対称性から　$b = -2a\ (-4 < a < 0)$

(iii) l が $y = f(x)\ (-2 < x < 2)$ と接するとき，
$y = f(x)\ (-2 < x < 2)$ 上の点の接線で傾きが a となる x 座標は

$$f'(x) = -2x = a \quad \text{ゆえに} \quad x = -\frac{a}{2}$$

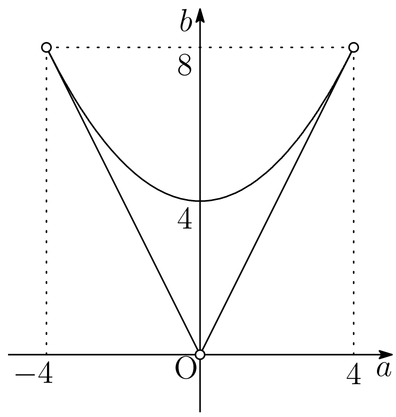
このとき　$-2 < -\dfrac{a}{2} < 2$　すなわち　$-4 < a < 4$

$f\left(-\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4}+4$ であるから，この接線の方程式は

$$y - \left(-\frac{a^2}{4}+4\right) = a\left(x+\frac{a}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = ax+\frac{a^2}{4}+4$$

これが直線 l の方程式であるから　$b = \dfrac{a^2}{4}+4 \quad (-4 < a < 4)$

(i)〜(iii) から，点 $(a,\ b)$ が描く軌跡は，次のようになる．　■



2 (1) 得点が 3 点となるのは，$\{0,1,2\},\{1,3,5\},\{2,3,4\}$ の 3 通り．
このうち，0 を取り出さないのが 2 通り．
よって，A，B の少なくとも一方が 0 を取り出す確率は

$$\left(\frac{3}{20}\right)^2-\left(\frac{2}{20}\right)^2=\frac{9-4}{400}=\mathbf{\frac{1}{80}}$$

(2) 0 から 5 の 6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，次の 20 通り．

得点	組合せ	場合の数
2	$\{1,2,3\}$	1
$\frac{7}{3}$	$\{1,2,4\}$	1
$\frac{8}{3}$	$\{1,2,5\}$，$\{1,3,4\}$	2
3	$\{0,1,2\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$	3
$\frac{10}{3}$	$\{1,4,5\}$，$\{2,3,5\}$	2
$\frac{11}{3}$	$\{2,4,5\}$	1
4	$\{0,1,3\}$，$\{3,4,5\}$	2
5	$\{0,1,4\}$，$\{0,2,3\}$	2
6	$\{0,1,5\}$，$\{0,2,4\}$	2
7	$\{0,2,5\}$，$\{0,3,4\}$	2
8	$\{0,3,5\}$	1
9	$\{0,4,5\}$	1

上の表から，A 君，B 君の得点が等しくなる確率は

$$\left(\frac{1}{20}\right)^2\times 5+\left(\frac{2}{20}\right)^2\times 6+\left(\frac{3}{20}\right)^2=\frac{5+24+9}{400}=\frac{19}{200}$$

A 君，B 君それぞれの勝つ確率は等しく　$\frac{1}{2}\left(1-\frac{19}{200}\right)=\frac{181}{400}$

A 君が $\frac{7}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$

A 君が $\frac{8}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{2}{20}\times\frac{1+1}{20}=\frac{4}{400}$

A 君が $\frac{10}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{2}{20}\times\frac{1+1+2+3}{20}=\frac{14}{400}$

A 君が $\frac{11}{3}$ 点で勝つ確率は　$\frac{1}{20}\times\frac{1+1+2+3+2}{20}=\frac{9}{400}$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{\frac{1}{400}+\frac{4}{400}+\frac{14}{400}+\frac{9}{400}}{\frac{181}{400}}=\mathbf{\frac{28}{181}}$ ■

3 (1) $a,\ b$, c が 1 以上 7 以下の互いに異なる整数に対し，2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots(*)$$

の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，2 次方程式 $(*)$ が有理数解をもつとき，D は平方数であることに注意して，次の場合分けを行う．

(i) $b=3$ のとき，$D=9-4ac$ より　$ac=2$　ゆえに次の 2 組

$$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

(ii) $b=4$ のとき，$D=16-4ac$ より　$ac=3$　ゆえに次の 2 組

$$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

(iii) $b=5$ のとき，$D=25-4ac$ より　$ac=4,\ 6$　ゆえに次の 6 組

$$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (4,\ 1),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

(iv) $b=6$ のとき，$D=36-4ac$ より　$ac=5,\ 8,$　ゆえに次の 4 組

$$(a,\ c)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$$

(v) $b=7$ のとき，$D=49-4ac$ より　$ac=6,\ 10,\ 12$　ゆえに次の 10 組

$$\begin{aligned}(a,\ c)=&(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1),\ (2,\ 5),\ (5,\ 2),\\ &(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)\end{aligned}$$

(i)〜(v) より，求める総数は　$2+2+6+4+10=\mathbf{24}$ (組)

(2) (1) で示した場合分けにより，$(b,\ \sqrt{D},\ ac)$ の組合せは次とおりである．

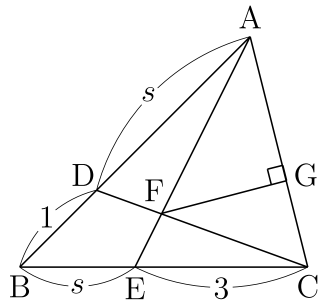
b	3	4	5	5	6	6	7	7	7
$\sqrt{D}$	1	2	3	1	4	2	5	3	1
ac	2	3	4	6	5	8	6	10	12
	○	○	○		○	○	○	○	

2 次方程式 $(*)$ の解の 1 つ $x=-\dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}$ に注目すると，$b+\sqrt{D}$ が $2a$ で割り切れるもの (上に示した○) は，整数解をもつから，残りの場合について整数解を持たない組合せを求める．

- $b=5,\ \sqrt{D}=1,\ ac=6$ のとき，$x=\dfrac{-5\pm1}{2a}$ より，$a=6,\ c=1$
- $b=7,\ \sqrt{D}=1,\ ac=12$ のとき，$x=\dfrac{-5\pm1}{2a}$ より，$a=6,\ c=2$

これと (1) の結果により，求める $(a,\ b,\ c)$ の総数は　$24-2=\mathbf{22}$ (組) ■

4 (1) △ABE と直線 CD について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1$$

したがって　$\mathrm{AF}:\mathrm{FE}=s(s+3):3$

点 E は線分 BC を $s:3$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}}&=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}\\&=\frac{s}{s^2+3s+3}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\frac{3s}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{s^2}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}},\quad \boldsymbol{\beta=\dfrac{s^2}{s^2+3s+3}}$

(2) $\triangle\mathrm{AFC}:\triangle\mathrm{AEC}=\mathrm{AF}:\mathrm{AE}$，$\triangle\mathrm{AEC}:\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{EC}:\mathrm{BC}$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AFC}&=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}}\triangle\mathrm{AEC}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\triangle\mathrm{AEC},\\\triangle\mathrm{AEC}&=\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}\end{aligned}$$

上の2式から　$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\dfrac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}\triangle\mathrm{ABC}$

$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}$ であるから

$$\mathrm{FG}=\frac{2\triangle\mathrm{AFC}}{\mathrm{AC}}=\frac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$$

$s>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係を用いて

$$\frac{s^2+3s+3}{s}=s+\frac{3}{s}+3\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}+3=2\sqrt{3}+3$$

したがって　$\mathrm{FG}=\dfrac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{3}+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$

FG が最大となる，すなわち，上式において等号が成立するとき

$$s=\frac{3}{s} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s=\sqrt{3}}$$

■

5 (1) $$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の両辺の共役な複素数は　$z\overline{z}+\overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0 \quad \cdots(\overline{*})$

$(*)-(\overline{*})$ より　$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$

(2) γ は実数であるから，$\gamma=\overline{\gamma}$ を (1) の結果に代入すると

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0 \quad ゆえに \quad (\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$$

したがって，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である．これを t とおくと

$$(**) \quad (\alpha-\overline{\beta})z=t \qquad (t \text{ は実数})$$

(i) $\alpha-\overline{\beta}=0$，すなわち，$\alpha=\overline{\beta}$ のとき，$(*)$ から

$$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \quad ゆえに \quad |z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

$\gamma<0$ であるから，z は点 $-\beta$ を中心と半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の無数の点である．したがって，これは条件に反する．

(ii) $\alpha-\overline{\beta}\neq0$，すなわち，$\alpha\neq\overline{\beta}$ のとき，$(**)$ より　$z=\dfrac{t}{\alpha-\overline{\beta}} \quad \cdots①$

これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}+\frac{\alpha t}{\alpha-\overline{\beta}}+\frac{\beta t}{\overline{\alpha}-\beta}+\gamma&=0\\ t^2+\alpha(\overline{\alpha}-\beta)+\beta(\alpha-\overline{\beta})t+|\alpha-\overline{\beta}|^2\gamma&=0\\ t^2+(|\alpha|^2-|\beta|^2)t+|\alpha-\overline{\beta}|^2\gamma&=0\end{aligned}$$

$|\alpha|=|\beta|\neq0$ および $\gamma<0$ であるから，上式を満たす実数 t は

$$t=\pm|\alpha-\overline{\beta}|\sqrt{-\gamma}$$

の 2 個ある．これを ① に代入して

$$z=\pm\frac{|\alpha-\overline{\beta}|\sqrt{-\gamma}}{\alpha-\overline{\beta}}=\pm\frac{\sqrt{-\gamma}}{|\alpha-\overline{\beta}|}(\overline{\alpha}-\beta)$$

このとき，$(*)$ を満たす z はちょうど 2 個ある．

(i)，(ii) より，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{\alpha\neq\overline{\beta}}$

解説 $z=x+yi$，$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とおいて，これらを $(*)$ に代入すると

$$x^2+y^2+(a+bi)(x+yi)+(c+di)(x-yi)+\gamma=0$$
$$x^2+y^2+(a+c)x+(-b+d)y+\frac{\gamma+\overline{\gamma}}{2}$$
$$+\left\{(b+d)x+(a-c)y+\frac{\gamma-\overline{\gamma}}{2i}\right\}i=0$$

したがって，$z=x+yi$ は，次の方程式の解である．

$$\begin{cases} x^2+y^2+(a+c)x+(-b+d)y+\dfrac{\gamma+\overline{\gamma}}{2}=0 \\ (b+d)x+(a-c)y+\dfrac{\gamma-\overline{\gamma}}{2i}=0 \end{cases}$$

とくに γ が負の実数であるとき，上の第1式は原点を内部にもつ円を表す．

$$\left(x+\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(y+\frac{-b+d}{2}\right)^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{-b+d}{2}\right)^2-\gamma$$

第2式は原点を通る直線を表す．したがって，z はこの円と直線の共有点であるから，$(*)$ を満たす z がちょうど2個ある．

ただし，$b+d=a-c=0$ のとき，第2式は複素数平面上のすべての点であるから，z は第1式の円を表し，無数の z が存在する．

$$a=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2},\quad b=\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i},\quad c=\frac{\beta+\overline{\beta}}{2},\quad d=\frac{\beta-\overline{\beta}}{2i}$$

であるから，このとき

$$\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}+\frac{\beta-\overline{\beta}}{2i}=0,\quad \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}-\frac{\beta+\overline{\beta}}{2}=0$$

ゆえに　$\alpha-\overline{\beta}-\overline{\alpha-\overline{\beta}}=0,\quad \alpha-\overline{\beta}+\overline{\alpha-\overline{\beta}}=0$　すなわち　$\alpha=\overline{\beta}$

よって，求める必要十分条件は　　$\alpha\neq\overline{\beta}$ ■

$\boxed{6}$ (1)
$$(e^{ax}\sin bx)' = e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$
$$(e^{ax}\cos bx)' = e^{ax}(-b\sin bx + a\cos bx)$$

上の 2 式から，$\{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)\}' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$ より

$$\begin{aligned} I(a,\ b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\Big[\ e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{b}{a^2+b^2}e^{\frac{a\pi}{2}}\sin\frac{b\pi}{2} + \frac{a}{a^2+b^2}\left(e^{\frac{a\pi}{2}}\cos\frac{b\pi}{2} - 1\right)} \end{aligned}$$

(2) $\sin bx\sin cx = \dfrac{1}{2}\{\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\}$ より

$$\begin{aligned} J(a,\ b,\ c) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\{I(a,\ b-c) - I(a,\ b+c)\}} \end{aligned}$$

(3) $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ であるから

$$2\cos 4tx\sin tx = \sin 5tx - \sin 3tx$$
$$2\cos 3tx\sin 2tx = \sin 5tx - \sin tx$$

上の 2 式の辺辺をそれぞれ掛けさらに 2 倍すると

$$\begin{aligned} &8\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx \\ &\quad= 2(\sin 5tx - \sin 3tx)(\sin 5tx - \sin tx) \\ &\quad= 2\sin^2 5tx - 2\sin 5tx\sin tx \\ &\qquad\qquad - 2\sin 5tx\sin 3tx + 2\sin 3tx\sin tx \\ &\quad= 1 - \cos 10tx - (\cos 4tx - \cos 6tx) \\ &\qquad\qquad - (\cos 2tx - \cos 8tx) + (\cos 2tx - \cos 4tx) \\ &\quad= 1 - 2\cos 4tx + \cos 6tx + \cos 8tx - \cos 10tx \end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$$

$$= \Big[\, e^x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2I(1,\ 4t) + I(1,\ 6t) + I(1,\ 8t) - I(1,\ 10t)$$

(1) の結果より，$\displaystyle\lim_{b\to\infty} I(1,\ b) = 0$ に注意すると

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx = \Big[\, e^t \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}$$

■

2.4　2018 年 (150 分)

1 xy 平面における 2 つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b$，$D: y=-x^2$ を考える．

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ．

(2) 実数 a，b が (1) の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ．

2 n を 2 以上，a を 1 以上の整数とする．箱の中に，1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ，合計 n 枚入っている．この箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行を a 回繰り返す．ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする．

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ．

(2) $p(2)$ を求めよ．

(3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ．

3 整数 a，b は等式

$$3^a-2^b=1 \quad \cdots ①$$

を満たしているとする．

(1) $a,\ b$ はともに正となることを示せ．

(2) $b>1$ ならば，a は偶数であることを示せ．

(3) ① を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ．

4 三角形 ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とし，$h=\dfrac{r}{R}$ とする．また，$\angle \mathrm{A}=2\alpha$，$\angle \mathrm{B}=2\beta$，$\angle \mathrm{C}=2\gamma$ とおく．

(1) $h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ．

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leqq \sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

(3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

5 α を複素数とする．複素数 z の方程式

$$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \quad \cdots ①$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位である．

(1) 方程式 ① が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ．

(2) 方程式 ① が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする．原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ．

6 xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x + y^2 \leqq 2 \\ x + y \geqq 0 \\ x - y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える．図形 S を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする．

(1) S を xy 平面に図示せよ．

(2) V を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) C と D の方程式から y を消去して整理すると　$2x^2-2ax+a^2+b=0$

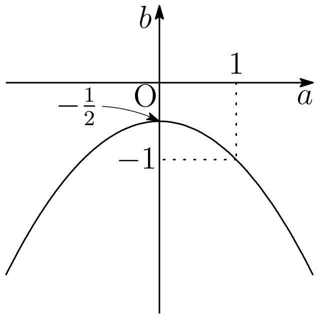
2 交点の x 座標は　$x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$　$\cdots$①

2 交点の x 座標の差が 1 であるから

$$\frac{a+\sqrt{-a^2-2b}}{2}-\frac{a-\sqrt{-a^2-2b}}{2}=1$$

ゆえに　$\sqrt{-a^2-2b}=1$　$\cdots$②

よって　$\boldsymbol{b=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}}$　(右図)



(2) 2 交点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$ とすると，①，② より

$$\alpha=\frac{a-1}{2},\quad \beta=\frac{a+1}{2}\quad\cdots(*)$$

2 交点は D 上の点であるから，$\mathrm{A}(\alpha,-\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,-\beta^2)$ とする．

2 点 A，B を通る直線 l の方程式は　$y-\alpha^2=\dfrac{-\beta^2+\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$

ゆえに　$y=-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$　$(*)$ により　$l: y=-ax+\dfrac{a^2-1}{4}$

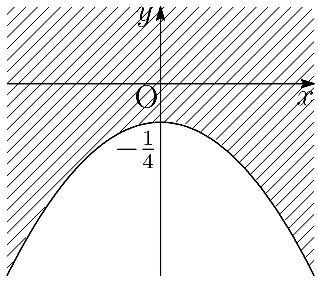
直線 l の方程式を a について整理すると

$$a^2-4xa-4y-1=0\quad\cdots(**)$$

直線 l が通過する点 $(x,\ y)$ は，a に関する 2 次方程式 $(**)$ が実数解をもつときであるから，$(**)$ の係数について

$$D/4=(-2x)^2-1\cdot(-4y-1)\geqq 0$$

したがって　$y\geqq -x^2-\dfrac{1}{4}$



よって，求める領域は，放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ の上側で，境界線を含む (上図)．

補足 C，D の交点を通る放物線・直線の方程式は (k は定数)

$$(x-a)^2-y+b+k(x^2+y)=0$$

$k\neq-1$ のとき放物線，$k=-1$ のとき直線となるから，$k=-1$ より

$$(x-a)^2-y+b-(x^2+y)=0\quad すなわち\quad y=-ax+\frac{a^2}{2}+\frac{b}{2}$$

これに (1) の結果を代入すると，直線 l の方程式を得る．■

$\boxed{2}$ (1) $p(1)$ は，1 回で札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目に n の番号札を取り出す確率であるから

$$p(1) = \boldsymbol{\frac{1}{n}}$$

$p(n)$ は，n 回目で初めて札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目から $n-1$ 回目まで 1 の番号札を取り出す確率であるから (n 回目は任意の札)

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{n^{n-1}}}$$

(2) 1 回目が k の札を取り出すとすると ($k = 1, 2, \cdots, n-1$)，2 回目が $n-k$ 以上の札取り出す $k+1$ 通り．したがって

$$\begin{aligned} p(2) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2n^2}(n-1)(n+2)} \end{aligned}$$

(3) 2 回目の試行の直後，取り出した札の和が k となるのは ($k = 2, 3, \cdots, n-1$)

$$(1\text{ 回目},\ 2\text{ 回目}) = (j,\ k-j) \quad (j = 1, 2, \cdots, k-1)$$

の $k-1$ 通りで，3 回目の札が $n-k$ 以上である $k+1$ 通り．したがって

$$\begin{aligned} p(3) &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)(k+1) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1) \\ &= \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - (n-1)\right\} \\ &= \frac{1}{6n^3}(n-1)\{n(2n-1)-6\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6n^3}(n-1)(n-2)(2n+3)} \end{aligned}$$

■

3 (1) $$3^a - 2^b = 1 \quad \cdots ①$$

① より　$3^a = 2^b + 1 > 1$　ゆえに　$a \geqq 1$

さらに　$2^b = 3^a - 1 \geqq 3^1 - 1 = 2$　ゆえに　$b \geqq 1$

よって，a，b はともに正である．

(2) 法 4 について　$3 \equiv -1,\ 4 \equiv 0 \pmod 4$

$b > 1$ のとき ($b \geqq 2$)　$3^a - 4 \cdot 2^{b-2} = 1$　ゆえに　$(-1)^a \equiv 1 \pmod 4$

よって，$b > 1$ ならば，a は偶数である．

(3) $b = 1$ のとき，① より　$3^a - 2 = 1$　ゆえに　$a = 1$

$b > 1$ のとき，(2) の結果から，$a = 2n \cdots ②$ とおくと (n は自然数)

$$3^{2n} - 2^b = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (3^n + 1)(3^n - 1) = 2^b$$

$3^n + 1 = 2^k$，$3^n - 1 = 2^l$ とおくと (k，l は自然数)　$b = k + l \cdots ③$

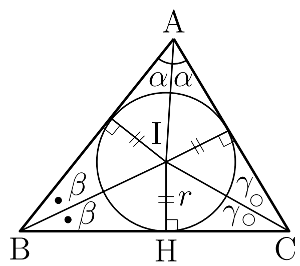
$$2^k - 2^l = (3^n + 1) - (3^n - 1) = 2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^l(2^{k-l} - 1) = 2$$

$2^{k-l} - 1$ は奇数であるから　$2^l = 2,\ 2^{k-l} - 1 = 1$

ゆえに　$k = 2,\ l = 1,\ n = 1$　②，③より　$a = 2,\ b = 3$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 1),\ (2,\ 3)}$　■

4 (1) △ABC の内心 I から辺 BC に垂線 IH を下ろすと



$$\mathrm{BH} = \frac{r}{\tan\beta}, \quad \mathrm{CH} = \frac{r}{\tan\gamma}$$

$a = \mathrm{BC} = \mathrm{BH} + \mathrm{CH}$ より

$$a = r\left(\frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma}\right) = r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$
$$= \frac{r(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{r\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

このとき，$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin(\beta + \gamma) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

したがって　$a = \dfrac{r\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} \quad \cdots ①$

また，正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin 2\alpha} = 2R$

したがって　$a = 2R\sin 2\alpha = 4R\sin\alpha\cos\alpha \quad \cdots ②$

①，② より　$\dfrac{r\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 4R\sin\alpha\cos\alpha$　よって　$h = \dfrac{r}{R} = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

(2) $2\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ とすると，$\gamma=\dfrac{\pi}{4}$，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ であるから，(1) の結果から

$$\begin{aligned}h&=4\sin\alpha\sin\beta\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta\\&=\sqrt{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\\&=\sqrt{2}\cos(\alpha-\beta)-1\leqq\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

等号が成立するとき　$\cos(\alpha-\beta)=1$　ゆえに　$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{8}$

よって，$\triangle$ABC は**直角二等辺三角形.**

(3) (2) と同様にして

$$\begin{aligned}h&=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=2\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\sin\gamma\\&=2\{\cos(\alpha-\beta)-\sin\gamma\}\sin\gamma\\&=-2\left\{\sin\gamma-\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right\}^2+\frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta)\leqq\frac{1}{2}\end{aligned}$$

等号が成り立つとき

$$\sin\gamma-\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)=0,\quad \cos(\alpha-\beta)=1$$

α，β，γ は，鋭角であるから，上式より　$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$

よって，$\triangle$ABC は**直角二等辺三角形.**

別解 γ を固定し，$h=f(\alpha)$ とすると，$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\gamma-\alpha$ より

$$\frac{d}{d\alpha}\sin\beta=\cos\beta\frac{d\beta}{d\alpha}=-\cos\beta$$

であることに注意して

$$f'(\alpha)=4\{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha(-\cos\beta)\}\sin\gamma=4\sin(\beta-\alpha)\sin\gamma$$

α	(0)	$\cdots$	β	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2}-\gamma)$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって，$\alpha=\beta$，$\gamma=\dfrac{\pi}{2}-2\beta$ のとき極大となる

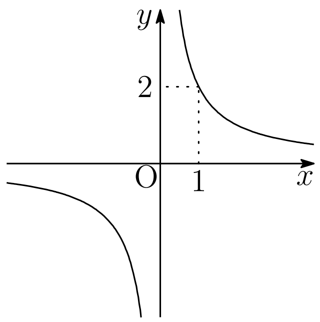
$$\begin{aligned}f(\beta)&=4\sin^2\beta\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)=2(1-\cos2\beta)\cos2\beta\\&=-2\left(\cos2\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}\end{aligned}$$

上式において，等号が成立するとき　$\cos2\beta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\beta=\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$　■

5 (1) $$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \quad \cdots ①$$

方程式①がもつ実数解を k とすると，$k \neq 0$ に注意して



$$k^2 - \alpha k + 2i = 0 \quad ゆえに \quad \alpha = k + \frac{2i}{k}$$

$\alpha = x + yi$ とおくと ($x,\ y$ は実数)

$$x = k,\ \ y = \frac{2}{k} \quad ゆえに \quad xy = 2$$

よって，α の描く図形は，右の図の双曲線である．

(2) ①の解が絶対値1の複素数であるとき，

$$\alpha = z + \frac{2i}{z} = z + 2i\overline{z}$$

その解を $z = s + ti$ とおくと $(s^2 + t^2 = 1)$

$$\alpha = (s + ti) + 2i(s - ti) = (s + 2t) + (2s + t)i$$

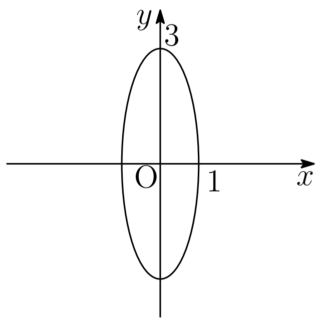
α を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点が β であるから

$$\beta = \alpha\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(s + 2t) + (2s + t)i\}(1 + i)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(-s + t) + 3(s + t)i\}$$

$\beta = x + yi$ とおくと　$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-s + t),\quad y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}(s + t)$

したがって　$s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-x + \dfrac{y}{3}\right),\ \ t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \dfrac{y}{3}\right)$

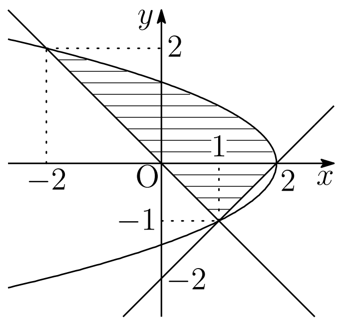
これらを $s^2 + t^2 = 1$ に代入して整理すると



$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

よって，β の描く図形は，右の図の楕円である．

6 (1) xy 平面内の図形



$$S : \begin{cases} x + y^2 \leqq 2 \\ x + y \geqq 0 \\ x - y \leqq 2 \end{cases}$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．

(2) 直線 $x + y = 0$ に平行な単位ベクトルと垂直な単位ベクトル，それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，この向きに X 軸，Y 軸を定め，次の直交変換を行う．

$$\frac{X}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

すなわち $\quad \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} = x, \quad \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}} = y$

ゆえに $\quad X = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$

このとき，次の対応をなす．

$(x,\ y) = (-2,\ 2)$ は $(X,\ Y) = (-2\sqrt{2},\ 0)$，

$(x,\ y) = (2,\ 0)$ は $(X,\ Y) = (\sqrt{2},\ \sqrt{2})$．

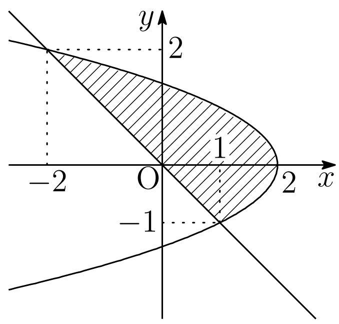
放物線 $x = -y^2 + 2\ (0 \leqq y \leqq 2)$ は，この直交変換により

$$X = \frac{-y^2 - y + 2}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{-y^2 + y + 2}{\sqrt{2}}$$

y	$2 \longrightarrow 0$
X	$-2\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2}$

求める回転体の体積 V は，$\dfrac{dX}{dy} = \dfrac{-2y-1}{\sqrt{2}}$ により

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\,dX = \pi \int_2^0 \left(\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{-2y-1}{\sqrt{2}}\,dy \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^2 (-y^2+y+2)^2(2y+1)\,dy \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^2 (2y^5 - 3y^4 - 8y^3 + 5y^2 + 12y + 4)\,dy \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{y^6}{3} - \frac{3y^5}{5} - 2y^4 + \frac{5y^3}{3} + 6y^2 + 4y \right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi} \end{aligned}$$



補足 xy 平面おける領域

$$T: \begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \end{cases}$$

の面積を求める．前ページの直交変換によりこのとき，次の対応をなす．

$(x,\ y)=(-2,\ 2)$ は　$(X,\ Y)=(-2\sqrt{2},\ 0)$,
$(x,\ y)=(1,-1)$　は　$(X,\ Y)=(\sqrt{2},\ 0)$.

放物線 $x=-y^2+2\ (-1 \leqq y \leqq 2)$ は，この直交変換により

$$X=\frac{-y^2-y+2}{\sqrt{2}},\quad Y=\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}}$$

y	$2 \longrightarrow -1$
X	$-2\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2}$

T を直線 $y=-x$ のまわりに一回転して得られる立体の体積を U とすると

$$\begin{aligned} U &= \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\,dX = \pi\int_{2}^{-1}\left(\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{-2y-1}{\sqrt{2}}\,dy \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{2}(y+1)^2(2-y)^2(2y+1)\,dy \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}}\int_{-1}^{2}(y+1)^2(2-y)^2\{5(y+1)-(2-y)\}\,dy \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}}\int_{-1}^{2}\{5(y+1)^3(2-y)^2-(y+1)^2(2-y)^3\}\,dy \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}}\left(5\cdot\frac{3!2!}{6!}\cdot 3^6-\frac{2!3!}{6!}\cdot 3^6\right)=\frac{81\sqrt{2}}{20}\pi \end{aligned}$$

公式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{m}!\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\mathbf{1})!}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}$ を利用 [1].

類題 九州大学工学部 2018 年一般後期工学部 5 番 [2]

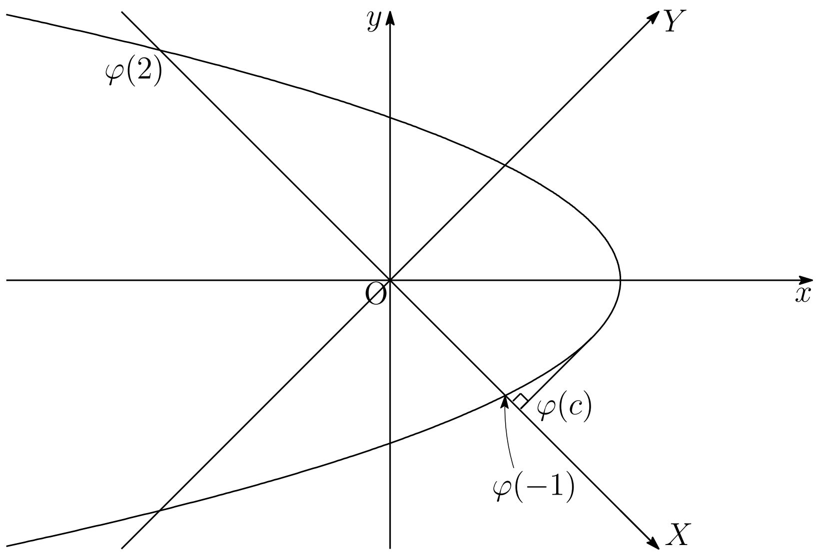
注意 X は y の関数であるから $X=\varphi(y)$ とおくと，$\varphi(y)=\dfrac{-y^2-y+2}{\sqrt{2}}$.

$$V=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}Y^2\,dX=\pi\int_{\varphi(2)}^{\varphi(0)}Y^2\,dX,$$
$$U=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}Y^2\,dX=\pi\int_{\varphi(2)}^{\varphi(-1)}Y^2\,dX$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2018_kouki.pdf $\boxed{5}$

なお，面積 U は，下の図から分かるように，次の計算過程を省略している．

$$U = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(c)} Y^2\,dX - \pi \int_{\varphi(-1)}^{\varphi(c)} Y^2\,dX = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(-1)} Y^2\,dX$$



上の図の c の値は，$\varphi(y)$ を最大にする y の値であるから　$c = -\dfrac{1}{2}$ ■

2.5　2019 年 (150 分)

1 xy 平面における曲線 $y = \sin x$ の 2 つの接線が直交するとき，その交点の y 座標の値をすべて求めよ．

2 a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする．次の不等式を考える．

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1) $n = 6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ．

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ．

3 a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める．

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + {x_n}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $a > 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ．

(2) $-1 < a < 0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $-1 < a < 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ．

4 実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す．

(1) $[2x^2+x+3]$，$[x^5-1]$，$[[2x^2+x+3][x^5-1]]$ をそれぞれ求めよ．

(2) 整式 $A(x)$，$B(x)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数 θ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$[(x\sin\theta + \cos\theta)^2] = x\sin 2\theta + \cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数 a，b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

$$[(ax+b)^4] = -1$$

5 (1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1} (e^x - e^t + 1)f(t)\,dt$$

6 10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す．初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする．この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする．2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $p(n+1,\ 2)$ を $p(n,\ 2)$ と $p(n,\ 1)$ を用いて表せ．

(2) $p(n,\ 1)$ を求めよ．

(3) $p(n,\ 2)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $y=\sin x$ より　$y'=\cos x$

曲線 $y=\sin x$ 上の 2 点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \sin\beta)$ とすると，A，B における接線の傾きは，それぞれ $\cos\alpha$，$\cos\beta$ であるから，これらの接線が直交するとき

$$\cos\alpha\cos\beta=-1$$

これから，一般性を失うことなく，$\cos\alpha=1$，$\cos\beta=-1$ とおくと

$$\alpha=2k\pi,\ \beta=(2l+1)\pi \qquad (k,\ l \text{ は整数})$$

曲線 $y=\sin x$ 上の点 A における接線の方程式は

$$y=1(x-2k\pi) \quad \text{すなわち} \quad y=x-2k\pi \quad \cdots①$$

曲線 $y=\sin x$ 上の点 B における接線の方程式は

$$y=-1\{x-(2l+1)\pi\} \quad \text{すなわち} \quad y=-x+(2l+1)\pi \quad \cdots②$$

①，② より，x を消去すると

$$2y=(2l-2k+1)\pi \quad \text{ゆえに} \quad y=\left(l-k+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$n=l-k$ とおくと，n は整数であるから，求める交点の y 座標は

$$\boldsymbol{y=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \qquad \textbf{(}\boldsymbol{n}\ \textbf{は整数)}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $n=6$ より　$\log_a(x-6) > \dfrac{1}{2}\log_a(12-x)$　$\cdots(*)$

真数は正であるから

$$x-6>0,\ 12-x>0 \quad \text{すなわち} \quad 6<x<12 \quad \cdots ①$$

(i) $a>1$ のとき，$(*)$ より　$(x-6)^2 > 12-x$

ゆえに　$(x-3)(x-8)>0$　すなわち　$x<3,\ 8<x$　$\cdots ②$

よって，①，② を同時に満たす整数 x は　**9，10，11**

(ii) $0<a<1$ のとき，$(*)$ より　$(x-6)^2 < 12-x$

ゆえに　$(x-3)(x-8)<0$　すなわち　$3<x<8$　$\cdots ③$

よって，①，③ を同時に満たす整数 x は　**7**

(2)　$\log_a(x-n) > \dfrac{1}{2}\log_a(2n-x)$　$\cdots(**)$

真数は正であるから

$$x-n>0,\ 2n-x>0 \quad \text{すなわち} \quad n<x<2n \quad \cdots ④$$

(i) $a>1$ のとき，$(**)$ より　$(x-n)^2 > 2n-x$

ゆえに　$x^2+(1-2n)x+n^2-2n>0$

$f(x)=x^2+(1-2n)x+n^2-2n$ とおくと

$$f(x)=\left(x-n+\frac{1}{2}\right)^2-n-\frac{1}{4}$$
$$f(n)=-n<0,\quad f(2n)=n^2>0 \qquad (n \text{ は正の整数})$$

これから，④ と 2 次不等式 $f(x)>0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(2n-1)=n(n-2)>0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(ii) $0<a<1$ のとき，$(**)$ より　$(x-n)^2 < 2n-x$

ゆえに　$x^2+(1-2n)x+n^2-2n<0$

同様に，④ と 2 次不等式 $f(x)<0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(n+1)=-n+2<0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(i)，(ii) より，求める n についての必要十分条件は　$\boldsymbol{n>2}$　■

3 (1) 　(∗) 　$x_{n+1} = x_n + {x_n}^2$ 　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$x_1 = a > 0$．$x_n > 0$ のとき，漸化式より $x_{n+1} > 0$

したがって，すべての自然数 n について　$x_n > 0$

(∗∗)　$x_{n+1} - x_n = {x_n}^2 > 0$ より，$\{x_n\}$ は単調増加列であるから

$$x_{n+1} = (1 + x_n)x_n \geqq (1 + a)x_n \quad \text{したがって} \quad x_n \geqq a(1 + a)^{n-1}$$

$a > 0$，$1 + a > 1$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a(1 + a)^n = \infty$　　よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty}$

(2) $-1 < a < 0$ より，$-1 < x_1 < 0$.

$-1 < x_n < 0$ と仮定すると，$0 < 1 + x_n < 1$ および (∗) より

$$x_{n+1} = x_n(1 + x_n) \quad \text{ゆえに} \quad -1 < x_{n+1} < 0$$

よって，すべての自然数 n に対して　$-1 < x_n < 0$

(3) (∗) および (2) の結果から

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n(1 + x_n)} - \frac{1}{x_n} = -\frac{1}{1 + x_n} < -1$$

$n > 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) < -\sum_{k=1}^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x_n} < \frac{1}{a} - n + 1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a} - n + 1\right) = -\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = -\infty$

よって　　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$ ■

4 (1) $2x^2 + x + 3 = 2(x^2 + 1) + x + 1$ より　$[2x^2 + x + 3] = \boldsymbol{x + 1}$

$x^5 - 1 = (x^2 + 1)(x^3 - x) + x - 1$ より　$[x^5 - 1] = \boldsymbol{x - 1}$

したがって　$[2x^2 + x + 3][x^5 - 1] = (x + 1)(x - 1) = (x^2 + 1) - 2$

よって　　$[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]] = \boldsymbol{-2}$

(2) $A(x) = (x^2 + 1)P(x) + [A(x)]$，$B(x) = (x^2 + 1)Q(x) + [B(x)]$ とすると

$$\begin{aligned} A(x)B(x) = (x^2 + 1)\{(x^2 + 1)P(x)Q(x) + [A(x)]Q(x) + [B(x)]P(x)\} \\ + [A(x)][B(x)] \end{aligned}$$

よって　　$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$

(3)

$$\begin{aligned} (x\sin\theta + \cos\theta)^2 &= x^2\sin^2\theta + 2x\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\ &= (x^2 + 1)\sin^2\theta + x\sin 2\theta + \cos 2\theta \end{aligned}$$

よって　　$[(x\sin\theta + \cos\theta)^2] = x\sin 2\theta + \cos 2\theta$

(4) (2) の結果において，$B(x) = A(x)$ とすると　$[A(x)^2] = [[A(x)]^2]$

さらに　$[A(x)^2 A(x)^2] = [[A(x)^2][A(x)]^2]$　ゆえに　$[A(x)^4] = [[A(x)]^4]$

$A(x) = x\sin\theta + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$，$ax+b = rA(x)$ $(r>0)$ とおくと，上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}[(ax+b)^4] &= [\{rA(x)\}^4] = r^4[[A(x)]^4] = r^4[([x\sin\theta + \cos\theta]^2)^2] \\ &= r^4[(x\sin 2\theta + \cos 2\theta)^2] = r^4(x\sin 4\theta + \cos 4\theta) = -1\end{aligned}$$

したがって　$r^4 = 1$，$4\theta = (2k-1)\pi$

ゆえに　$r = 1$，$\theta = \dfrac{2k-1}{4}\pi$ $(k = 1, 2, 3, 4)$，$a = \sin\theta$，$b = \cos\theta$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$　**(複号任意)** ■

5 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$　$\cdots$①

$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$ について，$x = -t$ とすると　$\dfrac{dx}{dt} = -1$

x	$-1 \longrightarrow 0$
t	$1 \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx &= \int_{1}^{0} \frac{\sin^2(-\pi t)}{1+e^{-t}}(-dt) = \int_{0}^{1} \frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^{-t}}\,dt \\ &= \int_{0}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^{-x}}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx &= \int_{0}^{1} \frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx \\ &= \int_{0}^{1} \frac{(e^x+1)\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx = \int_{0}^{1} \sin^2(\pi x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (1-\cos 2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\, x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x \,\right]_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) 与えられた条件式から

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + (2+e^x)\int_{-1}^{1} f(t)\,dt - \int_{-1}^{1}(1+e^t)f(t)\,dt$$

$A = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$，$B = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1+e^t)f(t)\,dt$ とおくと

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + (2+e^x)A - B \qquad \cdots(*)$$

$$f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} + \frac{2+e^x}{1+e^x}A - \frac{1}{1+e^x}B \qquad \cdots(**)$$

ここで

$$\int_{-1}^{1}\frac{2+e^x}{1+e^x}\,dx = \int_{-1}^{1}\left(2 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \Big[\,2x - \log(1+e^x)\,\Big]_{-1}^{1} = 3$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \Big[\,x - \log(1+e^x)\,\Big]_{-1}^{1} = 1$$

上式および (1) の結果を利用すると，$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}
B &= \int_{-1}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx + A\int_{-1}^{1}(2+e^x)\,dx - B\int_{-1}^{1}dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\,x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\,\Big]_{-1}^{1} + A\Big[\,2x + e^x\,\Big]_{-1}^{1} - 2B \\
&= 1 + (4 + e - e^{-1})A - 2B, \\
A &= \int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx + A\int_{-1}^{1}\frac{2+e^x}{1+e^x}\,dx - B\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}\,dx \\
&= \frac{1}{2} + 3A - B
\end{aligned}$$

整理すると　$(4+e-e^{-1})A - 3B + 1 = 0$，$2A - B + \dfrac{1}{2} = 0$

これを解いて　$A = \dfrac{e}{2(e^2-2e-1)}$，$B = \dfrac{e^2-1}{2(e^2-2e-1)}$

$(**)$ より

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} + A + \frac{A-B}{1+e^x} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} + \frac{1}{2(e^2-2e-1)}\left(e - \frac{e^2-e-1}{1+e^x}\right)}
\end{aligned}$$

■

6 (1) 試行を $n+1$ 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で 2 個であるのは，次の場合である．

(i) n 回目までに赤玉が全部で 2 個であり，$n+1$ 回目に袋の中にある赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている中から白玉を取り出す．

(ii) n 回目までに赤玉が全部で 1 個であり，$n+1$ 回目に袋の中にある赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている中から赤玉を取り出す．

よって
$$\begin{aligned} p(n+1,\ 2) &= p(n,\ 2)\times\frac{7}{10}+p(n,\ 1)\times\frac{4}{10} \\ &= \boldsymbol{\frac{7}{10}p(n,\ 2)+\frac{2}{5}p(n,\ 1)} \end{aligned}$$

(2) 赤玉 1 個を k 回目に取り出す確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}=\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^k$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} p(n,\ 1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^k=\left(\frac{3}{5}\right)^n\times\frac{5}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\right)^n\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}=\boldsymbol{5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果を (1) の結果に代入すると

$$p(n+1,\ 2)=\frac{7}{10}p(n,\ 2)+\frac{2}{5}\times 5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$p(n+1,2)-\frac{7}{10}p(n,\ 2)=2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$\left(\frac{10}{7}\right)^{n+1}p(n+1,\ 2)-\left(\frac{10}{7}\right)^n p(n,\ 2)=\frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

ここで，$n\geqq 2$ について，$q_n=\left(\frac{10}{7}\right)^n p(n,\ 2)$ とおくと

$$\begin{aligned} q_{n+1}-q_n &= \frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} \\ q_2 &= \left(\frac{10}{7}\right)^2 p(2,\ 2)=\frac{100}{49}\times\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{20}{49} \end{aligned}$$

$n > 2$ のとき

$$\sum_{k=2}^{n-1}(q_{k+1} - q_k) = \frac{20}{7}\sum_{k=2}^{n-1}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^k - \left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$$

$$q_n - q_2 = \frac{20}{7}\left\{\frac{\left(\frac{6}{7}\right)^2 - \left(\frac{6}{7}\right)^n}{1 - \frac{6}{7}} - \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n}{1 - \frac{5}{7}}\right\}$$

上式は，$n = 2$ のときも成立するから，$n \geqq 2$ について

$$q_n - \frac{20}{49} = 20\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^2 - \left(\frac{6}{7}\right)^n\right\} - 10\left\{\left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

$$q_n = 10\left\{1 - 2\left(\frac{6}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

したがって

$$\left(\frac{10}{7}\right)^n p(n,\ 2) = 10\left\{1 - 2\left(\frac{6}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

$$p(n,\ 2) = \boldsymbol{10\left\{\left(\frac{7}{10}\right)^n - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は　$S = \dfrac{a - rl}{1 - r}$

例えば　$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{6}{7}\right)^k = \frac{\left(\frac{6}{7}\right)^2 - \frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}}{1 - \frac{6}{7}}$$ ■

2.6　2020年(150分)

$\boxed{1}$ $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点Bから辺ACに下ろした垂線と辺ACの交点をHとする．

(1) $\angle\mathrm{BAC}$ を θ と表すとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする．辺BHを $s:(1-s)$ に内分する点をPとするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ．

$\boxed{2}$ a を0でない実数とする．xy 平面において，円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$，直線 $L: -4x+3y+a=0$，直線 $M: 3x+4y-7a=0$ を考える．

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ．

(2) C と L が異なる2つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) 集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点Pは C と L の共有点 $\}\cup\{\mathrm{P}\mid$ 点Pは C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が3となるような a の値をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ n を正の整数，a，b を0以上の整数とする．

(1) $n\geqq 3$ のとき不等式 $2^n+n^2+8<3^n$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $2^n+n^2+8\geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ．

(3) 等式 $2^n+n^2+8=3^n+an+b$ を満たす $a,\ b,\ n$ の組 $(a,\ b,\ n)$ をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ 白玉3個，赤玉2個の合計5個の玉が入った箱と硬貨がある．箱から無作為に玉を1個取り出し，硬貨を投げて表が出たら，その玉を手元に残し，裏が出たら箱に戻す試行を行う．試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する．また，最初手元に玉はないものとする．

(1) 2回の試行の結果，手元に白玉が2個ある確率を求めよ．

(2) 3回の試行の結果，手元の玉が白玉1個，赤玉1個の計2個となる確率を求めよ．

(3) n を5以上の整数とし，ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ．

(4) (3)の確率 p_n が最大となる n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数 t に対して複素数 $z = \dfrac{-1}{t+i}$ を考える．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ．

(2) 絶対値 $\left|z - \dfrac{i}{2}\right|$ を求めよ．

(3) 実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 正の整数 $m,\ n$ に対して実数 $A(m,\ n)$ を次の定積分で定める．

$$A(m,\ n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x \, dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$A(m,\ n) = A(n,\ m), \quad A(m+2,\ n) + A(m,\ n+2) = A(m,\ n)$$

(2) $A(m,\ 1)$ を求めよ．

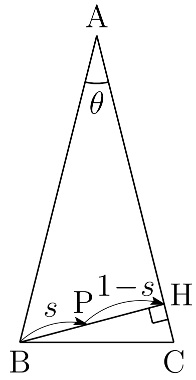
(3) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$A(m,\ n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2,\ n)$$

(4) m または n が奇数ならば，$A(m,\ n)$ は有理数であることを示せ．

解答例

1 (1) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1,\ \mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると



$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{1+1-\frac{1}{4}}{2}=\mathbf{\frac{7}{8}}$$

$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{8}}$$

(2) (1) の結果から，$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\cos\theta=\dfrac{7}{8}$，$\mathrm{HB}=\mathrm{AB}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

点 P は辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{HB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BP}}=-s\overrightarrow{\mathrm{HB}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=-\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AH}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{HB}}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{7}{8}$，$|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+(1-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|^2+s^2|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|^2\\&\qquad+\frac{1}{49}|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+(1-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|^2\\&=\frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2+\frac{15}{64}s^2+\frac{1}{49}\cdot\frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2\\&=\frac{15}{64}\{2(1-s)^2+s^2\}+\frac{25}{32}\\&=\frac{45}{64}\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{15}{16}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{2}{3}}$ のとき　最小値 $\mathbf{\dfrac{15}{16}}$ ■

2 (1) 円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ より　$(x-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$

円 C は，中心 $(a,\ 2)$，半径 $|a|$ の円である．

$L : -4x + 3y + a = 0$，$M : 3x + 4y - 7a = 0$ の交点は

これらの 2 式を連立して解くと　$(a,\ a)$

これが円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ 上にあるから

$$(a-a)^2 + (a-2)^2 = a^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 1}$$

(2) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $L : -4x + 3y + a = 0$ の距離を d_1 とすると

$$d_1 = \frac{|-4a + 6 + a|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|-3a + 6|}{5}$$

C と L が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_1 < |a|$ であるから

$$\frac{|-3a + 6|}{5} < |a| \quad \text{ゆえに} \quad (3a-6)^2 < (5a)^2$$

したがって　$(a+3)(4a-3) > 0$　これを解いて　$\boldsymbol{a < -3,\ \dfrac{3}{4} < a}$

(3) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ の距離を d_2 とすると

$$d_2 = \frac{|3a + 8 - 7a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-4a + 8|}{5}$$

C と M が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_2 < |a|$ であるから

$$\frac{|-4a + 8|}{5} < |a| \quad \text{ゆえに} \quad (4a-8)^2 < (5a)^2$$

したがって　$(a+8)(9a-8) > 0$　これを解いて　$a < -8,\ \dfrac{8}{9} < a$

(2) の結果および上式の不等号を等号にした，すなわち，$a = -3,\ \dfrac{3}{4}, -8,\ \dfrac{8}{9}$ のとき，それぞれ円と直線が 1 点を共有する (1 点で接する)．

(i) C と L が 2 点を共有し，C と M が 1 点を共有するのは　$a = -8,\ \dfrac{8}{9}$

(ii) C と L が 1 点を共有し，C と M が 2 点を共有する a は存在しない．

(iii) (1) の結果から，$a = 1$ のとき，C と L は 2 点を共有し，同時に C と M も 2 点を共有する．このとき，その 1 点は C，L，M によって共有されるので，$a = 1$ は条件を満たす．

(i)〜(iii) から，求める a の値は　$\boldsymbol{a = -8,\ \dfrac{8}{9},\ 1}$　■

3 (1) $$2^n+n^2+8<3^n \quad \cdots (*)$$

［1］$n=3$ のとき

$$(*)\text{ の左辺}=2^3+3^2+8=25,\quad (*)\text{ の右辺}=3^3=27$$

したがって，このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，すなわち，$2^k+k^2+8<3^k$ であると仮定すると

$$\begin{aligned}3^{k+1}-\{2^{k+1}+(k+1)^2+8\}&>3(2^k+k^2+8)-2^{k+1}-(k+1)^2-8\\&=2^k+2k^2-2k+15\\&=2^k+k^2+(k-1)^2+14>0\end{aligned}$$

ゆえに　$2^{k+1}+(k+1)^2+8<3^{k+1}$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，$n \geqq 3$ に対して，$(*)$ が成立する．

(2) (1) の結果に注意すると

$$2^n+n^2+8 \geqq 3^n \quad \cdots (**)$$

を満たす $n \geqq 3$ の整数は存在しないから，$n=1,\ 2$ について調べればよい．

- $n=1$ のとき，$2^1+1^2+8 \geqq 3^1$ より，$(**)$ は成立する．
- $n=2$ のとき，$2^2+2^2+8 \geqq 3^2$ より，$(**)$ は成立する．

よって　$\boldsymbol{n=1,\ 2}$

(3) (1) の結果から，$n \geqq 3$ のとき　$3^n-(2^n+n^2+8)>0$

また，与えられた等式から　$3^n-(2^n+n^2+8)=-an-b$

上の2式から　$-an-b>0$　ゆえに　$an+b<0 \quad \cdots$(A)

$a,\ b$ は0以上の整数であるから，$n \geqq 3$ のとき，(A) を満たす $(a,\ b,\ n)$ は存在しない．したがって，$n=1,\ 2$ について調べればよい．

(i) $n=1$ のとき　$2^1+1^2+8=3^1+a+b$　ゆえに　$a+b=8 \quad \cdots$①

(ii) $n=2$ のとき　$2^2+2^2+8=3^2+2a+b$　ゆえに　$2a+b=7 \quad \cdots$②

①，② より　$\boldsymbol{(a,\ b,\ n)=(j,\ 8-j,\ 1)\ \ (j=0,1,2,\cdots,8),}$
$\boldsymbol{(a,\ b,\ n)=(k,\ 7-2k,\ 2)\ \ (k=0,1,2,3)}$

■

$\boxed{4}$ (1) 箱から白玉を 2 回連続して取り出し，同時に硬貨は 2 回とも表が出る確率であるから

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{3}{40}}$$

(2) 白玉 1 個と赤玉 1 個が取り出される確率は，取り出される順番に関係なく

$$\frac{3\cdot2}{5\cdot4}$$

白玉 1 個，赤玉 1 個が取り出され (ともに硬貨は表)，硬貨が裏である確率であり，それらが起きる場合の総数 3! 通りあるから

$$\frac{3\cdot2}{5\cdot4}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot3!=\boldsymbol{\frac{9}{40}}$$

(3) $n-1$ 回目までに硬貨がちょうど 4 回表が出て，n 回目に表が出る確率であるから

$$p_n={}_{n-1}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^n=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6\cdot2^{n+2}}}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n}&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6\cdot2^{n+3}}\times\frac{6\cdot2^{n+2}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\\&=\frac{n}{2(n-4)}\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}-1=\dfrac{8-n}{2(n-4)}$

ゆえに　$p_5<p_6<p_7<p_8=p_9>p_{10}>\cdots$

よって，p_n が最大となる n は　$\boldsymbol{n=8,\ 9}$ ■

5 (1) $z=\dfrac{-1}{t+i}=-\dfrac{-(t-i)}{(t+i)(t-i)}=-\dfrac{t}{t^2+1}+\dfrac{1}{t^2+1}i$

よって　実部 $\boldsymbol{-\dfrac{t}{t^2+1}}$，虚部 $\boldsymbol{\dfrac{1}{t^2+1}}$

(2) $z-\dfrac{i}{2}=\dfrac{-1}{t+i}-\dfrac{i}{2}=\dfrac{-2-i(t+i)}{2(t+i)}=\dfrac{-1-ti}{2(t+i)}$

よって　$\left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{|-1-ti|}{2|t+i|}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{2\sqrt{t^2+1}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) (1) で求めた実部と虚部をそれぞれ x，y とおくと

$$x=-\frac{t}{1+t^2},\quad y=\frac{1}{1+t^2}$$

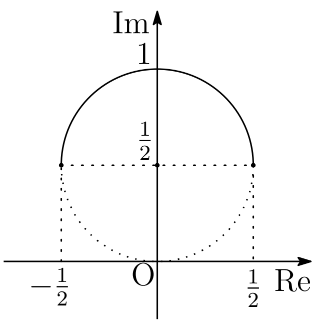
$-1\leqq t\leqq 1$ より，$t=\tan\theta$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\sin 2\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos 2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2}-1$$

したがって　$x=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$，$y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta$

$$\begin{aligned}x+yi&=-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)i=\frac{i}{2}-\frac{1}{2}(\sin 2\theta-i\cos 2\theta)\\&=\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}\\&=\frac{i}{2}+\frac{1}{2}(\cos\pi+i\sin\pi)\left\{\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\&=\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\left\{\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より，$0\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{2}\leqq\pi$ であるから，$z=x+yi$ の描く図形は右の図の実線部分である．



補足　$t=\tan\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}z&=\frac{-1}{\tan\theta+i}=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta+i\cos\theta}=\frac{-\cos\theta(\sin\theta-i\cos\theta)}{(\sin\theta+i\cos\theta)(\sin\theta-i\cos\theta)}\\&=-\sin\theta\cos\theta+i\cos^2\theta=-\frac{1}{2}\sin 2\theta+i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\end{aligned}$$

■

6 (1) $A(m,\ n)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$ において，$x=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=-1,\qquad \begin{array}{c||c} x & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} A(m,\ n) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(-d\theta) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta = A(n,\ m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(m+2,\ n)+A(m,\ n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx \\ &\qquad + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx = A(m,\ n) \end{aligned}$$

(2) $A(m,\ 1)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin x\,dx=\left[-\frac{\cos^{m+1}x}{m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{m+1}}$

(3) $A(m,\ n)$ の定義により

$$\begin{aligned} A(m,\ n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx \\ &= -\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(m+1)\cos^m x(-\sin x)\}\sin^{n+1}x\,dx \\ &= -\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos^{m+1}x\}'\sin^{n+1}x\,dx \\ &= -\frac{1}{m+1}\Big[\cos^{m+1}x\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\qquad + \frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}x\cdot(n+1)\sin^n x\cos x\,dx \\ &= \frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx = \frac{n+1}{m+1}A(m+2,\ n) \end{aligned}$$

(4) m または n が奇数であるから，(1) の $A(m,\ n) = A(n,\ m)$ により，n が奇数の場合について証明する．(2),(3) の結果から

$$\begin{aligned}
A(m,\ n) &= \frac{n-1}{m+1}A(m+2,\ n-2) \\
&= \frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}A(m+4,\ n-4) \\
&= \frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdots\frac{2}{m+n-2}A(m+n-1,1) \\
&= \frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdots\frac{2}{m+n-2}\cdot\frac{1}{m+n}
\end{aligned}$$

よって，$A(m,\ n)$ は有理数である．

発展 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ を利用する．

$$A(m,\ n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\sin^n x\,dx$$

において，$t = \sin^2 x$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx} = 2\sin x\cos x$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}
A(m,\ n) &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}(\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin x\cos x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}}t^{\frac{n-1}{2}}\,dt = \frac{\frac{m-1}{2}!\,\frac{n-1}{2}!}{2\cdot\frac{m+n}{2}!}
\end{aligned}$$

例えば　$A(2,\ 5) = \dfrac{\frac{1}{2}!2!}{2\cdot\frac{7}{2}!} = \dfrac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}!} = \dfrac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!} = \dfrac{1}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \dfrac{8}{105}$

$$A(2,\ 6) = \frac{\frac{1}{2}!\frac{5}{2}!}{2\cdot 4!} = \frac{\frac{1}{2}!\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!}{2\cdot 4!} = \frac{5}{64}\left(\frac{1}{2}!\right)^2$$

これに $\dfrac{1}{2}! = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を代入すると[3]　　$A(2,\ 6) = \dfrac{5}{256}\pi$　■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf (p.8 を参照)

第 3 章　東京大学

出題分野 (2011-2020) 150 分

◀	東京大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	数と式										
I	2 次関数							5			
	図形と計量										
	データの分析										
	式と証明										1
	複素数と方程式										
II	図形と方程式	4				1					
	三角関数				1			1			6
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法									2	
	式と曲線										
	複素数平面						4	3	5	6	
	関数										
III	極限				4						
	微分法とその応用	1	1	2	6		1		1·4	5	
	積分法	3				6				1	
	積分法の応用	6	3	6	3	3	6	6	6		3·5
	場合の数と確率			3	2	2	2	2			
A	整数の性質		4	5	5	5	5	4		4	
	図形の性質										2
	平面上のベクトル			4					3		
B	空間のベクトル						3			3	
	数列	2·5	2			4			2		4
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		5·6	1							

数字は問題番号

3.1　2015年 (150分)

1 正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える．

$$C : y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ．

2 どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く．さいころを投げ，出た目が1，2，3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く．さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく．たとえば，さいころを5回投げ，その出た目が順に2，5，6，3，4であったとすると，得られる文字列は

AACDAAB

となる．このとき，左から4番目の文字はD，5番目の文字はAである．

(1) n を正の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を求めよ．

(2) n を2以上の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がAで，かつ n 番目の文字がBとなる確率を求めよ．

3 a を正の実数とし，p を正の有理数とする．
座標平面上の2つの曲線 $y = ax^p$ $(x > 0)$ と $y = \log x$ $(x > 0)$ を考える．この2つの曲線の共有点が1点のみであるとし，その共有点をQとする．以下の問いに答えよ．必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい．

(1) a および点Qの x 座標を p を用いて表せ．

(2) この2つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を p を用いて表せ．

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ．

4 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める．

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2 + {p_n}^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ．

(2) すべての $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対し，$p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ．

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める．

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ．

5 m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

6 n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする．$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leqq f(x) \leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ．

$$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{-1}^{1} h(nx)\log(1 + e^{x+1})\,dx$$

解答例

1 $C : y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$ を a について整理すると　$4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0$

$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1$ とおくと

$$f(a) = \begin{cases} 4(x^2-1)\left\{a - \dfrac{y}{2(x^2-1)}\right\}^2 + \dfrac{x^2-y^2-1}{x^2-1} & (x^2 \neq 1) \\ -4ya + 1 & (x^2 = 1) \end{cases}$$

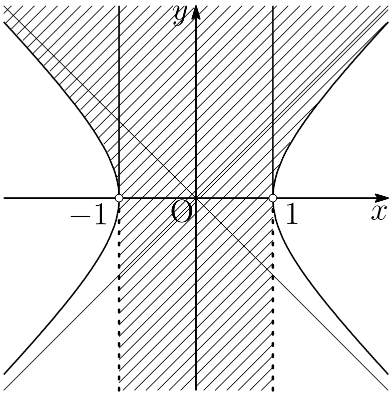
$f(a) = 0$ が正の解 a を持つためには，$f(0) = 1$ に注意して

(i) $x^2 - 1 < 0$　ゆえに　$|x| < 1$

(ii) $x^2 - 1 > 0$，$\dfrac{y}{2(x^2-1)} > 0$，$\dfrac{x^2-y^2-1}{x^2-1} \leqq 0$
ゆえに　$y > 0$，$x^2 - y^2 - 1 \leqq 0$ $(|x| > 1)$

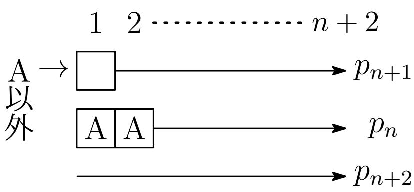
(iii) $x^2 - 1 = 0$，$-4y < 0$　ゆえに　$y > 0$ $(|x| = 1)$

求める領域は，下の図の斜線部分．ただし，点線部の境界は含まない．



■

2 (1) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とすると，p_{n+2} は最初に出た目が 4，5，6 の場合と 1，2，3 の場合により



$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots (*)$$

このとき　$p_1=\dfrac{1}{2}$，$p_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

$(*)$ より
$$p_{n+2}-p_{n+1}=-\frac{1}{2}(p_{n+1}-p_n),$$
$$p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}=p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n$$

第 1 式から　$p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から　$p_{n+1}+\dfrac{1}{2}p_n=p_2+\dfrac{1}{2}p_1=1$

上の 2 式から　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\quad (n \geqq 1)}$

(2) 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字列が B となる確率を q_n とすると，q_{n+2} は，(1) と同様に

$$q_{n+2}=\frac{1}{2}q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots (**)$$

このとき　$q_2=0$，$q_3=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

$(**)$ より
$$q_{n+2}-q_{n+1}=-\frac{1}{2}(q_{n+1}-q_n),$$
$$q_{n+2}+\frac{1}{2}q_{n+1}=q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n$$

第 1 式から　$q_{n+1}-q_n=(q_3-q_2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}=\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

第 2 式から　$q_{n+1}+\dfrac{1}{2}q_n=q_3+\dfrac{1}{2}q_2=\dfrac{1}{12}$

上の 2 式から　$\boldsymbol{q_n=\dfrac{1}{18}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\quad (n \geqq 2)}$ ■

$\boxed{3}$ (1) $f(x) = ax^p - \log x$ とおくと $(x > 0)$

$$f'(x) = apx^{p-1} - \frac{1}{x} = \frac{p}{x}\left(ax^p - \frac{1}{p}\right)$$

$aq^p = \dfrac{1}{p} \cdots$ ①，すなわち，$q = \dfrac{1}{(ap)^{\frac{1}{p}}}$ とおくと，$f'(q) = 0$ より

x	(0)	$\cdots$	q	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

2 曲線 $y = ax^p$ $(x > 0)$ と $y = \log x$ $(x > 0)$ の共有点が 1 点のみであるとき，$f(q) = 0$ であるから

$$aq^p - \log q = 0 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　　$\boldsymbol{q = e^{\frac{1}{p}}, \ a = \dfrac{1}{pe}}$

(2) 求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^q (ax^p)^2\,dx - \int_1^q (\log x)^2\,dx \\ &= a^2\left[\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}\right]_0^q - \Big[x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\}\Big]_1^q \\ &= \frac{(aq^p)^2 q}{2p+1} - q\{(\log q)^2 - 2\log q + 2\} + 2 \\ &= \frac{q}{(2p+1)p^2} - q\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2\right) + 2 \\ &= q\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{4}{2p+1}\right) - q\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2\right) + 2 \\ &= \frac{q(2-4p)}{1+2p} + 2 = \frac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \pi\left\{\dfrac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2\right\}}$

(3) (2) の結果から，$V = 2\pi$ のとき

$$\pi\left\{\frac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2\right\} = 2\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $p_{n+2} = \dfrac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ より

$$\frac{{p_{n+2}}^2 + {p_{n+1}}^2 + 1}{p_{n+2}p_{n+1}} = \frac{1}{p_{n+1}}\left(p_{n+2} + \frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_{n+2}}\right)$$
$$= \frac{1}{p_{n+1}}\left(\frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n} + p_n\right) = \frac{{p_{n+1}}^2 + {p_n}^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$$

よって　$\dfrac{{p_{n+1}}^2 + {p_n}^2 + 1}{p_{n+1}p_n} = \dfrac{{p_2}^2 + {p_1}^2 + 1}{p_2p_1} = \dfrac{2^2 + 1^2 + 1}{2{\cdot}1} = \mathbf{3}$

(2) (1) の結果から，${p_{n+1}}^2 + {p_n}^2 + 1 = 3p_{n+1}p_n$ であるから

$${p_{n+1}}^2 + 1 = p_n(3p_{n+1} - p_n) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n} = 3p_{n+1} - p_n$$

したがって　$p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n \cdots$①　すなわち　$p_{n+2} + p_n = 3p_{n+1}$

よって　$p_{n+1} + p_{n-1} = \boldsymbol{3p_n}$

(3) $q_1 = 1$，$q_2 = 1$，$q_{n+2} = q_{n+1} + q_n$ であるから，$q_3 = q_2 + q_1 = 2$

$$p_n = q_{2n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \quad \cdots (*)$$

$p_1 = q_1$，$p_2 = q_3$ より，$n = 1$, 2 のとき，$(*)$ は成立する．
$(*)$ が $n + 1$ 以下の自然数について成立すると仮定すると，① より

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= 3q_{2n+1} - q_{2n-1} \\ &= 2q_{2n+1} + (q_{2n+1} - q_{2n-1}) = 2q_{2n+1} + q_{2n} \\ &= (q_{2n+1} + q_{2n}) + q_{2n+1} = q_{2n+2} + q_{2n+1} = q_{2n+3} \end{aligned}$$

したがって，$n + 2$ のときも，$(*)$ が成立する．
よって，すべての自然数について，$(*)$ が成立する．

補足 漸化式より，$p_3 = 5$，$p_{n+2}p_n - {p_{n+1}}^2 = 1$ であるから $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\frac{p_{n+2} + p_n}{p_{n+1}} - \frac{p_{n+1} + p_{n-1}}{p_n} = \frac{p_n(p_{n+2} + p_n) - p_{n+1}(p_{n+1} + p_{n-1})}{p_{n+1}p_n}$$
$$= \frac{(p_{n+2}p_n - {p_{n+1}}^2) - (p_{n+1}p_{n-1} - {p_n}^2)}{p_{n+1}p_n} = 0$$

したがって　$\dfrac{p_{n+2} + p_n}{p_{n+1}} = \dfrac{p_3 + p_1}{p_2} = \dfrac{5 + 1}{2} = 3$

ここで，$\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$p_{n+2} - (\alpha^2 + \beta^2)p_{n+1} + \alpha^2\beta^2 p_n = 0, \quad q_{n+2} - (\alpha + \beta)q_{n+1} + \alpha\beta q_n = 0$$

よって　$p_n = \dfrac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha^2 - \beta^2} = \dfrac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha - \beta}$，$q_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$　■

$\boxed{5}$ 正の整数 k に対し，$k = l_k{\cdot}2^{n_k}$ (l_k は奇数，n_k は 0 以上の整数) とすると

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_m = \prod_{k=1}^{m} \frac{2016 - k}{k} = \prod_{k=1}^{m} \frac{63{\cdot}2^5 - l_k{\cdot}2^{n_k}}{l_k{\cdot}2^{n_k}} \prod_{k=1}^{m} \frac{63{\cdot}2^{5-n_k} - l_k}{l_k} $$

$1 \leqq k < 2^5$ のとき，$0 \leqq n_k < 5$ であるから，$63{\cdot}2^{5-n_k} - l_k$ は奇数．

したがって，$1 \leqq m < 32$ のとき，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は奇数．次に

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_{32} = \frac{63{\cdot}2^5 - 2^5}{2^5} \times {}_{2015}\mathrm{C}_{31} = 2{\cdot}31 \times {}_{2015}\mathrm{C}_{31} $$

は，偶数である．よって，求める最小の正の整数 m は　　**32**

東京大学 1999 年前期 理科

(1) k を自然数とする．m を $m = 2^k$ とおくとき，$0 < n < m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ．

(2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ．

条件：$0 \leqq n \leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である．

解答　(1)

$$ {}_m\mathrm{C}_n = \frac{m \times {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}}{n} = \frac{2^k \times {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}}{n} $$

$m = 2^k$，$0 < n < m$ であるから，n が 2^{k-1} を因数にもつことがあっても 2^k を因数にもつことはないので，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数である．

(2) ${}_{m-1}\mathrm{C}_0 = 1$ および (1) の結果を ${}_{m-1}\mathrm{C}_j = {}_m\mathrm{C}_j - {}_{m-1}\mathrm{C}_{j-1}$ に適用すると，${}_{m-1}\mathrm{C}_j$ $(0 \leqq j \leqq m-1)$ は奇数．

${}_{2^k+1}\mathrm{C}_j = {}_{2^k}\mathrm{C}_{j-1} + {}_{2^k}\mathrm{C}_j$ であるから，(1) の結果により

$$ j = 2, 3, \cdots, 2^k - 1 \text{ のとき}\quad {}_{2^k+1}\mathrm{C}_j \text{ は偶数} $$

${}_{2^k+2}\mathrm{C}_j = {}_{2^k+1}\mathrm{C}_{j-1} + {}_{2^k+1}\mathrm{C}_j$ であるから，上の結果により

$$ j = 3, 4 \cdots, 2^k - 1 \text{ のとき}\quad {}_{2^k+2}\mathrm{C}_j \text{ は偶数} $$

順次繰り返すことにより，$i = 0, 1, \cdots, 2^k - 2$ に対して

$$ i + 1 \leqq j \leqq 2^k - 1 \text{ のとき}\quad {}_{2^k+i}\mathrm{C}_j \text{ は偶数} $$

よって　　$\boldsymbol{m = 2^k - 1}$ **(*k* は自然数)**

別解　整数を係数とする多項式を，偶数の係数を 0 に置き換え，奇数の係数を 1 に置き換える．2 つの整式がこの置き換えによって，等しくなるとき，この 2 つの整式は合同 ($\equiv$) とする．例えば，k を正の整数とすると

$$(1+x)^{2^k} \equiv 1+x^{2^k},$$
$$(1+x)^{2^k-1} \equiv 1+x+x^2+\cdots+x^{2^k-1}$$

$2015 = 1024+512+256+128+64+16+8+4+2+1$ であるから

$$\begin{aligned}(1+x)^{2015} &= (1+x)^{1024}(1+x)^{512}(1+x)^{256}(1+x)^{128}(1+x)^{64}\\ &\quad\times(1+x)^{16}(1+x)^{8}(1+x)^{4}(1+x)^{2}(1+x)\\ \sum_{m=0}^{2015} {}_{2015}\mathrm{C}_m x^m &\equiv (1+x^{1024})(1+x^{512})(1+x^{256})(1+x^{128})(1+x^{64})\\ &\quad\times(1+x^{16})(1+x^{8})(1+x^{4})(1+x^{2})(1+x)\end{aligned}$$

右辺の係数が 0 になる最も次数の低い項は　x^{32}　よって　32　■

$\boxed{6}$　(1)　$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

これより　$g(nx) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi nx)+1}{2} & \left(|x| \leqq \frac{1}{n} \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(|x| > \frac{1}{n}\text{のとき}\right) \end{cases}$

したがって　$n\displaystyle\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx = n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx \quad \cdots(*)$

$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき，$p \leqq f(x) \leqq q$，$g(nx) \geqq 0$ に注意して

$$np\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx \leqq n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx \leqq nq\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx$$

ここで　$n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \left[\frac{1}{2\pi}\sin(\pi t) + \frac{t}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$

上の諸式により　　$p \leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$

(2)　$$h(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これより　$$h(nx)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi nx) & (|x|\leqq \frac{1}{n}\text{のとき}) \\ 0 & (|x|>\frac{1}{n}\text{のとき}) \end{cases}$$

したがって　$n^2\displaystyle\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx = n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$

$g'(x)=h(x)$ であるから

$$\begin{aligned}
&n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx \\
&= n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g'(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx = n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \{g(nx)\}'\log(1+e^{x+1})\,dx \\
&= n\Big[\,g(nx)\log(1+e^{x+1})\,\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx \\
&= -n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx
\end{aligned}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ $(-\frac{1}{n}\leqq x\leqq\frac{1}{n})$ とおくと，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f\left(-\frac{1}{n}\right)\leqq f(x)\leqq f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{すなわち} \quad \frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$$

$(*)$ および (1) の結果にこれを適用すると

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}=e$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx=\frac{e}{1+e}$$

よって　$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx\right\} = -\boldsymbol{\frac{e}{1+e}}\end{aligned}$$

■

3.2　2016 年 (150 分)

$\boxed{1}$ e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ とする．すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

$\boxed{2}$ A，B，C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する．以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する．

(a) 1 試合目で A と B が対戦する．

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する．

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する．ここで k は 2 以上の整数とする．

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1) n を 2 以上の整数とする．ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(2) m を正の整数とする．総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ．

$\boxed{3}$ a を $1<a<3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ を考える．直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ R_1，R_2，R_3 として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ．

$\boxed{4}$ z を複素数とする．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ．

5 k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる．ここで，a_1，a_2，$\cdots$，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k \neq 0$ とする．

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ．

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2) p が $5{\cdot}10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ．

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す．$\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ．

6 座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a)，(b) をみたしながら動く．

(a) 点 A は平面 $z = 0$ 上にある．

(b) 点 C(0, 0, 1) が線分 AB 上にある．

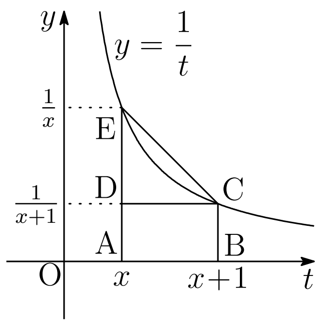
このとき，線分 AB が通過することのできる範囲を K とする．K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ．

解答例

1 $f(x) = x\{\log(x+1) - \log x\}$，$g(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1) - \log x\}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log(x+1) - \log x + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{x+1}, \\ g'(x) &= \log(x+1) - \log x + \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

区間 $x \leqq t \leqq x+1$ における $y = \dfrac{1}{t}$ のグラフと t 軸で囲まれた部分の面積，右の図の長方形ABCDおよび台形ABCEの面積の大小関係から



$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)$$

したがって　　$f'(x) > 0$，$g'(x) < 0$

$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x) < \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$$

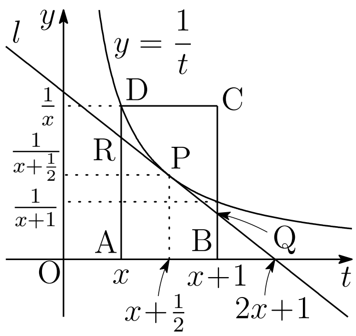
また　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{g(x) - f(x)\} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$

すなわち　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 1$

$g(x)$ は単調減少であるから　　$\displaystyle g(x) > \lim_{x\to\infty} g(x) = 1$

したがって　$f(x) < 1 < g(x)$　　よって　$\displaystyle\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

別解 曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ の点 $\mathrm{P}\left(x+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$ における接線を l とし $(x>0)$，l と直線 $t=x$，$t=x+1$ との交点をそれぞれ R，Q とする．右の図のように $x \leqq t \leqq x+1$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ および t 軸で囲まれた図形の面積と 2 つの四角形 ABCD および ABQR の面積との大小関係により



$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\int_{x}^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$$

したがって $$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<1<\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

よって $$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

補足 上の図から，$x>0$ のとき $\dfrac{1}{x+1}<\displaystyle\int_{x}^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x}$

別解と同様にして [1] $$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$h(x)=(x+1)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと，上の図に注意して

$$h'(x)=\log(x+1)-\log x+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\int_{x}^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x}<0$$

$f(x)$ は単調増加，$h(x)$ は単調減少であるから，前ページと同様の議論により

$$f(x)<1<h(x),\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}h(x)=1$$

$F(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$，$H(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}H(x)=e$$

$F(x)=H(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}H(-x-1)=\lim_{x\to\infty}H(x-1)=e$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=e$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F(x)=e$ であるから $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ ■

[1] 数列の証明は，http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照．

2 (1) $n_1 \equiv 1 \pmod 3$, $n_2 = n_1 + 1$, $n_3 = n_1 + 2$ とする．
優勝チームが決まらず対戦が続くとき，勝者・敗者・控えは 3 順ごとに，次の (i),(ii) のように繰り返す．

(i) 初戦で A が B に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	A	C	B	$\cdots$	A	C	B	$\cdots$
敗者	B	A	C	$\cdots$	B	A	C	$\cdots$
控え	C	B	A	$\cdots$	C	B	A	$\cdots$

(ii) 初戦で B が A に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	B	C	A	$\cdots$	B	C	A	$\cdots$
敗者	A	B	C	$\cdots$	A	B	C	$\cdots$
控え	C	A	B	$\cdots$	C	A	B	$\cdots$

n 試合目に A が優勝するのは，(i) の場合，$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，A は最後に C に勝って優勝し，(ii) の場合，$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，A は最後に B に勝って優勝する．これらの場合の確率は，ともに $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$．
よって，求める確率は

$$\boldsymbol{n \not\equiv 0 \text{ のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \equiv 0 \text{ のとき } 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 3)}$$

(2) (1) の結果から，A が最後に C に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

また，A が最後に B に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}}{\frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\} + \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}} = \boldsymbol{\frac{1 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{5 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和は $\boldsymbol{\dfrac{a - rl}{1 - r}}$ ■

3 (1) R_1，R_2，R_3 は，それぞれ直線 P_1Q，P_2Q，P_3Q の点であるから，実数 t_1，t_2，t_3 を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR_1} &= \overrightarrow{OP_1} + t_1\overrightarrow{P_1Q} = (1,\ 0,\ 1) + t_1(-1,\ 0,\ a-1)\\ &= (1-t_1,\ 0,\ 1+t_1(a-1)),\\ \overrightarrow{OR_2} &= \overrightarrow{OP_2} + t_2\overrightarrow{P_2Q} = (1,\ 1,\ 1) + t_2(-1, -1,\ a-1)\\ &= (1-t_2,\ 1-t_2,\ 1+t_2(a-1)),\\ \overrightarrow{OR_3} &= \overrightarrow{OP_3} + t_3\overrightarrow{P_3Q} = (1,\ 0,\ 3) + t_3(-1,\ 0,\ a-3)\\ &= (1-t_3,\ 0,\ 3+t_3(a-3)),\end{aligned}$$

R_1，R_2，R_3 は，xy 平面上の点であるから

$$1+t_1(a-1)=0,\quad 1+t_2(a-1)=0,\quad 3+t_3(a-3)=0$$

これを解いて　$t_1 = \dfrac{1}{1-a}$，$t_2 = \dfrac{1}{1-a}$，$t_3 = \dfrac{3}{3-a}$

したがって

$$\overrightarrow{OR_1} = \left(\frac{a}{a-1},\ 0,\ 0\right),\ \overrightarrow{OR_2} = \left(\frac{a}{a-1},\ \frac{a}{a-1},\ 0\right),\ \overrightarrow{OR_3} = \left(\frac{a}{a-3},\ 0,\ 0\right)$$

ゆえに　$\overrightarrow{R_1R_2} = \left(0,\ \dfrac{a}{a-1},\ 0\right)$，$\overrightarrow{R_1R_3} = \left(\dfrac{2a}{(a-1)(a-3)},\ 0,\ 0\right)$

$0<a<3$ に注意して　$S(a) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{a-1}\cdot\dfrac{2a}{(a-1)(3-a)} = \dfrac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$

両辺の対数をとって，微分すると

$$\log S(a) = 2\log a - 2\log(a-1) - \log(3-a),$$

$$\frac{S'(a)}{S(a)} = \frac{2}{a} - \frac{2}{a-1} + \frac{1}{3-a} = -\frac{2}{a(a-1)} + \frac{1}{3-a} = \frac{(a+3)(a-2)}{a(a-1)(3-a)}$$

$$S'(a) = \frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}\cdot\frac{(a+3)(a-2)}{a(a-1)(3-a)} = \frac{a(a+3)(a-2)}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

a	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小 4	↗	

よって　最小値 $\boldsymbol{S(2) = 4}$　■

4 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) を頂点とする三角形であるから　$z \neq 1$

$$\mathrm{AB} = |z-1| \qquad \mathrm{BC} = |z^2 - z| = |z||z-1| \qquad \mathrm{CA} = |z^2-1| = |z+1||z-1|$$

したがって　$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} = 1 : |z| : |z+1|$

△ABC が鋭角三角形であるとき，次の 3 式を満たせばよい．

$$1^2 + |z|^2 > |z+1|^2, \quad 1^2 + |z+1|^2 > |z|^2, \quad |z|^2 + |z+1|^2 > 1^2$$

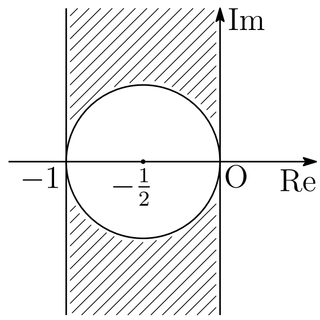
第 1 式から　$z + \overline{z} < 0$　すなわち　$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} < 0$　$\cdots$①

第 2 式から　$z + \overline{z} > -2$　すなわち　$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} > -1$　$\cdots$②

第 3 式から　$|z|^2 + \dfrac{z+\overline{z}}{2} > 0$　すなわち　$\left|z + \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}$　$\cdots$③

①〜③ より　$\begin{cases} -1 < \mathrm{Re}(z) < 0 \\ \left|z + \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

z の満たす領域は，右の図の斜線部分．
ただし，境界線を含まない．



$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $d_k = 0.a_1a_2\cdots a_k$ とおくと，$d_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < d_k + 10^{-k}$ より

$$10^k + d_k \leqq \sqrt{n} < 10^k + d_k + 10^{-k}$$

上式の辺々を平方すると

$$10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + {d_k}^2 \leqq n < 10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + 2 + (d_k + 10^{-k})^2$$

ここで，$d_k{\cdot}10^k$ が整数であることと

$$0 < {d_k}^2 < 1, \quad 0 < (d_k + 10^{-k})^2 \leqq 1$$

であることに注意すると，求める正の整数 n は

$$\boldsymbol{n = 10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + 1,\ \ 10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + 2}$$

(2) $d_k \leqq \sqrt{m} - p < d_k + 10^{-k}$ より

$$p + d_k \leqq \sqrt{m} < p + d_k + 10^{-k}$$

上式の辺々を平方すると

$$(p + d_k)^2 \leqq m < (p + d_k + 10^{-k})^2$$

p が $5{\cdot}10^{k-1}$ の整数のとき

$$\begin{aligned}(p + d_k + 10^{-k})^2 - (p + d_k)^2 &= 2(p + d_k){\cdot}10^{-k} + 10^{-2k} \\ &> 2p{\cdot}10^{-k} \geqq 2{\cdot}5{\cdot}10^{k-1}{\cdot}10^{-k} = 1\end{aligned}$$

よって，条件をみたす正の整数 m が存在する．

(3) $\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = d_k$ をみたす正の整数 s が存在するとき

$$\sqrt{s} = [\sqrt{s}\,] + d_k \quad (0 < d_k < 1)$$

これから $\sqrt{s}$ は有限小数，すなわち，有理数であるから

$$\sqrt{s} = \frac{q}{r} \quad (\text{正の整数}\ q,\ r\ \text{は互いに素})$$

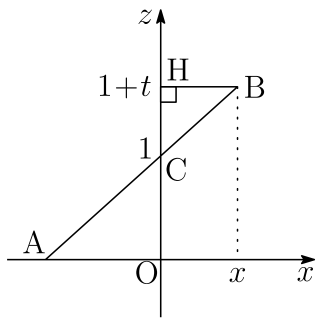
とおき，両辺を平方すると

$$s = \frac{q^2}{r^2}$$

左辺は正の整数であるから，$r = 1$ となる．このとき，$\sqrt{s} = [\sqrt{s}\,] = q$ より，$\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = 0$ であるから，条件をみたす正の整数 s は存在しない．

■

6 B の z 座標を $1+t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$，B から z 軸に降ろした垂線 BH の長さを x とすると



$$\mathrm{BC} = \sqrt{t^2+x^2}, \quad \mathrm{CA} = \frac{\mathrm{BC}}{t} = \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t}$$

$\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=2$ であるから

$$\sqrt{t^2+x^2} + \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t} = 2$$

ゆえに　$\sqrt{t^2+x^2} = \dfrac{2t}{t+1}$　したがって　$x^2 = \left(\dfrac{2t}{t+1}\right)^2 - t^2$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 x^2\,dt = \pi\int_0^1 \left\{\left(\frac{2t}{t+1}\right)^2 - t^2\right\}dt \\ &= \pi\int_0^1 \left\{\left(2-\frac{2}{t+1}\right)^2 - t^2\right\}dt \\ &= \pi\int_0^1 \left\{4 - \frac{8}{t+1} + \frac{4}{(t+1)^2} - t^2\right\}dt \\ &= \pi\left[4t - 8\log(t+1) - \frac{4}{t+1} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)} \end{aligned}$$

極方程式による曲線の回転体の体積

xy 平面において，極方程式 $r=r(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

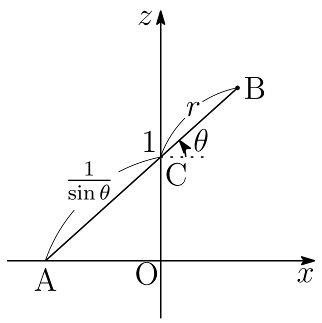
$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r(\theta)^3 \sin\theta\,d\theta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi)}$$

また，この曲線を y 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r(\theta)^3 \cos\theta\,d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)}$$

証明 p.438 の極方程式の計量を参照．

別解 zx 平面上で C を極として，$r = \mathrm{CB}$，CB と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると，求める体積 V は



$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\theta\, d\theta$$

このとき，$r = 2 - \dfrac{1}{\sin\theta}$ であるから

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{\sin\theta}\right)^3 \cos\theta\, d\theta$$

ここで，$u = \sin\theta$ とおくと　$\dfrac{du}{d\theta} = \cos\theta$

θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{2} \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2 - \frac{1}{u}\right)^3 du \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(8 - \frac{12}{u} + \frac{6}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right) du \\ &= \frac{2\pi}{3}\left[\ 8u - 12\log u - \frac{6}{u} + \frac{1}{2u^2}\ \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)} \end{aligned}$$

3.3　2017 年 (150 分)

1 実数 a，b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$

とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$

を考える．

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ．

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a，b についての条件を求めよ．また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ．

2 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える．

(a) 最初に，点 P は原点 O にある．

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ．

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ．

3 複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w = \dfrac{1}{z}$ とする．

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする．点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる．この円の中心と半径を求めよ．

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする．点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ．

4 $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい．

(1) a_1，a_2 の値を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ とする．積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．

(3) a_n は自然数であることを示せ．

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

5 k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C，D の共通接線について考える．

$$C: \quad y = x^2 + k$$
$$D: \quad x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ．ただし $a \neq -1$ とする．

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める．このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ．

6 点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす．また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta \\ &= 4x^3 - 3x + a(2x^2-1) + bx \\ &= \boldsymbol{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a} \end{aligned}$$

$f(0) = 4 + 2a + (b-3) - a$ であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) - f(0) &= 4(x^3-1) + 2a(x^2-1) + (b-3)(x-1) \\ \frac{f(\theta)-f(0)}{x-1} &= 4(x^2+x+1) + 2a(x+1) + b - 3 \end{aligned}$$

よって　$g(\theta) = \dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta - 1} = \boldsymbol{4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1}$

(2) $x = \cos\theta\ (0 < \theta < \pi)$ より　$-1 < x < 1$

$h(x) = 4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1\ (-1 < x < 1)$ とおくと

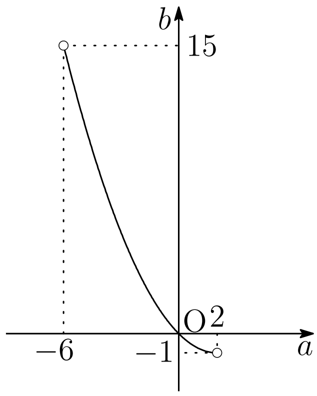
$$h(x) = 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + b$$

$h(x)$ は $-1 < x < 1$ で最小値 0 をとるから

$$-1 < -\frac{a+2}{4} < 1, \quad -\frac{a^2}{4} + a + b = 0$$

よって　$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{4}(a-2)^2 - 1 \quad (-6 < a < 2)}$

条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形は，右の図のとおり．



■

2　(1)　x 軸方向に 1，-1，y 軸方向に 1，-1 だけ平行移動する回数をそれぞれ i，j，k，l とすると $(0 \leqq i,\ j,\ k,\ l \leqq 6)$，その確率は

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=6\\0\leqq i,j,k,l\leqq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

このとき　$i+j+k+l=6,\quad i-j=k-l$　すなわち　$i+l=j+k=3$
よって，求める確率は

$$\sum_{\substack{i+l=j+k=3\\0\leqq i,j,k,l\leqq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+l=3\\0\leqq i,l\leqq 3}} \frac{3!}{i!l!} \sum_{\substack{j+k=3\\0\leqq j,k\leqq 3}} \frac{3!}{j!k!}$$

$$= \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2)　$i+j+k+l=6$，$i=j$，$k=l$　すなわち　$i+k=3$
よって，求める確率は

$$\sum_{\substack{i+k=3\\0\leqq i,k\leqq 3}} \frac{6!}{(i!k!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{4^6}\left\{\frac{1}{(3!)^2}+\frac{1}{(1!2!)^2}+\frac{1}{(2!1!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}\right\} = \boldsymbol{\frac{25}{256}}$$

別解　$(1+x)^3 = {}_3\mathrm{C}_0 + {}_3\mathrm{C}_1 x + {}_3\mathrm{C}_2 x^2 + {}_3\mathrm{C}_3 x^3$，
$(1+x)^3 = {}_3\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_2 x + {}_3\mathrm{C}_1 x^2 + {}_3\mathrm{C}_0 x^3$
上の 2 式の積と $(1+x)^6$ の x^3 の係数 ${}_6\mathrm{C}_3$ との比較により

$$({}_3\mathrm{C}_0)^2 + ({}_3\mathrm{C}_1)^2 + ({}_3\mathrm{C}_2)^2 + ({}_3\mathrm{C}_3)^3 = {}_6\mathrm{C}_3$$

一般には，$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ の x^n の係数を比較することにより

$$\sum_{k=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_k)^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$$

したがって

$$\sum_{\substack{i+k=3\\0\leqq i,k\leqq 3}} \frac{6!}{(i!k!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+k=3\\0\leqq i,k\leqq 3}} \left(\frac{3!}{i!k!}\right)^2$$

$$= \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{k=0}^{3} ({}_3\mathrm{C}_k)^2$$

$$= {}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{4}\right)^6 {}_6\mathrm{C}_3 = ({}_6\mathrm{C}_3)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{25}{256}$$

■

3 (1) 点 $\alpha \neq 0$ と O を結ぶ線分の垂直二等分線 L の方程式は　$|z| = |z-\alpha|$

$w = \dfrac{1}{z}$ より，$z = \dfrac{1}{w}$ $(w \neq 0)$ であるから

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} - \alpha\right| \quad \text{ゆえに} \quad \left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w} - \alpha\right|$$

したがって　$\left|w - \dfrac{1}{\alpha}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|}$　よって，w は中心 $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}$，半径 $\dfrac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$ の円

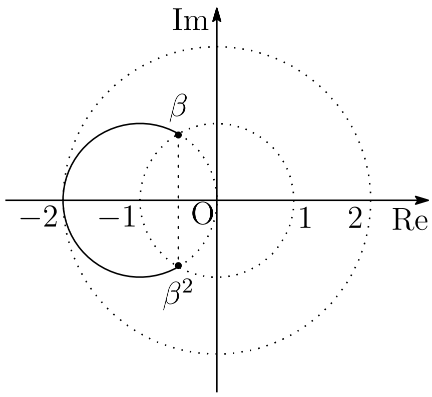
(2) $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ であるから，2 点 β，β^2 を結ぶ線は，点 -1 と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分であるから，(1) の結果から

$$|w+1| = 1 \quad \cdots ①$$

z は，点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くから

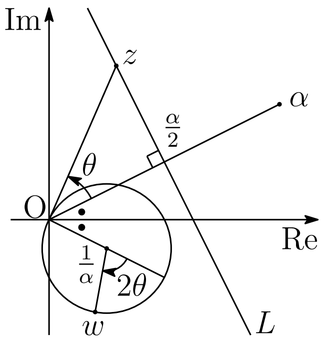
$$\frac{1}{2} \leqq |z| \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq |w| \leqq 2 \quad \cdots ②$$

したがって，点 w の軌跡は，①，② の共通部分で下の図の実線部分．



解説　L 上の点 z は

$$z = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$



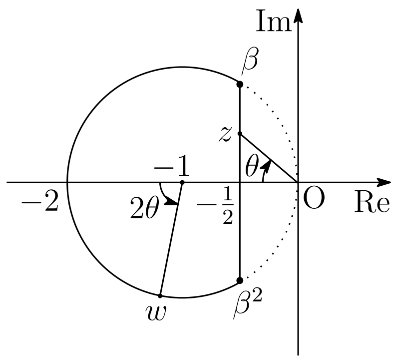
$w = \dfrac{1}{z}$ により

$$w = \frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+i\tan\theta} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{2\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}$$
$$= \frac{1}{\alpha}(2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta)$$
$$= \frac{1}{\alpha}(1 + \cos 2\theta - i\sin 2\theta)$$

点 w は点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とし，半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円周上にある．$-\pi < 2\theta < \pi$ であるから，点 w の表す軌跡はこの円から原点 O を除いたものになる．

また，点 β と β^2 を結ぶ線分上の点 z は

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$



$w = \dfrac{1}{z}$ により

$$w = -\frac{2}{1 - i\tan\theta} = -\frac{2\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$
$$= -2(\cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta)$$
$$= -1 - (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

■

4　(1)　$a_1 = p - \dfrac{1}{p} = 2 + \sqrt{5} - \dfrac{1}{2+\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 2) = \mathbf{4}$

$$a_2 = p^2 + \frac{1}{p^2} = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = \mathbf{18}$$

(2)　$p^{n+1} + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n+1} = \left(p - \dfrac{1}{p}\right)\left\{p^n + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^n\right\} + p^{n-1} + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}$ より

$$a_{n+1} = a_1 a_n + a_{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1}}$$

補足　$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$

(3) (1)，(2) の結果から　$a_1 = 4$，$a_2 = 18$，$a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$　$\cdots (*)$
よって，すべての自然数 n について，a_n は自然数である．

(4) 2 つの自然数 k，l の最大公約数を $\gcd(k,\ l)$ とする．
$(*)$ にユークリッドの互除法を順次適用することにより

$$\gcd(a_{n+1},\ a_n) = \gcd(a_n,\ a_{n-1}) = \cdots = \gcd(a_2,\ a_1) = \mathbf{2}$$

ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m \,|\, n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記すると，次は自明である．

$$(x, y) \,|\, x, \quad (x, y) \,|\, y$$

ユークリッドの互除法

2 整数 a，b について ($a > b > 0$)，a を b で割ったときの商を q，余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = (b, c)$$
$$c = 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = b$$

証明　$c \neq 0$ のとき，$a = bq + c$ より　$(b, c) \,|\, a$　また，$(b, c) \,|\, b$ であるから，(b, c) は a と b の公約数，したがって

$$(b, c) \,|\, (a, b) \quad \cdots ①$$

同様に，$c = a - bq$ より　$(a, b) \,|\, c$　また，$(a, b) \,|\, b$ であるから，(a, b) は b と c の公約数，したがって

$$(a, b) \,|\, (b, c) \quad \cdots ②$$

①，② より　$(a, b) = (b, c)$

$c = 0$ のとき，自明．　　証終

5　(1) $y=x^2+k$ と $y=ax+b$ から y を消去すると

$$x^2+k=ax+b \quad \text{ゆえに} \quad x^2-ax+k-b=0$$

このとき，方程式の係数について

$$(-a)^2-4(k-b)=0 \quad \text{すなわち} \quad 4k=a^2+4b \quad \cdots ①$$

$x=y^2+k$ と $y=ax+b$，すなわち，$x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$ について，① より

$$4k=\left(\frac{1}{a}\right)^2+4\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{4b}{a} \quad \cdots ②$$

①，② から k を消去すると

$$a^2-\frac{1}{a^2}+4b\left(1+\frac{1}{a}\right)=0$$

$$(a+1)(a-1)(a^2+1)+4ab(a+1)=0$$

$a\neq-1$ より，$a+1\neq0$ であるから

$$(a-1)(a^2+1)+4ab=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b=\frac{(1-a)(1+a^2)}{4a}} \quad \cdots ③$$

これを ① に代入して

$$4k=a^2+4\cdot\frac{(1-a)(1+a^2)}{4a} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k=\frac{a^2-a+1}{4a}} \quad \cdots ④$$

(2) $a=2$ を ④ に代入すると　$k=\dfrac{3}{8}$　これを ①，② に代入すると

$$\frac{3}{2}=a^2+4b, \quad \frac{3}{2}=\frac{1}{a^2}-\frac{4b}{a}$$

上の 2 式から b を消去して整理すると

$$(a+1)(a-2)(2a-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad a=-1,\ 2,\ \frac{1}{2}$$

$k=\dfrac{3}{8}$ を ① に代入すると

$$\frac{3}{2}=a^2+4b \quad \text{ゆえに} \quad b=-\frac{a^2}{4}+\frac{3}{8}$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(-1,\ \frac{1}{8}\right),\ \left(2,-\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right)}$

別解 ③，④ に $a=2$ を代入すると　$b=-\dfrac{5}{8}$，$k=\dfrac{3}{8}$

このとき，C，D の共通接線の 1 本は　$y=2x-\dfrac{5}{8}$

C と D は直線 $y=x$ に関して対称であるから，上の共通接線と直線 $y=x$ に関して対称な直線

$$x=2y-\frac{5}{8}\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{16}$$

も C と D の共通接線である．

また，直線 $y=x$ に関して対称な直線 $x+y=d$ が $C: y=x^2+\dfrac{3}{8}$ と接するとき，2 式から y を消去して整理すると

$$x^2+x+\frac{3}{8}-d=0$$

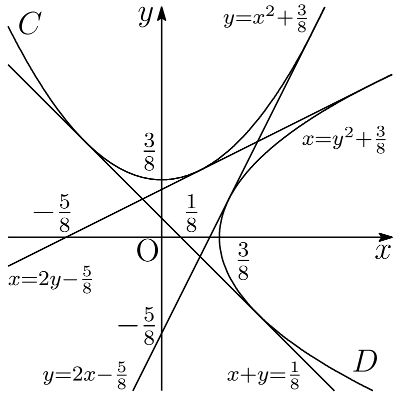
このとき，係数について

$$1^2-4\cdot 1\left(\frac{3}{8}-d\right)=0\quad \text{これを解いて}\quad d=\frac{1}{8}$$

直線 $y=x$ に関する C と D の対称性により，直線

$$x+y=\frac{1}{8}\quad \text{すなわち}\quad y=-x+\frac{1}{8}$$

は，C と D の共通接線である．



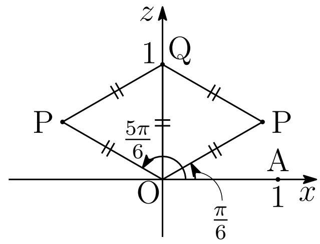
よって，求める 3 本の共通接線は

$$y=2x-\frac{5}{8},\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{16},\quad y=-x+\frac{1}{8}$$

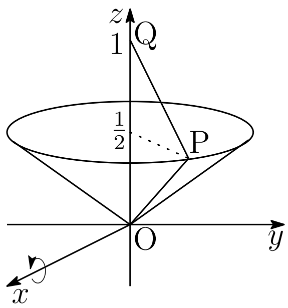
■

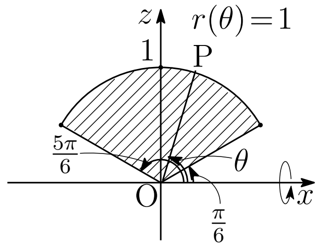
6　(1) θ が最大または最小となるのは，zx 平面上において，P が右の図で示した位置にあるときである．$x = \cos\theta$ であるから

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{6}},\quad \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上の点 $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，辺 OP は左図の円錐面を描く．点 Q を平面 $x = 0$ を動かす，すなわち，OQ を平面 $x = 0$ 上で O を中心に回転させると，この円錐面が zx 平面を通過してできる zx 平面に描く輪郭は右図の斜線部分になる．





極方程式による曲線の回転体の体積

極方程式 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^3 \sin\theta\, d\theta}$$

したがって，(上の公式[2] に $r(\theta) = 1$，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$，$\beta = \dfrac{5\pi}{6}$ を代入すると)

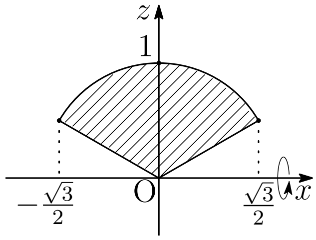
$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 1^3 \sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

別解　2012 年九大理系 p.7 の例 5 で示した公式[3]

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^2 a$$

に $r = 1$，$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を代入すると

$$V = \frac{4}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$



[2] p.438 の極方程式の計量を参照．
[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

2009 京都大学 (理系) 前期

xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r = 2 + \cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

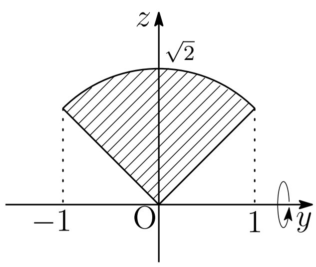
解答 $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^\pi (2+\cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta = \dfrac{2\pi}{3}\Big[-\dfrac{1}{4}(2+\cos\theta)^4 \Big]_0^\pi = \dfrac{40}{3}\pi$

2013 大阪大学 (理系) 前期

xyz 空間内の 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする．円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答 右の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積であるから

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{8}{3}\pi$$



3.4　2018年(150分)

1 関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり，$x \to +0$，$x \to \pi - 0$ のときの極限を調べよ．

2 数列 $a_1, a_2, \cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．

(1) $n \geqq 2$ とする．$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ．

(2) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ．

3 放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする．座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える．$k > 0$ を実数とする．点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする．

$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k \to +0} S(k)$，$\displaystyle\lim_{k \to \infty} S(k)$ を求めよ．

4 $a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく．次の2条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ．

条件2：さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である．

$\boxed{5}$ 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする．点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする．$w = \dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す．

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ．

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする．点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ．

$\boxed{6}$ 座標空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ を考える．$\dfrac{1}{2} < r < 1$ とする．点 P が線分 OA，AB，BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球 (内部を含む) が通過する部分を，それぞれ V_1，V_2，V_3 とする．

(1) 平面 $y=t$ が V_1，V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ．さらに，この範囲の t に対し，平面 $y=t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y=t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ．

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ．

(3) r は (2) の条件をみたすとする．V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする．V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ．

(4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする．S と T を求め，V の体積を決定せよ．

解答例

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$ より

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sin x - x \cos x}{\sin^2 x} - \sin x = \frac{\sin x(1 - \sin^2 x) - x \cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin x \cos^2 x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\sin x \cos x - x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\sin 2x - 2x)}{2\sin^2 x}$$

ここで，$g(x) = \sin 2x - 2x \ (0 \leqq x < \pi)$ とおくと

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = 2(\cos 2x - 1) < 0 \quad (0 < x < \pi)$$

したがって　$0 < x < \pi$ のとき　$g(x) < 0$

$f'(x) = \dfrac{g(x) \cos x}{\sin^2 x}$ により，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

また　$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \left(\frac{x}{\sin x} + \cos x \right) = 1 + 1 = \mathbf{2}$$

$$\lim_{x \to \pi - 0} f(x) = \lim_{x \to \pi - 0} \left(\frac{x}{\sin x} + \cos x \right) = \infty$$

■

2 (1) $a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ より　$a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}$

ゆえに
$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}n!}{(2n-1)!}\\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2}{(n!)^2}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\\ &= 2n(2n+1)\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}\end{aligned}$$

連続する 2 つの整数の積 $n(n+1)$ は 2 で割り切れるから

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n+1}{\frac{1}{2}n(n+1)} \qquad \cdots(*)$$

このとき　$2n+1 = 2\cdot n + 1$，$2n+1 = 2(n+1) - 1$

$2n+1$ と n は互いに素，また，$2n+1$ と $n+1$ も互いに素である．

よって　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)}$，　$\boldsymbol{q_n = 2n+1}$

(2) $a_1 = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{1!} = 3$，$a_2 = \dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{2!} = 5$，(1) の結果から，$q_n$ は奇数，$p_3 = 6$.

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n}\frac{q_k}{p_k}$　ゆえに　$\displaystyle\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^{n}\frac{q_k}{p_k}$

したがって　$\displaystyle a_n = 3\prod_{k=2}^{n}\frac{q_k}{p_k} = \frac{3q_2q_3\cdots q_n}{p_2p_3\cdots p_n}$

$n \geqq 3$ のとき，$p_2p_3\cdots p_n$ は偶数であり，一方，$3q_2q_3\cdots q_n$ は奇数であるから，a_n は整数ではない．よって，a_n が整数となる n は

$$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$$

別解 $\dfrac{q_n}{p_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n+1}$ より

$$n \leqq 3 \text{ のとき } \frac{q_n}{p_n} > 1, \qquad 4 \leqq n \text{ のとき } \frac{q_n}{p_n} < 1.$$

したがって　$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > a_n$

$$a_3 = \frac{35}{6},\ a_4 = \frac{21}{4},\ a_5 = \frac{77}{20},\ a_6 = \frac{143}{60},\ a_7 = \frac{143}{112},\ a_8 = \frac{2431}{4032}$$

$n \geqq 8$ のとき，$a_n < 1$ となる．よって，a_n が整数となる n は $n = 1,\ 2$

■

3 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ に対して $(-1 \leqq p \leqq 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{k}(p,\ p^2) = \left(\frac{p}{k},\ k\left(\frac{p}{k}\right)^2\right)$$

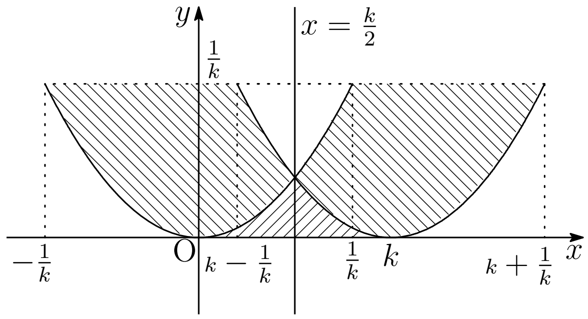
$-\dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{p}{k} \leqq \dfrac{1}{k}$ から，$\mathrm{P'}$ は放物線 $y = kx^2\left(-\dfrac{1}{k} \leqq x \leqq \dfrac{1}{k}\right)$ 上にある．また，線分 OA 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ に対して $(0 \leqq q \leqq 1)$

$$k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k(q,\ 0) = (kq,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP'}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，R は点 $\mathrm{P'}$ を x 軸方向に kq だけ平行移動した点である．このとき，$0 \leqq kq \leqq k$ であるから，次のように場合分けを行う．

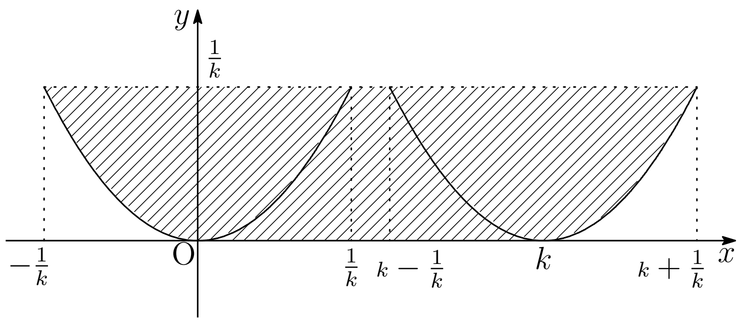
(i) $k - \dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k}$，すなわち，$k < \sqrt{2}$ のとき

$$S(k) = 2 \times \frac{1}{k}\cdot k - 2\int_0^{\frac{k}{2}} kx^2\,dx = 2 - 2\left[\,\frac{k}{3}x^3\,\right]_0^{\frac{k}{2}} = \mathbf{2 - \frac{\boldsymbol{k}^4}{12}}$$



(ii) $\dfrac{1}{k} \leqq k - \dfrac{1}{k}$，すなわち，$\sqrt{2} \leqq k$ のとき

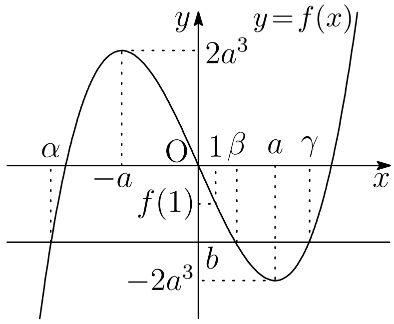
$$S(k) = \frac{1}{k}\left\{k + \frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k}\right)\right\} - 2\int_0^{\frac{1}{k}} kx^2\,dx = \mathbf{1 + \frac{4}{3\boldsymbol{k}^2}}$$



(i)，(ii) の結果から　$\displaystyle\lim_{k\to+0} \boldsymbol{S(k) = 2}$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{S(k) = 1}$　■

4 $f(x) = x^3 - 3a^2x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$



$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

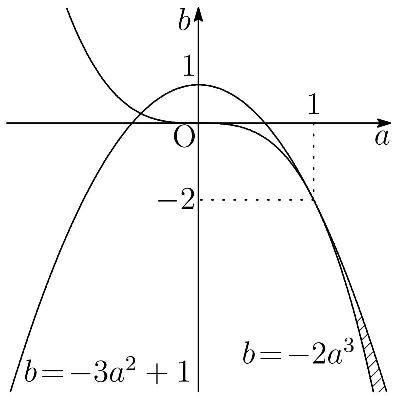
$f(x) = b$ の解 $\alpha < \beta < \gamma$ について，$\beta > 1$ であるから

$$1 < a, \quad -2a^3 < b < f(1)$$

したがって

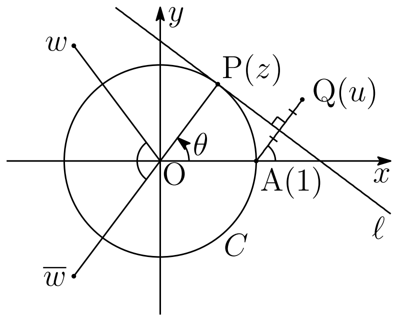
$$\boldsymbol{-2a^3 < b < -3a^2 + 1 \quad (a > 1)}$$

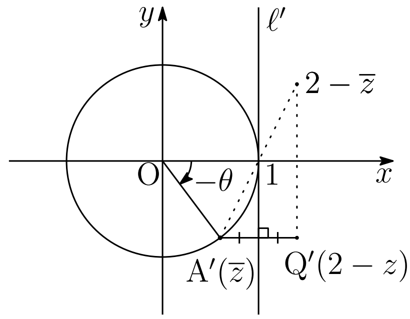
点 $(a,\ b)$ の満たす領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含まない．



■

$\boxed{5}$ (1) $\theta=\arg z$ とし，2点A，Qをそれぞれ原点Oを中心に $-\theta$ だけ回転させた点をそれぞれ A$'$，Q$'$ とすると，A$'(\overline{z})$ を点1に関して対称位移動した点が $2-\overline{z}$ で，この点を x 軸に関して対称移動した点が Q$'(2-z)$ である．





Q(u) は Q$'(2-z)$ を原点Oを中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\boldsymbol{u=z(2-z)} \quad \text{ゆえに} \quad w=\frac{1}{1-u}=\frac{1}{1-z(2-z)}=\frac{1}{(z-1)^2}$$

さらに $\overline{w}=\dfrac{1}{(\overline{z}-1)^2}=\dfrac{z^2}{z^2(\overline{z}-1)^2}=\dfrac{z^2}{(1-z)^2}=z^2w$ 　よって $\boldsymbol{\dfrac{\overline{w}}{w}=z^2}$

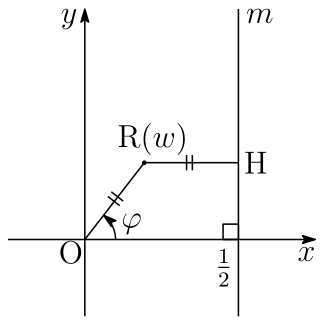
したがって

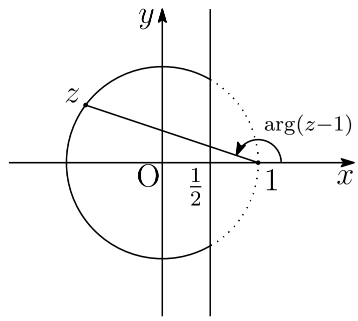
$$\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=\left|1+\frac{\overline{w}}{w}-\frac{1}{w}\right|=\left|1+z^2-(z-1)^2\right|=2|z|=\mathbf{2}$$

(2) (1) の結果より　$\arg w = -2\arg(z-1)$，$\left|\dfrac{w+\overline{w}}{2} - \dfrac{1}{2}\right| = |w|$　$\cdots(*)$

$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \arg(z-1) \leqq \dfrac{4}{3}\pi$ であるから　$-\dfrac{8}{3}\pi \leqq -2\arg(z-1) \leqq -\dfrac{4}{3}\pi$

$\varphi = \arg w$ とおくと　$-\dfrac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \dfrac{2}{3}\pi$



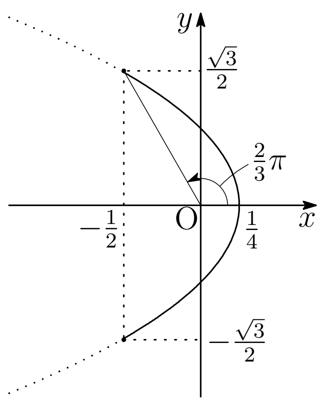


複素数平面上に R(w) をとり，点 $\dfrac{1}{2}$ を通り，x 軸に垂直な直線 m に R から垂線 RH を引く．$r = |w|$ とすると，$(*)$ より

$$\mathrm{RH} = \left|\frac{w+\overline{w}}{2} - \frac{1}{2}\right| = r$$

$\mathrm{OR}\cos\varphi + \mathrm{RH} = \dfrac{1}{2}$ であるから　$r\cos\varphi + r = \dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

よって　　$r = \dfrac{1}{2(1+\cos\varphi)}$　$\left(-\dfrac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$　$\cdots(**)$



$w = x + yi$ とおくと，$x = r\cos\varphi$，$r^2 = x^2 + y^2$ であるから，① より

$$x + r = \frac{1}{2} \quad ゆえに \quad r^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

整理すると　　$x = \dfrac{1}{4} - y^2$

$(**)$ より　$\varphi = \pm\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$r = 1$

$\varphi = -\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって，求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{4} - y^2}$　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

R(w) の表す軌跡は，右上の図のようになる．

補足　$(**)$ および $\varphi = \arg w$ より，w は次式で与えられる．

$$w = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} \quad \left(-\frac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$$

別解　$\theta = \arg z$ とすると，条件から　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

$w = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ により

$$w = \frac{1}{z^2-2z+1} = \frac{\overline{z}}{z+\overline{z}-2} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2\cos\theta - 2} = \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

ここで，$\theta = \pi - \varphi$ とおくと

$$w = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} \quad \left(-\frac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$$

$r = |w|$ とおくと，$(**)$ が得られる (以下の計算は同様)．　■

6 (1) 点 P が線分 OA 上を動くとき，点 P から平面 $y=t$ までの距離は　t
点 P が線分 BC 上を動くとき，点 P から平面 $y=t$ までの距離は　$1-t$
したがって，平面 $y=t$ が V_1，V_3 双方と共有点をもつような t の範囲は

$$t \leqq r \quad \text{かつ} \quad 1-t \leqq r \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{1-r \leqq t \leqq r} \quad \cdots (*)$$

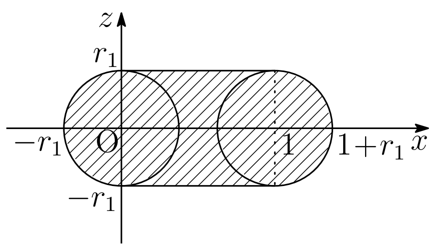
線分 OA 上の点 $\mathrm{P}(c_1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 r の球 (内部を含む) は

$$(x-c_1)^2+y^2+z^2 \leqq r^2$$

これと平面 $y=t$ の共通部分は

$$(x-c_1)^2+z^2 \leqq r^2-t^2, \quad y=t$$

上式は，平面 $y=t$ において点 $(c_1,\ t,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{r^2-t^2}$ の円の内部である．点 P が線分 OA 上を動く，すなわち，$0 \leqq c_1 \leqq 1$ のとき上式が通過する図形が，平面 $y=t$ と V_1 の共通部分である．この図形を平面 $y=t$ 上に描くと右のようになる．境界を含む $(r_1=\sqrt{r^2-t^2})$．



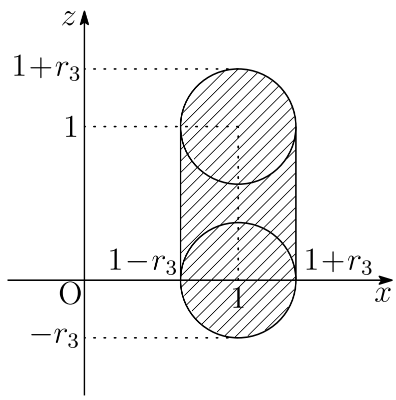
線分 BC 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ c_3)$ を中心とする半径 r の球 (内部を含む) は

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-c_3)^2 \leqq r^2$$

これと平面 $y=t$ の共通部分は

$$(x-1)^2+(z-c_3)^2 \leqq r^2-(t-1)^2, \quad y=t$$

上式は，平面 $y=t$ において点 $(1,\ t,\ c_3)$ を中心とする半径 $\sqrt{r^2-(t-1)^2}$ の円の内部である．点 P が線分 OA 上を動く，すなわち，$0 \leqq c_3 \leqq 1$ のとき上式が通過する図形が，平面 $y=t$ と V_3 の共通部分である．この図形を平面 $y=t$ 上に描くと右の図のようになる．境界を含む $(r_3=\sqrt{r^2-(t-1)^2})$．



$r_1 = \sqrt{r^2 - t^2}$，$r_3 = \sqrt{r^2 - (t-1)^2}$ であるから，これらの大小により t の値の範囲は次のようになる．

(i) $r_1 \geqq r_3$ のとき

$$\sqrt{r^2 - t^2} \geqq \sqrt{r^2 - (t-1)^2} \quad \text{これを解いて} \quad t \leqq \frac{1}{2}$$

このとき，$(*)$ に注意して　$1 - r \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$

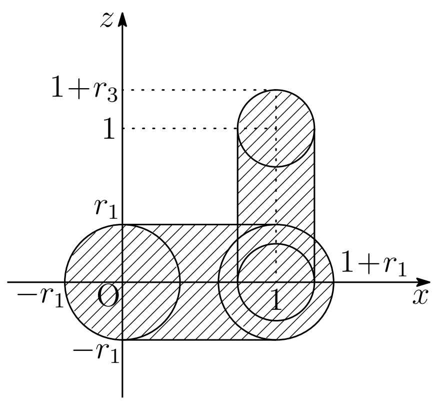
(ii) $r_1 < r_3$ のとき

$$\sqrt{r^2 - t^2} > \sqrt{r^2 - (t-1)^2} \quad \text{これを解いて} \quad t > \frac{1}{2}$$

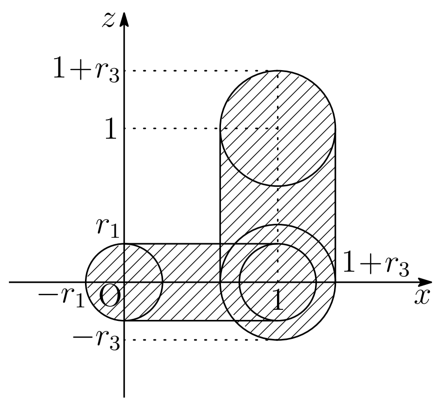
このとき，$(*)$ に注意して　$\dfrac{1}{2} < t \leqq r$

(i),(ii) の場合について，平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示すると次のようになる．

$r_1 \geqq r_3$ $(1 - r \leqq t \leqq \frac{1}{2})$ のとき

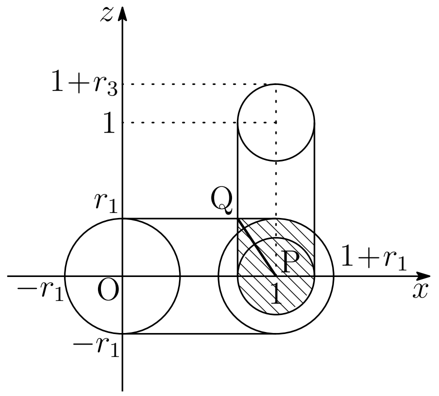


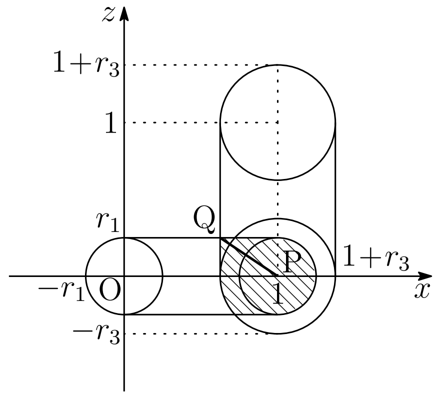
$r_1 < r_3$ $(\frac{1}{2} < t \leqq r)$ のとき



(2) (1) の結果から，V_1 と V_3 の共通部分を平面 $y=t$ 上に図示すると

$r_1 \geqq r_3 \ (1-r \leqq t \leqq \frac{1}{2})$ のとき　　　$r_1 < r_3 \ (\frac{1}{2} < t \leqq r)$ のとき





また，P(1, t, 0) をとり，P から領域内の点までの距離が最大となる点を Q とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= {r_1}^2 + {r_3}^2 \\ &= (r^2 - t^2) + \{r^2 - (t-1)^2\} \\ &= 2r^2 - 2t^2 + 2t - 1 \end{aligned}$$

V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるとき　　$\mathrm{PQ} \leqq r$　$\cdots$①

ゆえに　　$r^2 - \mathrm{PQ}^2 = 2t^2 - 2t + 1 - r^2$

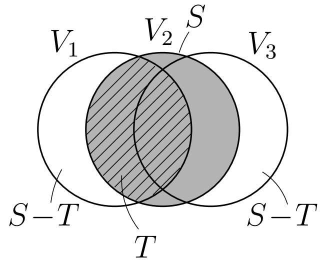
$$= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - r^2 \quad \cdots ②$$

$\dfrac{1}{2} < r < 1$ であるから，$t = \dfrac{1}{2}$ は $(*)$ の範囲に含まれる．

①，② より　$\dfrac{1}{2} - r^2 \geqq 0$　これを解いて　$r \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

与えられた r の値に注意して　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < r \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) V_1 の体積 S から V_1 と V_2 の共通部分の体積を引いた体積，V_3 の体積 S から V_3 と V_2 の共通部分の体積を引いた体積はともに $S-T$，V_2 の体積が S であるから，V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体の体積は



$$2(S-T) + S = \boldsymbol{3S - 2T}$$

(4) S は半径 r の半球が2つと底面の半径 r，高さ1の円柱の体積の和より

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2}$$

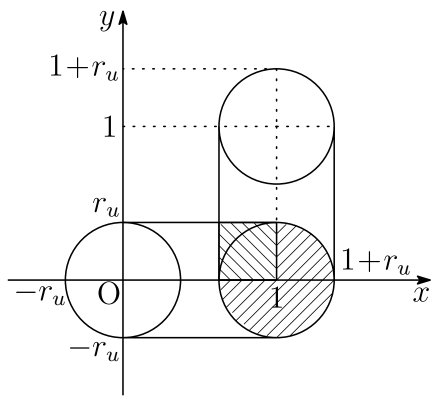
球面 $(x-1)^2+y^2+z^2=r^2$ の平面 $z=u$ による断面は $(-r \leqq u \leqq r)$，円

$$(x-1)^2+y^2=r^2-u^2$$

であり，この円の半径を r_u とすると

$${r_u}^2 = r^2-u^2$$

したがって，T の平面 $z=u$ による断面は，右の図の斜線部分である．



右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{3}{4}\pi {r_u}^2 + {r_u}^2 = \left(\frac{3}{4}\pi+1\right){r_u}^2 = \left(\frac{3}{4}\pi+1\right)(r^2-u^2)$$

よって　$T = \left(\frac{3}{4}\pi+1\right)\int_{-r}^{r}(r^2-u^2)du = \left(\frac{3}{4}\pi+1\right)\cdot\frac{4}{3}r^3 = \boldsymbol{\left(\pi+\frac{4}{3}\right)r^3}$

(3) の結果により，V の体積は

$$\begin{aligned} 3S-2T &= 3\left(\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2\right) - 2\left(\pi+\frac{4}{3}\right)r^3 \\ &= \boldsymbol{\left(2\pi-\frac{8}{3}\right)r^3 + 3\pi r^2} \end{aligned}$$

■

3.5　2019 年 (150 分)

1 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

2 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える．3 点 P，Q，R はそれぞれ辺 AB，AD，CD 上にあり，3 点 A，P，Q および 3 点 P，Q，R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする．$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値，最小値を求めよ．

3 座標空間内に 5 点 A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(−2, 0, 0)，D(0, −2, 0)，E(0, 0, −2) を考える．線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り，直線 AE に平行な平面を α とする．さらに，p は $2<p<4$ をみたす実数とし，点 P(p, 0, 2) を考える．

(1) 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口および，平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ．

(2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ．

(3) 実数 p が (2) で定まる範囲にあるとする．八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geqq 0$，$z \geqq 0$ の部分を点 $(x,\ y,\ z)$ が動くとき，座標平面上で点 $(y,\ z)$ が動く範囲の面積を求めよ．

4 n を 1 以上の整数とする．

(1) n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ．

(2) $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ．

$\boxed{5}$ 以下の問いに答えよ．

(1) n を1以上の整数とする．x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ．

(2) (1) で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ．

(3) (1) で定まる数列 a_1，a_2，$a_3, \cdots, a_n, \cdots$ に対し，

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} {a_n}^n, \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ．

$\boxed{6}$ 複素数 α，β，γ，δ および実数 a，b が，次の3条件をみたしながら動く．

条件1： α，β，γ，δ は相異なる．
条件2： α，β，γ，δ は4次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である．
条件3： 複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は0であり，虚部は0でない．

(1) α，β，γ，δ のうち，ちょうど2つが実数であり，残りの2つは互いに共役な複素数であることを示せ．

(2) b を a で表せ．

(3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

解答例

1 被積分関数を展開すると

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)\\
=&\,x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\\
=&\,x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\\
=&\,x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

求める定積分を I とすると

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx\\
&=\int_0^1\left(x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx+\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

まず

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left(x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx&=\left[\frac{x^3}{3}+2\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1\\
&=\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{8}{3} \qquad \cdots①
\end{aligned}$$

次に，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ について，$x=\tan\theta$ とおくと

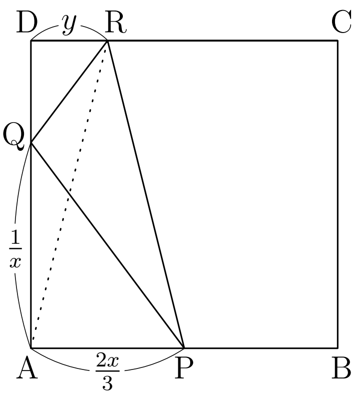
$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\\
&=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4} \qquad \cdots②
\end{aligned}$$

$(*)$，①，② より　$I=\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{35}{12}}$ ■

2 $\dfrac{1}{\mathrm{AQ}}=x$，$\mathrm{DR}=y$ とおくと



$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\dfrac{1}{3}$ より

$$\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{AP}=\frac{2x}{3}$$

$0<\mathrm{AQ}\leqq 1$，$0<\mathrm{AP}\leqq 1$ より

$$0<\frac{1}{x}\leqq 1\quad \text{かつ}\quad 0<\frac{2x}{3}\leqq 1$$

すなわち　　$1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$　　$\cdots$①

$\triangle\mathrm{APR}+\triangle\mathrm{AQR}=\triangle\mathrm{APQ}+\triangle\mathrm{PQR}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\qquad\cdots②$$
$$=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}$$

① を定義域とすると　$\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq\dfrac{2}{3}$　　これは，y の条件をみたす．

② より　$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{\mathrm{AQ}}\cdot\mathrm{DR}=xy=x\left(-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x\right)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{4}{3}x^2$

したがって，次の関数の最大値・最小値を求めればよい．

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2\quad\left(1\leqq x\leqq\frac{3}{2}\right)$$

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=-2x^2+\frac{8}{3}x=-2x\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

x	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

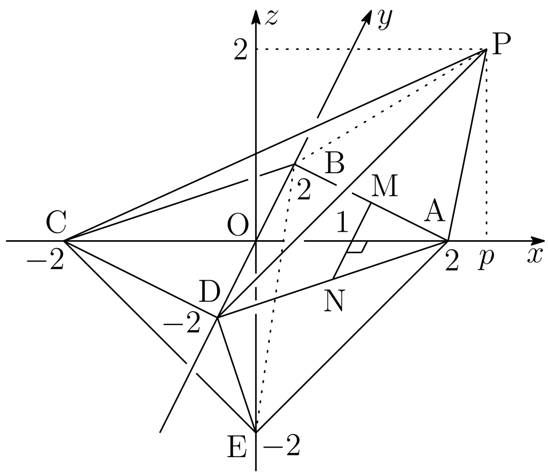
よって　　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$　■

3　(1)　八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口は四角形 PCEA である．平面 α の平面 $y=0$ による切り口は，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を通り，方向ベクトルが $(1,\ 0,\ 1)$ の直線であるから平面 $y=0$ におけるその方程式は

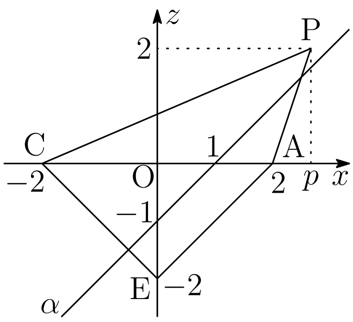
$$z=1(x-1)$$

すなわち　$z=x-1$

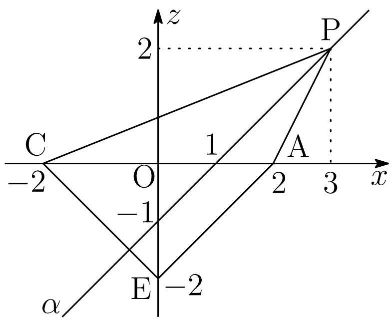
したがって，この直線と P との位置関係により，次の (i)〜(iii) の場合に分けられる．



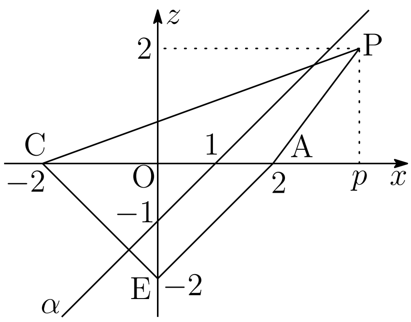
(i) $2<p<3$ のとき



(ii) $p=3$ のとき



(iii) $3<p<4$ のとき



(2)　平面 α は，2 点 M，N および点 $(0,\ 0, -1)$ を通るから，3 点 B，C，D は平面 α に関して，点 E と反対側にあり，3 辺 BE，CE，DE は平面 α とそれぞれ交点をもつ．また，(1)(iii) のように，点 P が点 C と平面 α に関して反対側にあるとき，点 P は，2 点 B，D とも平面 α と反対側にあり，3 辺 BP，CP，DP は平面 α とそれぞれ交点をもつ．以上の 6 個の交点と 2 点 M，N を含めた 8 頂点からなる八角形が，八面体 PABCDE の平面 α による切り口である．よって，求める p の値の範囲は

$$\boldsymbol{3<p<4}$$

補足　$2<p\leqq 3$ のとき，線分 AP と α との交点を Q とする．3 辺 BE，CE，DE と α との 3 交点と 3 点 M，N，Q を頂点とする六角形がその切り口となる．

(3) 平面 α の方程式は $z = x - 1$

八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geqq 0$，$z \geqq 0$ の部分となすのは，次の 4 頂点からなる四角形である．

① 点 M(1, 1, 0)

② 線分 MN と x 軸との交点 (1, 0, 0)

③ 平面 $\alpha : z = x - 1$ と直線 CP : $z = \dfrac{2}{p+2}(x+2)$, $y = 0$ の交点

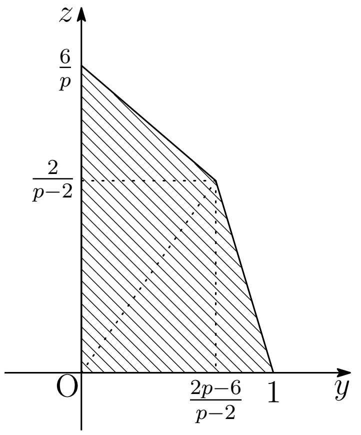
$$\left(\frac{p+6}{p},\ 0,\ \frac{6}{p}\right)$$

④ 平面 $\alpha : z = x - 1$ と直線 BP : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} p \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の交点

(t は媒介変数)

$$\left(\frac{p}{p-2},\ \frac{2p-6}{p-2},\ \frac{2}{p-2}\right)$$

①〜④ より，$(y,\ z)$ の動く範囲 $(y \geqq 0, z \geqq 0)$ は，yz 平面上の 4 点 (1, 0)，(0, 0)，$\left(0,\ \dfrac{6}{p}\right)$，$\left(\dfrac{2p-6}{p-2},\ \dfrac{2}{p-2}\right)$ を頂点とする四角形である．したがって，求める面積は



$$\frac{1}{2}\cdot 1\frac{2}{p-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{p}\cdot\frac{2p-6}{p-2} = \boldsymbol{\frac{7p-18}{p(p-2)}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $5n^2+9$ を n^2+1 で割ると　$5n^2+9=5(n^2+1)+4$

ユークリッドの互除法により，d_n は 4 の約数であり，法 4 について

$n\equiv\pm1$ のとき　$n^2+1\equiv 2 \pmod 4$

$n\equiv 0,\ 2$ のとき　$n^2+1\equiv 1 \pmod 4$

よって　$$\boldsymbol{d_n=\begin{cases}2 & (n\text{ が奇数})\\ 1 & (n\text{ が偶数})\end{cases}}$$

(2) まず　$n^2<n^2+1<(n+1)^2$ であるから，n^2+1 は平方数でない．$\cdots$①

$$(n^2+1)(5n^2+9)\text{ は整数の 2 乗である．}\quad\cdots(*)$$

$(*)$ が成立すると仮定し，(1) の結果から，次の場合分けを行う．

(i) $d_n=1$ のとき，n^2+1 および $5n^2+9$ は平方数となる．
これは ① に反するので矛盾．

(ii) $d_n=2$ のとき

$$n^2+1=2p^2,\quad 5n^2+9=2q^2 \qquad\cdots(**)$$

とおき ($p,\ q$ は互いに素)，2 式から n^2 を消去して整理すると

$$q^2=5p^2+2$$

ここで，法 4 について

$$0^2\equiv 0,\ (\pm1)^2\equiv 1,\ 2^2\equiv 0 \pmod 4,$$
$$q^2\equiv p^2+2 \pmod 4$$

$p\equiv 0,\ 2 \pmod 4$ のとき　$q^2\equiv 2 \pmod 4$ となり，矛盾．

$p\equiv\pm1 \pmod 4$ のとき　$q^2\equiv 3 \pmod 4$ となり，矛盾．

(i)，(ii) より，$(*)$ は成立しない．

別解 $d_n=2$ のとき，$(**)$ により

$$2(n^2+2)=(q+p)(q-p) \qquad\cdots(\mathrm{A})$$

このとき，n は奇数であるから

$$2(n^2+2)\equiv 2 \pmod 4 \quad\cdots①$$

$q+p=(q-p)+2p$ より，$q+p$ と $q-p$ の偶奇は一致するから

$$(q+p)(q-p)\not\equiv 2 \pmod 4 \quad\cdots②$$

①，② より，(A) をみたす $p,\ q$ は存在しない．■

$\boxed{5}$ (1)　　方程式 $x^{2n-1} = \cos x \quad \cdots (*)$

(i) $|x| > 1$ のとき　$|x^{2n-1}| > 1$

したがって，この範囲に方程式 $(*)$ の解は存在しない．

(ii) $-1 \leqq x < 0$ のとき，$-\dfrac{\pi}{2} < -1$ に注意して

$$-1 \leqq x^{2n-1} < 0, \quad \cos x > 0$$

したがって，この範囲に方程式 $(*)$ の解は存在しない．

(iii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$f(x) = x^{2n-1} - \cos x \ (0 \leqq x \leqq 1)$ とおくと

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 - \cos 1 > 0 \quad \cdots ①$$

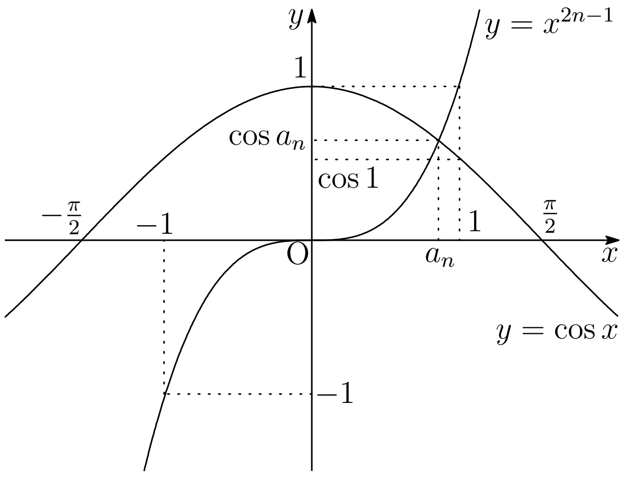
$0 < x < 1$ において　$f'(x) = (2n-1)x^{2n-2} + \sin x > 0$

$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(a_n) = 0 \quad \text{すなわち} \quad {a_n}^{2n-1} - \cos a_n = 0$$

をみたす a_n $(0 < a_n < 1)$ がただ一つ存在する．

(i)〜(iii) より，方程式 $(*)$ は，ただ 1 つの解をもつ．



(2) (1) の結果から　$0 < a_n < 1$　よって　$\cos a_n > \cos 1$

(3) ${a_n}^{2n-1} = \cos a_n$ および (2) の結果により

$$a_n = (\cos a_n)^{\frac{1}{2n-1}} > (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}$$

また，$0 < a_n < 1$ であるから

$$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \cdots ②$$

${a_n}^{2n} = a_n \cos a_n$ であるから，${a_n}^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$ より

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n \cos a_n} = \sqrt{1 \cdot \cos 1} = \sqrt{\cos 1} \quad \cdots ③$$

よって　　$\boldsymbol{a = 1,\ b = \sqrt{\cos 1}}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} &= \frac{{a_n}^{2n} - b^2}{(a_n - a)({a_n}^n + b)} = \frac{a_n(\cos a_n - b^2) + b^2(a_n - a)}{(a_n - a)({a_n}^n + b)} \\ &= \frac{a_n}{{a_n}^n + b} \cdot \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} + \frac{b^2}{{a_n}^n + b} \quad \cdots ④\end{aligned}$$

② に注意して，$g(x) = \cos x$ とすると，$g'(x) = -\sin x$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} = g'(1) = -\sin 1 \quad \cdots ⑤$$

②〜⑤ より

$$\begin{aligned}c = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{{a_n}^n + b} \cdot \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} + \frac{b^2}{{a_n}^n + b}\right) \\ &= \frac{1}{b+b}(-\sin 1) + \frac{b^2}{b+b} = \boldsymbol{\frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}}\end{aligned}$$

別解　$h(x) = \sqrt{x \cos x}$ とおくと　$h'(x) = \dfrac{\cos x - x \sin x}{2\sqrt{x \cos x}}$

$$\begin{aligned}c &= \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n \cdot {a_n}^{2n-1}} - b}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n \cos a_n} - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n) - h(1)}{a_n - 1} = h'(1) = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}\end{aligned}$$

■

6 (1) w が方程式 $z^4-2z^3-2az+b=0\cdots(*)$ の解であるとき

$$w^4-2w^3-2aw+b=0$$

a，b は実数であるから

$$\overline{w^4}-2\overline{w^3}-2a\overline{w}+b=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{w})^4-2(\overline{w})^3-2a\overline{w}+b=0$$

w が方程式 $(*)$ の解であるとき，$\overline{w}$ も $(*)$ の解である．
したがって，方程式 $(*)$ の解の種類は

(A) 実数解が 4 個
(B) 実数解が 2 個と互いに共役な複素数が 1 組
(C) 互いに共役な複素数が 2 組

のいずれかである．
(A) は，明らかに条件 3 に反する．
(C) と仮定し，解を w, $\overline{w}$, u, $\overline{u}$ とすると，$\alpha\beta+\gamma\delta$ は

$$w\,\overline{w}+u\,\overline{u}, \quad wu+\overline{wu}, \quad w\overline{u}+\overline{w}u$$

であるから，これらはすべて実数 (虚部が 0) となり，条件 3 に反する．
よって，方程式 $(*)$ の解の種類は (B) であり，題意は成立する．

(2) (1) の結果から，(B) のとき，その解を α, β, γ, $\overline{\alpha}$ とすると
$(\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0,\ \beta,\ \gamma\ (\beta\neq\gamma)$ は実数$)$

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\gamma\delta &= \alpha\beta+\gamma\overline{\alpha}\\ &= (\beta+\gamma)\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}+(\beta-\gamma)\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2}\\ &= (\beta+\gamma)\mathrm{Re}(\alpha)+(\beta-\gamma)\mathrm{Im}(\alpha)i\end{aligned}$$

条件 3 より，$(\beta+\gamma)\mathrm{Re}(\alpha)=0$，すなわち，

$$(**) \quad \gamma=-\beta\neq 0 \quad \text{または} \quad \mathrm{Re}(\alpha)=0\ (\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0)$$

のとき，条件 1～条件 3 をみたす．

$(**)$ により，次の場合分けを行う．

(i) $\gamma=-\beta\neq 0$ のとき (γ, β は実数)，方程式 $(*)$ は

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta)(z+\beta)=0$$
$$(z^2-2\mathrm{Re}(\alpha)z+|\alpha|^2)(z^2-\beta^2)=0 \quad \cdots ①$$

ゆえに $z^4-2\mathrm{Re}(\alpha)z^3+(|\alpha|^2-\beta^2)z^2+2\mathrm{Re}(\alpha)\beta^2z-|\alpha|^2\beta^2=0$

これと $(*)$ の係数を比較すると

$$-2\mathrm{Re}(\alpha)=-2,\quad |\alpha|^2-\beta^2=0,\quad 2\mathrm{Re}(\alpha)\beta^2=-2a,\quad -|\alpha|^2\beta^2=b$$

したがって $\mathrm{Re}(\alpha)=1$, $|\alpha|^2=\beta^2=-a>0$, $b=-a^2$

これを ① に代入して $(z^2-2z-a)(z^2+a)=0 \quad (a<0)$

方程式 $z^2+a=0$ $(a<0)$ は異なる 2 つの実数解をもつ．

方程式 $z^2-2z-a=0$ が虚数解をもつから，$a<0$ に注意して

$$(-2)^2-4\cdot 1(-a)<0 \quad \text{ゆえに} \quad a<-1$$

よって $b=-a^2$ $(a<-1)$

(ii) $\mathrm{Re}(\alpha)=0$ $(\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0)$ のとき，方程式 $(*)$ は

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta)(z-\gamma)=0$$
$$(z^2+|\alpha|^2)(z^2-(\beta+\gamma)z+\beta\gamma)=0 \quad \cdots ②$$

ゆえに $z^4-(\beta+\gamma)z^3+(|\alpha|^2+\beta\gamma)z^2-|\alpha|^2(\beta+\gamma)z+|\alpha|^2\beta\gamma=0$

これと $(*)$ の係数を比較すると

$$-(\beta+\gamma)=-2,\quad |\alpha|^2+\beta\gamma=0,\quad -|\alpha|^2(\beta+\gamma)=-2a,\quad |\alpha|^2\beta\gamma=b$$

したがって $\beta+\gamma=2$, $|\alpha|^2=a>0$, $\beta\gamma=-a$, $b=-a^2$

これを ② に代入して $(z^2+a)(z^2-2z-a)=0 \quad (a>0)$

方程式 $z^2+a=0$ $(a>0)$ は異なる 2 つの虚数解をもつ．

方程式 $z^2-2z-a=0$ $(a>0)$ の判別式は

$$D=(-2)^2-4\cdot(-a)=4+4a>0$$

ゆえに，方程式 $z^2-2z-a=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ．

よって $b=-a^2$ $(a>0)$

(i)，(ii) より $\boldsymbol{b=-a^2\ (a<-1,\ 0<a)}$

(3) (2) の結果から，方程式 $(*)$ は

$$(z^2-2z-a)(z^2+a)=0 \quad (a<-1,\ 0<a)$$

(i) (2)(i) から，$a<-1$ のとき，方程式 $(*)$ の解は

$$z=1\pm\sqrt{-a-1}\,i,\ \pm\sqrt{-a}$$

このとき　$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{-a}\pm\sqrt{-a-1}\,i \quad (a<-1) \quad \cdots③$

(ii) (2)(ii) から，$a>0$ のとき，方程式 $(*)$ の解は

$$z=1\pm\sqrt{a+1},\ \pm\sqrt{a}\,i$$

このとき　$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{a+1}\pm\sqrt{a}\,i \quad (a>0) \quad \cdots④$

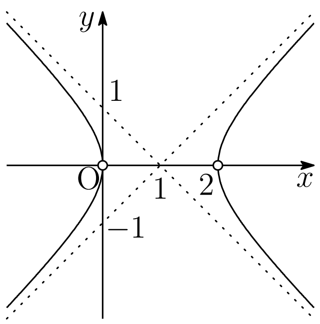
③ について，$a'=-a-1$ とおくと

$$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{a'+1}\pm\sqrt{a'}\,i \quad (a'>0) \quad \cdots③'$$

$\alpha+\beta=x+yi$ とおくと，③′，④ から

$$x=1\pm\sqrt{a+1},\quad y=\pm\sqrt{a} \quad (a>0)$$

上の2式から　$(x-1)^2-y^2=1 \quad (y\neq 0)$
よって，$\alpha+\beta$ がとりうる範囲は右の図のようになる．



■

3.6　2020 年 (150 分)

1 a，b，c，p を実数とする．不等式

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&>0\\ bx^2+cx+a&>0\\ cx^2+ax+b&>0 \end{aligned}$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする．

(1) a，b，c はすべて 0 以上であることを示せ．

(2) a，b，c のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ．

(3) $p=0$ であることを示せ．

2 平面上の点 P，Q，R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle\mathrm{PQR}$ で表す．また，P，Q，R が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR}=0$ とする．A，B，C を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC}=1$ とする．この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ．

3 $-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，

$$\begin{aligned} x(t)&=(1+t)\sqrt{1+t}\\ y(t)&=3(1+t)\sqrt{1-t} \end{aligned}$$

とする．座標平面上の点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ を考える．

(1) $-1<t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ．

(2) 原点と P の距離を $f(t)$ とする．$-1 \leqq t \leqq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ，最大値を求めよ．

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし，C と x 軸で囲まれた領域を D とする．原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき，D が通過する領域の面積を求めよ．

$\boxed{4}$ n，k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる．k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく．例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である．

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ．

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える．$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ．

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n，k で表せ．

$\boxed{5}$ 座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える．この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐 (内部を含む) を S とする．また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を考える．

(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする．平面 $z = 1$ による S の切り口および，平面 $z = 1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ．

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ．

6 以下の問いに答えよ．

(1) A，α を実数とする．θ の方程式

$$A\sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha) = 0$$

を考える．$A > 1$ のとき，この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せ．

(2) 座標平面上の楕円

$$C : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える．また，$0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする．D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r $(0 < r < 1)$ が存在することを示せ．また，そのような r の最大値を求めよ．

条件：C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある．

解答例

1 (1) 一般に，$l<0$ とする関数 $f(x)=lx^2+mx+n$ は

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} lx^2\left(1+\frac{m}{lx}+\frac{n}{lx^2}\right)<0$$

であるから，不等式 $f(x)>0$ が $x>p$ を解にもつことはない．

連立不等式 $$(*)\begin{cases} ax^2+bx+c>0 \\ bx^2+cx+a>0 \\ cx^2+ax+b>0 \end{cases}$$

の解が，$x>p$ であるから，これらの x^2 の係数 $a,\ b,\ c$ が負になることはない．よって，$a,\ b,\ c$ はすべて 0 以上である．

(2) 一般に，$l'>0$ とする関数 $g(x)=l'x^2+m'x+n'$ は

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} l'x^2\left(1+\frac{m'}{l'x}+\frac{n'}{l'x^2}\right)>0$$

であるから，$x<q$ が不等式 $g(x)>0$ を満たすように q がとれる．
$(*)$ の x^2 の係数 $a,\ b,\ c$ がすべての正であるとき，$x>p$ 以外に $x<q'$ も連立不等式 $(*)$ の解となる q' がとれるから，条件に反する．これと (1) の結果から，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 個は 0 である．

(3) (i) 0 である個数が 1 個で，例えば，$c=0,\ a>0,\ b>0$ とすると，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^2+bx>0 \\ bx^2+a>0 \\ ax+b>0 \end{cases}$$

上の第 1 式から，$x<-\dfrac{b}{a},\ 0<x$，第 2 式から，すべての実数，
第 3 式から，$x>-\dfrac{b}{a}$．これらを同時に満たす範囲は　$x>0$
$(a=0,\ b>0,\ c>0)$，$(b=0,\ c>0,\ a>0)$ の場合も同様に　$x>0$

(ii) 0 である個数が 2 個で，例えば，$a=b=0,\ c>0$ とすると，$(*)$ は

$$\begin{cases} c>0 \\ cx>0 \\ cx^2>0 \end{cases}\qquad \text{これを解いて}\quad x>0$$

(iii) 3 個とも 0 であるとすると，$(*)$ は，$0>0$ より，解なしとなる．
これは，$(*)$ の解 $x>p$ に反するので，不適．

(i)〜(iii) より　$p=0$ ■

2　(1) 与えれた条件は，次のように表される．

$$(*)\quad \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=t\quad (2 \leqq t \leqq 3)$$

平面上の点 X が △ABC の内部にあるとき，

$$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=1$$

であるから，X は △ABC の外部にある．直線 AB，BC，CA によって分けれた領域で，△ABC の外部にある領域を右下の図のように D_k，E_k とする $(k=1,2,3)$．境界線は，隣接する両方の領域に含まれるものとする．

- $\mathrm{X} \in D_1$ のとき　$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{ABC}$
  上式および $\triangle\mathrm{ABC}=1$ を $(*)$ に代入すると

$$2\triangle\mathrm{BCX}+1=t \quad \text{ゆえに} \quad \triangle\mathrm{BCX}=\frac{t-1}{2}$$

線分 AB の B の延長線上に F_t，線分 AC の C の延長線上に G_t をそれぞれ

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BF}_t=\mathrm{AC}:\mathrm{CG}_t=1:\frac{t-1}{2}$$

となるようにとると，X は線分 $\mathrm{F}_t\mathrm{G}_t$ 上にある．

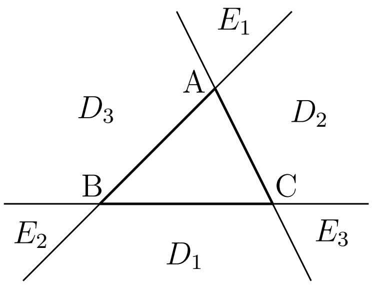
- $\mathrm{X} \in E_1$ のとき　$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{BCX}-\triangle\mathrm{ABC}$
  上式および $\triangle\mathrm{ABC}=1$ を $(*)$ に代入すると

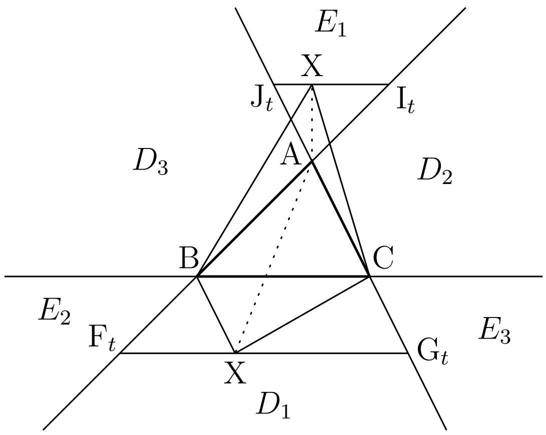
$$2\triangle\mathrm{BCX}-1=t \quad \text{ゆえに} \quad \triangle\mathrm{BCX}=\frac{t+1}{2}$$

線分 AB の A の延長線上に I_t，線分 AC の A の延長線上に J_t をそれぞれ

$$\mathrm{BA}:\mathrm{AI}_t=\mathrm{CA}:\mathrm{AJ}_t=1:\frac{t+1}{2}-1=1:\frac{t-1}{2}$$

となるようにとると，X は線分 $\mathrm{I}_t\mathrm{J}_t$ 上にある．

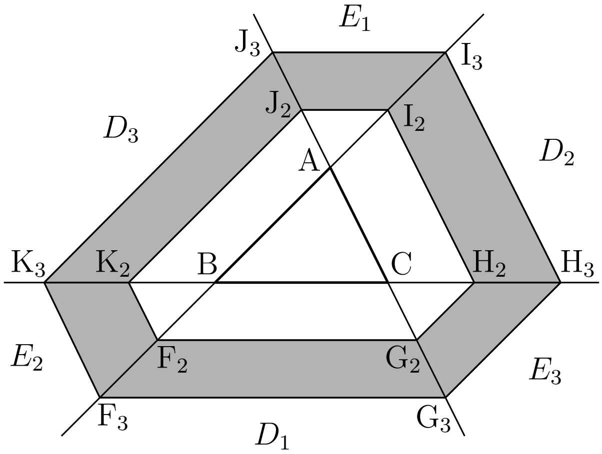




同様に，線分 BC の C の延長線上に H_t，線分 BC の B の延長上に K_t をそれぞれ

$$\mathrm{BC} : \mathrm{CH}_t = \mathrm{CB} : \mathrm{BK}_t = 1 : \frac{t-1}{2}$$

をとると，$2 \leqq t \leqq 3$ であるから，点 X は六角形 $\mathrm{F_2G_2H_2I_2J_2K_2}$ の外部と六角形 $\mathrm{F_2G_2H_2I_2J_2K_2}$ の内部で囲まれた部分を動く．



D_k，E_k で点 X の動きうる範囲の面積をそれぞれ $S(D_k)$，$D(E_k)$ とおくと $(k = 1, 2, 3)$

$$\frac{\mathrm{AF}_3}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AG}_3}{\mathrm{AC}} = 2, \qquad \frac{\mathrm{AF}_2}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AG}_2}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{2},$$
$$\frac{\mathrm{AI}_3}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AJ}_3}{\mathrm{AC}} = 1, \qquad \frac{\mathrm{AI}_2}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AJ}_2}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}$$

ゆえに　$S(D_1) = 2^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{7}{4}$，$S(E_1) = 1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

同様の計算により

$$S(D_1) = S(D_2) = S(D_3), \quad S(E_1) = S(E_2) = S(E_3)$$

よって　$S = 3\{S(D_1) + S(E_1)\} = 3\left(\dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{4}\right) = \boldsymbol{\dfrac{15}{2}}$ ■

3 (1) $x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$, $y(t)=3(1+t)\sqrt{1-t}$ より $(-1 \leqq t \leqq 1)$

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}=3\sqrt{\frac{2}{1+t}-1}$$

$-1<t \leqq 1$ において，$\dfrac{2}{1+t}-1$ は単調減少であるから，$\dfrac{y(x)}{x(t)}$ は $-1<t \leqq 1$ において単調に減少する．

(2) 原点 O と点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の距離 $f(t)$ より

$$\begin{aligned} f(t)^2 &= x(t)^2+y(t)^2 \\ &= (1+t)^3+9(1+t)^2(1-t) \\ &= 2(1+t)^2(5-4t) \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

ゆえに　$$\frac{1}{2}f(t)^2=(1+t)^2(5-4t)$$

この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} f(t)f'(t) &= 2(1+t)(5-4t)+(1+t)^2(-4) \\ &= 6(1+t)(1-2t) \end{aligned}$$

① および $f(t)>0$ であるから $(-1<t<1)$

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

よって　最大値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{6}}{2}}$

補足 3 正数 $2(1+t)$, $2(1+t)$, $5-4t$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

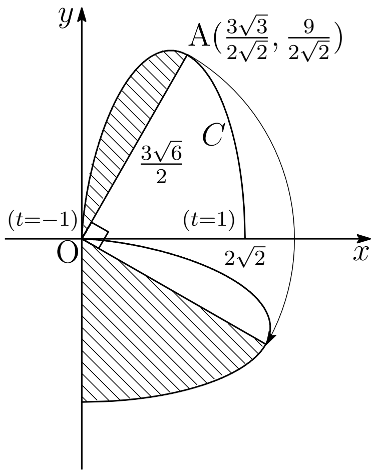
$$\frac{2(1+t)+2(1+t)+5-4t}{3} \geqq \sqrt[3]{\{2(1+t)\}^2(5-4t)}$$

したがって　$2(1+t)^2(5-4t) \leqq \dfrac{27}{2}$　ゆえに　$f(t) \leqq \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

上式において，等号が成立するとき

$$2(1+t)=5-4t \quad \text{すなわち} \quad t=\frac{1}{2}$$

(3) C と x 軸で囲まれた領域の面積を S_1 とすると，右の図の斜線部分の面積は S_1 に等しい．



$$\begin{aligned}S_1 &= \int_{x(-1)}^{x(1)} y\,dx = \int_{-1}^{1} y(t)x'(t)\,dt\\ &= \int_{-1}^{1} 3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt\\ &= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt\\ &= 9\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt = 9\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{4} = \frac{9\pi}{4}\end{aligned}$$

$f(t)$ が最大となる C 上の点を A とすると　$\mathrm{OA} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

OA を半径とする $\dfrac{1}{4}$ 円の面積を S_2 とすると　$S_2 = \dfrac{1}{4}\pi\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \dfrac{27\pi}{8}$

求める面積は　$S_1 + S_2 = \dfrac{9\pi}{4} + \dfrac{27\pi}{8} = \boldsymbol{\dfrac{45\pi}{8}}$

発展 積分公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる[4]．これに $m = n = \dfrac{1}{2}$，$\alpha = -1$，$\beta = 1$ を代入すると

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}\cdot 2^2$$

左辺は，中心を原点とする半径1の円の x 軸の上側にある半円の面積であるから

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{1}{2}!\right)^2 \quad ゆえに\quad \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

さらに，$\dfrac{3}{2}! = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}! = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$，$\dfrac{5}{2}! = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}! = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}$，$\cdots$ となる．本題では

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt\\ &= \frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}!\cdot\frac{1}{2}!}{3!}\cdot 2^3 = \frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{6}\cdot 8 = \frac{9\pi}{4}\end{aligned}$$

■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{4}$ (1) 等式 $(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1})^2=\sum_{k=0}^{n-1}{x_k}^2+2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1}x_ix_j$

において，$x_m=2^m$ とすると $(m=0,1,\ldots,n-1)$

$$
\begin{aligned}
(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2&=\sum_{k=0}^{n-1}(2^k)^2+2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1}2^i{\cdot}2^j\\
\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2&=\frac{4^n-1}{4-1}+2a_{n,2}\\
4^n-2{\cdot}2^n+1&=\frac{1}{3}{\cdot}4^n-\frac{1}{3}+2a_{n,2}
\end{aligned}
$$

ゆえに　$a_{n,2}=\frac{1}{3}{\cdot}4^n-2^n+\frac{2}{3}$　　よって　$\boldsymbol{a_{n,2}=\frac{1}{3}(2^n-1)(2^n-2)}$

(2) $f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$ の定義により，次式が成立する．

$$f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}x^k=\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x)\quad\cdots(*)$$

したがって

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x)&=\prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x)=(1+2^nx)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x)\\
&=(1+2^nx)f_n(x),\\
f_{n+1}(x)&=\prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x)=(1+x)\prod_{k=2}^{n+1}(1+2^{k-1}x)\\
&=(1+x)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}{\cdot}2x)=(1+x)f_n(2x)
\end{aligned}
$$

よって　$\boldsymbol{\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx,\quad\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x}$

(3) (2) で示した

$$(**)\begin{cases} f_{n+1}(x) = (1+2^n x)f_n(x) \\ f_{n+1}(x) = (1+x)f_n(2x) \end{cases}$$

の第 1 式から　$f_{n+1}(2x) = (1+2^{n+1}x)f_n(2x)$

これと $(**)$ の第 2 式の辺々の差をとると

$$f_{n+1}(2x) - f_{n+1}(x) = (2^{n+1}-1)xf_n(2x) \tag{A}$$

$(*)$ より

$$\begin{aligned} f_{n+1}(2x) - f_{n+1}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k}(2x)^k - \left\{1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k}x^k\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= a_{n+1,1}x + \sum_{k=2}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= (2^{n+1}-1)x + \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1} \qquad \text{(B)} \\ (2^{n+1}-1)xf_n(2x) &= (2^{n+1}-1)x\left\{1 + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}(2x)^k\right\} \\ &= (2^{n+1}-1)x + (2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{n,k}x^{k+1} \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

(B)，(C) を (A) に代入して，整理すると

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1} = (2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n}2^k a_{n,k}x^{k+1}$$

上式の同じ次数の項の係数は等しいから

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1} = (2^{n+1}-1)2^k a_{n,k}$$

よって　$$\boldsymbol{\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{(2^{n+1}-1)2^k}{2^{k+1}-1}}$$ ■

5 (1) S の表す領域は

$$(*)\quad x^2+y^2 \leqq \left(\frac{2-z}{2}\right)^2,\ 0 \leqq z \leqq 2$$

S の $z=1$ による切り口を S' とすると　$S' : x^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{4},\quad z=1$

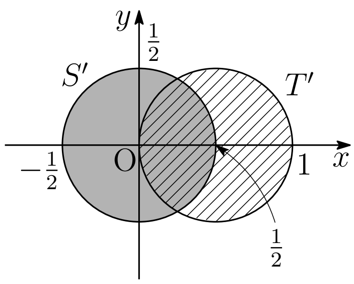
次に，S の底面にある点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ 0)$ をとると　$X^2+Y^2 \leqq 1 \quad \cdots ①$

AP の中点を $\mathrm{M}(x,\ y,\ 1)$ とすると

$$\frac{1+X}{2}=x,\quad \frac{Y}{2}=y,\quad \text{ゆえに}\quad X=2x-1,\ Y=2y$$

これらを ① に代入すると

$$(2x-1)^2+(2y)^2 \leqq 1$$



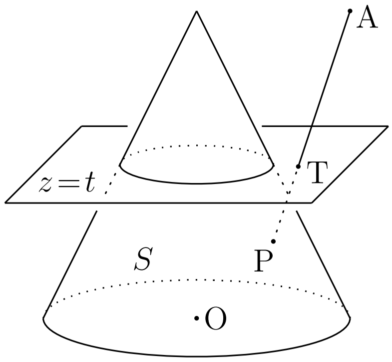
平面 $z=1$ による T の切り口を T' とすると

$$T' : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \frac{1}{4},\quad z=1$$

(2) S の平面 $z=a$ 上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ Z)$ は，(∗) より，次式を満たす．

$$X^2+Y^2 \leqq \left(\frac{2-a}{2}\right)^2, \quad Z=a \quad \cdots ②$$

線分 AP と平面 $z=t$ $(a \leqq t \leqq 2)$ との共有点を $\mathrm{T}(x,\ y,\ t)$ とすると，$\mathrm{P}(X,\ Y,\ a)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ の z 座標に注意すると，点 P は線分 TA を $t-a:2-a$ に外分するから

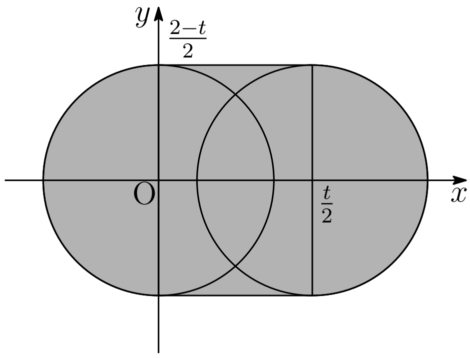


$$X=\frac{-(2-a)x+(t-a)}{t-2},$$
$$Y=\frac{-(2-a)y}{t-2}$$

上の 2 式を ② に代入すると

$$\left\{\frac{-(2-a)x+(t-a)}{t-2}\right\}^2+\left\{\frac{-(2-a)y}{t-2}\right\}^2 \leqq \left(\frac{2-a}{2}\right)^2$$
$$\left(x-\frac{t-a}{2-a}\right)^2+y^2 \leqq \left(\frac{2-t}{2}\right)^2$$

上式で t を固定して，a を $0 \leqq a \leqq t$ の値をとると，半径 $\dfrac{2-t}{2}$ は不変で，中心は $(0,\ 0)$ から $\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$ にあるから，平面 $z=t$ における描く図形は，右図のようになる．その面積を $S(t)$ とすると



$$S(t)=\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}(2-t)$$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\int_0^2 S(t)\,dt=\int_0^2\left\{\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}(2-t)\right\}dt\\&=-\frac{\pi}{12}\Big[\ (2-t)^3\ \Big]_0^2+\frac{1}{12}(2-0)^3\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}(\pi+1)}\end{aligned}$$

■

6 (1) $f(\theta)=A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)$ とおくと，$A>1$，$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$ より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)>0,\quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)<0$$
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)>0,\quad f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)<0$$

方程式 $f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right)$ にそれぞれ少なくとも 1 つずつ解をもつ．また，$f(0)\leqq 0$ のときは，$f(\theta)=0$ は区間 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ に解をもち，$f(0)=f(2\pi)>0$ のときは，$f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right)$ に少なくとも 1 つ解をもつ．よって，$f(\theta)=0$ は，$0\leqq\theta<2\pi$ において，少なくとも 4 個解をもつ．

(2) $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ より，$x=\sqrt{2}\cos\theta,\ y=\sin\theta$ とすると $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=\left(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \cos\theta\right)$$

したがって，C 上の点 $(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ における法線の方程式は

$$(-\sqrt{2}\sin\theta)(x-\sqrt{2}\cos\theta)+(\cos\theta)(y-\sin\theta)=0$$

すなわち　　$l:\sqrt{2}x\sin\theta-y\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$

$D:2x^2+y^2<r^2$ の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{B\cos(-\beta)}{\sqrt{2}},\ B\sin(-\beta)\right)$ が l 上の点であるとき $(0\leqq B<r,\ 0\leqq\beta<2\pi)$

$$\sqrt{2}\left(\frac{B\cos\beta}{\sqrt{2}}\right)\sin\theta-(-B\sin\beta)\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$$
$$\sin 2\theta-2B\sin(\theta+\beta)=0 \qquad \text{(A1)}$$

(i) $B=0$ のとき，(A1) を満たす θ は　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$

$\mathrm{P}(0,\ 0)$ に対して，Q は $(\pm\sqrt{2},\ 0)$，$(0,\pm1)$ の 4 点存在する．

(ii) $B>0$ のとき，(A1) より

$$\frac{1}{2B}\sin 2\theta-\sin(\theta+\beta)=0$$

(1) の結果から，$\dfrac{1}{2B}>1$，すなわち，$B<\dfrac{1}{2}$ となるように

$$0<r\leqq\frac{1}{2}$$

をとればよい．

$r > \dfrac{1}{2}$ であるとき，$B = \dfrac{1}{2}$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$ を (A1) に代入すると

$$\sin 2\theta - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

これから　$2\theta = \theta + \dfrac{\pi}{4} + 2m\pi,\ \pi - \left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2n\pi$　(m，n は整数)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意して解くと　$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{11\pi}{12},\ \dfrac{19\pi}{12}$

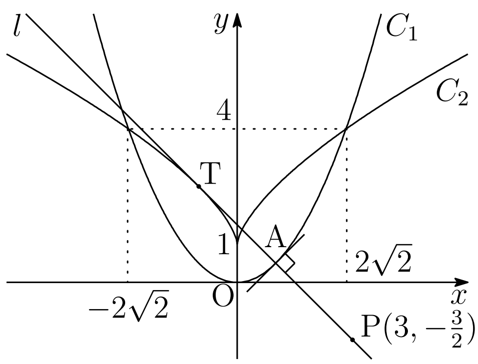
このとき，θ は 3 個であるから，条件を満たす r の最大値は　$\boldsymbol{r = \dfrac{1}{2}}$

補足 $\beta = \dfrac{\pi}{4}$ 以外に，$\beta = \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ としてもよい．実際，

$$\begin{aligned}
\beta = \frac{3\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta &= \frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{12},\ \frac{17\pi}{12}\\
\beta = \frac{5\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta &= \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12}\\
\beta = \frac{7\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta &= \frac{7\pi}{4},\ \frac{5\pi}{12},\ \frac{13\pi}{12}
\end{aligned}$$

解説 本題は，点 P から楕円 $C : \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ に引いた法線が 4 本引ける領域について考察する問題である．楕円の法線群の包絡線について理解しておくと，本題の主旨が理解できる．法線が引ける本数は，包絡線に引ける接線の本数に等しい．例えば，放物線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ の法線群の包絡線は $C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ である[5]．y 軸上にない点 P をとると，C_2 の下側にある点 P からは C_1 に 1 本の法線，C_2 上の点 P から C_1 に 2 本の法線，C_2 の上側にある点 P からは C_1 に 3 本の法線が引ける．また，y 軸上の点からは C_1 に 1 本の法線が引ける．

P$(3, -\frac{3}{2})$ から包絡線 C_2 に引いた接線 $l : y = -x + \frac{5}{2}$ は第 2 象限の点 T$(-1,\ \frac{5}{2})$ で接し，l と C_1 の第 1 象限の交点は A$(1,\ \frac{1}{2})$ である．このとき C_1 の点 A における法線が l である．また，C_1 の A における接触円 (曲率円) の中心が T である．



[5]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf の $\boxed{3}$ を参照．

別解 $C : \dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上に点 $\mathrm{X}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$.

点 X の接方向は $(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \cos\theta)$ であるから，C の点 X における法線は

$$(-\sqrt{2}\sin\theta)(x-\sqrt{2}\cos\theta)+(\cos\theta)(y-\sin\theta)=0$$

すなわち　$\sqrt{2}x\sin\theta - y\cos\theta = \sin\theta\cos\theta$

C 上に隣接 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{2}\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2}\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとると $(\alpha \neq \beta)$，A，B における法線は，それぞれ

$$\begin{cases} \sqrt{2}x\sin\alpha - y\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha & \cdots ① \\ \sqrt{2}x\sin\beta - y\cos\beta = \sin\beta\cos\beta & \cdots ② \end{cases}$$

$① \times \cos\beta - ② \times \cos\alpha$ より (y を消去)

$$\sqrt{2}(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)x = \cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha - \sin\beta)$$

これを解いて　$x = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta(\sin\beta - \sin\alpha)}{\sqrt{2}\sin(\beta-\alpha)} \quad \cdots (*)$

$(*)$ において，$\beta \to \alpha$ とすると

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\alpha} x &= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\cos\alpha\cos\beta(\sin\beta - \sin\alpha)}{\sqrt{2}\sin(\beta-\alpha)} \\ &= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}$ は $\sin x$ の $x=\alpha$ における微分係数 $\cos\alpha$，

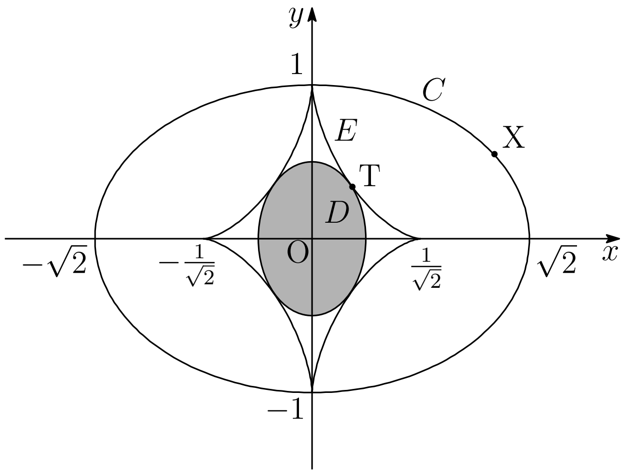
また，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\beta-\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=1$ であるから

$$\lim_{\beta\to\alpha} x = \frac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}} \quad \text{これを①に代入すると} \quad \lim_{\beta\to\alpha} y = -\sin^3\alpha$$

点 A に対応する点 $\left(\dfrac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}},\ -\sin^3\alpha\right)$ が描く軌跡 E の方程式は

$$x = \frac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}},\quad y = -\sin^3\alpha \quad \text{すなわち} \quad E : (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

与えれた条件を満たす点 P は，E の内部の点である (境界線を含まない).
$\partial D : 2x^2+y^2=r^2$ とすると，求める r は ∂D と E が接するときである．
この ∂D と E の第1象限における共有点を A とすると，A におけるこれらの接線は，共通接線である．



∂D より　$4x+2yy'=0$　ゆえに　$y'=-\dfrac{2x}{y}$

E より　$\dfrac{2}{3}(\sqrt{2}x)^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$　ゆえに　$y'=-\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

したがって　$-\dfrac{2x}{y}=-\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$　第1象限の点であるから　$y=\sqrt{2}x$

これと E の方程式を連立すると　$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

点 A は ∂D の点であるから

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=r^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r=\frac{1}{2}}$$

補足 E の内部 (境界を含まない)E' の点から E に引ける接線は4本ある[6]．例えば，第1象限にある E' の点からは，E に第1象限で接する l_1，l_1' の2本の接線，第2象限で接する l_2，第4象限で接する l_4 がある．l_1，l_1' と C の第4象限の交点が，C のそれぞれの点における法線である．l_2 と C の第3象限の交点が，C の点における法線である．l_4 と C の第1象限の交点が，C の点における法線である．■

[6]http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2020_04_19.pdf を参照

第 4 章　東京工業大学

出題分野 (2011-2020) 180 分

◀	東京工業大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明									1	
	複素数と方程式										
	図形と方程式										
	三角関数										
	指数関数と対数関数		2								
	微分法と積分法		3								
III	式と曲線			5							
	複素数平面							5	1	3	2
	関数										
	極限			4	5	1					
	微分法とその応用	3		3	2	4	1	3	3	5	
	積分法	2						2		2	5
	積分法の応用	4	4·6		4	3	5		4		4
A	場合の数と確率		1	1			2	4			
	整数の性質			1	1	5	4	1	2		1
	図形の性質						3				
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル		1			2					3
	数列								5	4·5	
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	1	5	2	3						

数字は問題番号

4.1　2015 年 (180 分)

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 5,\quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

2 四面体 OABC において，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{BC} = 1$，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = x$ とする．頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする．頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を H$'$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ と表す．このとき，p，q，r および s，t を x の式で表せ．

(2) 四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ．また，x が変化するときの V の最大値を求めよ．

3 $a > 0$ とする．曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x = a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする．

(1) A の体積 V を求めよ．

(2) 点 $(t,\ 0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)} ds$$

を示せ．

(3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx$$

を示せ．

$\boxed{4}$ xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t > 0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = t^2 \cos t, \quad y = t^2 \sin t$$

で表されている．原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \theta(t)$ を求めよ．

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t > 0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする．このとき，$t_2 - t_1 < \pi$ を示せ．

$\boxed{5}$ n を相異なる素数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k$ $(k \geqq 1)$ の積とする．a，b を n の約数とするとき，a，b の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，

$$f(a,\ b) = \frac{L}{G}$$

とする．

(1) $f(a,\ b)$ が n の約数であることを示せ．

(2) $f(a,\ b) = b$ ならば，$a = 1$ であることを示せ．

(3) m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする．

$$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)$$

が偶数であることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は

$$x = \frac{4x-9}{x-2} \quad \text{すなわち} \quad (x-3)^2 = 0$$

この方程式の解が $x = 3$ であるから

$$a_{n+1} - 3 = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} - 3 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_{n+1}-3} = \frac{1}{a_n - 3} + 1$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-3}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-3}$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-3} = \frac{1}{a_1-3} + (n-1) = \frac{2n-1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = \frac{6n-1}{2n-1}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(6k-1)}{2k-1} \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left(3k+1+\frac{1}{2k-1}\right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{2}n(n+1)+n+\frac{1}{2k-1}\right\} \\ &= 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

ここで　$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n-1} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \leqq \sum_{k=1}^{n}$$

すなわち　$$\frac{n}{2n-1} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \leqq n \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると，次式から明らか.

$$3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(2n-1)} \leqq b_n \leqq 3 + \frac{4}{n+1} \qquad \cdots (*)$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{(n+1)(2n-1)}\right\} = 3,\quad \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n+1}\right) = 3$

上の 2 式から，$(*)$ にはさみうちの原理を適用すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \mathbf{3}$

解説 p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式 $\quad a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$

$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．

$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px+q}{rx+s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s-p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n+q}{ra_n+s} - \frac{p\alpha+q}{r\alpha+s} = \frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)(ra_n+s)} \quad \cdots (***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps-qr)(a_n-\beta)}{(r\beta+s)(ra_n+s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha} = \frac{r\alpha+s}{r\beta+s}\cdot\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha} = \frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}\left(\frac{r\alpha+s}{r\beta+s}\right)^{n-1}$$

これから，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数について

$$(s-p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p+s)^2 = 4(ps-qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p-s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p+s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)\{r(a_n-\alpha)+r\alpha+s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p+s)^2(a_n-\alpha)}{\frac{1}{2}(p+s)\{r(a_n-\alpha)+\frac{1}{2}(p+s)\}} \end{aligned}$$

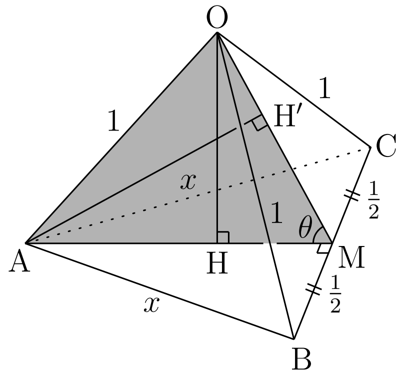
逆数をとると $\quad \dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha} = \dfrac{1}{a_n-\alpha} + \dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差 $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha} = \frac{1}{a_1-\alpha} + \frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる． ■

2 (1) BC の中点を M とし，$\theta = \angle\mathrm{OMA}$ とすると



$$\mathrm{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathrm{MA} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BM}^2} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$$

$\triangle\mathrm{OAM}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OM}^2 + \mathrm{MA}^2 - \mathrm{OA}^2}{2\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{MA}} = \frac{\frac{3}{4} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) - 1}{2\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{MA}} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{MA}}$$

上式より，$\mathrm{OM}\cos\theta = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2}}{2\mathrm{MA}}$，$\mathrm{MA}\cos\theta = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2}}{2\mathrm{OM}}$ $\cdots$ ① であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + (\mathrm{OM}\cos\theta){\cdot}\frac{\overrightarrow{\mathrm{MA}}}{\mathrm{MA}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2\mathrm{MA}^2}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{MA}}\\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}\left(\vec{a} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right)\\ &= \frac{2x^2 - 1}{4x^2 - 1}\vec{a} + \frac{x^2}{4x^2 - 1}(\vec{b} + \vec{c}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH'}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + (\mathrm{MA}\cos\theta){\cdot}\frac{\overrightarrow{\mathrm{MO}}}{\mathrm{MO}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2\mathrm{OM}^2}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \frac{2}{3}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{4 - 2x^2}{3}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{2 - x^2}{3}(\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{p = \dfrac{2x^2 - 1}{4x^2 - 1}}$，$\boldsymbol{q = r = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}}$，$\boldsymbol{s = t = \dfrac{2 - x^2}{3}}$

(2) ① より，$\mathrm{MA}\cos\theta = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{MA}^2\sin^2\theta &= \mathrm{MA}^2 - (\mathrm{MA}\cos\theta)^2 = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2\\ &= -\frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}(x^2 - 2)^2\end{aligned}$$

$\mathrm{AH'} = \mathrm{MA}\sin\theta$ であるから，$V = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}{\cdot}\mathrm{AH'} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}\sqrt{3 - (x^2 - 2)^2}}$

よって，$x = \sqrt{2}$ のとき，V は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{12}}$ をとる．

補足 $\triangle\mathrm{OAM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{MA}\sin\theta$ より，$V = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAM}{\cdot}\mathrm{BC} = \dfrac{1}{12}\sqrt{3 - (x^2 - 2)^2}$

別解 $\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$|\vec{b}-\vec{a}| = |\vec{c}-\vec{a}| = x$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1 - \dfrac{x^2}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は平面 ABC に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0$ より

$$(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0, \quad (p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0$$

これらを整理すると

$$-x^2p + x^2q + (x^2-1)r = 0, \quad -q + r = 0$$

上の 2 式および $p+q+r=1$ により　$\boldsymbol{p = \dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}}$，$\boldsymbol{q = r = \dfrac{x^2}{4x^2-1}}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH'}}$ は平面 OBC に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{c} = 0$ より

$$(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{b} = 0, \quad (s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{c} = 0$$

これらを整理すると

$$2s + t + x^2 - 2 = 0, \quad s + 2t + x^2 - 2 = 0$$

よって　$\boldsymbol{s = t = \dfrac{2-x^2}{3}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH'}} = s(\vec{b}+\vec{c})$ より

$$\mathrm{OH'}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OH'}}|^2 = s^2(|\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2) = \frac{(2-x^2)^2}{3}$$

したがって　$\mathrm{AH'} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OH'}^2} = \sqrt{1 - \dfrac{(2-x^2)^2}{3}}$

よって　$V = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AH'} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \sin 60^\circ\right)\mathrm{AH'} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}\sqrt{3-(2-x^2)^2}}$

また，V が最大となるのは，A から平面 OBC に下ろした垂線 AH$'$ の長さが最大となる，すなわち，H$'$ が O と一致するときであるから

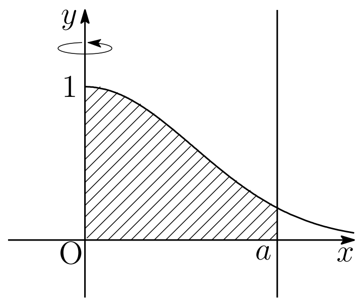
$$\overrightarrow{\mathrm{OH'}} = \frac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{0} \quad \text{よって} \quad x = \sqrt{2}$$

このとき，$\mathrm{AH'} = \mathrm{AO} = 1$ より，V の最大値は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AH'} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin 60^\circ\right)\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}$$

■

3 (1) 求める体積 V は



$$V = 2\pi \int_0^a xe^{-x^2}\,dx$$

$$= \pi\Big[-e^{-x^2}\Big]_0^a = \boldsymbol{\pi(1-e^{-a^2})}$$

(2) 回転体 A の領域は，y 軸からの距離が r であるとき $(0 \leqq r \leqq a)$

$$0 \leqq y \leqq e^{-r^2}$$

xy 平面に垂直で原点 O を通る座標軸を z 軸とすると　$r^2 = z^2 + x^2$

このとき，平面 $x = t$ による A の断面の表す領域は $(-a \leqq t \leqq a)$

$$x = t,\quad -\sqrt{a^2-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{a^2-t^2},\quad 0 \leqq y \leqq e^{-(z^2+t^2)}$$

したがって，この断面積 $S(t)$ について

$$S(t) = \int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(z^2+t^2)}dz \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(z^2+t^2)}dz$$

よって　$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}ds$$

(3) (2) の結果から　$$S(t) \leqq e^{-t^2}\int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds$$

したがって　$$V = \int_{-a}^{a} S(t)\,dt \leqq \int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt \int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds$$

上式および (1) の結果から

$$\pi(1-e^{-a^2}) \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 \quad \text{よって} \quad \sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx$$

■

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y) = t^2(\cos t,\ \sin t)$ より $(t > 0)$

$$\frac{dx}{dt} = 2t\cos t - t^2\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = 2t\sin t + t^2\cos t$$

ゆえに　$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = t(2\cos t - t\sin t,\ 2\sin t + t\cos t)$$

$\theta(t)$ は，2 つのベクトル

$$\frac{1}{t^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos t,\ \sin t),\quad \frac{1}{t}\vec{v}=(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$$

のなす角であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta(t)&=\frac{\cos t(2\cos t-t\sin t)+\sin t(2\sin t+t\cos t)}{\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\sqrt{(2\cos t-t\sin t)^2+(2\sin t+t\cos t)^2}}\\&=\frac{2}{\sqrt{4+t^2}}\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\cos\theta(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+t^2}}=0$　よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}}$

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になる t $(t>0)$ は，$\dfrac{dx}{dt}=0$ のときであるから

$$2\cos t-t\sin t=0\quad すなわち\quad \tan t-\frac{2}{t}=0$$

$f(t)=\tan t-\dfrac{2}{t}$ とおくと　$f'(t)=\dfrac{1}{\cos^2 t}+\dfrac{2}{t^2}>0$

$\displaystyle\lim_{t\to+0}f(t)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}f(t)=\infty$ であり，区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ で $f(t)$ は単調増加であるから，中間値の定理により

$$f(t_1)=0\quad\left(0<t_1<\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす t_1 が唯一存在する．

$\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}+0}f(t)=-\infty$，$f(\pi)=-\dfrac{2}{\pi}$，$\displaystyle\lim_{t\to\frac{3}{2}\pi-0}f(t)=\infty$ であり，区間 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ において $f(t)$ は単調増加であるから，中間値の定理により

$$f(t_2)=0\quad\left(\pi<t_2<\frac{3}{2}\pi\right)$$

を満たす t_2 が唯一存在する．したがって

$$\tan t_1=\frac{2}{t_1}>\frac{2}{t_2}=\tan t_2=\tan(t_2-\pi)$$

$t_1,\ t_2-\pi\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから

$$t_1>t_2-\pi\quad よって\quad t_2-t_1<\pi$$

■

5 (1) $a = Ga'$, $b = Gb'$ (a', b'は互いに素) とおくと，$L = Ga'b'$ より

$$f(a,\ b) = \frac{L}{G} = a'b' \quad \cdots (*)$$

$a = Ga'$，$b = Gb'$ は n の約数であるから，a'，b' は n の約数である．
このとき，a'，b' は互いに素であるから，$a'b'$ は n の約数である．
よって，$f(a,\ b)$ は n の約数である．

(2) $f(a,\ b) = b$ のとき，$(*)$ および $b = Gb'$ より

$$a'b' = Gb' \quad \text{ゆえに} \quad a' = G \quad \text{すなわち} \quad a = G^2$$

a は相異なる素数の積であるから，a が1以外の平方数になることはない．
よって，$a = 1$

(3) x，y が相異なる素数の積であるとき，$S(xy) = S(x) + S(y)$ であるから

$$\begin{aligned}
&S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)\\
=&S(a'b') + S(Ga') + S(Gb')\\
=&\{S(a') + S(b')\} + \{S(G) + S(a')\} + \{S(G) + S(b')\}\\
=&2\{S(G) + S(a') + (b')\}
\end{aligned}$$

よって，$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)$ は偶数である．■

4.2　2016 年 (180 分)

1 a を正の定数とし，放物線 $y = \dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする．

(1) 点 P が C_1 上を動くとき，P と点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4} - 2\right)$ の距離の最小値を求めよ．

(2) Q を中心とする円 $(x-2a)^2 + \left(y - \dfrac{a^2}{4} + 2\right)^2 = 2a^2$ を C_2 とする．P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ．

2 △ABC を一辺の長さ 6 の正三角形とする．サイコロを 3 回振り，出た目を順に X，Y，Z とする．出た目に応じて，点 P，Q，R をそれぞれ線分 BC，CA，AB 上に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \frac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

をみたすように取る．

(1) △PQR が正三角形になる確率を求めよ．

(2) 点 B，P，R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，点 C，Q，P を互いに線分で結んでできる図形を T_2，点 A，R，Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする．T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ．

(3) △PQR の面積を S とし，S のとりうる値の最小値を m とする．m の値および $S = m$ となる確率を求めよ．

3 水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している．

(1) S_1，S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1，P_2 とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ．

(2) α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える．それらの球と α の接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ．

4 n を 2 以上の自然数とする．

(1) n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ．

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ．

$\boxed{5}$ 次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ．

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) C_1 上の点 P を $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$，$f(t)=\mathrm{PQ}^2$ とする．$a>0$ より，$\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の x 座標は正であり，C_1 は y 軸に関して対称であるから，PQ の距離が最小となるのは，$t \geqq 0$ のときについて調べればよい．

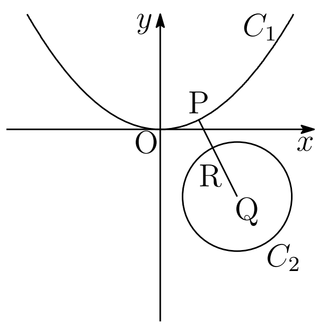
$$\begin{aligned} f(t) &= (t-2a)^2+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)^2 \\ f'(t) &= 2(t-2a)+2\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)\cdot\frac{t}{2} \\ &= \frac{t^3}{4}-\frac{a^2}{4}t+4t-4a \\ &= \frac{1}{4}(t-a)(t^2+at+16) \end{aligned}$$

このとき，$t^2+at+16>0$ であることに注意して

t	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小 a^2+4	$\nearrow$

よって，求める最小値は　$\sqrt{f(a)}=\boldsymbol{\sqrt{a^2+4}}$

(2) $C_2:(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ の半径が $\sqrt{2}a$ であるから (1) の結果に注意して



$\sqrt{2}a \geqq \sqrt{a^2+4}$，すなわち，$a \geqq 2$ のとき

PR の最小値 0

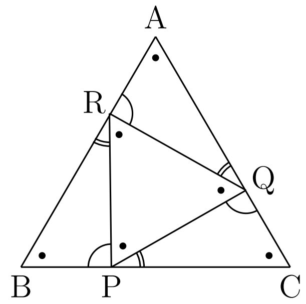
$\sqrt{2}a < \sqrt{a^2+4}$，すなわち，$0<a<2$ のとき

PR の最小値 $\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}a$

よって，PR の最小値は $\begin{cases} \boldsymbol{a \geqq 2} & \textbf{のとき}\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0<a<2} & \textbf{のとき}\ \boldsymbol{\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}a} \end{cases}$

■

2 (1) △PQR が正三角形のとき



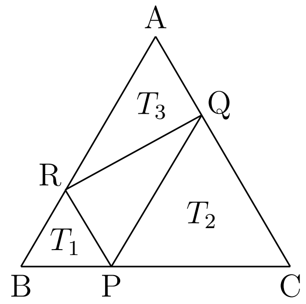
$$\triangle\mathrm{BPR} \equiv \triangle\mathrm{CQP} \equiv \triangle\mathrm{ARQ}$$

であるから，BP = CQ = AR

したがって　$X = Y = Z$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{6^3} = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2) T_1 と T_2 だけが正三角形であるとき



$$\mathrm{RB} = \mathrm{BP},\quad \mathrm{PC} = \mathrm{CQ},\quad \mathrm{QA} \neq \mathrm{AR}$$

ゆえに　$6 - Z = X,\ \ 6 - X = Y,\ \ 6 - Y \neq Z$

すなわち　$Y = Z = 6 - X \quad (X = 1, 2, 4, 5)$

T_1 と T_2 だけが正三角形となる確率は　$\dfrac{4}{6^3}$

T_2 と T_3 だけ，T_3 と T_1 だけが正三角形となる確率もこれと等しい．

よって，求める確率は　$\dfrac{4\cdot 3}{6^3} = \mathbf{\dfrac{1}{18}}$

(3) $\dfrac{\triangle\mathrm{BPR}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \dfrac{(6-Z)X}{36},\ \ \dfrac{\triangle\mathrm{CQP}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \dfrac{(6-X)Y}{36},\ \ \dfrac{\triangle\mathrm{ARQ}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \dfrac{(6-Y)Z}{36}$ より

$$\begin{aligned}\frac{36S}{\triangle\mathrm{ABC}} &= \frac{36}{\triangle\mathrm{ABC}}(\triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{BPR} - \triangle\mathrm{CQP} - \triangle\mathrm{ARQ})\\ &= 36 - (6-Z)X - (6-X)Y - (6-Y)Z\\ &= 36 - 6(X+Y+Z) + XY + YZ + ZX\\ &= (6-X)(6-Y) + Z(X+Y-6)\end{aligned}$$

(i) $X + Y - 6 < 0$ のとき，$Z = 6$ で S は最小となり

$$\frac{36S}{\triangle\mathrm{ABC}} = XY \geqq 1 \quad (\text{等号は } X = Y = 1 \text{ のとき})$$

(ii) $X + Y - 6 = 0$ のとき，$X \neq 6$ に注意して

$$\frac{36S}{\triangle\mathrm{ABC}} = (6-X)(6-Y) = (6-X)X = 9 - (X-3)^2 \geqq 5$$

(iii) $X + Y - 6 > 0$ のとき，$Z = 1$ で S は最小となり

$$\frac{36S}{\triangle\mathrm{ABC}} = 5 + (5-X)(5-Y) \geqq 1 \quad (\text{等号は } (X, Y) = (1, 6), (6, 1) \text{ のとき})$$

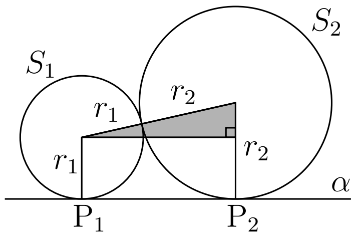
(i)〜(iii) から $\dfrac{36m}{\triangle\mathrm{ABC}} = 1$ であるから

$$m = \frac{1}{36}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

これを満たすのは，$(X, Y, Z) = (1, 1, 6), (1, 6, 1), (6, 1, 1)$ の 3 組．

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{72}}$ ■

3 (1) 右の図の直角三角形について



$$\mathrm{P_1P_2}^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$
$$\mathrm{P_1P_2}^2 = 4r_1r_2$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{P_1P_2} = 2\sqrt{r_1r_2}}$

(2) α 上の半径 r の球 S が，S_1 および S_2 に外接するとき，S と α の接点を P とすると

$$\mathrm{P_1P} = 2\sqrt{r_1r},\quad \mathrm{P_2P} = 2\sqrt{r_2r}$$

(i) $r_1 \neq r_2$ のとき　$\mathrm{P_1P} : \mathrm{P_2P} = \sqrt{r_1} : \sqrt{r_2}$

2 点 P_1，P_2 を $\sqrt{r_1} : \sqrt{r_2}$ に内分，外分する点を A，B とすると，P は線分 AB を直径とする円周上にある．

(ii) $r_1 = r_2$ のとき　$\mathrm{P_1P} = \mathrm{P_2P}$

P は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の垂直二等分線上にある． ■

$\boxed{4}$ (1) n が素数のとき，$n-1$ 以下の正の整数は n を因数に持たないので

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 2{\cdot}1$$

は n で割り切れない．

また，$n=4$ のとき，$(n-1)!=6$ は，n で割り切れない．

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$n=pq$，$2 \leqq p \leqq q$ とおくと

$$n-1-q = pq-1-q = (p-1)(q-1)+(p-2) > 0$$

ゆえに　　$2 \leqq p \leqq q < n-1$

(i) $p \neq q$ のとき　　$(n-1)! = (n-1)\cdots q \cdots p \cdots 1$

したがって，$(n-1)!$ は $n=pq$ で割り切れる．

(ii) $p=q$ のとき，$n \neq 4$ であるから，$2<p$，$2p<p^2=n$ より，$2p \leqq n-1$

$(n-1)!$ は p と $2p$ を因数にもつので，$(n-1)!$ は $n=p^2$ で割り切れる．

(i)，(ii) より，n が素数でも 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる．

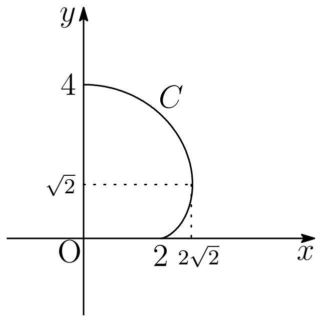
■

5 (1) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$

上式を t について微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 6\cos 2t \sin t$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 6\sin 2t \sin t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4



C の概形は右の図のようになる．

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t)\,dt \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - 4\cos 3t\cos t + \cos^2 3t)\,dt \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3}{2}(1+\cos 2t) - 2(\cos 4t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\right\} dt \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{2}\cos 2t - 2\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t\right) dt \\ &= 3\left[\,2t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin 6t\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{3\pi} \end{aligned}$$

■

4.3　2017年(180分)

$\boxed{1}$ 次の条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ．

(i) N の正の約数の個数は 12 個

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12.

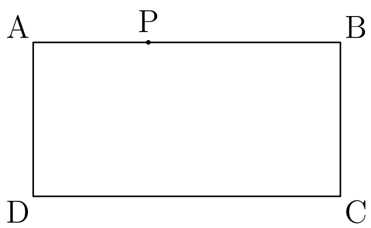
ただし，N の約数には 1 と N も含める．

$\boxed{2}$ 実数 x の関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{3}$ a を 1 以上の実数とする．図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている．ただし AD $= 1$，AB $= a$ である．P を辺 AB 上の点とし，AP $= x$ とする．頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を一回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする．

(1) S を a と x で表せ．

(2) $a = 1$ とする．P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ．



なお配布された白紙を自由に使ってよい．(白紙は回収しない．)

$\boxed{4}$ n は正の整数とし，文字 a，b，c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする．A_n の要素に対し次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 文字 c が 2 つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件 $(*)$ を満たす確率 $P(n)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 12$ とする．A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件 $(*)$ を満たし，その 7 番目の文字は c であった．このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 実数 a，b，c に対して $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$，$f(x) = x^2 + cx + 1$ とおく．また，複素数平面内の単位円周から 2 点 1，-1 を除いたものを T とする．

(1) $f(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ．

(2) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるならば，

$$F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$$

を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ．

(3) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

解答例

1 N の約数が 12 個あり，N が $2^2{\cdot}3$ を約数をもつことから，N は次の積で表される (p は 5 以上の素数).

(a) $N=2^5{\cdot}3$　(b) $N=2^3{\cdot}3^2$　(c) $N=2^2{\cdot}3^3$　(d) $N=2^2{\cdot}3p$

(a) $N=2^5{\cdot}3=96$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12$$

(b) $N=2^3{\cdot}3^2=72$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12$$

(c) $N=2^2{\cdot}3^3=108$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12$$

(d) 条件 (ii) を満たす p は 5，7，11 のいずれかである.

$p=5$ のとき，$N=2^2{\cdot}3{\cdot}5=60$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12$$

$p=7$ のとき，$N=2^2{\cdot}3{\cdot}7=84$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 12$$

$p=11$ のとき，$N=2^2{\cdot}3{\cdot}11=132$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 11,\ 12$$

(a)～(d) から，条件 (ii) を満たす正の整数 N は　**84，96，108，132**　■

2 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ より　$f(x+\pi)=\displaystyle\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$

第 2 式について，$t=u+\pi$ とおくと　$\dfrac{dt}{du}=1$

t	$x+\pi \longrightarrow x+\frac{3}{2}\pi$
u	$x \longrightarrow x+\frac{\pi}{2}$

ゆえに　$f(x+\pi)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(u+\pi)|}{1+\sin^2(u+\pi)}\,du=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{1+\sin^2 u}\,du=f(x)$

$f(x)$ は，周期 π の周期関数であるから，$0\leqq x\leqq\pi$ において求めればよい.

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt \quad \cdots (*)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} - \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(1-\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)} = -\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)} \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき　$f(x) = \displaystyle\int_x^{\pi} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt - \int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt \quad \cdots (**)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\sin x}{1+\sin^2 x} - \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\sin x}{1+\sin^2 x} - \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} \\ &= -\frac{(\sin x + \cos x)(1+\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)} = -\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)} \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで　$\displaystyle\int \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt = \int \frac{\sin t}{2-\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}-\cos t} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}+\cos t}\right)dt$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

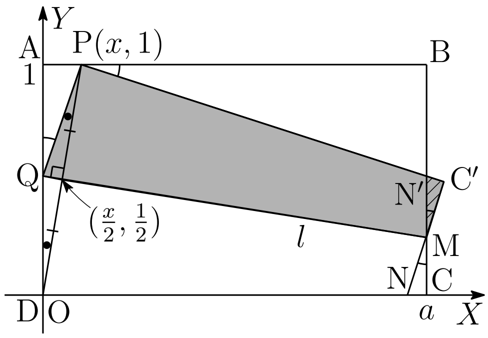
$F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\dfrac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right)$ とおくと，$(*)$，$(**)$ より

最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = F\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) - F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log 3}$

最小値 $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) = 2F(\pi) - F\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) - F\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\log(\sqrt{2}+1) - \log 3\right\}}$

■

3 (1) 右の図のように四角形 ABCD を XY 座標平面上に定め，原点 O と点 P$(x,\ 1)$ を結ぶ線分 OP の垂直二等分線を l とすると，その方程式は



$$Y-\frac{1}{2}=-x\left(X-\frac{x}{2}\right)$$

$$l: 2xX+2Y-x^2-1=0$$

l と X 軸との交点の X 座標は　$X=\dfrac{x^2+1}{2x}$

(i) $a \leqq \dfrac{x^2+1}{2x}$，$0 \leqq x \leqq a$　すなわち　$0 \leqq x \leqq a-\sqrt{a^2-1}$ のとき

l と直線 $X=a$ の交点の Y 座標は　$Y=\dfrac{x^2-2ax+1}{2}$

$\theta=\angle\mathrm{AOP}$ とおくと，$\angle\mathrm{AQP}=2\theta$ より

$$\tan\theta=x \quad \text{ゆえに} \quad \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}$$

上図で，$\triangle\mathrm{MNC} \equiv \triangle\mathrm{MN'C'}$，$\angle\mathrm{NMC}=2\theta$，$\mathrm{NC}=\mathrm{MC}\tan 2\theta$ より

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{MC}\cdot\mathrm{NC}=\frac{1}{2}\mathrm{MC}^2\tan 2\theta$$

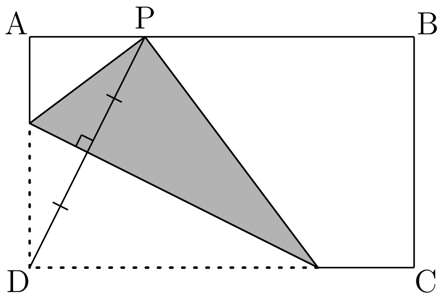
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2ax+1}{2}\right)^2\frac{2x}{1-x^2}=\boldsymbol{\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}}$$

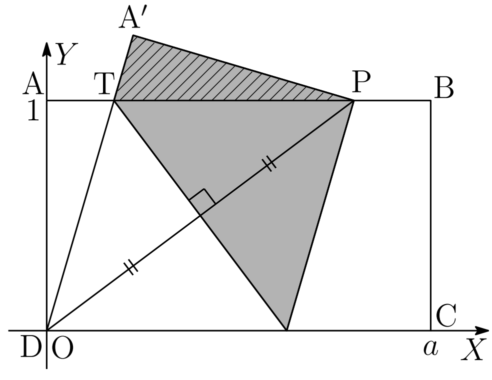
(ii) $\dfrac{x^2+1}{2x} \leqq a$，$0 \leqq x \leqq 1$　すなわち　$a-\sqrt{a^2-1} \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\boldsymbol{S=0}$$

(iii) $1 \leqq a$ のとき，l と直線 $Y=1$ の交点の X 座標は　$X=\dfrac{x^2-1}{2x}$

$$S=\triangle\mathrm{A'TP}=\triangle\mathrm{ATO}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AT}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{x^2-1}{2x}=\boldsymbol{\frac{x^2-1}{4x}}$$





(2) (1) の結果から，$a = 1$ のとき

$$S = \frac{x(x^2 - 2x + 1)^2}{4(1 - x^2)} = \frac{x(1 - x)^3}{4(1 + x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

$0 < x < 1$ のとき，両辺の自然対数をとると

$$\log S = \log x + 3\log(1 - x) - \log(1 + x) - \log 4$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} \frac{S'}{S} &= \frac{1}{x} - \frac{3}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} \\ &= \frac{(1 - x)(1 + x) - 3x(1 + x) - x(1 - x)}{x(1 + x)(1 - x)} \\ &= -\frac{3x^2 + 4x - 1}{x(1 + x)(1 - x)} \end{aligned}$$

ゆえに　$S' = -\dfrac{3x^2 + 4x - 1}{x(1 + x)(1 - x)} \cdot \dfrac{x(1 - x)^3}{4(1 + x)} = -\dfrac{(3x^2 + 4x - 1)(1 - x)^2}{4(1 + x)^2}$

$0 < x < 1$ に注意して，$S' = 0$ を解くと　$x = \dfrac{-2 + \sqrt{7}}{3}$

したがって，S の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって，S を最大にする x は　　$\boldsymbol{x = \dfrac{-2 + \sqrt{7}}{3}}$ ■

4 (1) 集合 A_n のうち n 番目の文字が a または b である文字列の個数を x_n，n 番目の文字が c である文字列の個数を y_n とすると，次の漸化式が成立する．

$$x_1 = 2,\ y_1 = 1 \qquad (*) \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \qquad (n \geqq 1)$$

漸化式から　$x_{n+1} - \lambda y_{n+1} = (2-\lambda)x_n + 2y_n \quad \cdots (**)$

ここで，$1 : -\lambda = 2-\lambda : 2$ とすると

$$-\lambda(2-\lambda) = 1 \cdot 2 \quad ゆえに \quad \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

この2次方程式の解を α，β とすると $(\alpha > \beta)$

$$\alpha = 1+\sqrt{3}, \quad \beta = 1-\sqrt{3}$$

とすると，$2-\alpha = \beta$，$2-\beta = \alpha$ であるから，$(**)$ より

$$x_{n+1} - \alpha y_{n+1} = \beta(x_n - \alpha y_n)$$
$$x_{n+1} - \beta y_{n+1} = \alpha(x_n - \beta y_n)$$

したがって　$x_n - \alpha y_n = \beta^{n-1}(x_1 - \alpha y_1) = \beta^n$

$$x_n - \beta y_n = \alpha^{n-1}(x_1 - \beta y_1) = \alpha^n$$

上の2式から　$x_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$，$y_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

$$x_n + y_n = \frac{(\alpha+1)\alpha^n - (\beta+1)\beta^n}{\alpha - \beta}$$

ここで，$\alpha + 1 = \dfrac{\alpha^2}{2}$，$\beta + 1 = \dfrac{\beta^2}{2}$ であるから

$$x_n + y_n = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha - \beta)} \quad \cdots ①$$

よって　$P(n) = \dfrac{x_n + y_n}{3^n} = \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha-\beta)3^n}$

$$= \boldsymbol{\frac{(1+\sqrt{3})^{n+2} - (1-\sqrt{3})^{n+2}}{4\sqrt{3} \cdot 3^n}}$$

(2) ① より，A_n の個数を a_n とすると　$a_n = \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha - \beta)}$

$(*)$ より，7 番目の文字が c であるとき

k	1	$\cdots$	7	8	9	$\cdots$	n
x_k	2	$\cdots$	0	$2y_7$	$4y_7$	$\cdots$	$2y_7x_{n-8}$
y_k	1	$\cdots$	y_7	0	$2y_7$	$\cdots$	$2y_7y_{n-8}$

$x_9 = 2y_7x_1$，$y_9 = 2y_7y_1$ であるから，このときの場合の数は　$2y_7a_{n-8}$

同様に，7 番目と 10 番目の文字が c であるとき

k	1	$\cdots$	7	8	9	10	11	12	$\cdots$	n
x_k	2	$\cdots$	0	$2y_7$	$4y_7$	0	$8y_7$	$16y_7$	$\cdots$	$8y_7x_{n-11}$
y_k	1	$\cdots$	y_7	0	$2y_7$	$4y_7$	0	$8y_7$	$\cdots$	$8y_7y_{n-11}$

$x_{12} = 8y_7x_1$，$y_{12} = 8y_7y_1$ であるから，このときの場合の数は　$8y_7a_{n-11}$

したがって　$Q(n) = \dfrac{8y_7a_{n-11}}{2y_7a_{n-8}} = \dfrac{4(\alpha^{n-9} - \beta^{n-9})}{\alpha^{n-6} - \beta^{n-6}}$

$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left\{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}\right\}}{\alpha^3 - \beta^3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}} = \frac{4}{\alpha^3}$

$\alpha\beta = -2$ に注意して　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n) = \frac{4\beta^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{4(1-\sqrt{3})^3}{(-2)^3} = \mathbf{3\sqrt{3} - 5}$

発展 行列を用いると，$(*)$ は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7 番目が c であるとき，9 番目に注目して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-9}\begin{pmatrix} 4y_7 \\ 2y_7 \end{pmatrix} &= 2y_7\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2y_7\begin{pmatrix} x_{n-8} \\ y_{n-8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このときの場合の数は　$2y_7(x_{n-8} + y_{n-8}) = 2y_7a_{n-8}$　■

$\boxed{5}$ (1) (必要性) $f(x)=0$ が虚数解をもつことが必要であるから，係数について

$$c^2-4<0 \quad \text{すなわち} \quad -2<c<2$$

実係を係数とする方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつとき，それらは互いに共役であるから，その2解を z，$\overline{z}$ とおくと，解と係数の関係により

$$z\overline{z}=1 \quad \text{すなわち} \quad |z|=1$$

したがって，z と $\overline{z}$ は T 上にある．

(十分性) T 上にある2数 z，$\overline{z}$ を解とする2次方程式は

$$x^2-(z+\overline{z})x+z\overline{z}=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2-2\mathrm{Re}(z)x+1=0$$

$-1<\mathrm{Re}(z)<1$ であるから，$c=-2\mathrm{Re}(z)$ とおくと　$-2<c<2$

よって，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{-2<c<2}$

(2) 次数を係数とする方程式 $F(x)=0$ の解が T 上にあるとき，(1) の結果から，これらの解を α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ とおける ($|\alpha|=|\beta|=1$)．
x^4 の係数が1であることに注意して，因数定理を用いると

$$\begin{aligned}F(x)&=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})\\&=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+|\alpha|^2\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+|\beta|^2\}\\&=\{x^2-2\mathrm{Re}(\alpha)x+1\}\{x^2-2\mathrm{Re}(\beta)x+1\}\end{aligned}$$

$c_1=-2\mathrm{Re}(\alpha)$，$c_2=-2\mathrm{Re}(\beta)$ とすると　$-2<c_1<2$，$-2<c_2<2$

よって　$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$　$(-2<c_1<2,\ -2<c_2<2)$

(3)　　$F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$

$$= x^4 + (c_1 + c_2)x^3 + (c_1c_2 + 2)x^2 + (c_1 + c_2)x + 1$$

これと $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ の同じ次数の項の係数を比較すると

$$c_1 + c_2 = a, \quad c_1c_2 = b - 2 \quad \cdots (*)$$

c_1，c_2 を解とする 2 次方程式は　$x^2 - ax + b - 2 = 0$

この方程式は，実数解をもつから

$$(-a)^2 - 4{\cdot}1(b - 2) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad b \leqq \frac{a^2}{4} + 2 \quad \cdots ①$$

$-2 < c_1 < 2$，$-2 < c_2 < 2$ より

$$-4 < c_1 + c_2 < 4, \quad (c_1 + 2)(c_2 + 2) > 0, \quad (c_1 - 2)(c_2 - 2) > 0$$

第 1 式に $(*)$ を適用すると　　$-4 < a < 4 \quad \cdots ②$

第 2 式を展開すると　　$c_1c_2 + 2(c_1 + c_2) + 4 > 0$

これに $(*)$ を適用すると

$$b - 2 + 2a + 4 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad b > -2a - 2 \quad \cdots ③$$

第 3 式を展開すると　　$c_1c_2 - 2(c_1 + c_2) + 4 > 0$

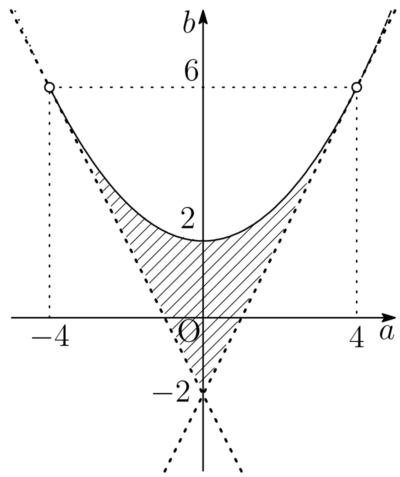
これに $(*)$ を適用すると

$$b - 2 - 2a + 4 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad b > 2a - 2 \quad \cdots ④$$

①〜④ より，点 $(a,\ b)$ の満たす領域は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-4 < a < 4} \\ \boldsymbol{b \leqq \dfrac{a^2}{4} + 2} \\ \boldsymbol{b > -2a - 2} \\ \boldsymbol{b > 2a - 2} \end{cases}$$

ただし，境界は実線部のみ．



4.4　2018 年 (180 分)

1 a，b，c を実数とし，3 つの 2 次方程式

$$x^2+ax+1=0 \quad \cdots ①$$
$$x^2+bx+2=0 \quad \cdots ②$$
$$x^2+cx+3=0 \quad \cdots ③$$

の解を複素数平面上で考察する．

(1) 2 つの方程式 ①，② がいずれも実数解を持たないとき，それらの解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にあることを示せ．また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を a，b を用いて表せ．

(2) 3 つの方程式 ①，②，③ がいずれも実数解を持たず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a，b，c を用いて表せ．

2 次の問に答えよ．

(1) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を一組求めよ．

(2) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの，およびその最小値を求めよ．

3 方程式

$$e^x(1-\sin x)=1$$

について，次の問に答えよ．

(1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ．また，正の実数解を無限個持つことを示せ．

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて a_1，a_2，a_3，$\cdots$ とし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ を求めよ．

4 xyz 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1, \quad |z| \leqq 6$$

により定まる領域を V とし，2 点 $(2,\ 0,\ 2)$，$(-2,\ 0,\ -2)$ を通る直線を ℓ とする．

(1) $|t| \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする．また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする．L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ．

(2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える．このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ．

5 xyz 空間内の一辺の長さが 1 の立方体

$$\{(x,\ y,\ z)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$$

を Q とする．点 X は頂点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$ から出発して Q の辺上を 1 秒ごとに長さ 1 だけ進んで隣の頂点に移動する．X が x 軸，y 軸，z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p，q，r である．ただし

$$p \geqq 0, \quad q \geqq 0, \quad r \geqq 0, \quad p+q+r=1$$

である．X が n 秒後に頂点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{D}(0,\ 1,\ 1)$ にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．

(1) a_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n と p，q，r を用いて表せ．

(2) $a_n-b_n+c_n-d_n$ を p，q，r，n を用いて表せ．

(3) a_n を p，q，r，n を用いて表せ．

解答例

1　(1) $x^2+ax+1=0\cdots$①，$x^2+bx+2=0\cdots$②，$x^2+cx+3=0\cdots$③

a, b は実数で，①，② は実数解を持たないから，① の 2 解を α, $\overline{\alpha}$ とし，② の 2 解を β, $\overline{\beta}$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\overline{\alpha}=-a,\quad \alpha\overline{\alpha}=1,\quad \beta+\overline{\beta}=-b,\quad \beta\overline{\beta}=2\quad\cdots(*)$$

したがって　$\mathrm{Re}(\alpha)=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=-\dfrac{a}{2}$,　$\mathrm{Re}(\beta)=\dfrac{\beta+\overline{\beta}}{2}=-\dfrac{b}{2}$

(i) $a=b$ のとき，$\mathrm{Re}(\alpha)=\mathrm{Re}(\beta)$ であるから，このとき，4 点 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ は点 $-\dfrac{a}{2}$ を通り虚軸に平行な直線上にある．

(ii) $a\neq b$ のとき，2 点 α, $\overline{\alpha}$ を通る円の中心は実軸上にあり，2 点 β, $\overline{\beta}$ を通る円の中心も実軸上にある．この円の中心を k とすると (k は実数)，次式を満たすとき，4 点 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ を通る円が存在する．

$$|\alpha-k|=|\beta-k|\quad ゆえに\quad \alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})k=\beta\overline{\beta}-(\beta+\overline{\beta})k$$

$(*)$ により　$1+ak=2+bk$　ゆえに　$k=\boldsymbol{\dfrac{1}{a-b}}$

また，この円の半径を r とすると

$$\begin{aligned} r^2&=|\alpha-k|^2=\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})k+k^2\\ &=1+ak+k^2=1+\frac{a}{a-b}+\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{2a^2-3ab+b^2+1}{(a-b)^2}\end{aligned}$$

よって　$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2a^2-3ab+b^2+1}}{|a-b|}}$

(2) ③ の 2 解を γ, $\overline{\gamma}$ とすると　$\gamma+\overline{\gamma}=-c,\quad \gamma+\overline{\gamma}=3\quad\cdots(**)$

$b=c$ のとき，(i) と同様にして，$\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\gamma)$ となる．このとき，4 点 β, $\overline{\beta}$, γ, $\overline{\gamma}$ は同一直線上にあり，不適．

したがって，$b\neq c$ のとき，(ii) の結果および次式を満たせばよい．

$$|\beta-k|=|\gamma-k|\quad ゆえに\quad \beta\overline{\beta}-(\beta+\overline{\beta})k=\gamma\overline{\gamma}-(\gamma+\overline{\gamma})k$$

$(*)$，$(**)$ により　$2+bk=3+ck$　ゆえに　$k=\dfrac{1}{b-c}$

①，②，③ が実数解を持たないことと上式および (ii) から

$$\boldsymbol{a^2-4<0,\quad b^2-8<0,\quad c^2-12<0,\quad a-b=b-c\neq 0}$$

注意　解答を $\boldsymbol{a^2<4}$，$\boldsymbol{b^2<8}$，$\boldsymbol{c^2<12}$，$\boldsymbol{a\neq b}$，$\boldsymbol{a+c=2b}$ としてもよい．

別解　$\lambda_1 = a$，$\lambda_2 = b$，$\lambda_3 = c$ とおく．

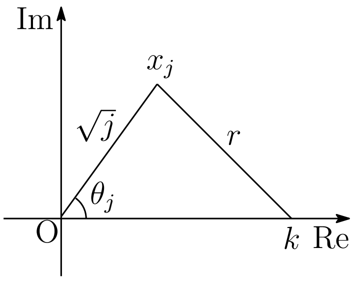
$x^2 + \lambda_1 x + 1 = 0 \cdots$ ①，$x^2 + \lambda_2 x + 2 = 0 \cdots$ ②，$x^2 + \lambda_3 x + 3 = 0 \cdots$ ③

①，②，③ は実数解を持たないから

$$\lambda_j = -2\sqrt{j}\cos\theta_j \quad (0 < \theta_j < \pi)$$
$$x_j = \sqrt{j}\,(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

とおくと，x_1，$\overline{x}_1$ は ① の解，x_2，$\overline{x}_2$ は ② の解，x_3，$\overline{x}_3$ は ③ の解である．

6 点 x_j，$\overline{x_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ の実軸に関する対称性により，この 6 点を通る円の中心を k(k は実数)，半径を r とする．右の図の三角形に余弦定理を適用すると



$$r^2 = j + k^2 - 2|k|\sqrt{j}\cos\theta_j$$
$$r^2 - k^2 = j + |k|\lambda_j$$

これに $j = 1, 2, 3$ を代入すると

$$r^2 - k^2 = 1 + |k|a = 2 + |k|b = 3 + |k|c$$

したがって　　$|k|(a - b) = |k|(b - c) = 1$

①，②，③ が実数解を持たないことと上式から

$$a^2 - 4 < 0, \quad b^2 - 8 < 0, \quad c^2 - 12 < 0, \quad a - b = b - c \neq 0$$ ■

2　(1)　$35x + 91y + 65z = 3$ は，$5{\cdot}7x + 7{\cdot}13y + 5{\cdot}13z = 3 \quad \cdots(*)$

$$35x \equiv 3 \pmod{13}, \quad 91y \equiv 3 \pmod{5}, \quad 65z \equiv 3 \pmod{7}$$

ゆえに　　$x \equiv 9 \pmod{13}$，　$y \equiv 3 \pmod{5}$，　$z \equiv 5 \pmod{7}$

整数 a，b，c を用いて

$$x = 9 + 13a, \quad y = 3 + 5b, \quad z = 5 + 7c \quad \cdots(**)$$

$(**)$ を $(*)$ に代入すると　$5{\cdot}7(9 + 13a) + 7{\cdot}13(3 + 5b) + 5{\cdot}13(5 + 7c) = 3$
整理すると　　$a + b + c = -2$
$a = b = -1$，$c = 0$ とすると　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-4, -2,\ 5)}$

(2)　$|x| \geqq 4$ (等号は $x = -4$ のとき)，$|y| \geqq 2$ (等号は $y = -2$ のとき) であるから，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-4, -2,\ 5)}$ のとき，$x^2 + y^2$ の最小値は　**20**　■

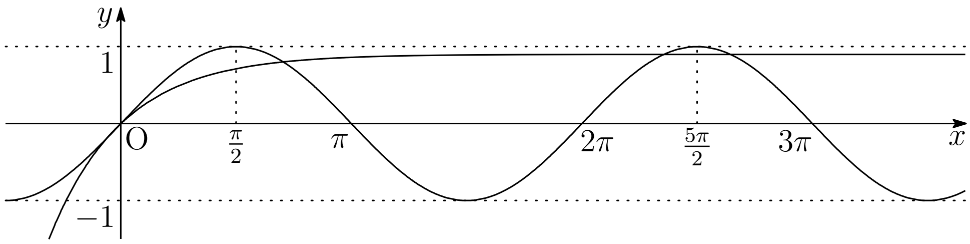
3 (1) 方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ を変形すると　$1-e^{-x}=\sin x \quad \cdots(*)$

$(*)$ より，$f(x)=1-e^{-x}-\sin x$ とおくと　$f'(x)=e^{-x}-\cos x$

$$f(0)=0,\ x<0 \text{ のとき } f'(x)>0$$

$x<0$ において $f(x)<0$ であるから，$x<0$ において $(*)$ の解はない．

$x>0$ において，$0<1-e^{-x}<1$．基本周期 2π の周期関数 $\sin x$ の値域は $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから，$(*)$ の正の解は無限個ある．



(2) $f(\frac{\pi}{2})<0$，$f(\pi)>0$ より　$\frac{\pi}{2}<a_1<\pi$

k を自然数とすると

$$f(2k\pi)>0,\quad f\left(\left(2k+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right)<0,\quad f((2k+1)\pi)>0$$

ゆえに　$2k\pi<a_{2k}<(2k+\frac{1}{2})\pi<a_{2k+1}<(2k+1)\pi$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1}<\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\pi=m^2\pi$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{2k}>\sum_{k=1}^{m}2k\pi=m(m+1)\pi$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1}<\sum_{k=1}^{m} a_{2k}$ であるから　$\displaystyle 2m^2\pi<\sum_{k=1}^{2m} a_k<2m(m+1)\pi$

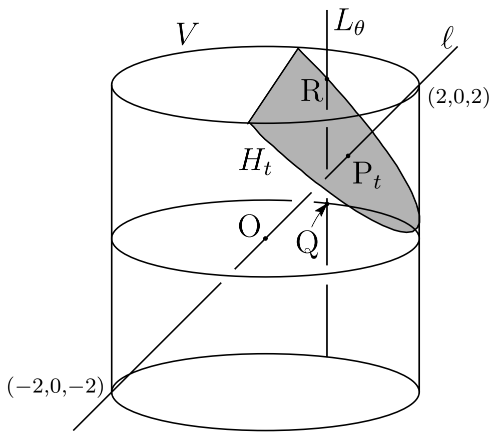
$$\frac{\pi}{2}<\frac{1}{(2m)^2}\sum_{k=1}^{2m} a_k<\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(2m)^2}\sum_{k=1}^{2m} a_k=\frac{\pi}{2} \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

■

4 (1) 点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を Q とし，Q を通り z 軸に平行な直線 L_θ と平面 H_t の交点を $\mathrm{R}(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ z_\mathrm{R})$ とすると，$\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}} = \left(2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ z_\mathrm{R} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

直線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{v} = (1,\ 0,\ 1)$ とすると，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}} = 0$ であるから

$$1\left(2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + 1\left(z_\mathrm{R} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \text{よって} \quad z_\mathrm{R} = \boldsymbol{\sqrt{2}t - 2\cos\theta}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}} = \left(2\cos\theta - \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}} - 2\cos\theta\right)$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}}|^2 &= \left(2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sin^2\theta + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - 2\cos\theta\right)^2 \\
&= 7\cos^2\theta - 4\sqrt{2}t\cos\theta + t^2 + 1 \\
&= 7\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{2}t}{7}\right)^2 + 1 - \frac{t^2}{7}
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}}|^2$ の最小値を r^2 とすると

$$r^2 = \begin{cases} 1 - \dfrac{t^2}{7} & \left(|t| \leqq \dfrac{7}{2\sqrt{2}}\right) \\ (|t| - 2\sqrt{2})^2 & \left(\dfrac{7}{2\sqrt{2}} \leqq |t| \leqq 1\right) \end{cases}$$

よって，求める回転体の体積は，r^2 が t に関する偶関数であるから

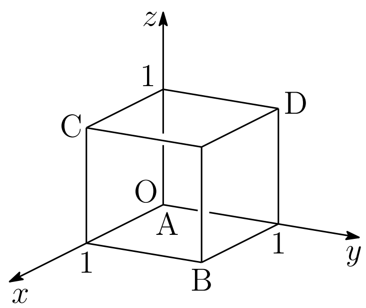
$$\begin{aligned}
&2\pi\int_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}}\left(1 - \frac{t^2}{7}\right)dt + 2\pi\int_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}}(t - 2\sqrt{2})^2\,dt \\
&= 2\pi\left[\,t - \frac{t^3}{21}\,\right]_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}} + \frac{2\pi}{3}\left[\,(t - 2\sqrt{2})^3\,\right]_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi}
\end{aligned}$$

■

5 (1) X が n 秒後に A，B，C，D にある確率がそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n より

$$n\text{ が偶数のとき}\quad a_n+b_n+c_n+d_n=1$$
$$n\text{ が奇数のとき}\quad a_n=b_n=c_n=d_n=0$$

X が $n+2$ 秒後に A にあるとき，X は n 秒後に 4 点 A，B，C，D のいずれかある．このとき，これらの 4 点から A に移動する確率は



(i) X が n 秒後に A にあるとき　$p^2+q^2+r^2$

(ii) X が n 秒後に B にあるとき　$2pq$

(iii) X が n 秒後に C にあるとき　$2rp$

(iv) X が n 秒後に D にあるとき　$2qr$

よって，次の確率漸化式が成立する．

$$\boldsymbol{a_{n+2}=(p^2+q^2+r^2)a_n+2pqb_n+2rpc_n+2qrd_n}$$

(2) (1) と同様にして，c_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n を用いて表すと

$$c_{n+2}=2rpa_n+2qrb_n+(p^2+q^2+r^2)c_n+2pqd_n$$

上式および (1) の辺々を加えると

$$\begin{aligned}a_{n+2}+c_{n+2}&=(p^2+q^2+r^2+2rp)(a_n+c_n)+(2pq+2qr)(b_n+d_n)\\&=(p^2+q^2+r^2+2rp)(a_n+c_n)+(2pq+2qr)(1-a_n-c_n)\\&=(p^2+q^2+r^2-2pq-2qr+2rp)(a_n+c_n)+2q(p+r)\\&=(p-q+r)^2(a_n+c_n)+2q(1-q)\\&=(1-2q)^2(a_n+c_n)+2q(1-q)\end{aligned}$$

したがって　$a_{n+2}+c_{n+2}-\dfrac{1}{2}=(1-2q)^2\left(a_n+c_n-\dfrac{1}{2}\right)$

n が偶数のとき，$a_0=1$，$c_0=0$ より

$$a_n+c_n-\frac{1}{2}=(1-2q)^n\cdot\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad a_n+c_n=\frac{1}{2}\{1+(1-2q)^n\}$$

$a_n-b_n+c_n-d_n=a_n+c_n-(b_n+d_n)=2(a_n+c_n)-1$ より

$$\boldsymbol{a_n-b_n+c_n-d_n=\begin{cases}(1-2q)^n & (n\text{ が偶数})\\ 0 & (n\text{ が奇数})\end{cases}}$$

(3) b_{n+2}，c_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n を用いて表すと

$$b_{n+2} = 2pqa_n + (p^2+q^2+r^2)b_n + 2qrc_n + 2rpd_n \quad \cdots①$$
$$d_{n+2} = 2qra_n + 2rpb_n + 2pqc_n + (p^2+q^2+r^2)d_n \quad \cdots②$$

これらは (1),(2) で求めた確率漸化式

$$a_{n+2} = (p^2+q^2+r^2)a_n + 2pqb_n + 2rpc_n + 2qrd_n$$
$$c_{n+2} = 2rpa_n + 2qrb_n + (p^2+q^2+r^2)c_n + 2pqd_n$$

に対して，① は b_n (b_{n+2}) と c_n (c_{n+2})，q と r を交換したものであり，② は d_n (d_{n+2}) と c_n (c_{n+2})，q と p を交換したものである．$b_0=0$，$d_0=0$ であるから，(2) と同様にして

$$a_n + b_n = \frac{1}{2}\{1+(1-2r)^n\}$$
$$a_n + d_n = \frac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\}$$

上の 2 式と $a_n + c_n = \dfrac{1}{2}\{1+(1-2q)^n\}$ の辺々を加えると

$$2a_n + (a_n+b_n+c_n+d_n) = \frac{1}{2}\{3+(1-2p)^n+(1-2q)^n+(1-2r)^n\}$$

$a_n+b_n+c_n+d_n=1$ であるから

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\{1+(1-2p)^n+(1-2q)^n+(1-2r)^n\} & (n\text{ が偶数}) \\ 0 & (n\text{ が奇数}) \end{cases}}$$

補足 a_n を求めたことにより，a_n+b_n，a_n+c_n，a_n+d_n の結果により，n が偶数のとき

$$b_n = \frac{1}{4}\{1-(1-2p)^n-(1-2q)^n+(1-2r)^n\}$$
$$c_n = \frac{1}{4}\{1-(1-2p)^n+(1-2q)^n-(1-2r)^n\}$$
$$d_n = \frac{1}{4}\{1+(1-2p)^n-(1-2q)^n-(1-2r)^n\}$$

■

4.5　2019年(180分)

1 (1) $h>0$ とする．座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{P}(h,\ s)$，点 $\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする．ただし，$s<t$ とする．三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ p，q，r とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときの s，t の値を求めよ．

(2) 四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，辺 AD，BD，CD の長さをそれぞれ ℓ，m，n とする．このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ．

2 次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A，B を求めよ．

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする．

3 i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

(1) 原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ．

(2) 複素数平面の相異なる 2 点 z，w を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分 $L(0,\ 1)$，$L\left(1,\ 1+\dfrac{i}{2}\right)$，$L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$，$L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$，$L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$，$L(i,\ 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

$\boxed{4}$ $H_1, \cdots, H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする．$H_1, \cdots, H_n$ によって空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，

- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$，

である．

(1) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

$\boxed{5}$ $a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

を考える．

(1) 関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ．

(2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ．

解答例

1 (1) O(0, 0)，P(h, s)，Q(h, t) より ($s<t$)

$$p^2=\mathrm{OP}^2=h^2+s^2,\quad q^2=\mathrm{OQ}^2=h^2+t^2,\quad r^2=\mathrm{PQ}^2=(t-s)^2$$

$S=\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}h(t-s)$ であるから

$$\begin{aligned}p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S&=(h^2+s^2)+(h^2+t^2)+(t-s)^2-4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}h(t-s)\\&=2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2(s^2-st+t^2)\\&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}(s+t)^2\geqq 0\end{aligned}$$

したがって　$p^2+q^2+r^2\geqq 4\sqrt{3}S$

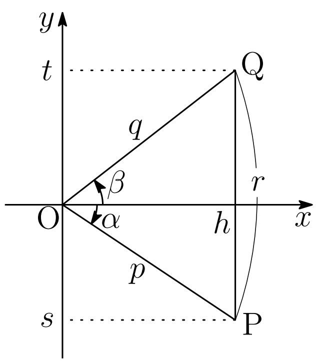
上式において等号が成立するとき

$$h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)=s+t=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{s=-\frac{h}{\sqrt{3}},\ \ t=\frac{h}{\sqrt{3}}}$$

このとき，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}h$ であるから，$\triangle$OPQ は正三角形

別解　OP，OQ の偏角をそれぞれ α, β とする．

$\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$



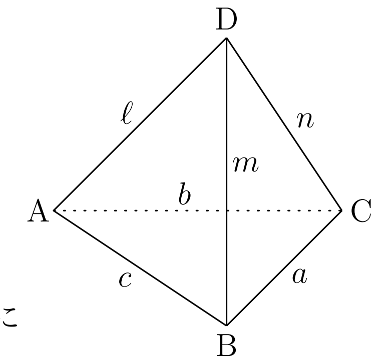
$$\begin{aligned}p^2&=h^2(1+\tan^2\alpha)\\q^2&=h^2(1+\tan^2\beta)\\r^2&=h^2(\tan\beta-\tan\alpha)^2\\S&=\frac{1}{2}h^2(\tan\beta-\tan\alpha)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S}{h^2}&=(1+\tan^2\alpha)+(1+\tan^2\beta)\\&\quad+(\tan\beta-\tan\alpha)^2-2\sqrt{3}(\tan\beta-\tan\alpha)\\&=\left(\tan\beta-\tan\alpha-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\\&\quad+\left(\tan\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\tan\beta-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\geqq 0\end{aligned}$$

等号が成立するとき　$\alpha=-\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\triangle$OPQ は正三角形

(2) (1) の結果を利用すると



$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{ABC} \\ c^2+\ell^2+m^2 &\geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{DAB} \\ a^2+m^2+n^2 &\geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{DBC} \\ b^2+n^2+\ell^2 &\geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{DCA} \end{aligned}$$

$T=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{DAB}+\triangle\mathrm{DBC}+\triangle\mathrm{DCA}$ に注意して上の 4 式の辺々を加えると

$$2(a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2) \geqq 4\sqrt{3}T$$

したがって　$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$

また，(1) の結論から，上式において等号が成立するとき，四面体 ABCD は**正四面体**である．

解説 $2s=p+q+r$ とし，3 正数 $s-p$，$s-q$，$s-r$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(s-p)+(s-q)+(s-r)}{3} \geqq \sqrt[3]{(s-p)(s-q)(s-r)} \quad \cdots ①$$

① における等号成立条件は　$s-p=s-q=s-r$　すなわち　$p=q=r$

$$\begin{aligned} \frac{s^4}{27} &\geqq s(s-p)(s-q)(s-r) \\ (2s)^2 &\geqq 12\sqrt{3}\sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)} \\ (p+q+r)^2 &\geqq 12\sqrt{3}S \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$\vec{u}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}=(p,\ q,\ r)$ を $|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geqq (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ に適用すると

$$\begin{aligned} (1^2+1^2+1^2)(p^2+q^2+r^2) &\geqq (1\cdot p+1\cdot q+1\cdot r)^2 \quad \text{(シュワルツの不等式)} \\ 3(p^2+q^2+r^2) &\geqq (p+q+r)^2 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

③ において等号が成立するとき　$\vec{u}/\!/\vec{v}$　すなわち　$p=q=r$

②，③ より　$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$　(等号が成立とき $p=q=r$)

この幾何不等式を **Weitzenbock** の不等式という． ■

2　　(∗)　$\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x} \qquad (1 \leqq x \leqq 2)$

(∗) の左辺について，$t = xy$ とおくと

y	$\frac{1}{x} \longrightarrow \frac{2}{x}$
t	$1 \longrightarrow 2$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy &= \int_1^2 \left|\log\frac{t}{x}\right| f(t)\frac{1}{x}\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\log\frac{t}{x}\,dt + \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)\log\frac{t}{x}\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_1^x f(t)(\log t - \log x)\,dt - \frac{1}{x}\int_2^x f(t)(\log t - \log x)\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\log t\,dt + \frac{\log x}{x}\int_1^x f(t)\,dt \\
&\qquad - \frac{1}{x}\int_2^x f(t)\log t\,dt + \frac{\log x}{x}\int_2^x f(t)\,dt
\end{aligned}$$

上式により，(∗) の両辺に x を掛けると

$$\begin{aligned}
-\int_1^x f(t)\log t\,dt - \int_2^x f(t)\log t\,dt + (\log x)\left(\int_1^x f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt\right)& \\
= 3x^2(\log x - 1) + Ax + B \quad \cdots (∗∗)&
\end{aligned}$$

(∗∗) の両辺を x について微分すると

$$\begin{aligned}
-2f(x)\log x + \frac{1}{x}\left(\int_1^x f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt\right) + (\log x)\cdot 2f(x)& \\
= 6x(\log x - 1) + 3x + A&
\end{aligned}$$

上式の両辺を整理して，両辺に x を掛けると

$$\int_1^x f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt = 6x^2\log x - 3x^2 + Ax \quad \cdots (∗∗∗)$$

(∗∗∗) に $x = 1,\ 2$ を代入すると

$$\int_2^1 f(t)\,dt = A - 3, \quad \int_1^2 f(t)\,dt = 2A + 24\log 2 - 12$$

これを解いて　$\boldsymbol{A = 5 - 8\log 2}$,　$\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = -2 + 8\log 2 \quad \cdots ①$

$(**)$ に $x=1,\ 2$ を代入すると

$$-\int_2^1 f(t)\log t\,dt = A+B-3$$
$$-\int_1^2 f(t)\log t\,dt + (\log 2)\int_1^2 f(t)\,dt = 2A+B+12(\log 2-1)$$

上の 2 式に ① を代入すると

$$-\int_2^1 f(t)\log t\,dt = (5-8\log 2)+B-3,$$
$$-\int_1^2 f(t)\log t\,dt + (\log 2)(-2+8\log 2) = 2(5-8\log 2)+B+12(\log 2-1)$$

これらをそれぞれ整理すると

$$-\int_2^1 f(t)\log t\,dt = B+2-8\log 2,$$
$$-\int_1^2 f(t)\log t\,dt = B-2-2\log 2-8(\log 2)^2$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{B = 5\log + 4(\log 2)^2}$

$(***)$ を微分すると　$2f(x) = 12x\log x + A$

よって　$\boldsymbol{f(x) = 6x\log x + \frac{5}{2} - 4\log 2}$ ■

3 (1) $z=a+bi$ とおくと ($a,\ b$ は整数)

$$r=\left|\frac{z}{3+2i}\right|=\frac{|a+bi|}{|3+2i|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{13}}$$

r を小さい順に調べると

$(a,\ b)=(0,\ 0)$ のとき　$r=0$　(1 個)

$(a,\ b)=(\pm1,\ 0),\ (0,\pm1)$ のとき　$r=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$　(4 個)

$(a,\ b)=(\pm1,\pm1)$ のとき　$r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$　(4 個)

$(a,\ b)=(\pm2,\ 0),\ (0,\pm2)$ のとき　$r=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$　(4 個)

$(a,\ b)=(\pm2,\pm1),\ (\pm1,\pm2)$ のとき　$r=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$　(8 個)

$(a,\ b)=(\pm2,\pm2)$ のとき　$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$　(4 個)

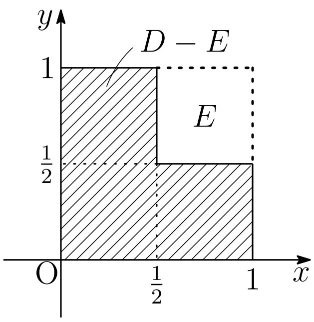
r	0	$\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$
$N(r)$	1	5	9	13	21	25

よって　$\{r\,|\,10\leqq N(r)<25\}$ は　$\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{13}}\leqq r<\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}}$

(2) 2 つの領域 D，E を次のように定める．

$$D=\{x+yi\,|\,0\leqq x\leqq1,\ 0\leqq y\leqq1\},$$
$$E=\{x+yi\,|\,\tfrac{1}{2}<x\leqq1,\ \tfrac{1}{2}<y\leqq1\}$$

6 つの線分で囲まれる領域は $D-E$ で，右の図の斜線部分である．$z=a+bi$ とおくと



$$\frac{z}{3+2i}=\frac{3a+2b}{13}+\frac{-2a+3b}{13}i$$

これが，領域 D に含まれるとき

$$\begin{cases}0\leqq\frac{3a+2b}{13}\leqq1\\0\leqq\frac{-2a+3b}{13}\leqq1\end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad (*)\begin{cases}0\leqq3a+2b\leqq13\\0\leqq-2a+3b\leqq13\end{cases}$$

また，領域 E に含まれるとき，a，b が整数であることに注意して

$$\begin{cases}\frac{1}{2}<\frac{3a+2b}{13}\leqq1\\\frac{1}{2}<\frac{-2a+3b}{13}\leqq1\end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad (**)\begin{cases}7\leqq3a+2b\leqq13\\7\leqq-2a+3b\leqq13\end{cases}$$

$(*)$ の 2 式から a を消去すると (第 1 式 $\times 2+$ 第 2 式 $\times 3$)

$$0 \leqq 2(3a+2b)+3(-2a+3b) \leqq 13\times 5 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq b \leqq 5$$

これらを順次，$(*)$ の 2 式に代入することにより

$$\begin{array}{lll} b=0 \text{ のとき} & a=0 & (1\text{ 個}) \\ b=1 \text{ のとき} & a=0,\ 1 & (2\text{ 個}) \\ b=2 \text{ のとき} & a=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3 & (5\text{ 個}) \\ b=3 \text{ のとき} & a=-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2 & (5\text{ 個}) \\ b=4 \text{ のとき} & a=0,\ 1 & (2\text{ 個}) \\ b=5 \text{ のとき} & a=1 & (1\text{ 個}) \end{array}$$

したがって，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数は

$$1+2+5+5+2+1=16\ (\text{個})$$

$(**)$ の 2 式から a を消去すると (第 1 式 $\times 2+$ 第 2 式 $\times 3$)

$$7\times 5 \leqq 2(3a+2b)+3(-2a+3b) \leqq 13\times 5 \quad \text{ゆえに} \quad b=3,\ 4,\ 5$$

これらを順次，$(**)$ の 2 式に代入することにより

$$\begin{array}{lll} b=3 \text{ のとき} & a=1 & (1\text{ 個}) \\ b=4 \text{ のとき} & a=0,\ 1 & (2\text{ 個}) \\ b=5 \text{ のとき} & a=1 & (1\text{ 個}) \end{array}$$

したがって，$(**)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数は

$$1+2+1=4\ (\text{個})$$

求める個数は，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数から $(**)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数を引けばよいから

$$16-4=\mathbf{12}\ (\text{個})$$

■

4 (1) 平面の n 本の直線による最大分割数を s_n とすると $(n=1,2,\cdots)$，次の漸化式が成立する．

$$s_1=2,\quad s_n=s_{n-1}+n\quad (n\geqq 2)$$

$n\geqq 2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(s_k-s_{k-1})=\sum_{k=2}^{n}k$　ゆえに　$s_n-s_1=\dfrac{1}{2}n(n+1)-1$

上の第 2 式は，$n=1$ のときも成立するから

$$s_n=\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

平面 $H_1,\cdots,H_n$ による空間分割が最大分割であるとき，その最大分割数を r_n とする $(n=1,2,\cdots)$．$H_1,\cdots,H_{n-1}$ と H_n との交線による平面 H_n の分割数は s_{n-1} に等しく，空間 $H_1,\cdots,H_{n-1}$ による最大分割数 r_{n-1} は，平面 H_n の分割により s_{n-1} だけ増加するから，次の漸化式が成立する．

$$r_1=2,\quad r_n=r_{n-1}+s_{n-1}\quad (n\geqq 2)$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=2}^{n}(r_k-r_{k-1})=\sum_{k=2}^{n}s_{k-1}=\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+1\right\}$$

$$r_n-r_1=\frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}+\sum_{k=2}^{n}\{k-(k-1)\}$$

$$r_n-2=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)+n-1$$

上式は，$n=1$ のときも成立することから

$$\begin{aligned}r_n&=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)+n+1\\&=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1\end{aligned}$$

よって，$T(H_1,\cdots,H_n)$ のとり得る値のうち最も大きいものは

$$\boldsymbol{\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1}$$

(2) (i) $n=2$ のとき

$$T(H_1, H_2) = \begin{cases} 4 & (H_1 \text{と} H_2 \text{が平行でない}) \\ 3 & (H_1 \text{と} H_2 \text{が平行}) \end{cases}$$

よって，$T(H_1, H_2)$ のとり得る値で，2 番目に大きいものは　3

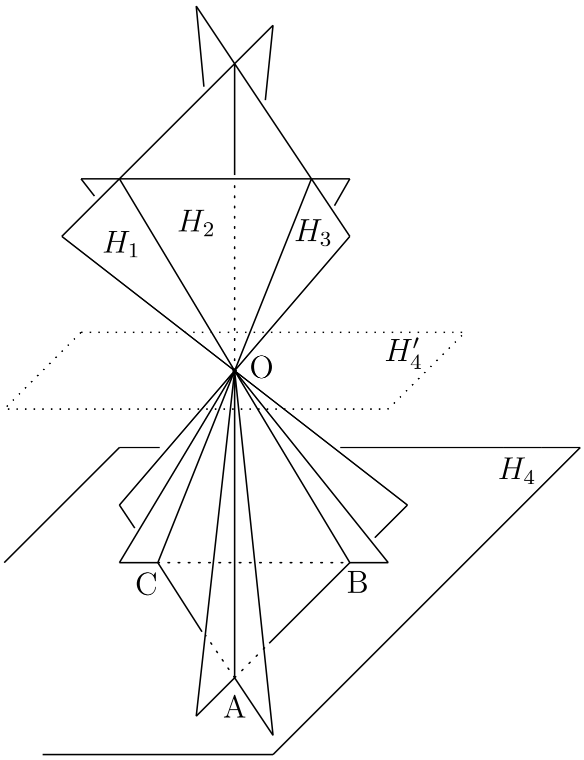
(ii) $n=3$ のとき，(1) の結果および問題文にある具体例 1，2 から，$T(H_1, H_2, H_3)$ のとり得る最大値および 2 番目に大きい値は，それぞれ 8，7 である．
よって，$T(H_1, H_2, H_3)$ のとり得る値で，2 番目に大きいものは　7

(iii) 問題文にある具体例 4 では，閉領域

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0, \quad x+y+z \leqq 1$$

が存在し，$H_4 : x+y+z=1$ を平行移動した平面 $H_4' : x+y+z=0$ に移動することで，この閉領域は退化するから

$$T(H_1, H_2, H_3, H_4') = T(H_1, H_2, H_3, H_4) - 1 = 15 - 1 = 14$$



$n \geqq 4$ のとき，境界をもつ閉領域が存在し，閉領域 (四面体 OABC) の頂点の 1 つを O とし，O の対面に相当する平面 (平面 ABC) を O を通る平面に移動することで，この閉領域は退化する．

(i)〜(iii) から，求める値は　$r_n - 1 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n}$

(3) 平面 H_1, $H_2, \cdots$, H_n は，空間の最大分割を与えるものとする．

i) $n \geqq 5$ のとき，閉領域は複数あるため，(2) で行った閉領域の頂点への平面の移動により，その閉領域を退化させることができる．その平面の移動を 2 回行うことで，$T(H_1, H_2, \cdots, H_n)$ のとり得る値で 3 番目に大きいものは

$$r_n - 2 = \frac{1}{6}n^3 - \frac{5}{6}n - 1$$

ii) $n = 3$ のとき，(1) の結果および問題文にある具体例 1，2，3 から，$T(H_1, H_2, H_3)$ のとり得る最大値，2 番目および 3 番目に大きい値は，それぞれ 8，7，6 である．

iii) $n = 4$ のとき，問題文の具体例 4 および (2)(iii) で示した閉領域をもつとき，空間分割数はその最大値 15 をとる．$T(H_1, H_2, H_3, H_4)$ が最大値以外の値をとるとき，この閉領域が退化する A)，B) の場合がある．

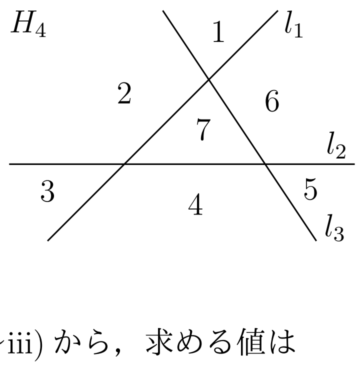
A) (2) で示したように閉領域が 1 つ退化して，4 平面の共有点 O が，各平面の中心となるとき，その分割数は 14 で，さらに領域を退化させるとき，O に関する対称性により，領域は偶数個ずつ減少するから，空間分割数が 13 になることはない (分割数は偶数)．

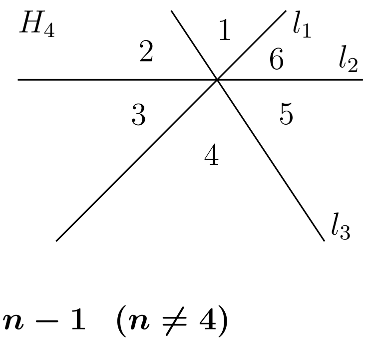
B) (2) で示した図で 3 平面 H_1, H_2, H_3 の共有点 O を解消する (領域が 1 つ減る)，すなわち，H_1, H_2 の交線と H_2, H_3 の交線を平行にとるとき (H_1, H_3 の交線もこれと平行)，その空間分割数は，H_4 に関して同数 (分割数は偶数個) であることに注意して (左下の図)

$$15 - 1 = 7 \times 2 = 14$$

H_1, H_2, H_3 の H_4 との交線を，それぞれ，l_1, l_2, l_3 とする．特に，l_1, l_2, l_3 が 1 点で交わるとき，その空間分割数は (右下の図)

$$6 \times 2 = 12$$





i)〜iii) から，求める値は $\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}n^3 + \dfrac{5}{6}n - 1} & \boldsymbol{(n \neq 4)} \\ \boldsymbol{12} & \boldsymbol{(n = 4)} \end{cases}$

空間の最大分割数

非負の整数 $p,\ q$ について，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & (p < q) \\ {}_p\mathrm{C}_q & (p \geqq q) \end{cases}$ とすると

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 \\ q+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q+1 \end{pmatrix}$$

(1) で求めた平面の直線による最大分割数 s_n は

$$s_n = \frac{1}{2}n(n+1)+1 = 1+n+\frac{1}{2}n(n-1) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$$

空間の平面による最大分割数 r_n は，$r_1 = 2,\ r_n = r_{n-1} + s_{n-1}\ (n \geqq 2)$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}(r_k - r_{k-1}) &= \sum_{k=2}^{n} s_{k-1} \\
r_n - 2 &= \sum_{k=2}^{n}\left\{1 + \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\
r_n &= 1 + n + \sum_{k=2}^{n}\begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^{n}\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 1 + n + \sum_{k=2}^{n}\left\{\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{n}\left\{\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \\
r_n &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

m 次元空間における n 個の余次元 $1(m-1$ 次元$)$ の超平面による最大分割数は

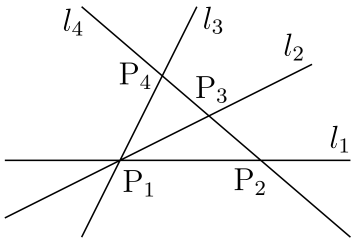
$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

である (帰納法により示すことができる).

平面の直線による分割

平面の n 本の直線による分割について $(n \geqq 2)$，オイラーの多面体定理[1]を用いた証明を与える．交点の総数を p，直線が交点で分断される線分の総数を S'，半直線の総数を S'' とし，$S = S' + S''$ とする．境界がすべて線分である領域を閉領域，半直線を境界に持つ領域を開領域という．閉領域，開領域の総数を，それぞれ R'，R'' とし，$R = R' + R''$ とおく．

交点の重複度を与える関数を λ とする．例えば，右の図における P_k の重複度は次のようになる．



$$\lambda(\mathrm{P}_1) = 3, \quad \lambda(\mathrm{P}_2) = \lambda(\mathrm{P}_3) = \lambda(\mathrm{P}_4) = 2$$

l_1 上には交点が 2 個，線分が 1 個あり，l_4 上には交点が 3 個，線分が 2 個ある (交点の数=線分の数 $+1$)．

一般に，n 本の直線について，交点の個数および線分の本数の総和を求めると

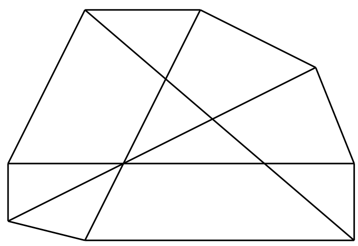
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda(\mathrm{P}_k) = S' + n$$

また，半直線の本数および開領域の個数は，半直線が放射状に伸びた部分から

$$S'' = 2n, \quad R'' = 2n$$

$S = S' + S''$ より　　$S = \sum_{k=1}^{p} \lambda(\mathrm{P}_k) + n$

右の図のように，n 本の半直線上に点をとり，それらを結んでできる図形を考え，その周囲の辺を底面とする立体を考える．その立体の頂点，辺，領域の数は，それぞれ $p + 2n$，$S + 2n$，$R + 1$ となる．これをオイラーの多面体定理に適用すると



$$(p + 2n) - (S + 2n) + (R + 1) = 2$$

よって
$$\begin{aligned} R &= 1 - p + S = 1 - p + \sum_{k=1}^{p} \lambda(\mathrm{P}_k) + n \\ &= 1 + n + p + \sum_{k=1}^{p} \{\lambda(\mathrm{P}_k) - 2\}, \\ R' &= 1 - n + p + \sum_{k=1}^{p} \{\lambda(\mathrm{P}_k) - 2\} \end{aligned}$$

重複度が 3 以上の交点について，その重複を 1 つ解消する (-1) ごとに p が 2 増えるから，すべての交点の重複度が 2 のとき，R は最大となり，このとき $p = {}_n\mathrm{C}_2$．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2016_10_19.pdf を参照．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = (x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ より $(x>0)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + (x+1)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x} \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \int_x^{x+1} \frac{dt}{x} = \int_x^{x+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right) dt < 0 \end{aligned}$$

よって，関数 $f(x)$ は $x>0$ で単調減少．

(2) $a = \dfrac{2^8}{3^4}$．数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

$b_k > 0$ に注意して，両辺の自然対数をとると

$$\log b_k = (k+1)\log(k+1) - k\log a - \log k!$$

ゆえに　$\log b_{k+1} = (k+2)\log(k+2) - (k+1)\log a - \log(k+1)!$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} \log b_{k+1} - \log b_k &= (k+2)\log(k+2) - (k+2)\log(k+1) - \log a \\ &= (k+2)\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right) - \log a \\ &= f(k+1) - \log a \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$2^2 > \dfrac{2^8}{3^4} > e$，$f(1) = 2\log 2$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} f(k+1) = 1$ および (1) の結論により

$$f(k+1) - \log a = 0$$

を満たす k はただ一つ存在し，実際，$k+1=3$ のとき

$$\log\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2} - \log\left(\frac{4}{3}\right)^4 = 0$$

$(*)$ より　$b_1 < b_2 = b_3 > b_4 > b_5 > \cdots$

よって　$b_k = M$ となる k は　　$\boldsymbol{k=2,\ 3}$

$$M = b_2 = \frac{3^3}{a^2 2!} = \frac{3^3}{2}\left(\frac{3^4}{2^8}\right)^2 = \mathbf{\frac{3^{11}}{2^{17}}} \quad \left(= \frac{177147}{131072}\right)$$

補足 $g(x) = x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ とすると $(x>0)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1} \\ &= \int_x^{x+1}\frac{dt}{t} - \int_x^{x+1}\frac{dt}{x+1} = \int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x+1}\right)dt > 0 \end{aligned}$$

よって，$g(x)$ は $x>0$ で単調増加．また

$$f(x) - g(x) = (x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\} = 0$　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$　$\cdots$(A)

$f'(x) < 0$ より　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} < 0$　ゆえに　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < 1$

$g'(x) > 0$ より　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} > 0$　ゆえに　$1 < \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

上の 2 式から　　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < 1 < \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

$G(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，$F(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ とおくと

$$G(x) < e < F(x)$$

(A) より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} F(x)$ であるから

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} F(x) = e$$

さらに，$G(x) = F(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty} F(-x-1) = \lim_{x\to\infty} F(x-1) = e$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} G(x) = e$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x) = e$ であるから [2]

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

■

[2]数列の証明は，http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照．

4.6　2020 年 (180 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) $|x^2 - x - 23|$ の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ．

(2) k 個の連続した正の整数 x_1，$\cdots$，x_k に対して，

$$|{x_j}^2 - x_j - 23| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 x_1，$\cdots$，x_k をすべて求めよ．ここで k 個の連続した整数とは，

$$x_1,\ x_1+1,\ x_2+2,\ \cdots,\ x+k-1$$

となる列のことである．

2 複素数平面上の異なる 3 点 A，B，C を複素数 α，β，γ で表す．ここで A，B，C は同一直線上にないと仮定する．

(1) $\triangle$ABC が正三角形となる必要十分条件は，

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であることを示せ．

(2) $\triangle$ABC が正三角形のとき，$\triangle$ABC の外接円上の点 P を任意にとる．このとき，

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4 + \mathrm{BP}^4 + \mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ．ただし 2 点 X，Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す．

3 座標空間に5点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(3,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 4),\ \mathrm{P}(0,\ 0,-2)$$

をとる．さらに $0 < a < 3$，$0 < b < 3$ に対して2点 $\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$ と $\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を考える．

(1) 点P，Q，Rを通る平面を H とする．平面 H と線分ACの交点Tの座標，および平面 H と線分BCの交点Sの座標を求めよ．

(2) 点Q，R，S，Tが同一円周上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

4 n を正の奇数とする．曲線 $y = \sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x + y = 0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を1回転させてできる回転体を V_n とする．

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ をPとおく．またPから ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点をQとする．線分PQを ℓ の周りに1回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．

(2) (1)の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

5 k を正の整数とし，$a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく．

(1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ．

(2) k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ．

(3) (2)の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が0ではない値に収束する整数 $m,\ n$ $(m > n \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ．

(4) (2)と(3)の極限値 $A,\ B$ に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が0ではない値に収束する整数 $p,\ q,\ r$ $(p > q > r \geqq 1)$ を求めよ．またそのとき極限値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x^2 - x - 23$ とおくと，法 3 について

$$(*) \quad |f(x)| \equiv 2 \pmod 3$$

を満たす正の整数 x を求めればよい．

$$\begin{array}{lll} x \equiv 0 \text{ のとき} & f(x) \equiv 1, \quad -f(x) \equiv 2 & \pmod 3 \\ x \equiv 1 \text{ のとき} & f(x) \equiv 1, \quad -f(x) \equiv 2 & \pmod 3 \\ x \equiv 2 \text{ のとき} & f(x) \equiv 0, \quad -f(x) \equiv 0 & \pmod 3 \end{array}$$

$f(x) = (x+4)(x-5) - 3 = (x+5)(x-6) + 7$ より

$$\begin{array}{lll} 1 \leqq x \leqq 5 \text{ のとき} & f(x) < 0 \text{ より} & |f(x)| = -f(x) \\ 6 \leqq x \text{ のとき} & f(x) > 0 \text{ より} & |f(x)| = f(x) \end{array}$$

$(*)$ を満たす正の整数は，$1 \leqq x \leqq 5$ で

$$x \equiv 0 \quad \text{または} \quad x \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x = 1,\ 3,\ 4}$$

(2) (1) で示した

$$x \equiv 2 \text{ のとき} \quad |f(x)| \equiv 0 \pmod 3$$

により，$x \equiv 2 \pmod 3$ のとき，$|f(x)|$ は 3 で割り切れる．

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	**23**	21	**17**	**11**	**3**	**7**	**19**	33

$$x \geqq 6 \text{ のとき} \quad |f(x)| = f(x) \geqq f(6) = 7$$

$x \equiv 2 \pmod 3$，$x \geqq 8$ のとき，$|f(x)|$ は 3 を因数にもつ合成数である．
このとき，連続して素数が現れる正の整数は高々2 個である．
よって，上の表から，k の最大値は　**5**

連続する正の整数は　**3，4，5，6，7**

補足　正の整数 x を順次代入することで，結果 $(k = 5)$ が予測できる．$x \geqq 8$ において，k が 5 より小さいことを示してもよい．例えば，法 7 について

$$\begin{array}{ll} f(8) \equiv f(1) = -23 \equiv 5, & f(9) \equiv f(2) = -21 \equiv 0, \\ f(10) \equiv f(3) = -17 \equiv 4, & f(11) \equiv f(4) = -11 \equiv 3, \\ f(12) \equiv f(5) = -3 \equiv 4, & f(13) \equiv f(6) = 7 \equiv 0, \\ f(14) \equiv f(0) = -23 \equiv 5 & \end{array}$$

このように，7 で割り切れる数が間に現れ，$k < 5$ であることが分かる．■

2 (1) 複素数平面上の異なる3点 A(α)，B(β)，C(γ) が正三角形となるとき

$$w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=w \quad \text{または} \quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{w}$$

$w+\overline{w}=1$，$w\overline{w}=|w|^2=1$ より，w，$\overline{w}$ を解とする2次方程式は

$$z^2-(w+\overline{w})z+w\overline{w}=0 \quad \text{すなわち} \quad z^2-z+1=0$$

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は，この2次方程式の解であるから

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+1=0 \quad \cdots ①$$

$$(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$$

整理すると　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \quad \cdots (*)$

また，$(*) \Longrightarrow ① \Longrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=w,\ \overline{w} \Longrightarrow$ △ABC は正三角形

よって，△ABC が正三角形となる必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

(2) 3点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする正三角形 ABC の外心を原点 O とすると ($|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=R$)，△ABC の外心と重心は一致するから

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha+\beta+\gamma=0 \quad \cdots ②$$

△ABC の外接円の点 P(z) について ($|z|=R$)

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=|z-\alpha|^2=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=|z|^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+|\alpha|^2\\&=2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})\end{aligned}$$

同様に　$\mathrm{BP}^2=2R^2-(\overline{\beta}z+\beta\overline{z})$，$\mathrm{CP}^2=2R^2-(\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z})$

上の3式および ② から

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=6R^2-(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z+(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\&=\boldsymbol{6R^2}\end{aligned}$$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=0$ より　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

これと (1) の結果から

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \quad \cdots(**)$$

$\mathrm{AP}^2=2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^4&=(\mathrm{AP}^2)^2=\{2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})\}^2\\&=4R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+\overline{\alpha}^2z^2+2R^4+\alpha^2\overline{z}^2\\&=6R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+\overline{\alpha}^2z^2+\alpha^2\overline{z}^2\end{aligned}$$

同様に，$\mathrm{BP}^2=2R^2-(\overline{\beta}z+\beta\overline{z})$，$\mathrm{CP}^2=2R^2-(\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z})$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^4&=6R^4-4R^2(\overline{\beta}z+\beta\overline{z})+\overline{\beta}^2z^2+\beta^2\overline{z}^2,\\\mathrm{CP}^4&=6R^4-4R^2(\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z})+\overline{\gamma}^2z^2+\gamma^2\overline{z}^2\end{aligned}$$

これらの 3 式と $(**)$ により

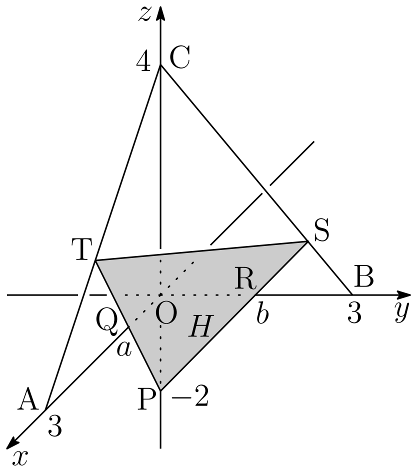
$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4&=18R^4-4R^2(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z-4R^2(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\&\quad+(\overline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})z^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\overline{z}^2=\boldsymbol{18R^4}\end{aligned}$$

別解　$w=\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ とおくと　$1+w+\overline{w}=0$，$1+w^2+\overline{w}^2=0$

$\mathrm{A}(R)$，$\mathrm{B}(Rw)$，$\mathrm{C}(R\overline{w})$，$\mathrm{P}(z)$ とおくと $(|z|=R)$

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=|z-R|^2+|z-Rw|^2+|z-R\overline{w}|^2\\&=(z-R)(\overline{z}-R)+(z-Rw)(\overline{z}-R\overline{w})\\&\qquad+(z-R\overline{w})(\overline{z}-Rw)\\&=2R^2-R(z+\overline{z})+2R^2-R(\overline{w}z+w\overline{z})\\&\qquad+2R^2-R(wz+\overline{wz})\\&=6R^2-R(1+w+\overline{w})(z+\overline{z})=\boldsymbol{6R^2},\\\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4&=(|z-R|^2)^2+(|z-Rw|^2)^2+(|z-R\overline{w}|^2)^2\\&=\{2R^2-R(z+\overline{z})\}^2+\{2R^2-R(\overline{w}z+w\overline{z})\}^2\\&\qquad\{2R^2-R(wz+\overline{wz})\}^2\\&=4R^4-4R^3(z+\overline{z})+R^2(z^2+\overline{z}^2+2R^2)\\&\quad+4R^4-4R^3(\overline{w}z+w\overline{z})+R^2(\overline{w}^2z^2+w^2\overline{z}^2+2R^2)\\&\qquad+4R^4-4R^3(wz+\overline{wz})+R^2(w^2z^2+\overline{w}^2\overline{z}^2+2R^2)\\&=18R^4-4R^3(1+w+\overline{w})(z+\overline{z})+R^2(1+w^2+\overline{w}^2)(z^2+\overline{z}^2)\\&=\boldsymbol{18R^4}\end{aligned}$$

3　(1)　T は 2 点 P$(0,\ 0, -2)$，Q$(a,\ 0,\ 0)$ を通る直線上の点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

とおくと (t は実数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\\ \overrightarrow{\mathrm{OT}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= (at,\ 0,\ 2t-2)\\ &= \frac{at}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

T は線分 AC 上の点であるから　$\dfrac{at}{3} + \dfrac{t-1}{2} = 1$

ゆえに　$t = \dfrac{9}{2a+3}$　　よって　$\mathbf{T}\left(\boldsymbol{\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{4(3-a)}{2a+3}}\right)$

S は 2 点 P$(0,\ 0, -2)$，R$(0,\ b,\ 0)$ を通る直線上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = s\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

とおくと (s は実数)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s(\overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\ &= (0,\ bs,\ 2s-2) = \frac{bs}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{s-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

S は線分 BC 上の点であるから　$\dfrac{bs}{3} + \dfrac{s-1}{2} = 1$

ゆえに　$s = \dfrac{9}{2b+3}$　　よって　$\mathbf{S}\left(\boldsymbol{0,\ \dfrac{9b}{2b+3},\ \dfrac{4(3-b)}{2b+3}}\right)$

別解　T は zx 平面上の 2 直線 AC，PQ の交点であるから

$$\mathrm{AC} : \frac{x}{3} + \frac{z}{4} = 1,\quad \mathrm{PQ} : \frac{x}{a} + \frac{z}{-2} = 1$$

ゆえに　$x = \dfrac{9a}{2a+3}$，　$z = \dfrac{4(3-a)}{2a+3}$　　よって　$\mathrm{T}\left(\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{4(3-a)}{2a+3}\right)$

S は yz 平面上の 2 直線 BC，PR の交点であるから

$$\mathrm{BC} : \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1,\quad \mathrm{PQ} : \frac{y}{b} + \frac{z}{-2} = 1$$

ゆえに　$y = \dfrac{9b}{2b+3}$，　$z = \dfrac{4(3-b)}{2b+3}$　　よって　$\mathrm{S}\left(0,\ \dfrac{9b}{2b+3},\ \dfrac{4(3-b)}{2b+3}\right)$

(2) 方べきの定理とその逆により，点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT} = \mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS} \quad \text{ゆえに} \quad t\mathrm{PQ}^2 = s\mathrm{PR}^2$$

が成立することである．$\mathrm{PQ}^2 = a^2+4$，$\mathrm{PR}^2 = b^2+4$ および (1) で求めた s，t を上の第 2 式に代入すると

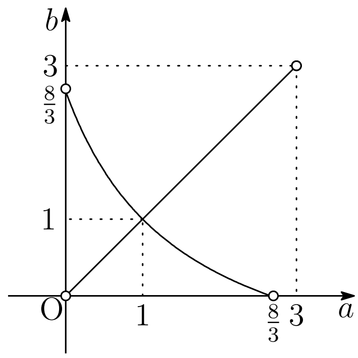
$$\frac{9}{2a+3}\cdot(a^2+4) = \frac{9}{2b+3}\cdot(b^2+4)$$

ゆえに　$(a^2+4)(2b+3) = (b^2+4)(2a+3)$

$$(a-b)(2ab+3a+3b-8) = 0$$

よって　$\boldsymbol{b = a}$　**または**　$\boldsymbol{b = \dfrac{-3a+8}{2a+3}}$

$\boldsymbol{(0 < a < 3,\ 0 < b < 3)}$



■

$\boxed{4}$ (1) O を原点とする xy 系から，O を原点とし X 軸，Y 軸をそれぞれ ℓ に平行および垂直な XY 系への直交変換を行う．xy 系の正規直交基底

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，XY 系の正規直交基底を

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = X\vec{f}_1 + Y\vec{f}_2$ より

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{X}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X+Y \\ -X+Y \end{pmatrix}$$

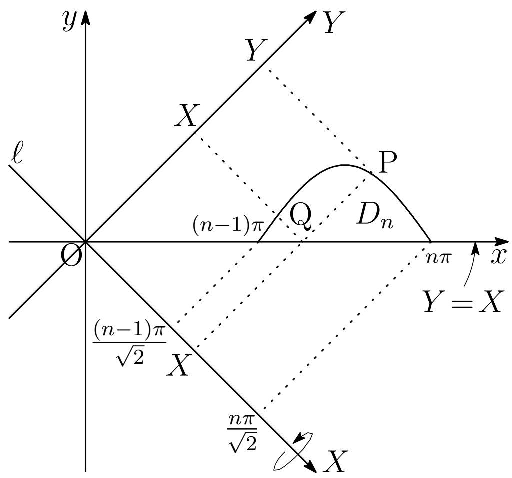
したがって　$\begin{cases} x = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$　逆に　$(*)\begin{cases} X = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$

XY 系において点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ と点 Q の X 座標は等しく，Q は直線 $Y=X$ 上の点であるから

$$\mathrm{Q}(X,\ X)$$

線分 PQ を ℓ (X 軸) の周りに 1 回転させてできる図形の面積は

$$\pi(Y^2-X^2)=\pi\left\{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=2\pi xy=\boldsymbol{2\pi x\sin x}$$



(2)　(*) より　$X=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}$$　ゆえに

x	$(n-1)\pi \longrightarrow n\pi$
X	$\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{n\pi}{\sqrt{2}}$

(1) の結果から，回転体の体積 V_n は，n が奇数であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi}&=\int_{\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{n\pi}{\sqrt{2}}}(Y^2-X^2)\,dX\\&=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}2x\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(2x\sin x-x\sin 2x)\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-2x\cos x+2\sin x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(4n-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V_n=\sqrt{2}\pi^2\left(2n-\frac{3}{4}\right)}$

発展 D_n の面積を S_n とし，x 軸の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体の体積を W_n とすると

$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = 2,$$

$$\begin{aligned} W_n &= \pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (1-\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

D_n の対称性により D_n の重心を $\mathrm{G}_n\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}, h_n\right)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理[3] により

$$W_n = 2\pi h_n S_n \quad \text{ゆえに} \quad h_n = \frac{W_n}{2\pi S_n} = \frac{\pi}{8}$$

重心 $\mathrm{G}_n\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}, \dfrac{\pi}{8}\right)$ から直線 $\ell : x+y=0$ までの距離を d_n とすると

$$d_n = \frac{\left|\dfrac{(2n-1)\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2n - \frac{3}{4}\right)$$

よって　$V_n = 2\pi d_n S_n = 2\pi\cdot\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2 = \sqrt{2}\pi^2\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)$

注意 パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外であるから，検算としての利用に留めなければならない．■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

$\boxed{5}$ (1) $a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\sin\frac{\pi x}{2}dx$ より (k は正の整数)

$$a_{k+2} = \int_0^1 x^{k+1}\sin\frac{\pi x}{2}dx = \int_0^1 x^{k+1}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)' dx$$
$$= \left[\ x^{k+1}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1 - \int_0^1 (k+1)x^k\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx$$
$$= \int_0^1 (k+1)x^k\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)' dx$$
$$= \left[\ (k+1)x^k\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1 - \int_0^1 k(k+1)x^{k-1}\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx$$
$$= \frac{4(k+1)}{\pi^2} - \frac{4k(k+1)}{\pi^2}\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

よって　$a_{k+2} = \dfrac{4(k+1)}{\pi^2} - \dfrac{4k(k+1)}{\pi^2}a_k = \boldsymbol{\dfrac{4(k+1)}{\pi^2}(1-ka_k)}$

(2) (1) の結果から　$1 - ka_k = \dfrac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}$

$a_{k+2} = \displaystyle\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ より

$$0 < a_{k+2} < \int_0^1 x^{k+1}\,dx = \left[\ \frac{x^{k+2}}{k+2}\ \right]_0^1 = \frac{1}{k+2}$$

したがって　　$0 < 1 - ka_k < \dfrac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}(1-ka_k) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{k\to\infty} ka_k = 1}$$

別解　$a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2}\, dx$ より (k は正の整数)

$$
\begin{aligned}
a_k &< \int_0^1 x^{k-1}\, dx = \frac{1}{k}, \\
a_k &= \int_0^1 \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin \frac{\pi x}{2}\, dx \\
&= \left[\ \frac{x^k}{k} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1 \\
&\qquad\qquad + \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(-\frac{\pi^2}{4}\right) \cos \frac{\pi x}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)} \int_0^1 x^{k+1} \cos \frac{\pi x}{2}\, dx \\
&> \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)} \int_0^1 x^{k+1} dx = \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}
$$

したがって　$\dfrac{1}{k} - \dfrac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} < a_k < \dfrac{1}{k}$

$$-\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)} < ka_k - 1 < 0$$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left\{-\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}\right\} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty} (ka_k - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad A = \lim_{k\to\infty} ka_k = 1$$

(3) $a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2}\,dx$ より (k は正の整数) [別解を参照]

$$a_k > \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)},$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_0^1 \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin \frac{\pi x}{2}\,dx \\
&= \Bigg[\frac{x^k}{k} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right) \\
&\qquad + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)} \left(-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(-\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi x}{2}\right) \Bigg]_0^1 \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(\frac{\pi^4}{16} \sin \frac{\pi x}{2}\right) dx \\
&< \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot \frac{\pi^4}{16}\,dx \\
&= \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
\end{aligned}$$

したがって

$$(*) \quad 0 < a_k - \frac{1}{k} + \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$A = 1$ および $(*)$ から，$\{k^m a_k - k^n A\}$ が 0 ではない値に収束することに注意して，辺々に $k^3 > 0$ を掛けると

$$0 < k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

さらに，辺々に $\dfrac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}$ を加えると

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} &< k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2}{4} \\
&< \frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^4k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}\left(k^3a_k-k^2A+\frac{\pi^2}{4}\right)=0$$

よって　$\boldsymbol{B=\lim_{k\to\infty}(k^3a_k-k^2A)=-\frac{\pi^2}{4},\ m=3,\ n=2}$

(4) (3) の結果から

$$\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}<k^3a_k-k^2A-B$$
$$<\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

辺々に $k>0$ を掛けると

$$\frac{\pi^2k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}<k^4a_k-k^3A-kB$$
$$<\frac{\pi^2k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

さらに，辺々に $-\dfrac{3\pi^2}{4}$ を加えると

$$-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}<k^4a_k-k^3A-kB-\frac{3\pi^2}{4}$$
$$<-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}\right\}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}\left(k^4a_k-k^3A-kB-\frac{3\pi^2}{4}\right)=0$$

よって　$\boldsymbol{\lim_{k\to\infty}(k^4a_k-k^3A-kB)=\frac{3\pi^2}{4},\ p=4,\ q=3,\ r=1}$

解説 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x)$$
$$\cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx$$

が成立する．同様に，次式も成立する．

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x)$$
$$\cdots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x)\,dx$$

例えば，$\displaystyle\int x^{k-1}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$ について，$f(x) = \dfrac{x^k}{k}$，$g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ とすると

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin\frac{\pi x}{2}\,dx &= \frac{x^k}{k}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\\ &\quad + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)}\left(-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}\right)\\ &\quad - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(-\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\\ &\quad + \int \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(\frac{\pi^4}{16}\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx\end{aligned}$$

本題 (3) はこれを利用して，定積分を行っている．

発展 前ページで示した結果から，定積分についても同様に，次式が成立する．

$$\int_x^a f(t)g'(t)\,dt = \Big[\ f(t)g(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=0}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(-k)}(t)\ \Big]_x^a \\ + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)g^{(-n+1)}(t)\,dt$$

$g^{(-k)}(t) = \dfrac{1}{k!}(t-x)^k$ とおくと $(k=-1,0,1,\ldots)$，$g(t)=1$，$g'(t)=0$ より

$$0 = \Big[\ f(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)\frac{(t-x)^k}{k!}\ \Big]_x^a \\ + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

したがって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

ここで

$$J = (-1)^n\int_x^a \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = (-1)^n\Big[\ \frac{(t-x)^n}{n!}\ \Big]_x^a = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

とおき，積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると

$$K = (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

は MJ と mJ の間にあるから

$$K = f^{(n)}(c)J$$

を満たす c が積分区間に少なくとも 1 つ存在する (積分学の平均値の定理)．

よって，次の等式が成立する (テイラー展開)．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

例えば，n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，次式が成立する．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + A(x-a)^n$$

■

第 5 章　名古屋大学

出題分野 (2011-2020) 150 分

◀	名古屋大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数						1				
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式					2					
	図形と方程式	3									
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法		1								
III	式と曲線										1
	複素数平面							4			
	関数										
	極限				3						
	微分法とその応用				2	1	2		2		1
	積分法			2					1		3
	積分法の応用	1		4	1	3		1		1·4	
A	場合の数と確率		3							4	4
	整数の性質	4	4	3			4		3	3	2
	図形の性質										
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル							3		2	
	数列			1	4	4	3	2	4		
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	2	2								

数字は問題番号

5.1　2015年(150分)

1 次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x) = x^{-2}\,2^x$ $(x \neq 0)$ について，$f'(x) > 0$ となるための x に関する条件を求めよ．

(2) 方程式 $2^x = x^2$ は相異なる3個の実数解をもつことを示せ．

(3) 方程式 $2^x = x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ．

2 次の問に答えよ．

(1) $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の4次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち，x^4 の係数が1であるものを求めよ．

(2) 8つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

(ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる)の中で，(1)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ．

(3) (2)で求めた $f(x) = 0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ．

3 e を自然対数の底とし，t を $t > e$ となる実数とする．このとき，曲線 $C : y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる2点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha < \beta)$ とする．また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，

曲線 C，x 軸および2つの直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，

曲線 C および2つの直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を S_2

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ．

(2) $\alpha < \dfrac{e}{t}$，$\beta < 2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．必要ならば，$x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい．

4 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える．石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 } 1 \text{ にあるならば，確率 } 1 \text{ で点 } 2 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k=2,3,4) \text{ にあるならば，} \\ \qquad \text{確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k-1 \text{ に，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } 5 \text{ にあるならば，確率 } 1 \text{ で } 4 \text{ に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う．石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す．また，石が移動した先の点に印をつけていく (点 1 には初めから印がついているものとする)．このとき，次の問に答えよ．

(1) 試行を 6 回繰り返した後に，石が点 k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ にある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ．

(3) 試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=x^{-2}\,2^x$ を微分すると

$$f'(x)=-2x^{-3}\,2^x+x^{-2}\,2^x\log 2=x^{-3}\,2^x(-2+x\log 2)$$
$$=\frac{2^x}{x^2}\cdot\frac{x\log 2-2}{x}$$

$\dfrac{2^x}{x^2}>0$ であるから，$f'(x)>0$ となるのは

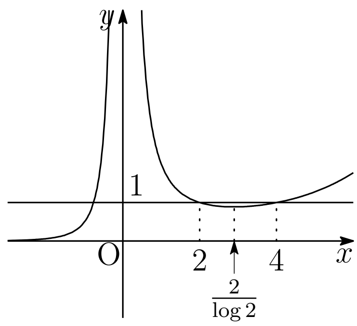
$$\frac{x\log 2-2}{x}>0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x<0,\ \frac{2}{\log 2}<x}$$

(2) $f(x)=1$ が異なる 3 つの実数解をもつことを示せばよい．
(1) の結果により，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$2<e<4$ より，$\log 2<1<2\log 2$ であるから

$$2<\frac{2}{\log 2}<4$$



$f(2)=f(4)=1$ であるから　$f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right)<1$

また　$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

補足　直接 $f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right)<1$ を示すこともできる．

$$f\left(\frac{2}{\log 2}\right)=\left(\frac{2}{\log 2}\right)^{-2}2^{\frac{2}{\log 2}}=\left(\frac{\log 2}{2}\right)^2e^2=\left(\frac{e\log 2}{2}\right)^2$$

ここで，$g(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと　$g'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$2<x<e$ において $g'(x)>0$ であるから，$g(2)<g(e)$ より

$$\frac{\log 2}{2}<\frac{\log e}{e}\quad \text{ゆえに}\quad 0<\frac{e\log 2}{2}<1\quad \text{よって}\quad f\left(\frac{2}{\log 2}\right)<1$$

(3) (2) の結果から，$2^x = x^2$ が負の有理数 $-\dfrac{p}{q}$ (p，q は正の整数で互いに素) をもつと仮定すると

$$2^{-\frac{p}{q}} = \left(-\frac{p}{q}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

さらに両辺を q 乗すると　$2^p = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{2q}$

上式の右辺は整数であるから　$p = 1$　ゆえに　$2 = q^{2q}$

これを満たす正の整数 q は存在しない．

よって，(2) の結果から，求める有理数の解は　**2，4**　■

2 (1) $p = \sqrt{9 + 2\sqrt{17}}$，$q = \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$ とおくと

$$p^2 + q^2 = 18, \quad pq = \sqrt{13}$$

であるから，$\alpha = pq + p + q$ より

$$(\alpha - pq)^2 = (p + q)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 - 2pq\alpha + (pq)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

したがって　$\alpha^2 - 2\sqrt{13}\alpha + 13 = 18 + 2\sqrt{13}$

$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{13}(\alpha + 1)$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2 - 5)^2 = 52(\alpha + 1)^2 \quad \text{すなわち} \quad \alpha^4 - 62\alpha^2 - 104\alpha - 27 = 0$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27}$

(2) (1) の式変形に注意すると，$f(x) = 0$ は　$(x^2 - 5)^2 = 52(x + 1)^2$

(i) $x^2 - 5 = 2\sqrt{13}(x + 1)$ のとき

$$x^2 - 2\sqrt{13}x + 13 = 18 + 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x - pq)^2 = (p + q)^2$$

したがって　$x - pq = \pm(p + q)$　すなわち　$x = pq + p + q,\ pq - p - q$

(ii) $x^2 - 5 = -2\sqrt{13}(x + 1)$ のとき

$$x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = 18 - 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x + pq)^2 = (p - q)^2$$

したがって　$x + pq = \pm(p - q)$　すなわち　$x = -pq + p - q, -pq - p + q$

(i)，(ii) から，$f(x)=0$ の解は

$$\boldsymbol{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}},}$$
$$\boldsymbol{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},}$$
$$\boldsymbol{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},}$$
$$\boldsymbol{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}$$

(3)　(2) で求めた解を

$$\alpha=pq+p+q,\quad \beta=-pq+p-q,$$
$$\gamma=pq-p-q,\quad \delta=-pq-p+q$$

とおく．ここで　$p=\sqrt{9+2\sqrt{17}}>\sqrt{9+2\sqrt{16}}=\sqrt{17},$

$$q=\sqrt{9-2\sqrt{17}}<\sqrt{9-2\sqrt{16}}=1$$

したがって　$\alpha-\beta=2pq+2q=2q(p+1)>0$

$$\beta-\gamma=2p-2pq=2p(1-q)>0$$
$$\gamma-\delta=2pq-2q=2q(p-1)>0$$

上の3式から，$\alpha>\beta>\gamma>\delta$ となる．よって，大きい順に

$$\boldsymbol{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}},}$$
$$\boldsymbol{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},}$$
$$\boldsymbol{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},}$$
$$\boldsymbol{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}$$

解説　4次方程式 $x^4-62x^2-104x-27=0\cdots(*)$ が

$$(x^2-5)^2=52(x+1)^2$$

と変形できることを利用して (フェラーリの方法)，解を求めている．

本題 (1) はこの変形につながる設問となっている．

手がかりになしに，方程式 $(*)$ を解くとすると

$$x^4-62x^2-104x-27=(x^2+k)^2-(px+q)^2$$

とおき ($k,\ p,\ q$ は定数)，上式の右辺を展開して整理すると

$$x^4-62x^2-104x-27=x^4+(2k-p^2)x^2-2pqx+k^2-q^2$$

同じ次数の項の係数を比較すると　$p^2 = 2k + 62$，$pq = 52$，$q^2 = k^2 + 27$

これらの 3 式から，p，q を消去すると　$(2k + 62)(k^2 + 27) = 52^2$

整理すると　$k^3 + 31k^2 + 27k - 515 = 0 \quad \cdots (**)$

因数定理により　$(k + 5)(k^2 + 26k - 103) = 0$

$k = -5$ とすると，$p = q = \pm 2\sqrt{13}$ となり，$(*)$ の解が求まる．

余談だが，3 次方程式 $(**)$ を一般的な方法 (カルダノの方法) で解いてみる．

$k = t - \dfrac{31}{3} \cdots$① とおいて，$(**)$ に代入すると

$$\left(t - \frac{31}{3}\right)^3 + 31\left(t - \frac{31}{3}\right)^2 + 27\left(t - \frac{31}{3}\right) - 515 = 0$$

整理すると　$t^3 - \dfrac{880}{3}t + \dfrac{38144}{27} = 0$

$t = u + v$ とおいて，これに代入すると

$$\begin{aligned}(u+v)^3 - \frac{880}{3}(u+v) + \frac{38144}{27} &= 0\\ 3(u+v)\left(uv - \frac{880}{9}\right) + u^3 + v^3 + \frac{38144}{27} &= 0\end{aligned}$$

$uv = \dfrac{880}{9}$，$u^3 + v^3 = -\dfrac{38144}{27}$ とし，u^3，v^3 を解とする 2 次方程式

$$X^2 + \frac{38144}{27}X + \left(\frac{880}{9}\right)^3 = 0$$

これを解くと　$X = \dfrac{64}{27}(-298 \pm 39\sqrt{51}i) = \left\{\dfrac{4}{3}(2 \mp \sqrt{51}i)\right\}^3$　(複号同順)

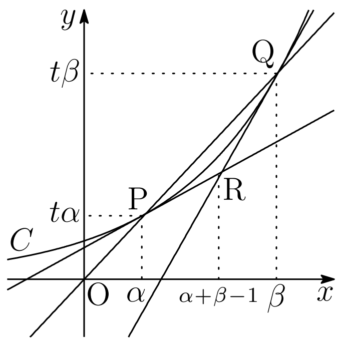
$z = \dfrac{4}{3}(2 + \sqrt{51}i)$，$w = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ とおくと，uv は実数であるから

$$\begin{aligned}t &= z + \overline{z}, \quad zw + \overline{z}\,\overline{w}, \quad z\overline{w} + \overline{z}w\\ &= \frac{16}{3},\ -\frac{8}{3} - 4\sqrt{17},\ -\frac{8}{3} + 4\sqrt{17}\end{aligned}$$

① より　$k = -5,\ -13 - 4\sqrt{17},\ -13 + 4\sqrt{17}$

一般に，4 次方程式 $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ は，$x = y - \dfrac{a_3}{4}$ おくことにより，$y^4 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$ と変形でき，フェラーリの方法が適用できる．フェラーリの方法の中で，3 次方程式を解く必要があり，3 次方程式の一般的な解法がカルダノの方法である．さらにカルダノの方法の中で 2 次方程式の解の公式を用いている．■

3　(1)　$y = e^x$ を微分すると　$y' = e^x$



C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ e^\alpha)$ および $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta)$ における接線の方程式は，それぞれ

$$\begin{cases} y - e^\alpha = e^\alpha(x-\alpha) \\ y - e^\beta = e^\beta(x-\beta) \end{cases}$$

$e^\alpha = t\alpha$，$e^\beta = t\beta$ であるから，上の 2 式は

$$\begin{cases} y = t\alpha(x+1-\alpha) \\ y = t\beta(x+1-\beta) \end{cases}$$

これを解いて　$\mathrm{R}(\alpha+\beta-1,\ t\alpha\beta)$

$$S_1 = \int_\alpha^\beta e^x\,dx = \Big[\ e^x\ \Big]_\alpha^\beta = e^\beta - e^\alpha = t\beta - t\alpha = t(\beta-\alpha)$$

3 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ t\alpha)$，$\mathrm{R}(\alpha+\beta-1,\ t\alpha\beta)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ t\beta)$ から x 軸にそれぞれ垂線 PP'，RR'，QQ' を引くと，$\mathrm{P'R'} = \beta - 1$，$\mathrm{R'Q'} = 1 - \alpha$ より

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 - (\text{台形 PP}'\text{R}'\text{R の面積}) - (\text{台形 RR}'\text{Q}'\text{Q の面積}) \\ &= t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}(\beta-1)(t\alpha+t\alpha\beta) - \frac{1}{2}(1-\alpha)(t\alpha\beta+t\beta) \\ &= t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}t\alpha(\beta-1)(\beta+1) - \frac{1}{2}t\beta(1-\alpha)(1+\alpha) \\ &= t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}t\alpha(\beta^2-1) - \frac{1}{2}t\beta(1-\alpha^2) \\ &= t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}t(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}t\alpha\beta(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}t(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{1}{2}(1-\alpha\beta)}$

(2) C 上の点Pにおける接線の傾きは　e^{α}

これと直線PQの傾き t との大小関係により　$e^{\alpha} < t$

このとき，$e^{\alpha} = t\alpha$ であるから　$t\alpha < t$

$t > 0$ であるから　$\alpha < 1$　ゆえに　$t\alpha = e^{\alpha} < e$　よって　$\alpha < \dfrac{e}{t}$

また，$e^{\beta} > \beta^2$ $(\beta > 0)$ であるから　$t\beta = e^{\beta} > \beta^2$ より　$t > \beta$

ゆえに　$t^2 > t\beta = e^{\beta}$　したがって　$\log t^2 > \beta$　よって　$\beta < 2\log t$

$0 < \alpha < \dfrac{e}{t}$，$0 < \beta < 2\log t$ より　　$0 < \alpha\beta < 2e\cdot\dfrac{\log t}{t}$　$\cdots$①

ここで，$t = e^u$ とおくと　$0 < \dfrac{\log t}{t} = \dfrac{u}{e^u} < \dfrac{u}{u^2} = \dfrac{1}{u}$

$t \longrightarrow \infty$ のとき，$u \longrightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{t}{\log t} = 0$$

① より　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\alpha\beta = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}(1-\alpha\beta) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

補足 $C : y = e^x$ 上の点 $(1,\ e)$ における接線の方程式は　$y = ex$

$$e^x > x^2 \quad \cdots(*)$$

(i) $0 < x < 1$ のとき，$e^x > 1 > x^2$　よって，$(*)$ は成立する．

(ii) $x = 1$ のとき，明らかに $(*)$ は成立する．

(iii) $x > 1$ のとき，$e^x - ex > 0$ であるから ($y = e^x$ と $y = ex$ のグラフ)

$$\begin{aligned}\int_1^x (e^t - et)\,dt &= \left[\,e^t - \frac{e}{2}t^2\,\right]_1^x = e^x - e - \frac{e}{2}(x^2-1)\\ &= e^x - \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{2} > 0\end{aligned}$$

したがって　$e^x > \dfrac{e}{2}x^2 + \dfrac{e}{2} > x^2$　よって，$(*)$ は成立する．

(i)〜(iii) から，$x > 0$ のとき，$(*)$ は成立する．■

$\boxed{4}$ (1) n 回繰り返した後に，石が点 k にある確率を $P_n(k)$ とする $(k=1, 2, 3, 4, 5)$.

n が奇数のとき　$P_n(1)=P_n(3)=P_n(5)=0$

n が偶数のとき　$P_n(2)=P_n(4)=0$

n が奇数のとき，石は点 2 または 4 にある．このとき

$$P_{2j+1}(2)=p_{2j-1}(2)\times\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+P_{2j-1}(4)\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$P_{2j+1}(4)=P_{2j-1}(2)\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+P_{2j-1}(4)\times\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

したがって，j を自然数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1(2)=1,\ P_1(4)=0$$
$$(*)\begin{cases} P_{2j+1}(2)=\dfrac{3}{4}P_{2j-1}(2)+\dfrac{1}{4}P_{2j-1}(4) \\ P_{2j+1}(4)=\dfrac{1}{4}P_{2j-1}(2)+\dfrac{3}{4}P_{2j-1}(4) \end{cases}$$

$(*)$ に $j=1$ を代入すると

$$P_3(2)=\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 0=\frac{3}{4},\quad P_3(4)=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot 0=\frac{1}{4}$$

さらに，$(*)$ に $j=2$ を代入すると

$$P_5(2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{8},\quad P_5(4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

したがって

$$P_6(1)=P_5(2)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$$
$$P_6(3)=P_5(2)\times\frac{1}{2}+P_5(4)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$P_6(5)=P_5(4)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{16}}$$
$$P_6(2)=P_6(4)=\mathbf{0}$$

別解 $(*)$ より，自然数 j について

$$\begin{aligned}P_{2j+1}(2)+P_{2j+1}(4)&=P_{2j-1}(2)+P_{2j-1}(4)\\&=1+0=1,\\P_{2j+1}(2)-P_{2j+1}(4)&=\frac{1}{2}\left(P_{2j-1}(2)-P_{2j-1}(4)\right)\\&=\frac{1}{2^j}(P_1(2)-P_1(4))=\frac{1}{2^j}\end{aligned}$$

$P_{2j-1}(2)+P_{2j-1}(4)=1$ および $P_{2j-1}(2)-P_{2j-1}(4)=\dfrac{1}{2^{j-1}}$ から

$$P_{2j-1}(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^j},\quad P_{2j-1}(4)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^j}$$

したがって

$$\begin{aligned}P_{2j}(1)&=\frac{1}{2}P_{2j-1}(2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{j+1}},\\P_{2j}(3)&=\frac{1}{2}P_{2j-1}(2)+\frac{1}{2}P_{2j-1}(4)=\frac{1}{2},\\P_{2j}(5)&=\frac{1}{2}P_{2j-1}(4)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{j+1}}\end{aligned}$$

上式に，$j=3$ を代入すると　$P_6(1)=\boldsymbol{\dfrac{5}{16}}$，$P_6(3)=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$P_6(5)=\boldsymbol{\dfrac{3}{16}}$

また　$P_6(2)=P_6(4)=\mathbf{0}$

補足 n が奇数のとき，$P_n(1)=P_n(3)=P_n(5)=0$

$$P_n(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}},\quad P_n(4)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

n が偶数のとき，$P_n(2)=P_n(4)=0$

$$P_n(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}},\quad P_n(3)=\frac{1}{2},\quad P_n(5)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}$$

(2) 4 回繰り返した後に，点 5，点 3 にある確率は

$$\begin{aligned}&P_4(5)=P_3(4)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\\&P_4(3)=P_3(2)\times\frac{1}{2}+P_3(4)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がつく確率は

$$P_4(5)+P_4(3)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 試行により，石が点 1，点 2，点 3 のいずれかを移動するとき，奇数回目の試行の後に石は，点 2 にある．$2j-1$ 回目の試行の後に石が点 2 にある確率を x_{2j-1} とすると

$$x_{2j+1} = x_{2j-1} \times \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

したがって，次の確率漸化式が成立する．

$$x_1 = 1, \quad x_{2j+1} = \frac{3}{4}x_{2j-1}$$

これを解いて $\quad x_{2j-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{j-1} \quad (j \geqq 1)$

このとき，$2j$ 回目の試行の後に石が点 1 または点 3 にある確率は $\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}$

試行により，石が点 1，点 2 のいずれかを移動するとき，奇数回目の試行の後に石は，点 2 にある．$2j-1$ 回目の試行の後に石が点 2 にある確率を y_{2j-1} とすると

$$y_{2j+1} = y_{2j-1} \times \frac{1}{2}\cdot 1$$

したがって，次の確率漸化式が成立する．

$$y_1 = 1, \quad y_{2j+1} = \frac{1}{2}y_{2j-1}$$

これを解いて $\quad y_{2j-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \quad (j \geqq 1)$

このとき，$2j$ 回目の試行の後に石が点 1 にある確率は $\quad y_{2j-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$

以上の結果から

(i) $n = 2j-1$ のとき，求める確率は $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$

(ii) $n = 2j$ のとき，求める確率は $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$

(i)，(ii) から $\quad$ **n が奇数のとき** $\quad \boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$

n が偶数のとき $\quad \boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}$

■

5.2　2016 年 (150 分)

1 曲線 $y = x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる．ただし $b > -2$ とする．このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ．

条件：$y = x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2 < t < b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する．

2 2 つの円 $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ と $D : (x+2)^2 + y^2 = 7^2$ を考える．また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする．このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ．

(2) (1) でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積が最大となるときの Q の座標を θ を用いて表せ．

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ．ただし (2)，(3) においては，3 点 O，P，Q が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 0 であるとする．

3 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする．A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $k = 0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ．

(2) $k = 0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ．

4 次の問に答えよ．ただし2次方程式の重解は2つと数える．

(1) 次の条件 $(*)$ を満たす整数 a，b，c，d，e，f の組をすべて求めよ．

$$(*)\begin{cases} 2\text{次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の}2\text{つの解が } c,\ d \text{ である．} \\ 2\text{次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の}2\text{つの解が } e,\ f \text{ である．} \\ 2\text{次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の}2\text{つの解が } a,\ b \text{ である．} \end{cases}$$

(2) 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件 $(**)$ を満たすとする．

$(**)$ すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2次方程式

$$x^2+a_nx+b_n=0$$

の2つの解が a_{n+1}，b_{n+1} である．

このとき

(i) 正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ．

(ii) 条件 $(**)$ を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ 直線 AT の傾きは $\dfrac{t^2-4}{t+2}=t-2$,　直線 BT の傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-2)t-2b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ が，$-2<t<b$ に解をもつ条件を求めればよい．ここで

$$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\frac{b-2}{2}\right)^2-\frac{b^2+4b}{4} \quad (-2 \leqq t \leqq b)$$

の最大値を M，最小値を m とすると

$$M=\begin{cases} f(-2) & (-2<b<2) \\ f(b) & (2 \leqq b) \end{cases}, \quad m=\begin{cases} f(b) & (-2<b<\frac{2}{3}) \\ f\left(\frac{2-b}{2}\right) & (\frac{2}{3} \leqq b \leqq 6) \\ f(-2) & (6<b) \end{cases}$$

$$f(-2)=-4b+9, \quad f(b)=2b^2-4b+1, \quad f\left(\frac{2-b}{2}\right)=-\frac{b^2+4b}{4}$$

方程式 $(*)$ が $-2<t<b$ に解をもつことから

(i) $-2<b<\dfrac{2}{3}$ のとき $\begin{cases} -4b+9>0 \\ 2b^2-4b+1<0 \end{cases}$ ゆえに $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2}{3}$

(ii) $\dfrac{2}{3} \leqq b<2$ のとき $\begin{cases} -4b+9>0 \\ -\dfrac{b^2+4b}{4} \leqq 0 \end{cases}$ ゆえに $\dfrac{2}{3} \leqq b<2$

(iii) $2 \leqq b \leqq 6$ のとき $\begin{cases} 2b^2-4b+1>0 \\ -\dfrac{b^2+4b}{4} \leqq 0 \end{cases}$ ゆえに $2 \leqq b \leqq 6$

(iv) $6<b$ のとき $\begin{cases} 2b^2-4b+1>0 \\ -4b+9<0 \end{cases}$ ゆえに $6<b$

(i)〜(iv) より　$\boldsymbol{b>\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

別解 1 直線 AT の傾きは　$\dfrac{t^2-4}{t+2}=t-2$,　　直線 BT の傾きは　$\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-2)t-2b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ は，実数解をもつから

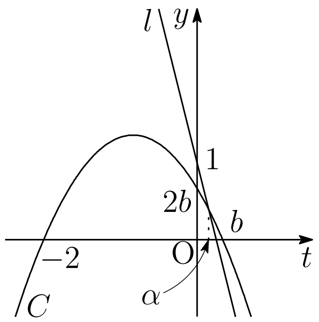
$$(b-2)^2-4\cdot 1(-2b+1)\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b(b+4)\geqq 0$$

$b>-2$ に注意すると，$b\geqq 0$ の範囲について調べればよい．

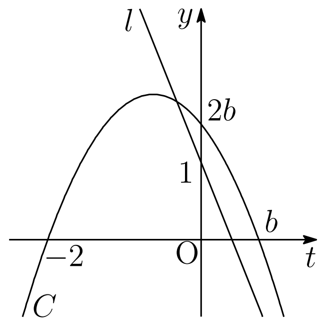
$(*)$ を変形すると　　$2(b-2)t+1=-(t+2)(t-b)$

直線 $l: y=2(b-2)t+1$ と放物線 $C: y=-(t+2)(t-b)$ が $-2<t<b$ で共有点をもつ b の値の範囲を求めればよい．

$0\leqq b<\frac{1}{2}$ のとき



$\frac{1}{2}\leqq b$ のとき



(i)　$0\leqq b<\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ を解いて　$t=\dfrac{2-b\pm\sqrt{b^2+4b}}{2}$

$\alpha=\dfrac{2-b-\sqrt{b^2+4b}}{2}$ とおく．l の傾きは負であるから，$0<\alpha<b$ より

$$\frac{2-b-\sqrt{b^2+4b}}{2}<b \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{b^2+4b}>2-3b$$

$2-3b>0$ であるから，両辺を平方して整理すると　$2b^2-4b+1<0$

$0\leqq b<\dfrac{1}{2}$ に注意して，これを解くと　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{1}{2}$

(ii)　$\dfrac{1}{2}\leqq b$ のとき，C および l が y 軸とそれぞれ $2b$，1 で交わるので，このとき，C と l は常に $-2<t<b$ に共有点をもつ．

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{b\geqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

別解 2　直線 AT の傾きは　$\dfrac{t^2-4}{t+2}=t-2,$　　直線 BT の傾きは　$\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b)=-1 \quad \text{ゆえに} \quad b=-t-\frac{1}{t-2} \qquad \cdots(*)$$

$-2<t<b$ より　$t<-t-\dfrac{1}{t-2}$　ゆえに　$\dfrac{2t^2-4t+1}{t-2}<0$

t の範囲に注意して　$-2<t<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<t<2 \quad \cdots(**)$

$f(t)=-t-\dfrac{1}{t-2}$ とおくと

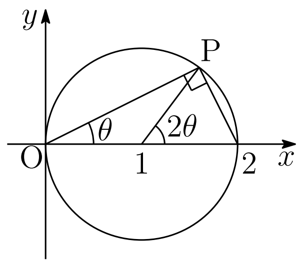
$$f'(t)=-1+\frac{1}{(t-2)^2}=-\frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2}$$

$f(t)$ は $-2<t<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ で単調減少，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<t<2$ で単調増加.

$$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\quad f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\quad \lim_{t\to 2-0}f(t)=\infty$$

したがって，$(**)$ において，$(*)$ を満たす b の値の範囲は　$\boldsymbol{b>\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$　■

2 (1) $\mathbf{OP} = \mathbf{2\cos\theta}$**.** $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

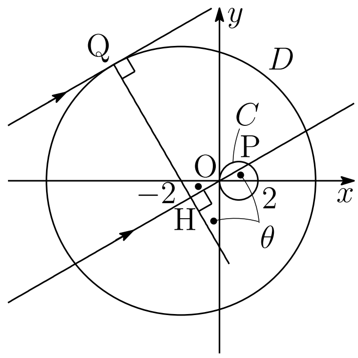


$$x = \mathrm{OP}\cos\theta = 2\cos\theta\cdot\cos\theta = 2\cos^2\theta$$
$$y = \mathrm{OP}\sin\theta = 2\cos\theta\cdot\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\mathbf{P(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1,\ 0) + (\cos 2\theta,\ \sin 2\theta) = (1 + \cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

(2) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (-2,\ 0) + 7\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)$$
$$= (-2,\ 0) + 7(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$
$$= (-2 - 7\sin\theta,\ 7\cos\theta)$$

よって　　$\mathbf{Q(-2 - 7\sin\theta,\ 7\cos\theta)}$

(3) Q から直線 OP に垂線 QH を引くと　$\mathrm{QH} = 7 + 2\sin\theta$
$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を $f(\theta)$ とすると

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{QH} = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta(7 + 2\sin\theta)$$
$$= \cos\theta(7 + 2\sin\theta) = 7\cos\theta + \sin 2\theta,$$
$$f'(\theta) = -7\sin\theta + 2\cos 2\theta = -7\sin\theta + 2(1 - 2\sin^2\theta)$$
$$= -(4\sin^2\theta + 7\sin\theta - 2) = -(\sin\theta + 2)(4\sin\theta - 1)$$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{4}\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

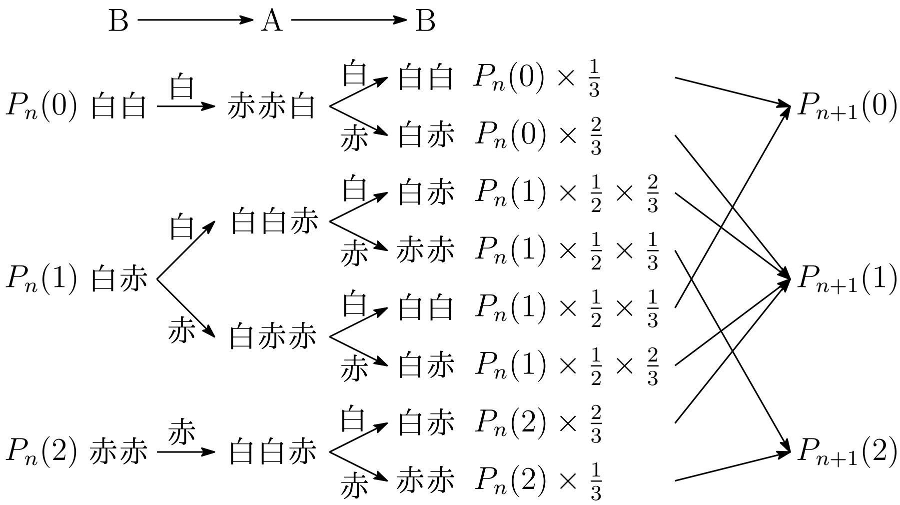
よって，求める最大値は

$$f(\alpha) = \cos\alpha(7 + 2\sin\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}\left(7 + 2\times\frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{15\sqrt{15}}{8}}$$

■

3　(1) 定められた操作により，次の確率漸化式 $(*)$ を得る．

$$(*)\begin{cases} P_{n+1}(0) = \dfrac{1}{3}P_n(0) + \dfrac{1}{6}P_n(1) & \cdots ① \\ P_{n+1}(1) = \dfrac{2}{3}P_n(0) + \dfrac{2}{3}P_n(1) + \dfrac{2}{3}P_n(2) & \cdots ② \\ P_{n+1}(2) = \dfrac{1}{6}P_n(1) + \dfrac{1}{3}P_n(2) & \cdots ③ \end{cases}$$



$P_0(0) = 1$，$P_0(1) = 0$，$P_0(2) = 0$ として，$(*)$ に $n = 0$ を代入すると

$$\boldsymbol{P_1(0) = \frac{1}{3},\quad P_1(1) = \frac{2}{3},\quad P_1(2) = 0}$$

(2) ①，③ より
$$P_{n+1}(0) + P_{n+1}(2) = \frac{1}{3}\{P_n(0) + P_n(1) + P_n(2)\}$$
$$P_{n+1}(0) - P_{n+1}(2) = \frac{1}{3}\{P_n(0) - P_n(2)\}$$

したがって
$$P_n(0) + P_n(2) = \frac{1}{3} \quad (n \geqq 1)$$
$$P_n(0) - P_n(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (n \geqq 1)$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{P_n(0) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$，$\boldsymbol{P_n(2) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$

② より　$P_{n+1}(1) = \dfrac{2}{3}\{P_n(0) + P_n(1) + P_n(2)\}$　よって　$\boldsymbol{P_n(1) = \dfrac{2}{3}}$

補足　$P_{n+1}(0)$，$P_{n+1}(1)$，$P_{n+1}(2)$ が $P_n(0)$，$P_n(1)$，$P_n(2)$ によって定まる確率過程 (1 つ前の時点だけで決定する) をマルコフ連鎖 (Markov chain) という．

■

4　(1)　条件 $(*)$ に解と係数の関係を適用すると

$$(\mathrm{A})\begin{cases} c+d=-a \\ e+f=-c \\ a+b=-e \end{cases} \qquad (\mathrm{B})\begin{cases} cd=b \\ ef=d \\ ab=f \end{cases}$$

(B) の 3 式の辺々を掛けると

$$cd\cdot ef\cdot ab=b\cdot d\cdot f \quad \text{ゆえに} \quad bdf(ace-1)=0$$

i)　$b=0$ のとき　(B) の第 3 式から　$f=0$　第 2 式から　$d=0$
このとき (A) は

$$(\mathrm{A})\begin{cases} c=-a \\ e=-c \\ a=-e \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad a=c=e=0$$

$a=b=c=d=e=f=0$ は (B) を満たす.

ii)　$d=0$ または $f=0$ のとき　(i) と同様にして

$$a=b=c=d=e=f=0$$

iii)　$a=c=e=1$ のとき，(A)，(B) は

$$(\mathrm{A})\begin{cases} 1+d=-1 \\ 1+f=-1 \\ 1+b=-1 \end{cases} \qquad (\mathrm{B})\begin{cases} d=b \\ f=d \\ b=f \end{cases}$$

上の (A) を解いて　$b=d=f=-2$　これは (B) を満たす.

iv)　$(a,\ c,\ e)=(1,-1,-1)$ のとき，(A)，(B) は

$$(\mathrm{A})\begin{cases} -1+d=-1 \\ -1+f=1 \\ 1+b=1 \end{cases} \qquad (\mathrm{B})\begin{cases} -d=b \\ -f=d \\ b=f \end{cases}$$

上の (A) を解いて　$b=d=0,\ f=2$　これは (B) を満たさない.

v)　$(a,\ c,\ e)=(-1,\ 1,-1),\ (-1,-1,\ 1)$ のとき，(iv) と同様に (A) から得られる $b,\ d,\ f$ は (B) を満たさない.

i)〜v) から　　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),}$
$\boldsymbol{(1,-2,\ 1,-2,\ 1,-2)}$

(2)　(i) 2 次方程式 $x^2 + a_n x + b_n = 0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} であるから，解と係数の関係により，次の漸化式が成立する．

$$① \begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = -a_n \\ a_{n+1} b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

(a) $a_k = 0$ となる自然数 k が存在するとき

$$(\mathrm{C}) \begin{cases} a_{k+1} + b_{k+1} = -a_k = 0 \\ a_{k+2} + b_{k+2} = -a_{k+1} \\ a_{k+2} b_{k+2} = b_{k+1} \end{cases}$$

(C) から a_{k+1}，b_{k+1} を消去すると　$(a_{k+2} - 1)(b_{k+2} - 1) = 1$

これを解いて　　$(a_{k+2},\ b_{k+2}) = (0,\ 0),\ (2,\ 2)$

2 次方程式 $x^2 + a_{k+2} x + b_{k+2} = 0$ は実数解をもつから

$$a_{k+2}{}^2 - 4b_{k+2} \geqq 0$$

上式を満たすのは　　$(a_{k+2},\ b_{k+2}) = (0,\ 0)$
これを (C) の第 2 式，第 3 式に代入すると　$a_{k+1} = b_{k+1} = 0$
さらに，$a_{k+1} b_{k+1} = b_k$ より　　$b_k = 0$
$a_k = b_k = 0$ のとき，$a_{k+1} = b_{k+1} = 0$ であるから

$$a_n = b_n = 0 \quad (n \geqq k)$$

また，漸化式 ① から，$a_k = b_k = 0$ のとき

$$a_n = b_n = 0 \quad (1 \leqq n \leqq k)$$

したがって，すべての自然数 n について　$a_n = b_n = 0$

よって　　$|b_1| = |b_2| = |b_3| = \cdots = 0$

(b) すべての自然数について，$a_n \neq 0$ のとき，漸化式により

$$|a_{n+1} b_{n+1}| = |b_n| \quad \text{ゆえに} \quad |b_{n+1}| \leqq |b_n|$$

数列 $\{|b_n|\}$ は正の整数からなる下に有界な単調減少列であるから，

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \cdots$$

となる正の整数 m が存在する．

(a)，(b) より，題意は示された．

(ii) (i) の結果から

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \cdots = N$$

とおく (N は正の整数).

(a) $N = 0$ のとき

$$b_m = b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$$

漸化式 ① の第 2 式より，$b_{n+1} = 0$ のとき $b_n = 0$ である．$b_m = 0$ であるから

$$b_n = 0 \quad (1 \leqq n < m)$$

したがって，すべての自然数 n について　$b_n = 0$

$b_{n+1} = 0$ を漸化式 ① の第 1 式に代入すると　$a_{n+1} = -a_n$

数列 $\{a_n\}$ は公比 -1 の等比数列であるから，初項を a とすると

$$a_n = a(-1)^{n-1}$$

(b) $N \geqq 1$ のとき

$|b_n| = N$ $(n \geqq m)$ であるから，$|a_{n+1}||b_{n+1}| = |b_n|$ より

$$|a_{n+1}|N = N \quad \text{すなわち} \quad |a_{n+1}| = 1$$

2 次方程式 $x^2 + a_n x + b_n = 0$ は実数解をもつから

$$a_n{}^2 - 4b_{n+1} = 1 - 4b_n \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b_n \leqq \frac{1}{4}$$

$|b_n| = N \geqq 1$ であるから，上式より　$b_n = -N$ $(n \geqq m)$

$a_{n+1}b_{n+1} = b_n$ により

$$a_{n+1}(-N) = -N \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = 1 \ (n \geqq m)$$

$a_{n+2} + b_{n+2} = -a_{n+1}$ により

$$1 + b_{n+2} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+2} = -2$$

したがって　$a_n = 1,\ \ b_n = -2\ \ (n \geqq m + 2)$

$a_{m+2} = 1$，$b_{m+2} = -2$ であるから，漸化式 ① より

$$a_n = 1,\ \ b_n = -2\ \ (n \leqq m + 2)$$

よって，すべての自然数 n について　$a_n = 1,\ \ b_n = -2$

(a)，(b) より　$\boldsymbol{(a_n,\ b_n) = (a(-1)^{n-1},\ 0),\ (1, -2)}$　**($\boldsymbol{a}$ は整数)** ■

5.3　2017 年 (150 分)

1 不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C : y = a - 1 - \log x \ (x > 0)$ を考える．s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a - 1 - \log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$ とする．このとき，次の問に答えよ．必要があれば，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を証明なしで使ってよい．

(1) 関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ．

(2) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ．

(3) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

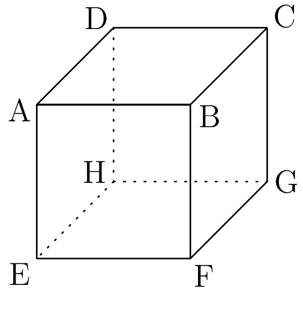
2 下図のような立方体を考える．この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する．時刻 0 では点 P は頂点 A にいる．時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる．自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ．

(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ．

(4) 自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率 t_m とする．このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ．



$\boxed{3}$ xyz 空間の2点 A(0, 0, 2)，P(a, b, 0) を通る直線を l とする．また，点 (2, 0, 0) を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) l 上に点 Q がある．実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を a，b，t を使って表せ．

(2) l が S と相異なる2点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

(3) l が T と相異なる2点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

$\boxed{4}$ n を自然数とする．0でない複素数からなる集合 M が次の条件 (I)，(II)，(III) を満たしている．

(I) 集合 M は n 個の要素からなる．

(II) 集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である．

(III) 集合 M の要素 z，w に対して，その積 zw は集合 M の要素である．ただし，$z=w$ の場合も含める．

このとき，次の問に答えよ．

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ．

(2) n は偶数であることを示せ．

(3) $n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

(4) $n=6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

解答例

1　(1) $y=a-1-\log x$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x}$

C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$ における接線の方程式は

$$y-(a-1-\log s)=-\frac{1}{s}(x-s)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{x}{s}+a-\log s$$

$y=0$ を代入すると　$x=s(a-\log s)$　ゆえに　$\boldsymbol{u(s)=s(a-\log s)}$

$x=0$ を代入すると　$y=a-\log s$　ゆえに　$\boldsymbol{v(s)=a-\log s}$

(2) $u(s)=s(a-\log s)$ より　$u'(s)=a-1-\log s$，$u''(s)=-\dfrac{1}{s}$

s	(0)	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$
$u'(s)$		$+$	0	$-$
$u''(s)$		$-$	$-$	$-$
$u(s)$		↗	極大 e^{a-1}	↘

$$\lim_{s\to+0}u(s)=\lim_{s\to+0}(sa-s\log s)=0,\quad \lim_{s\to\infty}u(s)=\lim_{s\to\infty}s(a-\log s)=-\infty$$

$v(s)=a-\log s$ より　$v'(s)=-\dfrac{1}{s}$，　$v''(s)=\dfrac{1}{s^2}>0$

したがって，$v(s)$ は下に凸で単調減少．

$t=u(s)$，$t=v(s)$ から t を消去すると

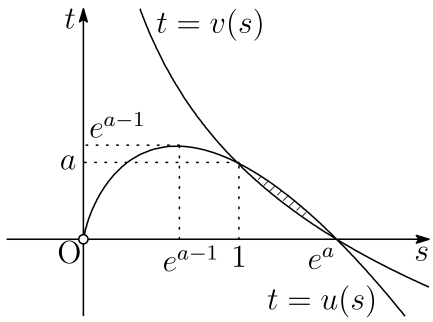
$$s(a-\log s)=a-\log s$$

ゆえに　$(s-1)(a-\log s)=0$

これを解いて　$s=1,\ e^a$

2 曲線 $t=u(s)$，$t=v(s)$ の交点の座標は

$$(1,\ a),\ (e^a,\ 0)$$



$0<a<1$ より，$t=u(s)$，$t=v(s)$ のグラフは，右の図のようになる．

(3) 求める立体の体積を V とすると，(2) のグラフから

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_1^{e^a} s\{u(s)-v(s)\}\,ds = \int_1^{e^a} s(s-1)(a-\log s)\,ds \\ &= \int_1^{e^a} \left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{s}\right)'(a-\log s)\,ds \\ &= \left[\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{2}\right)(a-\log s)\right]_1^{e^a} - \int_1^{e^a}\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{s}\right)ds \\ &= \frac{a}{6}+\left[\,\frac{s^3}{9}-\frac{s^2}{4}\,\right]_1^{e^a} = \frac{1}{9}e^{3a}-\frac{1}{4}e^{2a}+\frac{5}{36}+\frac{a}{6}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \frac{\pi}{18}(4e^{3a}-9e^{2a}+6a+5)}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

補足　まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき}\quad g'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1)=2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

すなわち　　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた規則により，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1 = 1,\ q_1 = 0,\ r_1 = 0$$

$$(*)\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1} = \dfrac{2}{3}p_n + r_n \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{3}q_n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = \mathbf{0}, \quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \mathbf{\frac{2}{3}}, \quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = \mathbf{0}$$

$(*)$ に $n = 2$ を代入すると，上の結果により

$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \mathbf{\frac{4}{9}}, \quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = \mathbf{0}, \quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) $(*)$ の第 2 式から　$q_{n+2} = \dfrac{2}{3}p_{n+1} + r_{n+1}$

これに $(*)$ の第 1 式，第 3 式を代入すると

$$q_{n+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_n + \frac{1}{3}q_n \quad \text{すなわち} \quad q_{n+2} = \frac{7}{9}q_n$$

(i) n が奇数のとき $(n \geqq 1)$　$q_n = q_1\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 0$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = 0, \quad r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = 0$$

(ii) n が偶数のとき $(n \geqq 2)$　$q_n = q_2\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(i)，(ii) の結果から

$\boldsymbol{n}$ **が偶数のとき**　$\boldsymbol{p_n = 0,\ q_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}},\ r_n = 0}$

$\boldsymbol{n}$ **が奇数のとき**　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}},\ q_n = 0,\ r_n = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n \neq 1)}$

(3) $s_m = \dfrac{1}{3}p_{2m-1}$ であるから

$$s_1 = \frac{1}{3}p_1 = \mathbf{\frac{1}{3}},$$

$$s_m = \frac{1}{3}p_{2m-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{(2m-1)-3}{2}} = \mathbf{\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}} \quad \boldsymbol{(m \geqq 2)}$$

(4) 点Pが時刻 $2k$ $(1 \leqq k \leqq m-1)$ および $2m$ のときに限り点Aに戻る確率であるから，$a = \dfrac{4}{27}$，$b = \dfrac{7}{9}$ とおくと，$s_m = ab^{m-2}$ より

$$\begin{aligned} t_m &= \sum_{k=1}^{m-1} s_k s_{m-k} = 2s_1 s_{m-1} + \sum_{k=2}^{m-2} s_k s_{m-k} \\ &= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot ab^{m-3} + \sum_{k=2}^{m-2} ab^{k-2}ab^{m-k-2} \\ &= \frac{2}{3}ab^{m-3} + \sum_{k=2}^{m-2} a^2b^{m-4} = \frac{2}{3}ab^{m-3} + (m-3)a^2b^{m-4} \end{aligned}$$

$t_m < s_m$ より　$\dfrac{2}{3}ab^{m-3} + (m-3)a^2b^{m-4} < ab^{m-2}$

$$\frac{2}{3} + (m-3)\frac{a}{b} < b \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{21}(m-3) < \frac{7}{9}$$

整理すると　$m < 3 + \dfrac{7}{12}$　条件 $m \geqq 2$ に注意して　$\boldsymbol{m = 2,\ 3}$　■

3 (1) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP} = (0,\ 0,\ 2) + t(a,\ b,\ -2) = (at,\ bt,\ 2-2t)$

よって　$\mathbf{Q}\boldsymbol{(at,\ bt,\ 2-2t)}$

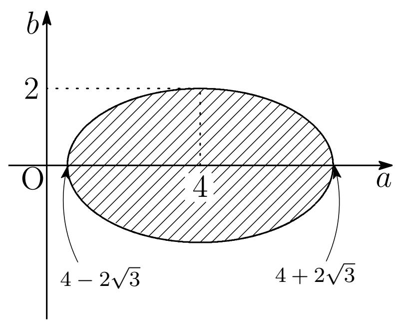
(2) S の方程式は　$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$

Qが S 上にあるとき　$(at-2)^2 + (bt)^2 + (2-2t)^2 = 2$

$$(a^2 + b^2 + 4)t^2 - 2(2a+4)t + 6 = 0$$

この t に関する2次方程式が異なる2つの実数解をもつので，係数について

$$\begin{aligned} (2a+4)^2 - 6(a^2+b^2+4) &> 0 \\ a^2 - 8a + 3b^2 + 4 &< 0 \\ (a-4)^2 + 3b^2 &< 12 \end{aligned}$$



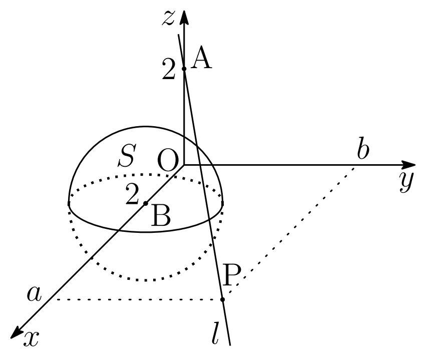
よって　$\boldsymbol{\dfrac{(a-4)^2}{12} + \dfrac{b^2}{4} < 1}$

不等式の表す領域は，右の楕円の内部で境界線を含まない．

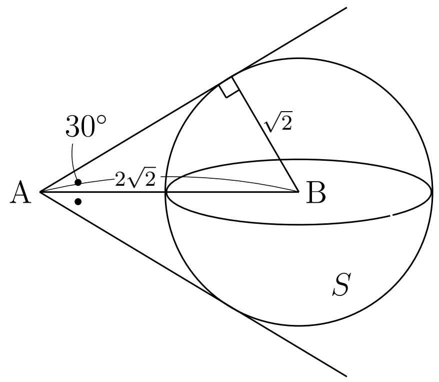
別解 S の中心を $\mathrm{B}(2,\ 0,\ 0)$ とおくと

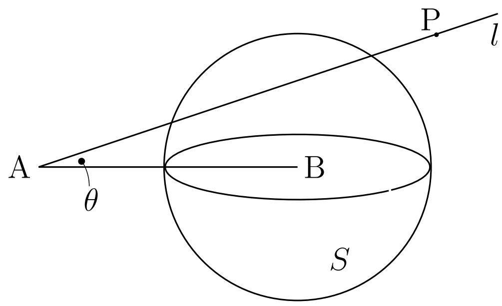
$$\mathrm{AB} = 2\sqrt{2}$$

S の半径は $\sqrt{2}$ であるから，l と S が接するとき，直線 AB と l のなす角は 30°．l と S が異なる 2 点で交わるとき，l と AB のなす角を θ とすると



$$|\cos\theta| \geqq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots (*)$$





$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 0, -2)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (a,\ b,\ -2)$ のなす角が θ であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} = \frac{2a+4}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+4}}$$

$(*)$ より　$\dfrac{|a+2|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+4}} \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに　$\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+4} \geqq \sqrt{2}|a+2|$

この両辺を平方して整理すると

$$a^2 - 8a + 3b^2 + 4 < 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{(a-4)^2}{12} + \frac{b^2}{4} < 1$$

補足 A を頂点，軸 (中心軸) を AB とし，母線と軸のなす角が 30° である円錐面の内部を $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AR}}|} > \cos 30^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2x-2(z-2)}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

平方して整理すると　$x^2 + 3y^2 + z^2 + 4zx - 8x - 4z + 4 < 0$

上式が円錐面の内部を表す領域である．

とくに，平面 $z = 0$ 上における領域が　$x^2 + 3y^2 - 8x + 4 < 0$

(3) Qの z 座標が正であるとき　$2-2t>0$　すなわち　$t<1$

2次方程式 $(a^2+b^2+4)t^2-2(2a+4)t+6=0$ の2つの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{2(2a+4)}{a^2+b^2+4},\quad \alpha\beta=\frac{6}{a^2+b^2+4}$$

$\alpha<1$，$\beta<1$ であるから，$\alpha-1<0$，$\beta-1<0$ より

$$(\alpha-1)+(\beta-1)<0,\quad (\alpha-1)(\beta-1)>0$$

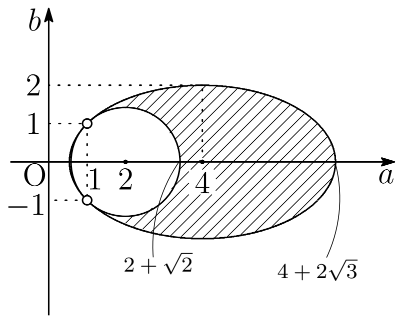
したがって　　$\alpha+\beta-2<0$，$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

$$\frac{2(2a+4)}{a^2+b^2+4}-2<0,\quad \frac{6}{a^2+b^2+4}-\frac{2(2a+4)}{a^2+b^2+4}+1>0$$

すなわち　　$(a-1)^2+b^2>1$，$(a-2)^2+b^2>2$

これと，(1) の結果により

$$\boldsymbol{\begin{cases}\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}<1\\(a-1)^2+b^2>1\\(a-2)^2+b^2>2\end{cases}}$$



不等式の表す領域は，右の図斜線部分で境界線を含まない．

別解 l と T が相異なる 2 点で交わるとき，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ は楕円 $x^2+3y^2-8x+4=0\cdots$① の内部で，円 $(x-2)^2+y^2=2\cdots$② の外部にあるから

$$a^2+3b^2-8a+4<0, \quad (a-2)^2+b^2>2$$

①，② から y を消去すると

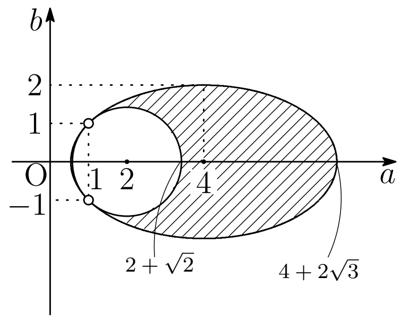
$$x^2+3\{2-(x-2)^2\}-8x+4=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2=0$$

$x=1$ のとき　$y=\pm 1$

①，② は，点 $(1,\pm 1,\ 0)$ で接する．

ゆえに，点 P の x 座標について　$a>1$

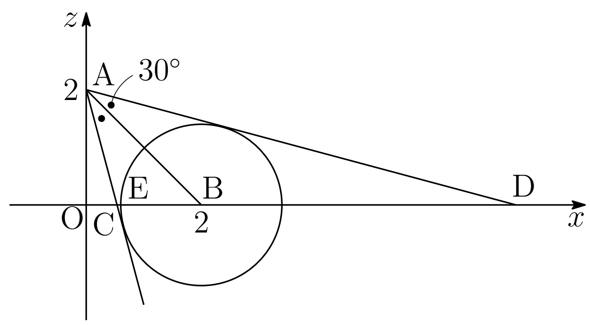
よって　$\begin{cases} \boldsymbol{a>1} \\ \boldsymbol{(a-4)^2+3b^2<12} \\ \boldsymbol{(a-2)^2+b^2>2} \end{cases}$



不等式の表す領域は，右の図斜線部分で境界線を含まない．

注意 楕円 $x^2+3y^2-8x+4=0$ の長軸上の頂点を C，D とすると，$\angle\mathrm{OAC}=15^\circ$，$\angle\mathrm{OAD}=75^\circ$ であるから

$$\mathrm{OC}=\mathrm{OA}\tan 15^\circ=2(2-\sqrt{3})$$
$$\mathrm{OD}=\mathrm{OA}\tan 75^\circ=2(2+\sqrt{3})$$



x 軸上の 2 点 C，E の x 座標は，それぞれ $4-2\sqrt{3}$，$2-\sqrt{2}$ であり，直線 AC と直線 AE の間を l が通過するとき (不適)，第 2 式，第 3 式を満たすので，$a>1$ が必要となる．■

4　(1) $z \in M$ のとき，$\dfrac{1}{z} \in M$ であるから，この積は　$z \cdot \dfrac{1}{z} = 1 \in M$

さらに，$1 \in M$ に対して　$-1 \in M$

(2) $M = \{z_1,\ z_2, \cdots,\ z_n\}$ とすると　$M = \{-z_1, -z_2, \cdots, -z_n\}$

それぞれの要素の積は

$$z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n$$

$z_k \neq 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ であるから　$(-1)^n = 1$　　よって　n は偶数

(3) (1) の結果から，$1 \in M$，$-1 \in M$

$z \neq \pm 1$ について $z \in M$ とすると，$\dfrac{1}{z} \in M$，$-z \in$

$\dfrac{1}{z} \in M$ に対して　$-\dfrac{1}{z} \in M$

したがって　　$M = \left\{1, -1,\ z, -z,\ \dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{z}\right\}$

$z \neq 0, \pm 1$ であるから，$z \neq -z$，$z \neq \dfrac{1}{z}$ に注意すると

$n = 4$ のとき　$z = -\dfrac{1}{z}$,　$-z = \dfrac{1}{z}$

これを解いて　$z = \pm i$　よって　$\boldsymbol{M = \{1, -1,\ i, -i\}}$

(4) (3) と同様に，$M = \left\{1, -1,\ z, -z,\ \dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{z}\right\} \cdots (*)$ とおくと

これらの要素に z を掛けて　$\{z, -z, z^2, -z^2, 1, -1\}$

(i) $z^2 = \dfrac{1}{z}$ $\left(-z^2 = -\dfrac{1}{z}\right)$ のとき

$$z^3 = 1 \quad ゆえに \quad (z-1)(z^2+z+1) = 0$$

$z \neq 1$ であるから　　$z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$(*)$ より　$M = \left\{1, -1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

(ii) $z^2 = -\dfrac{1}{z}$ $\left(-z^2 = \dfrac{1}{z}\right)$ のとき

$$z^3 = -1 \quad ゆえに \quad (z+1)(z^2-z+1) = 0$$

$z \neq -1$ であるから　　$z = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$(*)$ より　$M = \left\{1, -1,\ \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{M = \left\{1, -1,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}}$$

解説 $M = \{z_1,\ z_2, \cdots,\ z_n\}$，$w \in M$ とすると　$M = \{wz_1, wz_2, \cdots, wz_n\}$
それぞれの要素の積は

$$z_1 z_2 \cdots z_n = w^n z_1 z_2 \cdots z_n$$

$z_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ であるから　$w^n = 1$
M のそれぞれの要素は異なるから，$z_k \in M$ を次のようにとればよい．

$$z_k = \cos\frac{2k}{n}\pi + i\sin\frac{2k}{n}\pi \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

これに $n = 4,\ 6$ をそれぞれ代入すると，(3)，(4) の結果を得る．■

5.4　2018 年 (150 分)

$\boxed{1}$ 自然数 n に対し，定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$ を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(2) $0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ．

(4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする．このとき (1)，(2) を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

$\boxed{2}$ a を 1 より大きい実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y = x$ 上にあることを示せ．

(2) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ．

(3) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする．このときの共有点の座標と a の値を求めよ．

$\boxed{3}$ p を素数，a，b を整数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れることを示せ．

(2) $(a+2)^p - a^p$ は偶数であることを示せ．

(3) $(a+2)^p - a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ．

4 図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える．2 点 P，Q が 6 個の頂点 A，B，C，D，E，F を以下の規則 (a)，(b) に従って移動する．

(a) 時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる．

(b) 点 P，Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．

時刻 n まで 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す．また時刻 n まで 2 点 P，Q が同時に同じに頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P，Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 時刻 1 での点 P，Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ．

(2) a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ．

(3) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ．

(4) $p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ．

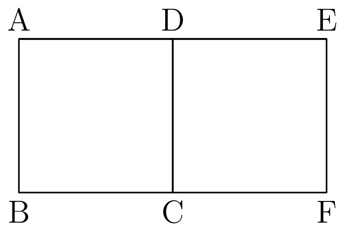


図 1

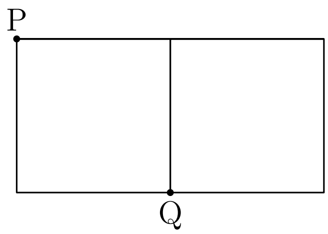


図 2

解答例

$\boxed{1}$ (1) $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$ より

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$0 \leqq \dfrac{x^{n+1}}{x^2+1} \leqq \dfrac{x^n}{x^2+1} \leqq x^n$ より

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx$$

よって　　$0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$

(3) $I_{n+2} \leqq I_n$ であるから，(1) の結果から　$2I_{n+2} \leqq I_n + I_{n+2} \leqq 2I_n$

$$2I_{n+2} \leqq \frac{1}{n+1} \leqq 2I_n \quad ゆえに \quad \frac{n}{2(n+1)} \leqq nI_n \leqq \frac{n}{2(n-1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(4) (1) の結果から，自然数 k に対して，$I_{2k-1} + I_{2k+1} = \dfrac{1}{2k}$ であるから

$$(-1)^{k-1}I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$$

ゆえに　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{k-1}I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1}\} = I_1 - I_{2n-1}$

(2) の結果より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_{2n-1} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$$

■

2 (1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点を $(p,\ q)$ とすると

$$\begin{cases} q = a^p \\ q = \log_a p \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} q = a^p \\ p = a^q \end{cases}$$

上の第 2 式から　$q - p = a^p - a^q = a^q(a^{p-q} - 1) \quad \cdots (*)$

$p - q > 0$ と仮定すると，$a > 1$ より $a^{p-q} - 1 > 0$ であるから，
$(*)$ より，$q - p > 0$ となり，矛盾．

また，$p - q < 0$ と仮定すると，$a > 1$ より $a^{p-q} - 1 < 0$ であるから，
$(*)$ より，$q - p < 0$ となり，矛盾．
したがって，$p - q = 0$．よって，共有点は直線 $y = x$ 上にある．

(2) $y = e^x$ とすると　$y' = e^x$
曲線 $y = e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$$y - e^t = e^t(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = e^t x + (1 - t)e^t$$

この接線が原点を通るとき

$$(1 - t)e^t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1 \quad \text{接点は } (1,\ e)$$

したがって，原点を通る直線で曲線 $y = e^x$ に接する直線は　$y = ex$

曲線 $y = e^x$ を y 軸を元に x 軸方向に e 倍だけ拡大した曲線 $y = e^{\frac{x}{e}}$ は，直線 $y = x$ と点 $(e,\ e)$ で接する．このことから，曲線 $y = a^x$ は

- $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ のとき，直線 $y = x$ と 2 点で交わる．
- $a = e^{\frac{1}{e}}$ のとき，直線 $y = x$ と点 $(e,\ e)$ で接する．
- $e^{\frac{1}{e}} < a$ のとき，直線 $y = x$ と共有点を持たない．

(1) の結論から，2 曲線 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ の共有点は直線 $y = x$ 上にあるから，この 2 曲線の共有点は 2 個以下である．

(3) (2) の結果から，共有点は $\boldsymbol{(e,\ e)}$，$\boldsymbol{a = e^{\frac{1}{e}}}$　■

3　(1)　二項定理により　$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k a^{p-k} b^k$

$1 \leqq k \leqq p-1$ のとき　${}_p\mathrm{C}_k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = p \cdot \dfrac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$

素数 p は $1, 2, \cdots, p-1$ で割り切れないから，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる．

よって　$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k a^{p-k} b^k \equiv 0 \pmod p$

(2)　$(a+2)^p - a^p = 2\sum_{k=1}^{p}(a+2)^{p-k}a^{k-1}$　　よって　$(a+2)^p - a^p \equiv 0 \pmod 2$

(3)　(1) の結果に $b = 2$ を代入することにより

$$(a+2)^p - a^p \equiv 2^p \pmod p$$

(1) の結果に $a = b = 1$ を代入することにより

$$2^p \equiv 2 \pmod p$$

上の 2 式から　　$(a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod p$
したがって　　$(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod p$　$\cdots$①
(2) の結果から　　$(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod 2$　$\cdots$②

(i)　$p \neq 2$ のとき，①，② より

$$(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{2p}$$

(ii)　$p = 2$ のとき，$2p = 4$ であるから

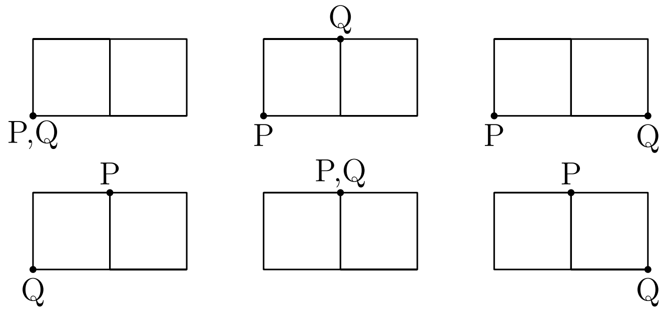
$$(a+2)^p - a^p = (a+2)^2 - a^2 = 4(a+1) \equiv 0 \pmod{2p}$$

(i)，(ii) より，求める余りは

$p \neq 2$ のとき 2，　$p = 2$ のとき 0

■

4 (1) 時刻 1 で動点 P，Q の可能な配置は，次の 6 通り



(2) (1) の 6 通りの配置は同様に確からしい．

a_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある，すなわち，

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = (\mathrm{B},\mathrm{D}),\ (\mathrm{D},\mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\mathrm{F})$$

にある確率であるから　$a_1 = \frac{3}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

b_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上にない，すなわち，$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = (\mathrm{B},\mathrm{F})$ にある確率であるから　$b_1 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

動点 P，Q が頂点 B，D，F 上にあるのは偶数時刻で，頂点 A，C，E 上にあるのは奇数時刻である．動点 P，Q が時刻 n まで同じ頂点にないという条件を満たしながら時刻 n において，動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある確率 a_n，動点 P，Q が A と E または B と F にある確率 b_n について次の確率漸化式が成立する．

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n,\quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \quad \cdots (*)$$

したがって　$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

$$b_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

(3) $(*)$ より　$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n,\quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n}$

(4) $a_0 = 1$，$b_0 = 0$，$(*)$ より，$a_n \geqq 0$，$b_n \geqq 0$ であるから

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leqq \frac{3}{4}(a_n + b_n)$$

ゆえに　$p_0 = 1$，$p_{n+1} \leqq \frac{3}{4}p_n$　よって　$p_n \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^n p_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n$　■

5.5　2019年(150分)

1　正の整数 n に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$$

とする．

(1) I_1 を求めよ．必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい．

(2) $n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ．

(3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径1の円板を D とする．D を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を C とする．C を平面 $x = \dfrac{1}{2}$ で2つの部分に切断したとき，小さい方を S とする．z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ．

2　空間内に $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形ABCと平面 P がある．点Aは P 上にあり，点Bと点Cは P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している．点B，Cから P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれB′，C′とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}} = 0$ を示せ．

(2) $\angle\mathrm{B'AC'} > \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(3) P 上の三角形AB′C′の辺の長さは短いものから4，$\sqrt{21}$，7であった．このとき，辺ABの長さを求めよ．

3　正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを10進数で表すと，小数第1位は0であり，第2位は0以外の数であるとする．

(1) このような n の中で最小のものを求めよ．

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに10番目にくるものを求めよ．

$\boxed{4}$ 正の整数 n に対して $1,\ 2, \cdots, n$ を一列に並べた順列を考える．そのような順列は $n!$ 個ある．このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1,\ a_2, \cdots, a_n)$ とする．この $(a_1,\ a_2, \cdots, a_n)$ に対し，各添字 $i = 1, 2, \cdots, n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \to a_j = k$ と書くことにする．ここで $a_i = j \to a_j = k \to a_k = l \to \cdots$ のようにたどり，それを続けていく．例えば $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7) = (2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき，

(i) $a_1 = 2 \to a_2 = 5 \to a_5 = 4 \to a_4 = 1 \to a_1 = 2$

(ii) $a_3 = 6 \to a_6 = 3 \to a_3 = 6$

(iii) $a_7 = 7 \to a_7 = 7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する．この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ．上の (i), (ii), (iii) は長さがそれぞれ 4，2，1 のサイクルになっている．

(1) $n = 3$ とする．選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ．

(2) $n = 4$ とする．長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ．

(3) n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ．

(4) n を奇数とする．選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ \log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\log(2+\sqrt{3})}$$

(2) $n\geqq 3$ のとき

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\tan\theta)'(\cos\theta)^{-n+2}\,d\theta$$
$$=\Big[\ \tan\theta(\cos\theta)^{-n+2}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\cdot(-n+2)(\cos\theta)^{-n+1}(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$=2^{n-2}\sqrt{3}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^{n-1}\theta}\,d\theta$$
$$=2^{n-2}\sqrt{3}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^n\theta}\,d\theta=2^{n-2}\sqrt{3}-(n-2)(I_n-I_{n-2})$$

ゆえに $\quad (n-1)I_n=(n-2)I_{n-2}+2^{n-2}\sqrt{3}$

よって $\quad \boldsymbol{I_n=\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\dfrac{2^{n-2}\sqrt{3}}{n-1}}$

補足 $m\geqq 3$ に対して，$J_m=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^m\theta\,d\theta$ とすると

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin\theta)'\cos^{m-1}\theta\,d\theta$$
$$=\Big[\ \sin\theta\cos^{m-1}\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta(m-1)\cos^{m-2}\theta(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2^m}-(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos^2\theta-1)\cos^{m-2}\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{2^m}-(m-1)(J_m-J_{m-2})$$

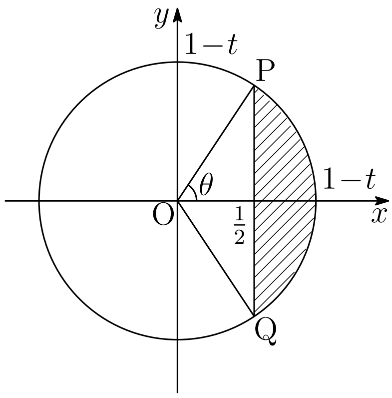
ゆえに $\quad mJ_m=(m-1)J_{m-2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2^m}\quad\cdots(*)$

$(*)$ は負の整数 m についても成立する．

実際，$m=-n+2$ $(n\geqq 3)$ とすると，$J_{-n}=I_n$ に注意して

$(-n+2)I_{n-2}=(-n+1)I_n+2^{n-2}\sqrt{3}$ よって $I_n=\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\dfrac{2^{n-2}\sqrt{3}}{n-1}$

(3) 円錐 $C : x^2 + y^2 = (z-1)^2$ と S の z 軸に垂直な平面 $z = t$ による断面は，右の図の線分 PQ および $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ で囲まれた斜線部分で，$\angle\mathrm{POQ} = 2\theta$ とすると，$\mathrm{OP} = 1 - t$ より



$$(1-t)\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1 - t = \frac{1}{2\cos\theta}$$

その面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}(1-t)^2(2\theta - \sin 2\theta) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2(2\theta - 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{\theta}{4\cos^2\theta} - \frac{\sin\theta}{4\cos\theta} \end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$，$1 - t = \dfrac{1}{2\cos\theta}$ より

t	$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$
θ	$\frac{\pi}{3} \longrightarrow 0$

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}$$

よって，求める体積を V とすると，(1)，(2) の結果に注意して

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{2}} S(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\frac{\theta}{4\cos^2\theta} - \frac{\sin\theta}{4\cos\theta}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\theta\sin\theta}{8\cos^4\theta} - \frac{\sin^2\theta}{8\cos^3\theta}\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{\frac{\theta}{24}\left(\frac{1}{\cos^3\theta}\right)' - \frac{1}{8\cos^3\theta} + \frac{1}{8\cos\theta}\right\}d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{24\cos^3\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{24}I_3 - \frac{1}{8}I_3 + \frac{1}{8}I_1 = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}I_3 + \frac{1}{8}I_1 \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}I_1 + \sqrt{3}\right) + \frac{1}{8}I_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{24}I_1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{9} + \frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{6}} \end{aligned}$$

補足 $C : x^2 + y^2 = (z-1)^2$ の z 軸に垂直な平面による断面は円であるから，積分は，楕円型関数，すなわち，三角関数を用いる．円錐 C の x 軸に垂直な平面を考えると，その断面は双曲線となり，双曲線関数

$$\frac{a}{2}(e^t + e^{-t}) \quad \text{または} \quad \frac{a}{2}(e^t - e^{-t})$$

を用いる．特に母線と平行な断面は放物線となる[1]．C の方程式から

$$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$$

x 軸に垂直な平面による断面積を $S(x)$ とすると $(\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1)$

$$S(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} z\,dy = 2\int_0^{\sqrt{1-x^2}} z\,dy$$

$y = \dfrac{x}{2}(e^t - e^{-t})$ とおくと

y	$0 \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$
t	$0 \longrightarrow \log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$\begin{aligned}
S(x) &= 2\int_0^{\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \left\{1 - \frac{x}{2}(e^t+e^{-t})\right\}\cdot\frac{x}{2}(e^t+e^{-t})\,dt \\
&= x\int_0^{\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \left\{e^t + e^{-t} - \frac{x}{2}\left(e^{2t}+e^{-2t}\right) - x\right\}dt \\
&= x\left[\,e^t - e^{-t} - \frac{x}{4}(e^{2t} - e^{2t}) - xt\,\right]_0^{\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \\
&= \sqrt{1-x^2} - x^2\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\frac{1}{2}}^1 S(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - x^2\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)dx \\
&= \left[\,\frac{2}{3}x\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{3}\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\,\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{\pi}{9} + \frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

なお，$\displaystyle\int\sqrt{A+y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{A+y^2} + \frac{A}{2}\log(y+\sqrt{A+y^2}) + C$ を用いると

$$\begin{aligned}
S(x) &= 2\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - \sqrt{x^2+y^2})\,dy \\
&= 2\left[\,y - \frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{2}\log(y+\sqrt{x^2+y^2})\,\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \sqrt{1-x^2} - x^2\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2018.pdf $\boxed{5}$ 参照

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + (\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AB'}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AC'}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} - \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} - \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AB'}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC'}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{BB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ は P 上のベクトル，$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ は P に垂直なベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} = 0, \quad \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}} = 0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}} = 0$

(2) P の法線ベクトルを $\vec{n}$ とし

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB'}} + \beta\vec{n}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \gamma\vec{n}$$

とおく．点 B と点 C は P に関して同じ側にあるから，$\beta\gamma > 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \beta\gamma|\vec{n}|^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} = -\beta\gamma|\vec{n}|^2 < 0$$

よって　$\angle\mathrm{B'AC'} > \dfrac{\pi}{2}$

(3) $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = x$ とし，$\mathrm{AB'} = \sqrt{21}$，$\mathrm{AC'} = 4$ とすると

$$\mathrm{BC} = \sqrt{2}x, \quad \mathrm{BB'} = \sqrt{x^2 - 21}, \quad \mathrm{CC'} = \sqrt{x^2 - 16}$$

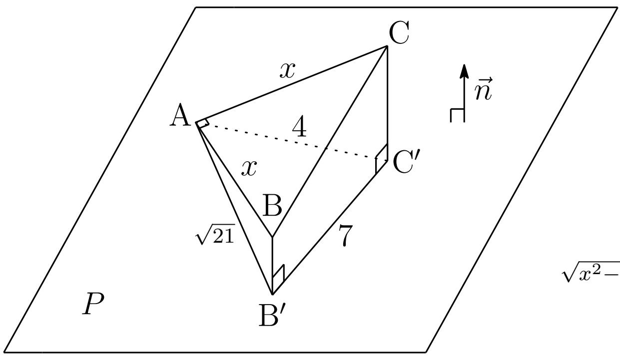
点 B から線分 $\mathrm{CC'}$ に垂線 BH を引き，$\triangle$BCH に三平方の定理を適用すると

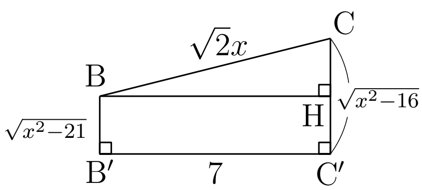
$$(\sqrt{x^2-16} - \sqrt{x^2-21})^2 + 7^2 = (\sqrt{2}x)^2$$

整理すると　$\sqrt{x^2-16}\sqrt{x^2-21} = 6$　ゆえに　$x^4 - 37x^2 + 300 = 0$

したがって　$(x^2-12)(x^2-25) = 0$

$x > \sqrt{21}$ に注意してこれを解くと　$x = 5$　よって　$\mathbf{AB = 5}$





■

$\boxed{3}$ (1) $\sqrt{n}$ の整数部分を A，小数部分を h とすると

$$\sqrt{n} = A + h \quad ゆえに \quad n - A^2 = 2Ah + h^2$$

上の第 2 式の両辺は整数であるから，これを m とすると (m は整数)

$$m = 2Ah + h^2 \quad ゆえに \quad A^2 + m = (A + h)^2$$

h について解くと $h = \sqrt{A^2 + m} - A = \dfrac{m}{\sqrt{A^2 + m} + A}$

条件により，$\dfrac{1}{100} \leqq h < \dfrac{1}{10}$ であるから

$$\frac{1}{100} \leqq \frac{m}{\sqrt{A^2 + m} + A} < \frac{1}{10}$$

$$10 < \frac{\sqrt{A^2 + m} + A}{m} \leqq 100 \quad \cdots (*)$$

$n = A^2 + m$ であるから，これを満たす最小の n は $m = 1$ のとき

$$10 < \sqrt{A^2 + 1} + A \leqq 100$$

n を最小にする整数 A, m は　$A = 5$，$m = 1$　よって　$\boldsymbol{n = 26}$

(2) (i) $m = 1$ のとき，$(*)$ より

$$10 < \sqrt{A^2 + 1} + A \leqq 100 \quad ゆえに \quad 5 \leqq A < 50$$

(ii) $m = 2$ のとき，$(*)$ より

$$20 < \sqrt{A^2 + 2} + A \leqq 200 \quad ゆえに \quad 10 \leqq A < 100$$

(i)，(ii) の結果により，$n = A^2 + m$ を小さい順に 10 個並べると

$$5^2 + 1,\ 6^2 + 1,\ 7^2 + 1,\ 8^2 + 1,\ 9^2 + 1,$$
$$10^2 + 1,\ 10^2 + 2,\ 11^2 + 1,\ 11^2 + 2,\ 12^2 + 1$$

よって，求める 10 番目の数 n は　$12^2 + 1 = \mathbf{145}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $a_k = k$ となる k $(k = 1, 2, 3)$ が存在する次の 4 通りである．

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 3)$$

よって，求める確率は $\dfrac{4}{3!} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) 4 個の数字 1, 2, 3, 4 を円形 (サイクル) に並べる円順列の総数は次の 3! 通りある．(1 を起点とすると)

$$\begin{aligned} &1 \to 2 \to 3 \to 4, \quad 1 \to 2 \to 4 \to 3, \quad 1 \to 3 \to 2 \to 4, \\ &1 \to 3 \to 4 \to 2, \quad 1 \to 4 \to 2 \to 3, \quad 1 \to 4 \to 3 \to 2 \end{aligned}$$

よって，$n = 4$ のとき長さ 4 のサイクルは，次の 6 通りある．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) =} &\boldsymbol{(2,\ 3,\ 4,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 3),\ (3,\ 4,\ 2,\ 1),} \\ &\boldsymbol{(3,\ 1,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 1,\ 2),\ (4,\ 1,\ 2,\ 3)} \end{aligned}$$

(3) j を正の整数とすると $\dfrac{1}{j} > \displaystyle\int_j^{j+1} \frac{dx}{x}$

よって，n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \sum_{j=k}^{n} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x} = \int_k^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) - \log k$$

(4) 1 から n までの n 個 (n は奇数) の順列に長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルがあれば，他のサイクルは $\dfrac{n-1}{2}$ 以下である．n 個から選んだ順列の長さ j のサイクルは，n 個から j 個取り出して並べた円順列であり，その総数は $\dfrac{{}_n\mathrm{P}_j}{j}$ 通りで，残りの $(n-j)$ 個の並べ方は $(n-j)!$ 通りである．
したがって，$\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は

$$p = \frac{1}{n!} \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{{}_n\mathrm{P}_j}{j} \cdot (n-j)! = \frac{1}{n!} \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{n!}{j} = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{1}{j}$$

よって，(3) の結果により

$$p = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log \frac{n+1}{2} = \log 2$$

■

5.6　2020 年 (150 分)

1 双曲線 $x^2-y^2=1$ の $x>0$ の部分を C_1，$x<0$ の部分を C_2 とする．以下の問に答えよ．

(1) 直線 $ax-by=1$ が C_1，C_2 の両方と 1 点ずつで交わるための a，b の条件を求めよ．

(2) a，b は (1) で求めた条件をみたすものとする．点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとり，直線 $ax-by=1$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ P，Q とする．このとき $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を a，b を用いて表せ．

(3) 面積 S の最小値を求めよ．また，その最小値をとるための a，b の条件を求めよ．

2 3 つの数 2，m^2+1，m^4+1 が相異なる素数となる正の整数 m が 1 つ固定されているものとする．以下の問に答えよ．

(1) 3 つの数 2，m^2+1，m^4+1 のうち，1 つを a とし，残りの 2 つを b，c とする．このとき $a^2<bc$ となる a をすべて求めよ．

(2) 正の整数 x，y が $(x+y)(x^2+2y^2+2xy)=2(m^2+1)(m^4+1)$ をみたしているとき x，y を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ は，区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x)>0$ をみたしているとする．区間 $0\leqq x\leqq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x)=f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x)$$

と定義するとき，区間 $0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $F(x)\geqq 0$ であることを示せ．

(2) $f(x)$ を (1) の関数とするとき

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx\geqq 0$$

を示せ．

(3) 関数 $g(x)$ は，区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x)<0$ をみたしているとする．このとき，

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx\geqq 0$$

を示せ．

4 2 名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う．

(i) 正方形の 4 つの頂点を反時計回りに A，B，C，D とする．両者はコマを 1 つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマは A, 後攻の持ちゴマは C に置いてあるとする．

(ii) 先攻から始めて，交互にサイコロを振る．ただしサイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．出た目を 3 で割った余りが 0 のときコマは動かさない．また余りが 1 のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが 2 のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす．もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする．

ちょうど n 回サイコロが振られてときに勝敗が決まる確率を p_n とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

(3) このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち 2 以上の任意の整数 N に対して

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

が成り立つことを示せ．ただし正の実数 a に対し $[a]$ は，その整数部分 ($k \leqq a < k+1$ となる整数 k) を表す．

解答例

1 (1) 直線 $ax-by=1$ は，$b=0$ のとき，直線 $ax=1$ は y 軸と平行であり，C_1 と C_2 の両方で共有点をもつことはない．$b \neq 0$ より，直線 $y=\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$ と双曲線 $x^2-y^2=1$ から y を消去すると

$$x^2-\left(\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\right)^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2-b^2)x^2-2ax+b^2+1=0 \qquad (*)$$

(i) $a^2-b^2=0$ のとき，方程式 $(*)$ の解は1個となり，不適.

(ii) $a^2-b^2 \neq 0$ のとき，2次方程式 $(*)$ の解を $p,\ q$ とすると $(p<q)$，条件より，2数の解の積が負であるから，解と係数の関係により

$$pq=\frac{b^2+1}{a^2-b^2}<0 \quad \text{ゆえに} \quad b^2>a^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{|b|>|a|}$$

(2) 2次方程式 $(*)$ の解が $p,\ q$ であるから $(p<q)$

$$\begin{aligned} q-p &= \frac{-a+|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}-\frac{-a-|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2} \\ &= \frac{2|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2} \end{aligned}$$

直線 $ax-by=1$ と C_1，C_2 との交点をそれぞれ P，Q とすると

$$\mathrm{P}\left(p,\ \frac{ap-1}{b}\right),\quad \mathrm{Q}\left(q,\ \frac{aq-1}{b}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{PQ}=\frac{(q-p)\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$$

したがって $\qquad \mathrm{PQ}=\dfrac{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$

点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ から直線 $ax-by-1=0$ までの距離を d とすると

$$d=\frac{|a^2-b^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\triangle$APQ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot d=\boldsymbol{\frac{(b^2-a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{b^2-a^2}}$$

(3) $t = b^2 - a^2$ とすると $(t > 0)$ 　　$S = \dfrac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t}$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{3}{2}(t+1)^{\frac{1}{2}}t - (t+1)^{\frac{3}{2}}}{t^2} = \frac{(t-2)\sqrt{t+1}}{2t^2}$$

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$\frac{dS}{dt}$		$-$	0	$+$
S		$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

$t = 2$，すなわち，$\boldsymbol{b^2 - a^2 = 2}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ となる．

別解 $S = \dfrac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t} = \left(\dfrac{t+1}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(t^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$t > 0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

よって　　$S \geqq \left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

上式において，等号が成立するとき

$$\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} \quad \text{すなわち} \quad t = 2$$

■

2 (1) 3 つの数 2, m^2+1, m^4+1 が相異なる素数であるから (m は正の整数)

$$m \neq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2 < m^2+1 < m^4+1$$

(i) $a = 2$ のとき

$$bc = (m^2+1)(m^4+1) \geqq (2^2+1)(2^4+1) > 2^2$$

したがって　　$a^2 < bc$

(ii) $a = m^2+1$ のとき

$$bc - a^2 = 2(m^4+1) - (m^2+1)^2 = (m^2-1)^2 > 0$$

したがって　　$a^2 < bc$

(iii) $a=m^4+1$ のとき

$$\begin{aligned} bc-a^2 &= 2(m^2+1)-(m^4+1)^2 \\ &< 2(m^4+1)-(m^4+1)^2=(m^4+1)(1-m^4)<0 \end{aligned}$$

したがって　$a^2>bc$

(i)〜(iii) より，$a^2<bc$ を満たす a は　$\boldsymbol{a=2,\ m^2+1}$

(2) 与えられた条件から，正の整数 x，y に対して

$$(x+y)\{(x+y)^2+y^2\}=2(m^2+1)(m^4+1) \quad \cdots(*)$$

をみたすとき，$(*)$ の右辺が3つ相異なる素数の積であること

$$x+y<(x+y)^2+y^2, \quad 2(m^2+1)<m^4+1$$

に注意して場合分けを行う．

(i) $x+y=2$，$(x+y)^2+y^2=(m^2+1)(m^4+1)$ のとき
$x=y=1$ であるから，これを $(*)$ に代入すると

$$2\cdot 5=2(m^2+1)(m^4+1) \quad \text{ゆえに} \quad 5=(m^2+1)(m^4+1)$$

$m^2+1 \geqq 5$，$m^4+1 \geqq 17$ より，上式をみたす正の整数 m はない．

(ii) $x+y=m^2+1$，$(x+y)^2+y^2=2(m^4+1)$ のとき

$$(m^2+1)^2+y^2=2(m^4+1) \quad \text{ゆえに} \quad y^2=(m^2-1)^2$$

したがって　$y=m^2-1$　このとき　$x=2$

(iii) $x+y=2(m^2+1)$，$(x+y)^2+y^2=m^4+1$ のとき

$$4(m^2+1)^2+y^2=m^4+1 \quad \text{ゆえに} \quad y^2=-3m^4-8m^2-3<0$$

これを満たす正の整数 y は存在しない．

(i)〜(iii) から　$\boldsymbol{x=2,\ \ y=m^2-1}$ ■

3　(1) $F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$ より $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - f\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + f'(\pi - x) - f'(\pi + x) - f'(2\pi - x) \\ &= -\{f'(\pi + x) - f'(x)\} - \{f'(2\pi - x) - f'(\pi - x)\} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$f''(x) > 0$ であるから

$$f'(\pi + x) > f'(x), \quad f'(2\pi - x) > f'(\pi - x)$$

したがって　$f'(\pi + x) - f'(x) > 0$，$f'(2\pi - x) - f'(\pi - x) > 0$

上の 2 式と $F'(x)$ により　$F'(x) < 0$　また，$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから

$$\text{区間 } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{ において} \quad F(x) \geqq 0$$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$ について，$x = \pi - t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - t)\cos(\pi - t)(-dt) \\ &= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - x)\cos x\,dx \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

$\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$ について，$x = \pi + t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + t)\cos(\pi + t)\,dt \\ &= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + x)\cos x\,dx \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

$\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ について，$x = 2\pi - t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi - t)\cos(2\pi - t)(-dt) \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi - x)\cos x\,dx \end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

(A)〜(C) および $F(x)$ の定義式により

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx \\
&\qquad + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - x)\cos x\,dx \\
&\qquad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + x)\cos x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi - x)\cos x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx
\end{aligned}$$

(1) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$F(x) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^{2x} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

(3)　$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx &= \int_0^{2\pi} G'(x)\sin x\,dx \\
&= \Big[\, G(x)\sin x \,\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \{-G(x)\}\cos x\,dx
\end{aligned}$$

$\{-G(x)\}'' = -g'(x) > 0$ であるから，(1),(2) の結果に適用すると

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

補足　$f(x) = -G(x)$ と考えると $f''(x) = -g'(x) > 0$ である． ■

4 (1) n 秒後，P から Q をみて時計回りの隣の頂点，対角の頂点，反時計回りの隣の頂点にある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}z_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

また，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{cases} x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ z_0 = 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}z_n \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}z_n \end{cases}$$

$x_{n+1} - z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(x_n - z_n)$，$x_0 - z_0 = 0$ より　$x_n - z_n = 0$

したがって　$$(*)\begin{cases} x_0 = 0,\ y_0 = 1, \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n \\ p_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n \end{cases}$$

$(*)$ の $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ に順次，$n = 0,\ 1$ を代入すると

$$x_1 = \frac{1}{3},\ y_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{9},\ y_2 = \frac{1}{3},$$

よって　$p_2 = \dfrac{2}{3}x_1 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$，　$p_3 = \dfrac{2}{3}x_2 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{9} = \boldsymbol{\dfrac{4}{27}}$

(2) $(*)$ より

$$x_{n+1} + ky_{n+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2k}{3}\right)x_n + \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{3}\right)y_n$$

とし (k は定数)，k が次式をみたすとき

$$1 : k = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3} : \frac{1}{3} + \frac{k}{3} \quad \text{これを解くと} \quad k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

このとき

$$x_{n+1} \pm \frac{y_{n+1}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3}\left(x_n \pm \frac{y_n}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

したがって

$$x_n + \frac{y_n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n, \quad x_n - \frac{y_n}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$2x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n\right\}$$

よって，$n \geqq 1$ のとき

$$p_n = \frac{2}{3}x_{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{3\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}}$$

(3) (2) の結果について，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$，$\beta = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$ とおくと

$$\alpha+\beta = \frac{2}{3}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{9}, \quad \alpha - 1 = \sqrt{2}\beta, \quad \beta - 1 = -\sqrt{2}\alpha$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
3\sqrt{2}(p_n - p_{n+1}) &= (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) - (\alpha^n - \beta^n) \\
&= -\alpha^{n-1}(\alpha - 1) + \beta^{n-1}(\beta - 1) \\
&= -\sqrt{2}\alpha\beta\alpha^{n-2} - \sqrt{2}\alpha\beta\beta^{n-2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{9}\alpha^{n-2} + \frac{\sqrt{2}}{9}\beta^{n-2} \\
27(p_n - p_{n+1}) &= \alpha^{n-2}\left\{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}\right\}
\end{aligned}$$

このとき　$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{3}{1+\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ より　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$

$$27(p_n - p_{n+1}) = \alpha^{n-2}\left\{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}\right\} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_n > p_{n+1}$$

$n \geqq 2$ において，$\{p_n\}$ は，単調減少列である．ただし，$p_1 = 0$

(i) $\left[\frac{N}{2}\right]=\frac{N}{2}$ のとき，$\left[\frac{N+1}{2}\right]=\frac{N}{2}$ より，$p_1=0$ に注意して

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} &= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} p_{2m-1} \\
&= \left(p_N+\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} p_{2m}\right)-\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} p_{2m+1} \\
&= p_N+\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1}(p_{2m}-p_{2m+1})>0
\end{aligned}$$

(ii) $\left[\frac{N+1}{2}\right]=\frac{N+1}{2}$ のとき，$\left[\frac{N}{2}\right]=\frac{N-1}{2}$ より，$p_1=0$ に注意して

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} &= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\frac{N+1}{2}} p_{2m-1} \\
&= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} p_{2m+1} \\
&= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}(p_{2m}-p_{2m+1})>0
\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，2 以上の任意の整数 N に対して，次式が成立する．

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1}<\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

■

第 6 章　京都大学

出題分野 (2011-2020) 150 分

◀	京都大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量		2								
	データの分析										
II	式と証明					5				5	
	複素数と方程式						6			6	
	図形と方程式								1		
	三角関数					2		3·4	3	1	
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	3	3								
III	式と曲線										
	複素数平面							1			1
	関数										
	極限		1		4						2
	微分法とその応用			4	3	3·4	1				
	積分法	1	1							1	
	積分法の応用			5	6	1	4	5	5	3	6
A	場合の数と確率	1		6		6				4	5
	整数の性質		4	3	5		2		2	2	4
	図形の性質		5				3		6		
B	平面上のベクトル			1							
	空間のベクトル	5·6			1			2			3
	数列	4	6	2	2		5	6	4		
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	2									

数字は問題番号

6.1 2015 年 (150 分)

1 2 つの関数 $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y = \sin 2x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．
ただし，$x = 0$ と $x = \dfrac{\pi}{2}$ は領域を含む線とは考えない．

2 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ．

(a) 少なくとも 2 つの内角は $90°$ である．

(b) 半径 1 の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう．

3 (1) a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) $a_1 = 1$ として，$n = 1, 2, \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき，$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$ を求めよ．

4 一辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．

5 a，b，c，d，e を正の実数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$g(x) = dx + e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

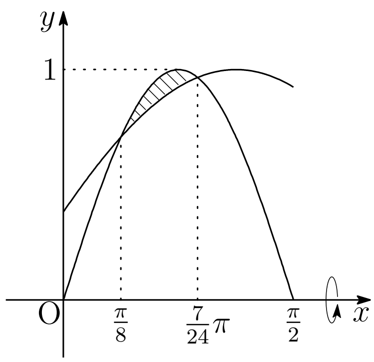
6 2 つの関数を

$$f_0(x) = \frac{x}{2},\quad f_1(x) = \frac{x+1}{2}$$

とおく．$x_0 = \dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n = 1, 2, \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n = f_0(x_{n-1})$ または $x_n = f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n < \dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $\sin 2x - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) = 2\cos\dfrac{24x+\pi}{16}\sin\dfrac{8x-\pi}{16}$



$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{\pi}{16} < \dfrac{24x+\pi}{16} < \dfrac{13\pi}{16}$

$$-\frac{\pi}{16} < \frac{8x-\pi}{16} < \frac{3\pi}{16}$$

$y = \sin 2x$ と $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$ の交点の x 座標は

$$\frac{24x+\pi}{16} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{8x-\pi}{16} = 0$$

すなわち　$x = \dfrac{7}{24}\pi,\ \dfrac{\pi}{8}$

$\dfrac{\pi}{8} < x < \dfrac{7}{24}\pi$ において　$\cos\dfrac{24x+\pi}{16} > 0$，$\sin\dfrac{8x-\pi}{16} > 0$

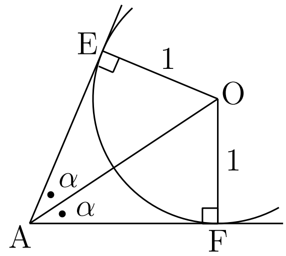
したがって　$\sin 2x > \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) > 0$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\sin^2 2x - \sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{-\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx \\ &= \left[-\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi}{16}}$ ■

2 右の図の四角形 OEAF について



$$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

四角形 OEAF の面積は　$\dfrac{1}{\tan\alpha}$

条件 (a)，(b) を満たす四角形の 4 つの角の大きさを 2α，2β，2γ，2δ とし，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\delta} \qquad \cdots (*)$$

一般性を失うことなく　$2\gamma = 2\delta = 90^\circ$，$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

上の 2 式から　$\beta = 90^\circ - \alpha$，$\gamma = \delta = 45^\circ$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} + \frac{1}{\tan 45^\circ} + \frac{1}{\tan 45^\circ} \\ &= \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} + 2 = \frac{(\tan\alpha - 1)^2}{\tan\alpha} + 4 \geqq 4 \end{aligned}$$

よって，S は $\alpha = 45^\circ$，すなわち，四角形 ABCD が正方形のとき，最小値　**4**

■

3 (1) $y = e^x + 1$ を微分すると　$y' = e^x$
曲線 $y = e^x + 1$ の上の点 $(t,\ e^t + 1)$ における接線の方程式は

$$y - (e^t + 1) = e^t(x - t)$$

これが点 $(a,\ 0)$ を通るから

$$-(e^t + 1) = e^t(a - t) \quad \text{ゆえに} \quad a = t - e^{-t} - 1 \quad \cdots (*)$$

$f(t) = t - e^{-t} - 1$ とおくと　$f'(t) = 1 + e^{-t} > 0$

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} f(t) = \infty$$

したがって，$f(t) = a$ を満たす t はただ 1 つ存在する．
よって，$(a,\ 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線はただ 1 つ存在する．

(2) $a = a_n$，$t = a_{n+1}$ を $(*)$ に代入すると

$$a_n = a_{n+1} - e^{-a_{n+1}} - 1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - a_n = 1 + e^{-a_{n+1}} \quad \cdots ①$$

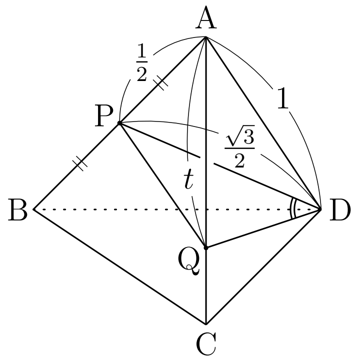
上式より，$a_{n+1} - a_n > 1$ であるから

$n > 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) > \sum_{k=1}^{n-1}$

ゆえに　$a_n > n$　したがって　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

上式に注意すると，① から　$\displaystyle\lim_{n \to \infty}(a_{n+1} - a_n) = \mathbf{1}$　■

4 AQ $= t$ とおいて，△APQ および △AQD に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{PQ}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + t^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot t\cos 60^\circ$$
$$= t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{4},$$
$$\mathrm{QD}^2 = t^2 + 1^2 - 2\cdot t\cdot 1\cos 60^\circ$$
$$= t^2 - t + 1$$

△PQD に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{PDQ} = \frac{\mathrm{PD}^2 + \mathrm{QD}^2 - \mathrm{PQ}^2}{2\mathrm{PD}\cdot\mathrm{QD}}$$
$$= \frac{\frac{3}{4} + (t^2 - t + 1) - \left(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{t^2 - t + 1}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3 - t}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$$

ここで，$f(t) = \dfrac{3 - t}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと

$$f'(t) = \frac{-1\cdot\sqrt{t^2 - t + 1} - (3 - t)\cdot\dfrac{2t - 1}{2\sqrt{t^2 - t + 1}}}{t^2 - t + 1}$$
$$= \frac{-2(t^2 - t + 1) + (t - 3)(2t - 1)}{(t^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - 5t}{(t^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{21}}{3}$	$\searrow$	

よって，求める最大値は　$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2\sqrt{21}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$ ■

5 $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $px+q$，余りを $r \neq 0$ とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px + q + \frac{r}{g(x)}, \quad p = \frac{a}{d} > 0$$

2 以上の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}\frac{f(n-1)}{g(n-1)} &= p(n-1) + q + \frac{r}{g(n)-d} \\ \frac{f(n)}{g(n)} &= pn + q + \frac{r}{g(n)} \\ \frac{f(n+1)}{g(n+1)} &= p(n+1) + q + \frac{r}{g(n)+d}\end{aligned}$$

上の 3 式から

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(n-1)}{g(n-1)} + \frac{f(n+1)}{g(n+1)} - 2\cdot\frac{f(n)}{g(n)}\right| &= \left|\frac{r}{g(n)-d} + \frac{r}{g(n)+d} - \frac{2r}{g(n)}\right| \\ &= \left|\frac{2rd^2}{g(n)\{g(n)+d\}\{g(n)-d\}}\right| \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

$d > 0$ より $g(n) = dn + e$ は，いくらでも大きくなるので，このとき

$$0 < \left|\frac{2rd^2}{g(n)\{g(n)+d\}\{g(n)-d\}}\right| < 1$$

となり，$(*)$ の左辺が整数であることに反する．

よって，$r = 0$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる．■

6 条件により

$$x_0 = \frac{1}{2},$$
$$x_1 = \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},$$
$$x_2 = \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}$$
$$\vdots$$

これから　$x_n = \dfrac{1}{2^{n+1}},\ \dfrac{3}{2^{n+1}},\cdots,\ \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$

と推測し，それぞれの確率は $\dfrac{1}{2^n}$ であることを示す．

実際，$x_n = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$ のとき $(k=1,2,3,\cdots 2^n)$，$\dfrac{1}{2^n}{\cdot}\dfrac{1}{2}$ の確率で

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} = \frac{2k-1}{2^{n+2}} \quad \cdots ①$$

また，$x_n = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$ のとき $(k=1,2,3,\cdots 2^n)$，$\dfrac{1}{2^n}{\cdot}\dfrac{1}{2}$ の確率で

$$x_{n+1} = \frac{x_n+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}+1\right) = \frac{2^{n+1}+2k-1}{2^{n+2}} \quad \cdots ②$$

①，② より　$x_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+2}},\ \dfrac{3}{2^{n+2}},\cdots,\ \dfrac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}$

であり，それぞれの確率は $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ である．

$n=0$ のときは，自明であるから，数学的帰納法により示された．

したがって，x_n の要素は 2^n 個あり，$\dfrac{2N-1}{2^{n+1}} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{2N+1}{2^{n+1}}$ とすると

これを満たす自然数 N は　$\dfrac{2^{n+1}}{3} - \dfrac{1}{2} < N < \dfrac{2^{n+1}}{3} + \dfrac{1}{2}$

$[x]$ を x を超えない最大の整数とすると　$N = \left[\dfrac{2^{n+1}}{3} + \dfrac{1}{2}\right]$

ここで，$2 \equiv -1 \pmod 3$ であるから，$2^{n+1} + (-1)^n \equiv 0 \pmod 3$ より

$$N = \left[\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3} + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{3}\right] = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$$

よって　$P_n = \dfrac{N}{2^n} = \dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3{\cdot}2^n} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}$

別解 $f_0(x) = \dfrac{x}{2}$，$f_1(x) = \dfrac{1+x}{2}$ より

$$\begin{aligned}
&0 < x < \frac{1}{3} \text{ のとき}, \quad 0 < f_0(x) < \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2} < f_1(x) < \frac{2}{3}\\
&\frac{1}{3} \leqq x < \frac{2}{3} \text{ のとき}, \quad \frac{1}{6} \leqq f_0(x) < \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \leqq f_1(x) < \frac{5}{6}\\
&\frac{2}{3} \leqq x < 1 \text{ のとき}, \quad \frac{1}{3} \leqq f_0(x) < \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{6} \leqq f_1(x) < 1
\end{aligned}$$

$0 < x_n < \dfrac{1}{3}$ である確率を a_n，$\dfrac{1}{3} \leqq x_n < \dfrac{2}{3}$ である確率を b_n，$\dfrac{2}{3} \leqq x_n < 1$ である確率を c_n とすると

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, \quad b_0 = 1, \quad c_0 = 0\\
&a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) && \cdots①\\
&b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) && \cdots②\\
&c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n) && \cdots③
\end{aligned}$$

① + ② + ③ より　$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \cdots④$

これを ② に代入して

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_0 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots⑤$$

① − ③ より　$a_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - c_n) = 0$　ゆえに　$a_n = c_n \quad \cdots⑥$

④，⑥ から　$a_n = c_n = \dfrac{1 - b_n}{2}$

よって，求める確率 P_n は

$$\begin{aligned}
P_n &= a_n + b_n = \frac{1 - b_n}{2} + b_n\\
&= \frac{1 + b_n}{2} = \boldsymbol{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}
\end{aligned}$$

■

6.2　2016 年 (150 分)

1　(1) n を 2 以上の自然数とするとき，関数

$$f_n(\theta) = (1 + \cos\theta)\sin^{n-1}\theta$$

の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ．

2　素数 p，q を用いて $p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ．

3　四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る．

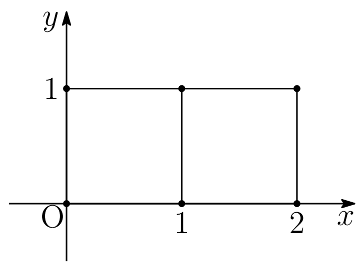
ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう．

4　xyz 空間において，平面 $y = z$ の中で

$$|x| \leqq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leqq y \leqq \log a$$

で与えられる図形 D を考える．ただし a は 1 より大きい定数とする．この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

5　xy 平面上の 6 個の点 $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている．動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する．



規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する．

例えば，X が $(2,\ 0)$ にいるときは，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．また X が $(1,\ 1)$ にいるときは，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．時刻 0 で動点 X が $\mathrm{O} = (0,\ 0)$ から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ．ただし n は 0 以上の整数とする．

6 複素数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し，次の条件を考える．

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる．

(ロ) $f(x)$ の係数 a，b の少なくとも一方は虚数である．

この 2 つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)
$$f_n(\theta) = (1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta = (1+\cos\theta)(1-\cos^2\theta)^{\frac{n-1}{2}}$$
$$= (1+\cos\theta)^{\frac{n+1}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{n-1}{2}}$$

$x=\cos\theta$，$g_n(x)=f_n(\theta)$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$$g_n(x) = (1+x)^{\frac{n+1}{2}}(1-x)^{\frac{n-1}{2}} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

両辺の自然対数をとって微分すると

$$\frac{g_n'(x)}{g_n(x)} = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$$
$$= \frac{(n+1)(1-x)-(n-1)(1+x)}{2(1+x)(1-x)} = \frac{1-nx}{(1+x)(1-x)}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	1
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって　$M_n = g_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \boldsymbol{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$

(2) (1) の結果から

$$M_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$(M_n)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(M_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{e^{\frac{1}{2}}}$$

■

2 素数 p，q の偶奇が一致するならば，p^q+q^p は 2 でない偶数となるから，p^q+q^p が素数であるとき，p と q の偶奇は異なる．すなわち，p^q+q^p が素数であるとき，素数 p，q の一方は 2 であるから

$$p^2+2^p \text{ が素数 } (p \text{ は奇素数}) \quad \cdots (*)$$

を求めればよい．

(i) $p=3$ のとき，$3^2+2^3=17$ は，$(*)$ を満たす

(ii) $p \geqq 5$，$p \equiv \pm 1 \pmod 3$ のとき

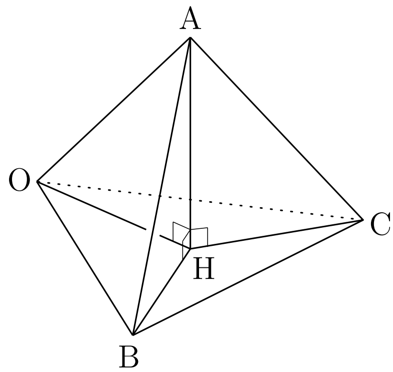
$$p^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1, \quad 2^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod 3$$

したがって　$p^2+2^p \equiv 1+(-1) \equiv 0 \pmod 3$

このとき，$(*)$ を満たす素数 p は存在しない．

(i)，(ii) より，求める素数は　**17**　■

3 △OBC の外心を H とすると



$$\mathrm{HO}=\mathrm{HB}=\mathrm{HC}$$

A から △OBC に下ろした垂線が H を通るから

$$\mathrm{AH}^2+\mathrm{HO}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{HB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{HC}^2$$

ゆえに　$\mathrm{AO}^2=\mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}^2$

同様に，B，C から対面に下ろした垂線により

$$\mathrm{BO}^2=\mathrm{BC}^2=\mathrm{BA}^2,$$
$$\mathrm{CO}^2=\mathrm{CA}^2=\mathrm{CB}^2$$

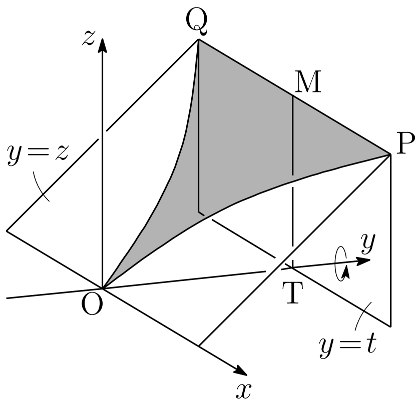
すなわち　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$

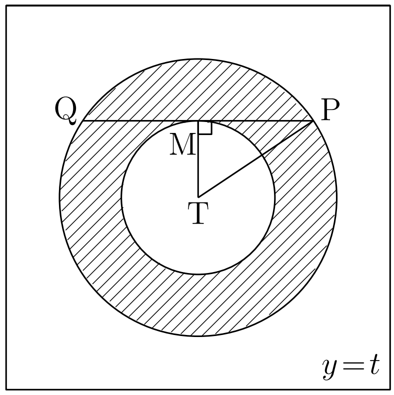
よって，四面体 OABC は正四面体である．　■

4 図形 D は

$$y=z,\quad -\frac{e^y+e^{-y}}{2}+1 \leqq x \leqq \frac{e^y+e^{-y}}{2}-1,\quad 0 \leqq y \leqq \log a$$

図形 D と平面 $y=t\ (0 \leqq t \leqq \log a)$ との共有部分は，2 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}-1,\ t,\ t\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}+1,\ t,\ t\right)$ を結ぶ線分 PQ で，線分 PQ の中点を M とする．





PQ を点 T(0, t, 0) を中心に y 軸の周りに回転させた図形の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\pi(\mathrm{TP}^2-\mathrm{TM}^2)=\pi\mathrm{MP}^2=\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2$$

よって，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{\log a} S(t)\,dt=\pi\int_0^{\log a}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2 dt\\
&=\pi\int_0^{\log a}\left(\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-e^t-e^{-t}+\frac{3}{2}\right)dt\\
&=\pi\left[\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{8}e^{-2t}-e^t+e^{-t}+\frac{3}{2}t\right]_0^{\log a}\\
&=\boldsymbol{\pi\left\{\frac{1}{8}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)-a+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\log a\right\}}
\end{aligned}$$

■

5 n 秒後に X の x 座標が 0，1，2 である確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とすると，$a_0=1$，$b_0=0$，$c_0=0$

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n & \cdots ① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n & \cdots ② \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n & \cdots ③ \end{cases}$$

①〜③ の辺々を加えると　$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n$

ゆえに　$a_n+b_n+c_n=a_0+b_0+c_0=1 \quad \cdots ④$

②，④ から c_n を消去すると

$$b_{n+1}=-\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(b_n-\frac{3}{7}\right)$$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{3}{7}\right\}$ は初項が $b_0-\dfrac{3}{7}$，公比が $-\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{3}{7}=\left(b_0-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad b_n=\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\} \quad \cdots ⑤$$

① − ③ より　$a_{n+1}-c_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-c_n)$

数列 $\{a_n-c_n\}$ は初項が a_0-b_0，公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-c_n=(a_0-c_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots ⑥$$

④ − ⑤ + ⑥ より　$2a_n=1-\dfrac{3}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

補足　同様の計算により

$$b_n=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad c_n=\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

■

6 2 次方程式 $f(x)=0$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$a=-(\alpha+\beta),\quad b=\alpha\beta \quad \cdots(*)$$

したがって　$f(x)=x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$

$g(x)=f(x^3)$ とおくと　$g(x)=(x^3-\alpha)(x^3-\beta)$

$g(x)$ が $f(x)$ で割り切れるとき，$g(x)$ は $x-\alpha$ および $x-\beta$ で割り切れるから，$g(\alpha)=0$，$g(\beta)=0$ より

$$(\alpha^3-\alpha)(\alpha^3-\beta)=0 \quad \text{かつ} \quad (\beta^3-\alpha)(\beta^3-\beta)=0$$

上の 2 式の α，β の対称性により，次の場合分けを行う．

(i) $\alpha^3-\alpha=0$，$\beta^3-\beta=0$ の場合
α，β は実数であるから，$(*)$ より，a，b はともに実数となり，不適．

(ii) $\alpha^3-\alpha=0$，$\beta^3-\alpha=0$ の場合
$\alpha=\beta=0$ のとき，$(*)$ により，a，b がともに実数となり，不適
$\alpha=\beta^3=\pm1$ のとき，β が実数のとき，$(*)$ により，a，b がともに実数となるから，β は虚数であることに注意して

$$(\alpha,\ \beta)=\left(1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right),\ \left(-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$

ゆえに　$(a,\ b)=\left(\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right),\ \left(\dfrac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

(複号同順)

(iii) $\alpha^3-\beta=0$，$\beta^3-\alpha=0$ の場合
β を消去すると　$\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha^2+1)(\alpha^4+1)=0$
α が実数とき，β は実数となるから，a，b はともに実数となり，不適．
$\alpha=\pm i$ のとき，$\beta=\alpha^3=\mp i$ より (複号同順)，$a=0,\ b=1$ となり，不適．
$\alpha=\dfrac{\pm1+i}{\sqrt{2}}$ のとき，$\beta=\dfrac{\mp1+i}{\sqrt{2}}$ となり (複号同順)，$a=-\sqrt{2}\,i$，$b=-1$
$\alpha=\dfrac{\mp1-i}{\sqrt{2}}$ のとき，$\beta=\dfrac{\pm1-i}{\sqrt{2}}$ となり (複号同順)，$a=\sqrt{2}\,i$，$b=-1$

(i)～(iii) より　$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}x+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \\ x^2+\dfrac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2}x+\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2} \\ x^2\pm\sqrt{2}\,ix-1 \end{cases}}$　**(複号同順)**

■

6.3　2017 年 (150 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ w を 0 でない複素数，x，y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする．

(1) 実数 R は $R>1$ を満たす定数とする．w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(2) 実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 四面体 OABC を考える．点 D，E，F，G，H，I は，それぞれ辺 OA，AB，BC，CO，OB，AC 上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$ であることを示せ．

(2) D，E，F，G，H，I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ p，q を自然数，α，β を

$$\tan\alpha=\frac{1}{p},\quad \tan\beta=\frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha+2\beta)=2$$

を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\triangle$ABC は鋭角三角形であり，$\angle \mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．また $\triangle$ABC の外接円の半径は 1 であるとする．

(1) $\triangle$ABC の内心を P とするとき，$\angle$BPC を求めよ．

(2) $\triangle$ABC の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $a\geqq 0$ とする．$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y=xe^{-x}$，直線 $y=ax$，直線 $x=\sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

(ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする．)

$\boxed{\mathbf{6}}$ n を自然数とする．n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている．各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る．このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\theta = \arg w$ とすると，$R = |w|$ より

$$w = R(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{R}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$x + yi = w + \dfrac{1}{w}$ より

$$x = \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\theta, \quad y = \left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\theta \qquad \cdots (*)$$

$R > 1$ より，$R + \dfrac{1}{R} \neq 0$，$R - \dfrac{1}{R} \neq 0$ であるから

$$\frac{x}{R + \dfrac{1}{R}} = \cos\theta, \quad \frac{y}{R - \dfrac{1}{R}} = \sin\theta$$

上の 2 式から，θ を消去することにより，求める軌跡は，次の楕円である．

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{\left(R + \dfrac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R - \dfrac{1}{R}\right)^2} = 1}$$

(2) $r = |w|$ とすると，$\alpha = \arg w$ より，$(*)$ と同様に

$$x = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha, \quad y = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\alpha \neq 0$，$\sin\alpha \neq 0$ より

$$\frac{x}{\cos\alpha} = r + \frac{1}{r}, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = r - \frac{1}{r} \qquad \cdots (**)$$

$(**)$ の第 1 式から

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 + 2 \geqq 2$$

$(**)$ の 2 式から，r を消去すると

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin\alpha}\right)^2 = \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 4$$

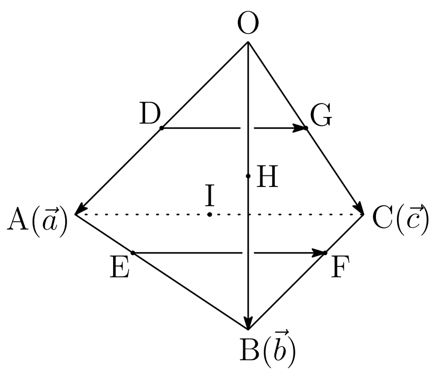
したがって，求める軌跡は，次の双曲線の一部である．

$$\boldsymbol{\left(\frac{x}{2\cos\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{2\sin\alpha}\right)^2 = 1 \qquad (x \geqq 2\cos\alpha)}$$

■

2 (1) $0 < d, e, f, g < 1$ とし

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = d\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}} = g\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = e\vec{a} + (1-e)\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = f\vec{c} + (1-f)\vec{b}$$



とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}} = -d\vec{a} + g\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -e\vec{a} + (e-f)\vec{b} + f\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = k\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ であるから (k は 0 でない定数)

$$-e\vec{a} + (e-f)\vec{b} + f\vec{c} = k(-d\vec{a} + g\vec{c})$$

整理すると　　$(kd-e)\vec{a} + (e-f)\vec{b} + (f-kg)\vec{c} = \vec{0} \quad \cdots (*)$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$kd - e = 0, \quad e - f = 0, \quad f - kg = 0 \quad \text{すなわち} \quad d = g, \quad e = f$$

AE : EB $= 1 - e : e$，CF : FB $= 1 - f : f$ であるから，$e = f$ より

$$\mathrm{AE : EB = CF : FB}$$

(2) 条件を満たすとき，$(*)$ に $k = 1$ を代入して (辺 AC に注目)

$$d = e = f = g$$

したがって　AE : EB = CF : FB = AD : DO = CG : GO　$\cdots$①

また，同様に，$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{IF}}$ より (辺 AB に注目)

$$\mathrm{AD : DO = BH : HO = AI : IC = BF : FC} \quad \cdots ②$$

① より　CF : FB = AD : DO，　② より　AD : DO = BF : FC

上の 2 式より，BF : FC = 1 : 1 である．

したがって，①，② より，D，E，F，G，H，I は各辺の中点である．

中点連結定理により　OA = 2HE,　OB = 2DE,　OC = 2HF,
　　　　　　　　　　AB = 2DH,　BC = 2HG,　CA = 2GD

このとき，これらの辺の長さは等しいので，OABC は正四面体である．■

$\boxed{3}$ $\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ より，$q=1$ のとき，$\beta = \dfrac{\pi}{4}+n\pi$ (n は整数) であるから

$$\tan(\alpha+2\beta) = \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -p\ (\neq 2)$$

したがって　$q \neq 1$

$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ $(q\neq 1)$ より　$\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{2\cdot\dfrac{1}{q}}{1-\dfrac{1}{q^2}} = \dfrac{2q}{q^2-1}$

正接の加法定理により

$$\tan\alpha = \tan\{(\alpha+2\beta)-2\beta\} = \frac{\tan(\alpha+2\beta)-\tan 2\beta}{1+\tan(\alpha+2\beta)\tan 2\beta}$$

条件により　$\dfrac{1}{p} = \dfrac{2-\dfrac{2q}{q^2-1}}{1+2\cdot\dfrac{2q}{q^2-1}} = \dfrac{2(q^2-q-1)}{q^2+4q-1}$　ゆえに　$2p-1 = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$

$2p-1$ は正の奇数，$q^2-q-1 = q(q-2)+q-1 > 0$ より $(q \geqq 2)$

$$\frac{5q}{q^2-q-1} \geqq 1 \quad ゆえに \quad q^2-6q-1 \leqq 0$$

したがって　　$|q-3| \leqq \sqrt{10}$

これを満たす自然数 q は　$q = 2, 3, 4, 5, 6$

ここで，$f(q) = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$ とすると

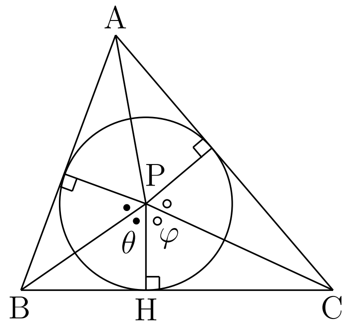
$$f(2)=10,\quad f(3)=3,\quad f(4)=\frac{20}{11},\quad f(5)=\frac{25}{19},\quad f(6)=\frac{30}{29}$$

よって，条件を満たすのは，$q=3$ のとき

$$2p-1=3 \quad これを解いて \quad p=2$$

よって，求める組は　　$\boldsymbol{(p,\ q) = (2,\ 3)}$ ■

4 (1) 内心 P から辺 BC に垂線 PH を引き，$\angle\mathrm{BPH} = \theta$，$\angle\mathrm{CPH} = \varphi$ とすると



$$\angle\mathrm{B} = \pi - 2\theta, \quad \angle\mathrm{C} = \pi - 2\varphi \quad \cdots ①$$

$\angle\mathrm{A} = \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi$ より

$$\frac{\pi}{3} + (\pi - 2\theta) + (\pi - 2\varphi) = \pi$$

したがって　$\theta + \varphi = \dfrac{2}{3}\pi$　よって　$\angle\mathrm{BPC} = \theta + \varphi = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ に正弦定理 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$ を適用すると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\cdot 1 \quad ゆえに \quad \mathrm{BC} = \sqrt{3}$$

$r = \mathrm{PH}$ であるから，$\mathrm{BH} = r\tan\theta$，$\mathrm{HC} = r\tan\varphi$，$\mathrm{BH} + \mathrm{HC} = \mathrm{BC}$ より

$$\begin{aligned} r\tan\theta + r\tan\varphi &= \sqrt{3} \\ r(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) &= \sqrt{3}\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin(\theta+\varphi) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\{\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi)\} \end{aligned}$$

これに (1) の結果を代入すると

$$\frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{-\frac{1}{2} + \cos(\theta-\varphi)\right\} \quad ゆえに \quad r = \cos(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}$$

$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi - \theta$ であるから　$r = \cos\left(2\theta - \dfrac{2}{3}\pi\right) - \dfrac{1}{2}$　$\cdots(*)$

① より　$\angle\mathrm{C} = \pi - 2\varphi = \pi - 2\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right) = 2\theta - \dfrac{\pi}{3}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ は，鋭角三角形であるから，$\angle\mathrm{B}$，$\angle\mathrm{C}$ について

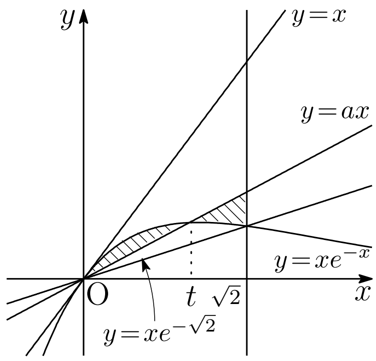
$$0 < \pi - 2\theta < \frac{\pi}{2} \quad かつ \quad 0 < 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{5}{12}\pi$　ゆえに　$-\dfrac{\pi}{6} < 2\theta - \dfrac{2}{3}\pi < \dfrac{\pi}{6}$　$\cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ より　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} < r \leqq \dfrac{1}{2}}$　■

$\boxed{5}$ $y = xe^{-x}$ より，$y' = (1-x)e^{-x}$，$y'' = (x-2)e^{-x}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	0	↗	極大	↘	$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$



$y = xe^{-x}$ のグラフは，右の図のようなる．
$x = 0$ のとき，$y' = 1$ であるから，曲線 $y = xe^{-x}$ 上の原点 O における接線の傾きは　1

曲線 $y = xe^{-x}$ と直線 $x = \sqrt{2}$ の交点は $(\sqrt{2},\ \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$ であるから，原点とこの交点を通る直線の傾きは　$e^{-\sqrt{2}}$

上の図から，$0 \leqq a < e^{-\sqrt{2}}$ のとき，$S(a)$ は単調減少である．$1 < a$ のとき，$S(a)$ は単調増加である．したがって，これらの区間においては，$S(a)$ は最小値をもたないので，$e^{-\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ において，$S(a)$ の最小値を求めればよい．

曲線 $y = xe^{-x}$ と直線 $y = ax$ の交点の x 座標を t とすると $(0 < t < \sqrt{2})$

$$te^{-t} = at \quad \text{すなわち} \quad a = e^{-t}\ (t = -\log a)$$

関数 $f(x) = xe^{-x} - ax$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -(x+1)e^{-x} - \dfrac{a}{2}x^2$ とすると

$$S(a) = \int_0^t f(x)\,dx - \int_t^{\sqrt{2}} f(x)\,dx = 2F(t) - F(0) - F(\sqrt{2})$$

このとき　$F(t) = -(t+1)e^{-t} - \dfrac{a}{2}t^2 = -\left(\dfrac{t^2}{2} + t + 1\right)e^{-t}$,　$F(0) = -1$,
$F(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} - a = -e^{-t} - (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$

したがって　　$S(a) = -(t+1)^2e^{-t} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$

$S(a) = g(t)$ とすると　　$g'(t) = (t+1)(t-1)e^{-t}$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$t = 1$，すなわち，$a = e^{-1}$ のとき，$S(a)$ は最小となる．

$$\text{最小値 } S(e^{-1}) = g(1) = \boldsymbol{-4e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1}$$

■

6 n 桁の数 X が，3 で割り切れる確率を a_n，3 で割って 1 余る確率を b_n，3 で割って 2 余る確率を c_n とすると，次の確率漸化式が成り立つ．

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n, \\ b_{n+1} &= \frac{2}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n, \\ c_{n+1} &= \frac{2}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n, \\ a_1 &= \frac{1}{5},\ b_1 = \frac{2}{5},\ c_1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

第 1 式から第 3 式の辺々を加えると　$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$

ゆえに　　$a_n + b_n + c_n = a_1 + b_1 + c_1 = 1$

$b_n + c_n = 1 - a_n$ であるから，第 1 式は

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(b_n + c_n) = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(1 - a_n) = -\frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}$$

したがって　　$a_{n+1} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{5}\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1 - \dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(a_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

よって，求める確率は　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n}$

補足　第 2 式および第 3 式から

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}(a_n + c_n) = \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}(1 - b_n) = -\frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}, \\ c_{n+1} &= \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}(a_n + b_n) = \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}(1 - c_n) = -\frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

同様にして　　$b_n = c_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$　■

6.4　2018 年 (150 分)

1 0 でない実数 a，b，c は次の条件 (i) と (ii) を満たしながら動くものとする．

(i) $1+c^2 \leqq 2a$.

(ii) 2 つの放物線 $C_1 : y = ax^2$ と $C_2 : y = b(x-1)^2 + c$ は接している．

ただし，2 つの曲線が接するとは，ある共有点において共通の接線をもつことであり，その共有点を接点という．

(1) C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ．

(2) C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め，その範囲を図示せよ．

2 $n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

3 α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える．

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する．

(ii) $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DAB} = \alpha$.

条件 (i) と (ii) を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積

$$k = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$$

が最大となるものについて，k の値を求めよ．

4 コインを n 回投げて複素数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n を次のように定める．

(i) 1 回目に表が出れば $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とし，裏が出れば $z_1 = 1$ とする．

(ii) $k = 2, 3, \cdots, n$ のとき，k 回目に表が出れば $z_k = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} z_{k-1}$ とし，裏が出れば $z_k = \overline{z_{k-1}}$ とする．ただし，$\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である．

このとき，$z_n = 1$ となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 曲線 $y = \log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ における法線上に，点 B を $\mathrm{AB} = 1$ となるようにとる．ただし B の x 座標は t より大きいとする．

(1) 点 B の座標 $(u(t),\ v(t))$ を求めよ．また $\left(\dfrac{du}{dt},\ \dfrac{dv}{dt}\right)$ を求めよ．

(2) 実数 r は $0 < r < 1$ を満たすとし，t が r から 1 まで動くときに点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r)$，$L_2(r)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{r \to +0}(L_1(r) - L_2(r))$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 四面体 ABCD は $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$，$\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする．

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ．

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ．

解答例

1　(1)　$f(x)=ax^2$，$g(x)=b(x-1)^2+c$ とおくと

$$f'(x)=2ax,\quad g'(x)=2b(x-1)$$

C_1，C_2 の共有点の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ より

$$(*)\begin{cases} at^2=b(t-1)^2+c \\ 2at=2b(t-1) \end{cases}$$

$(*)$ の第 2 式から　$at=b(t-1)$　$\cdots$ ①

$a\neq 0$，$b\neq 0$ であるから，① より　$t\neq 0,\ 1$

① と $(*)$ の第 1 式から b を消去すると

$$at^2=at(t-1)+c \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{c}{a}$$

したがって　$f\left(\dfrac{c}{a}\right)=a\left(\dfrac{c}{a}\right)^2=\dfrac{c^2}{a}$　よって，接点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{c}{a},\ \dfrac{c^2}{a}\right)}$

(2)　(1) の結果から，接点の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{c}{a},\quad y=\frac{c^2}{a}\quad (x\neq 0,\ 1)$$

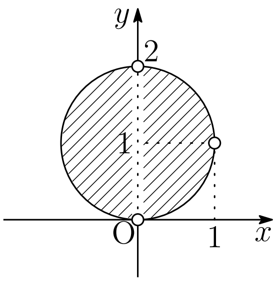
上の 2 式から　$a=\left(\dfrac{a}{c}\right)^2\dfrac{c^2}{a}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 y=\dfrac{y}{x^2}$，　$c=\dfrac{c^2}{a}\cdot\dfrac{a}{c}=y\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{y}{x}$

これらを $1+c^2\leqq 2a$ に代入すると

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\leqq 2\cdot\frac{y}{x^2}$$

よって　$x^2+(y-1)^2\leqq 1$　$(x\neq 0,\ 1)$

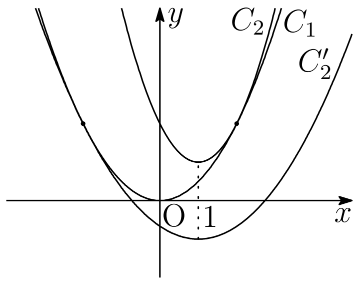
この不等式の表す領域は，右の図の斜線部分で，y 軸および点 $(1,\ 1)$ は含まない．



補足　右の図から，C_1 と C_2 の接点の x 座標は

$$x\neq 0,\ 1$$

であることがわかる．



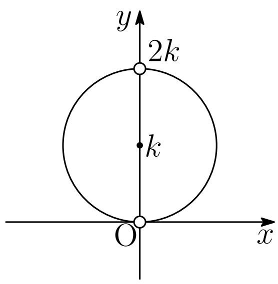
別解 $1+c^2 \leqq 2a$ より，$a>0$ であるから，$k=\dfrac{1+c^2}{2a}$ とおくと　$0<k\leqq 1$
接点の座標を $(x,\ y)$ とおくと，(1) の結果から

$$x=\frac{c}{a}=\frac{2kc}{1+c^2},\quad y=\frac{c^2}{a}=\frac{2kc^2}{1+c^2}$$

$c\neq 0$ であるから，$c=\tan\theta\ (-\frac{\pi}{2}<\theta<0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと

$$x=k\sin 2\theta,\quad y=k(1-\cos 2\theta)$$

これは，右の図のように，y 軸上の点を除く，中心 $(0,\ k)$，半径 k の円である．接点の x 座標は，$x\neq 0,\ 1$ であるから，k が $0<k\leqq 1$ の範囲を動くとき，(2) で求めた図形が得られる．



■

2 与えらえた整式を変形すると

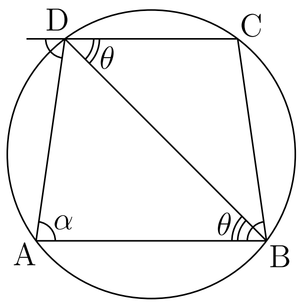
$$n^3-7n+9=(n-1)n(n+1)-3(2n-3)\quad\cdots(*)$$

連続する 3 整数の積 $(n-1)n(n+1)$ は 3 の倍数であるから，$(*)$ は 3 の倍数である．これが素数であるとき，その値は 3 であるから

$$n^3-7n+9=3\quad ゆえに\quad (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

よって，求める整数 n は　$\boldsymbol{n=1,\ 2,\ -3}$ ■

3 $\theta=\angle\mathrm{ABD}$ とおくと



$$\angle\mathrm{DBC}=\alpha-\theta,\ \angle\mathrm{ADB}=\pi-\alpha-\theta$$

外接円の半径が 1 であるから，正弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=2\sin(\pi-\alpha-\theta)=2\sin(\alpha+\theta),\\ \mathrm{BC}&=\mathrm{DA}=2\sin\theta,\\ \mathrm{CD}&=2\sin(\alpha-\theta)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}k&=\mathrm{AB{\cdot}BC{\cdot}CD{\cdot}DA}=16\sin^2\theta\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)\\ &=8\sin^2\theta(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)=16\sin^2\theta(-\sin^2\theta+\sin^2\alpha)\\ &=-16\left(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^2+4\sin^4\alpha\end{aligned}$$

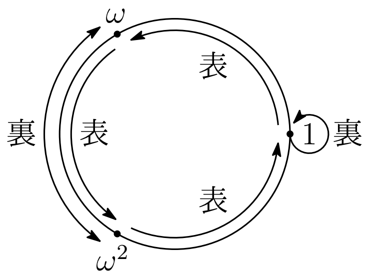
よって，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$ のとき，k は最大値 $\boldsymbol{4\sin^4\alpha}$ をとる． ■

$\boxed{4}$ n を自然数，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると　$z_n \in \{1,\ \omega,\ \omega^2\}$

$z_n = 1$，$z_n = \omega$，$z_n = \omega^2$ となる確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1 = \frac{1}{2},\ q_1 = \frac{1}{2},\ r_1 = 0$$

$$(*)\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = q_n \end{cases}$$



$(*)$ の第 1 式と第 2 式から

$$p_{n+1} - q_{n+1} = 0, \quad p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + r_n$$

このとき，$p_n = q_n$ であるから，$p_n + q_n + r_n = 1$ により　$r_n = 1 - 2p_n$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

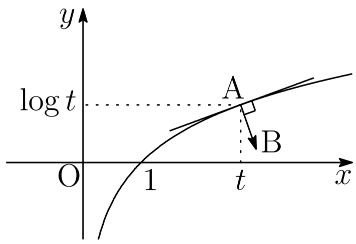
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}(1-2p_n) \quad \text{ゆえに} \quad p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項が $p_1 - \dfrac{1}{3}$，公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$ ■

5 (1) $y = \log x$ より　$y' = \dfrac{1}{x}$



曲線 $y = \log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ における接線の傾きが $\dfrac{1}{t}$ であるから，この曲線の点 A における法線の傾きは $-t$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ はベクトル $(1, -t)$ に平行である．

$\mathrm{AB} = 1$ で，B の x 座標は A の x 座標 t より大きいから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, -t)$$

よって
$$\begin{aligned}(u(t),\ v(t)) &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (t,\ \log t) + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, -t) \\ &= \boldsymbol{\left(t + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \log t - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)}\end{aligned}$$

上式から
$$\boldsymbol{\left(\frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\right) = \left(1 - \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}$$

(2) $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ より，$\dfrac{d}{dt}\log t = \dfrac{1}{t}$ であるから

$$L_1(r) = \int_r^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt = \int_r^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt$$

(1) の結果から
$$\left(\frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(t,\ 1)$$

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{t^2+1} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$L_2(r) = \int_r^1 \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

したがって
$$L_1(r) - L_2(r) = \int_r^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$t = \tan\varphi$ とおくと，$t \to +0$ のとき，$\varphi \to +0$ に注意して

$$\lim_{r\to+0}(L_1(r) - L_2(r)) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

補足　不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt$ について，$t=\dfrac{1}{u}$ とおくと

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt &= \int\sqrt{1+u^2}\left(\frac{1}{u}\right)'du\\ &= \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}-\int\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}-\log(u+\sqrt{1+u^2})+C\end{aligned}$$

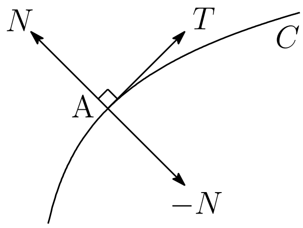
よって　$\displaystyle\int\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt=\sqrt{1+t^2}-\log\left(\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)+C$

これから，$L_1(r)$ および $L_2(r)$ を求めることもできるが，本題では不要．

発展　本題では曲線の曲率 κ が[1]，$|\kappa|<1$ となる曲線 $C:y=f(x)$ を設定している．

C の弧長

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$



を変数とし，C 上の点 X を $X(s)=(x(s),\ y(s))$ で定めると　$X'(s)=(x'(s),\ y'(s))$

$$s-s_0=\int_{s_0}^{s}|X'(s)|\,ds\qquad\left(|X'(s)|=\sqrt{\{x'(s)\}^2+\{y'(s)\}^2}\right)$$

これを s で微分することにより　$|X'(s)|=1$

$T=X'(s)$ とおくと，T は $\mathrm{A}(x(s),\ y(s))$ における C の単位接ベクトルである．

また，T を反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転されたベクトル

$$N=(-y'(s),\ x'(s))\qquad(6.1)$$

を単位法ベクトルという．

$|X'(s)|^2=1$ より　$\{x'(s)\}^2+\{y'(s)\}^2=1\quad\cdots(*)$

これを s で微分すると

$$2x'(s)x''(s)+2y'(s)y''(s)=0\quad ゆえに\quad (x''(s),\ y''(s))\perp T$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf $\boxed{3}$ を参照

したがって，実数 κ を用いて

$$(x''(s),\ y''(s)) = \kappa N = \kappa(-y'(s),\ x'(s)) \tag{6.2}$$

これと $(*)$ から　$\kappa = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$

T の x 軸の正の向きとなす角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{y'(s)}{x'(s)}$

これを s で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{\{x'(s)\}^2}$$

ここで　$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left\{\dfrac{y'(s)}{x'(s)}\right\}^2 = \dfrac{1}{\{x'(s)\}^2}$

よって　$\kappa = \dfrac{d\theta}{ds} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$

また，(6.1) を s で微分すると，(6.2) に注意して

$$N' = (-y''(s),\ x''(s)) = (-\kappa x'(x), -\kappa y'(s)) = -\kappa T$$

本題において，点 A が $X(s)$ であるとき，点 B は $X(s) - N$ である．

$$\frac{d}{ds}(X(s) - N) = X'(s) - N' = T + \kappa T = (1+\kappa)T$$

曲線 $y = \log x$ の曲率 κ は

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$1 + \kappa > 0$ であるから　$|(1+\kappa)T| = 1 + \kappa$

$r \to +0$ のとき $\theta \to \dfrac{\pi}{2} - 0$，$x = 1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+0}(L_1(r) - L_2(r)) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \{1 - (1+\kappa)\}\,ds \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (-\kappa)\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

■

6 (1) $\triangle \mathrm{ACD}$ と $\triangle \mathrm{BDC}$ について

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD},\ \mathrm{AD} = \mathrm{BC},\ \mathrm{CD}\ \text{は共通}$$

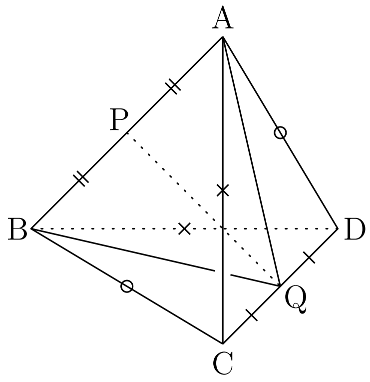
3 辺相等により　$\triangle \mathrm{ACD} \equiv \triangle \mathrm{BDC}$

したがって　$\angle \mathrm{ACQ} = \angle \mathrm{BDQ}$

$\triangle \mathrm{ACQ}$ と $\triangle \mathrm{BDQ}$ について，2 辺夾角相等により　$\triangle \mathrm{ACQ} \equiv \triangle \mathrm{BDQ}$

したがって　$\mathrm{AQ} = \mathrm{BQ}$

よって，PQ は二等辺三角形 ABQ の中線であるから　$\mathrm{AB} \perp \mathrm{PQ}$



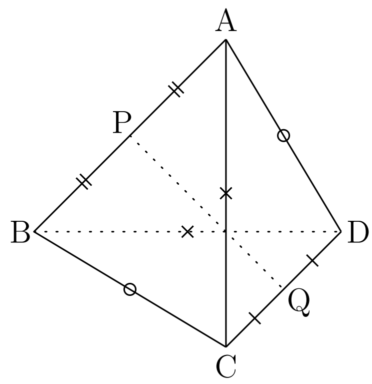
別解

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{0}$ に注意して，上の 2 式の辺々を加えて 2 倍すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}$$



したがって

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) + (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \quad \text{よって} \quad \mathrm{AB} \perp \mathrm{PQ}$$

補足 同様にして

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} + (\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) + (\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \quad \text{よって} \quad \mathrm{CD} \perp \mathrm{PQ}$$

(2) △ABC と △ABD について

AC = BD，BC = AD，AB は共通

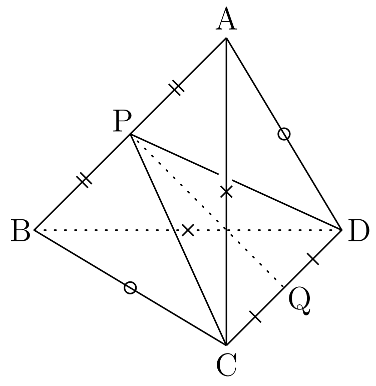
3 辺相等により　△ABC ≡ △BAD

したがって　∠CAP = ∠DBP

△CAP と △DBP について，2 辺夾角相等により　△CAP ≡ △DBP

したがって　CP = DP

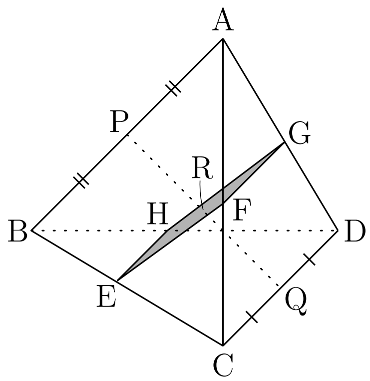
よって，PQ は二等辺三角形 CDP の中線であるから　CD⊥PQ

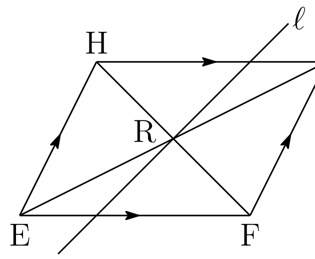


線分 PQ 上に点 R とり，R を通り線分 PQ に垂直な平面と辺 BC，AC，AD，BD との交点を，それぞれ，E，F，G，H とすると

$$\mathrm{BA}/\!/\mathrm{EF},\quad \mathrm{BA}/\!/\mathrm{HG},\quad \mathrm{CD}/\!/\mathrm{EH},\quad \mathrm{CD}/\!/\mathrm{FG}$$

ゆえに　EF//HG，EH//FG　すなわち　四角形 EFGH は平行四辺形





PQ を含む平面 α と平行四辺形 EFGH との交線を ℓ とすると，ℓ によって平行四辺形 EFGH の面積は二等分される．

よって，α によって，四面体 ABCD の体積は二等分される．　■

6.5　2019 年 (150 分)

1 次の各問に答えよ．

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ．ただし，p が素数のとき，$\sqrt{p}$ が有理数でないことは証明なしに用いてよい．

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

2 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ とする．$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ．

3 鋭角三角形 ABC を考え，その面積を S とする．$0 < t < 1$ をみたす実数 t に対し，線分 AC を $t : 1-t$ に内分する点を Q，線分 BQ を $t : 1-t$ に内分する点を P とする．実数 t がこの範囲を動くときに点 P の描く曲線と，線分 BC によって囲まれる部分の面積を，S を用いて表せ．

4 1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，$X_2, \cdots, X_n$ とする．このとき次の条件をみたす確率を n を用いて表せ．ただし $X_0 = 0$ としておく．

条件：$1 \leqq k \leqq n$ をみたす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである．

5 半径 1 の球面上の 5 点 A，B_1，B_2，B_3，B_4 は，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を底面とする四角錐をなしている．この 5 点が球面上を動くとき，四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ の体積の最大値を求めよ．

6 i は虚数単位とする．$(1+i)^n + (1-i)^n > 10^{10}$ をみたす最小の正の整数 n を求めよ．

常用対数表は次ページにある．

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している．

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している．

解答例

1 (1) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3) = \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)$

$2\cos 2\theta - 1 \neq 0$ とすると，上式より

$$\cos\theta = \frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1}$$

$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ が有理数であるから，右辺は有理数で，左辺が無理数であることに反する．したがって

$$2\cos 2\theta - 1 = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して，これを解くと　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

実際　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}$，$\cos 3\theta = 0$　　よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$

(2) (i) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)'\,dx = \Big[\, x\tan x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$
$$= \frac{\pi}{4} + \Big[\, \log\cos x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2}$$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\, \log\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \boldsymbol{\log(\sqrt{2} + 1)}$$

■

2 n と $n + 1$ の一方は，偶数であるから，それを $2k$ とすると (k は整数)

$$f(2k) = (2k)^3 + 2(2k)^2 + 2 = 2(4k^3 + 4k^2 + 1)$$

$|f(2k)|$ が素数であるとき　　$4k^3 + 4k^2 + 1 = \pm 1$

ゆえに　$k^2(k + 1) = 0$　または　$2k^2(k + 1) + 1 = 0$　すなわち　$k = -1,\ 0$

したがって，$k \leqq -2,\ 1 \leqq k$ の場合は $|f(2k)|$ は合成数である．

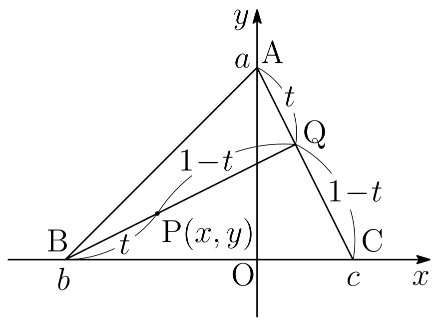
これより，次を調べればよい．

n	-3	-2	-1	0	1
$\lvert f(n)\rvert$	7	2	3	2	5

よって　　$\boldsymbol{n = -3, -2, -1,\ 0}$

■

$\boxed{3}$ (1) 座標平面上に 3 点 A$(0,\ a)$，B$(b,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ をとる $(a>0,\ b<0<c)$．線分 AC を $t:1-t$ に内分する点 Q の位置ベクトルは



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

したがって，線分 BQ を $t:1-t$ に内分する点 P の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\\&=t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

P$(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(c,\ 0)$ より

$$x=b(1-t)+ct^2,\quad y=at(1-t)$$

このとき

t	$0\longrightarrow 1$
x	$b\longrightarrow c$

$y\geqq 0,\ \dfrac{dx}{dt}=-b+2ct$

$S=\dfrac{1}{2}(c-b)a$ に注意すると，点 P と線分 BC で囲まれる部分の面積は，

$$\begin{aligned}\int_b^c y\,dx&=\int_0^1 y\frac{dx}{dt}\,dt=\int_0^1 at(1-t)(-b+2ct)\,dt\\&=-ab\int_0^1 t(1-t)\,dt+2ac\int_0^1 t^2(1-t)\,dt\\&=-ab\cdot\frac{1}{6}+2ac\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}(c-b)a\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(c-b)a=\boldsymbol{\frac{1}{3}S}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ 連続して i 回 4 以下の事象を A_i，連続して j 回 5 以上の事象を B_j とすると，$A_iB_jA_k$ の順に起きる確率であるから $(i,k\geqq 0,\ j\geqq 1,\ i+j+k=n)$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,k\geqq 0,j\geqq 1,\\ i+j+k=n}}\left(\frac{2}{3}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^k&=\sum_{\substack{i\geqq 0,k\geqq 0,\\ i+k\leqq n-1}}\frac{2^{i+k}}{3^n}=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1}2^k\sum_{i=0}^{n-k-1}2^i\\&=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1}2^k(2^{n-k}-1)=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)\\&=\frac{1}{3^n}\{n\cdot 2^n-(2^n-1)\}=\boldsymbol{\frac{(n-1)\cdot 2^n+1}{3^n}}\end{aligned}$$

■

5 原点 O を中心とする球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上に 4 点 $(\pm a, \pm a,\ b)$ および点 $(0,\ 0,\ 1)$ の 5 点を頂点する四角錐の体積 V とすると $(a>0)$

$$2a^2+b^2=1, \quad V=\frac{1}{3}(2a)^2(1-b)=\frac{4}{3}a^2(1-b)$$

a を消去すると　$V=\dfrac{2}{3}(1-b^2)(1-b)=\dfrac{2}{3}(1+b)(1-b)^2 \quad \cdots ①$

$-1<b<1$ であるから，3 正数 $2(1+b)$，$1-b$，$1-b$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2(1+b)+(1-b)+(1-b)}{3} \geqq \sqrt[3]{2(1+b)(1-b)^2}$$

したがって　　$(1+b)(1-b)^2 \leqq \dfrac{32}{27} \quad \cdots ②$

② で等号が成立するとき　$2(1+b)=1-b$　すなわち　$b=-\dfrac{1}{3}$

①，② より　$V \leqq \dfrac{64}{81}$　　よって，最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$　■

6 $1 \pm i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} \pm i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ より (復号同順)

$$\begin{aligned}(1+i)^n+(1-i)^n &= (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\ &= 2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} > 10^{10} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

$\cos\dfrac{n\pi}{4}>0$ を満たす n は　$n \equiv 0,\ \pm 1 \pmod 8$

(i) $n=8k$ のとき，$(*)$ は　$2(\sqrt{2})^{8k}>10^{10}$　ゆえに　$2^{4k+1}>10^{10}$

$$4k+1>\frac{10}{\log_{10}2} \quad \text{ゆえに} \quad k>\frac{5}{\log_{10}4}-0.25$$

(ii) $n=8k\pm1$ のとき，$(*)$ は　$2(\sqrt{2})^{8k\pm1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}>10^{10}$　ゆえに　$2^{\frac{8k+1\pm1}{2}}>10^{10}$

$$\frac{8k+1\pm1}{2}>\frac{10}{\log_{10}2} \quad \text{ゆえに} \quad k>\frac{5}{\log_{10}4}-\frac{1\pm1}{8}$$

常用対数表により，$0.60205 \leqq \log_{10}4<0.60215$ であるから，(i)，(ii) において

$$\frac{5}{\log_{10}4}>\frac{5}{0.60215}>8.3, \quad 0 \geqq -\frac{1\pm1}{8} \geqq -0.25 \quad \text{ゆえに} \quad k \geqq 9$$

したがって，$n \geqq 8\cdot9-1=71$　よって，求める最小の整数 n は　**71**　■

6.6　2020年(150分)

1 a，b は実数で，$a>0$ とする．z に関する方程式

$$z^3+3az^2+bz+1=0 \qquad (*)$$

は3つの相異なる解を持ち，それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする．このとき，a，b と $(*)$ の3つの解を求めよ．

2 p を正の整数とする．α，β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の2つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ．

3 k を正の実数とする．座標空間において，原点Oを中心とする半径1の球面上の4点A，B，C，Dが次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k.$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点X，Yに対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

4 正の整数 a に対して，

$$a = 3^b c \quad (b,\ c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき，$B(a) = b$ と定める．例えば，$B(3^2 \cdot 5) = 2$ である．
m，n は整数で，次の条件を満たすとする．

(i) $1 \leqq m \leqq 30$.

(ii) $1 \leqq n \leqq 30$.

(iii) n は 3 で割り切れない．

このような $(m,\ n)$ について

$$f(m,\ n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき，

$$A(m,\ n) = B(f(m,\ n))$$

の最大値を求めよ．また，$A(m,\ n)$ の最大値を与えるような $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

5 縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

6 x，y，z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする．この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする．このとき，V の体積を求めよ．

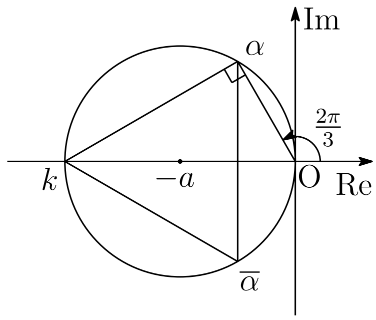
解答例

1 3 次方程式 $z^3+3az^2+bz+1=0$ は実数を係数とするから，その解を $\alpha,\ \overline{\alpha},\ k$ とすると (k は実数)，解と係数の関係により

$$\alpha+\overline{\alpha}+k=-3a,\quad \alpha\overline{\alpha}+k\alpha+k\overline{\alpha}=b,\quad \alpha\overline{\alpha}k=|\alpha|^2k=-1 \qquad \cdots(**)$$

上の第 1 式から　$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+k}{3}=-a$　ゆえに　正三角形の重心 (外心) は　$-a$

正三角形の一辺の長さが $\sqrt{3}a$ であるから，外接円の半径を R とすると，正弦定理により



$$\frac{\sqrt{3}a}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R \quad ゆえに \quad R=a$$

三角形の 3 頂点の 1 つは実軸上で，他の 2 頂点は，実軸に対して対称である．実数解 k は中心 $-a$，半径 a の円周上にあり，$(**)$ の第 3 式に注意すると，$k\neq 0$ であるから

$$k=-2a$$

右の図から，$|\alpha-0|=a$ より，$|\alpha|=a$．これらを $(**)$ の第 3 式に代入すると

$$a^2\cdot(-2a)=-1 \quad ゆえに \quad a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad k=-2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{4}$$

$$\arg\alpha=\frac{2\pi}{3} より \quad \alpha=a\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\overline{\alpha}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$(**)$ の第 2 式から　$b=|\alpha|^2+k(\alpha+\overline{\alpha})$

$$=a^2+(-2a)(-a)=3a^2=3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\ b=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}}$　解は　$\boldsymbol{-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$　■

2 (1) 方程式 $x^2-2px-1=0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2p,\quad \alpha\beta=-1$$

また　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2=2(2p^2+1)$

$q_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくと，p は整数であるから，q_1，q_2 は偶数である．

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$ であるから

$$q_{n+2}=2pq_{n+1}+q_n \quad \cdots(*)$$

q_1，q_2 は偶数の整数であるから，$(*)$ より，$\{q_n\}$ は整数である．
さらに，法 2 について

$$q_{n+2}\equiv q_n \pmod 2$$

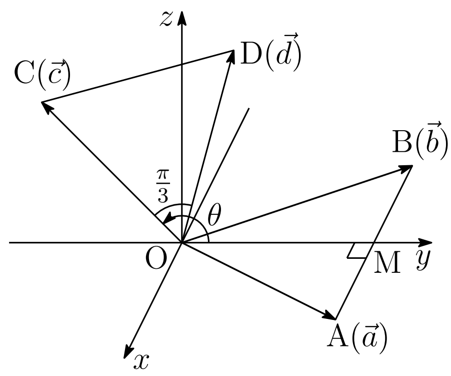
したがって，$\{q_n\}$ は偶数，すなわち，$\alpha^n+\beta^n$ は偶数である．

(2) $\alpha\beta=-1$，$|\alpha|>1$ より，$0<|\beta|=\dfrac{1}{|\alpha|}<1$．(1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n\sin\{(\alpha^n+\beta^n)\pi-\beta^n\pi\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(-\beta^n\pi)}{\beta^n}=\lim_{n\to\infty}(-\pi)\cdot\frac{\sin\beta^n\pi}{\beta^n\pi}=\boldsymbol{-\pi}\end{aligned}$$

■

3 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$



とおくと　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$
$$=1-2\cdot\frac{1}{2}+1=1,$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2=|\vec{d}-\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{c}|^2$$
$$=1-2\cdot\frac{1}{2}+1=1$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=1$ より，$\triangle$OAB，$\triangle$OCD は，正三角形である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0 \quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

A，B を xy 平面上の点とすると，C，D は yz 平面上の点である．

辺 AB の中点を M とすると，$\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\frac{-\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{ゆえに}\quad \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は　$\dfrac{3\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の内積は　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d})=k>0$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は，鋭角であるから　$\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{12}$

よって　$k=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$

別解 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく．

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ より，2 つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ は垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ より

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2\pm 1 \quad (\text{複号同順})$$

直交する 2 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$ を次のようにおく．

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \vec{f}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\vec{a}-\vec{b}$$

$\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}-(\vec{c}\cdot\vec{f})\vec{f}$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ より

$$\begin{aligned}&\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\&\vec{c}\cdot\vec{f}=\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\end{aligned}$$

したがって，ベクトル $\vec{c}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．

$$\left|\sqrt{2}\vec{c}+\vec{e}\right|^2=2|\vec{c}|^2+2\sqrt{2}\,\vec{c}\cdot\vec{e}+|\vec{e}|^2=2+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1=1$$

$\vec{g}=\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e}$ とおくと，3 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$，$\vec{g}$ は互いに直交する．

$$\begin{aligned}&\vec{d}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{d}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{\sqrt{3}}k,\quad \vec{d}\cdot\vec{f}=\vec{d}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\\&\vec{d}\cdot\vec{g}=\vec{d}\cdot(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}k\end{aligned}$$

$\vec{d}=(\vec{d}\cdot\vec{e})\vec{e}+(\vec{d}\cdot\vec{f})\vec{f}+(\vec{d}\cdot\vec{g})\vec{g}$ より　$\vec{d}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\vec{e}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)\vec{g}$

$|\vec{d}|^2=1$ であるから　$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2=1$

整理すると　$8k^2+2\sqrt{6}k-\dfrac{3}{2}=0$　これを解いて　$k=\dfrac{-\sqrt{6}\pm 3\sqrt{2}}{8}$

条件より，$k>0$ であるから　$\boldsymbol{k=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$ ■

$\boxed{4}$ 法 3 について　$m \equiv 0 \Longrightarrow m^3 \equiv 0,\quad m \equiv \pm 1 \Longrightarrow m^3 \equiv \pm 1$　(複号同順)

したがって　$m^3 \equiv 0 \Longleftrightarrow m \equiv 0,\quad m^3 \equiv \pm 1 \Longleftrightarrow m \equiv \pm 1$　(複号同順)

条件より，n は 3 で割り切れないから　$n \equiv \pm 1 \pmod 3$

- $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$n^2+n+3 \equiv 2 \pmod 3$ である．

$$(*)\quad f(m,\ n) = m^3+n^2+n+3$$

$(*)$ が 3 で割りれるとき　$m^3 \equiv 1$　すなわち　$m \equiv 1 \pmod 3$

$$f(m,\ n) = (m-1)^3+3(m-1)^2+3(m-1)+(n-1)^2+3(n-1)+6$$

$(m-1)^3$，$3(m-1)^2$ は 27 で割り切れ，$3(m-1)$，$(n-1)^2$，$3(n-1)$ は 9 で割り切れる．このとき，$f(m,\ n)$ は 3 で割り切れるが，3^2 では割り切れない．

- $n \equiv -1 \pmod 3$ のとき，$n^2+n+3 \equiv 0 \pmod 3$ である．

$(*)$ が 3 で割り切れるとき　$m^3 \equiv 0$　すなわち　$m \equiv 0 \pmod 3$

$(*)$ より　　$f(m,\ n) = m^3+(n+1)^2-(n+1)+3 \quad \cdots ①$

m^3 は 27 で割り切れ，$(n+1)^2$ は 9 で割り切れる．① が 9 で割り切れるとき

$$-(n+1)+3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n+1 \equiv 3 \pmod 9$$

$n+1 = 9N+3 \cdots ②$ とおくと (k は整数)

$$\begin{aligned} f(m,\ n) &= m^3+(9N+3)^2-(9N+3)+3 \\ &= m^3+81N^2+9(5N+1) \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

m^3 は 27 で割り切れ，$81N^2$ は 81 で割り切れるから，③ が 27 で割り切れるとき

$$5N+1 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad N \equiv 1 \pmod 3$$

これと ② を $1 \leqq n \leqq 30$ に適用すると　$N=1$，$n=11$

$m=3M$ とおくと (M は整数)，③ は

$$f(m,\ n) = 27M^3+135 = 27(M^3+5)$$

$M^3+5 \equiv 0$，すなわち，$M \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$A(m,\ n)$ は最大値 **4** をとる．
このとき，$\boldsymbol{(m,\ n) = (3,\ 11),\ (12,\ 11),\ (21,\ 11),\ (30,\ 11)}$ ■

5 1 行目に A，B，C，D を固定し，本題の条件を満たすように，2 行目〜4 行目を並べたとき，行ごと入れ替えても，条件は満たされる．そこで，第 2 行第 1 列目から第 4 行第 1 列目までを上から順に，B，C，D とすると，第 2 行第 2 列に配置する文字 X (X = A, C, D) の場合に分けてその総数を求める．

A	B	C	D
2 行 目			
3 行 目			
4 行 目			

A	B	C	D
B	**X**		
C			
D			

第 2 行第 2 列に配置される A，C，D の場合の数は，それぞれ，2, 1, 1 通りある．

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

A	B	C	D
B	**C**	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	**D**	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

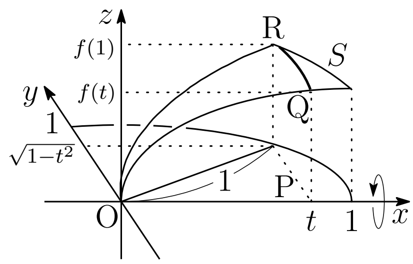
1，2，3，4 を A，B，C，D に 1 対 1 に対応させる (全単射) 場合の数は 4! 通り．2 行目〜4 行目までの入れ替えの総数は 3! 通り．これと場合分けの総数により

$$4! \times 3! \times (2 + 1 + 1) = \mathbf{576} \text{ (通り)}$$

■

6 $f(x) = \sqrt{\log(1+x)}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおく．
S の平面 $x = t$ 上に 3 点

$$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{Q}(t,\ 0,\ f(t)),$$
$$\mathrm{R}(t,\ \sqrt{1-t^2},\ f(1))$$



をとると

$$\begin{aligned}\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2 &= \{(\sqrt{1-t^2})^2 + f(1)^2\} - f(t)^2 \\ &= 1 - t^2 + \log 2 - \log(1+t)\end{aligned}$$

求める立体の体積 V は，yz 平面に関して対称であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_0^1 (\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2)\,dt \\ &= \int_0^1 \{1 - t^2 + \log 2 - \log(1+t)\}\,dt \\ &= \left[2t - \frac{t^3}{3} + t\log 2 - (1+t)\log(1+t)\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3} - \log 2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = 2\pi\left(\dfrac{5}{3} - \log 2\right)}$ ■

第 7 章　大阪大学

出題分野 (2011-2020) 150 分

◀	大阪大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	数と式										
I	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
	式と証明		4			2	2				
	複素数と方程式	4							2		
II	図形と方程式			2							
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	3						4			
	式と曲線										
	複素数平面							2		2	
	関数										
III	極限	5	1				5				4
	微分法とその応用			1	2				1		1
	積分法				3	1				1	
	積分法の応用	2	3	4	4	4	3	5	3	3	5
	場合の数と確率		5	5		5				2	2
A	整数の性質		2	3		3	4	3		4	
	図形の性質										
	平面上のベクトル							1			
B	空間のベクトル								4	5	
	数列				5		1		5		3
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	1			1						

数字は問題番号

7.1　2015 年 (150 分)

1 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ．

(2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x)\,dx$$

で定める．$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\log(1+x) \leqq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい．

2 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ．

3 以下の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ．

(2) p，q，$\sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする．そのとき，$p = q = 0$ であることを示せ．

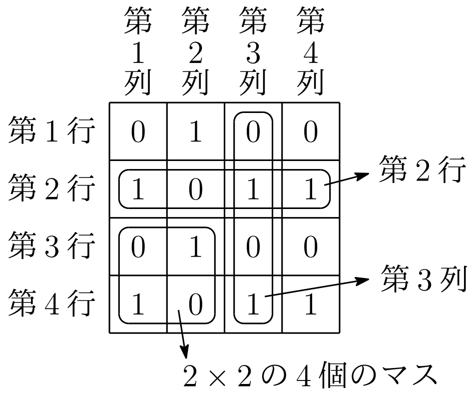
4 座標空間の x 軸上に動点 P，Q がある．P，Q は時刻 0 において，原点を出発する．P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く．その後，ともに時刻 1 で停止する．点 P，Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A，B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ．

5 n を 2 以上の整数とする．正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる．マスは上から第 1 行，第 2 行，$\cdots$，左から第 1 列，第 2 列，$\cdots$，と数える．数字の入れ方についての次の条件 p を考える．

条件 p : 1 から $n-1$ までの整数 i，j についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る．



($n=4$ の場合の入れ方の例)

(1) 条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ．

(2) 条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\int_0^n \frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$ において，$\dfrac{x}{n}=t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=n$$

x	$0 \longrightarrow n$
t	$0 \longrightarrow 1$

したがって
$$\begin{aligned}\int_0^n f_n(x)\,dx &= \int_0^n \frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx\\ &= \int_0^1 \frac{nt}{n(1+nt)}\log(1+t)\cdot n\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{nx}{1+nx}\log(1+x)\,dx\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq \dfrac{nx}{1+nx} < 1$，$\log(1+x) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(1+x)\,dx - I_n &= \int_0^1 \log(1+x)\,dx - \int_0^1 \frac{nx}{1+nx}\log(1+x)\,dx\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx \quad \cdots①\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{1+nx} > 0$，$0 \leqq \log(1+x) \leqq \log 2$ であるから

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x) \leqq (\log 2)\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} \qquad \cdots②$$

ここで
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} &= \left[\frac{\log(1+nx)}{n}\right]_0^1\\ &= \frac{\log(1+n)}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{n+1}\end{aligned}$$

したがって
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{n+1} = 0$$

はさみうちの原理により，② から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx = 0$

① より
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n &= \int_0^1 \log(1+x)\,dx\\ &= \Big[(1+x)\log(1+x) - x\Big]_0^1 = \mathbf{2\log 2 - 1}\end{aligned}$$

補足 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき}\quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに}\quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

すなわち　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+0} x\log\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0}(-x\log x) = 0$ ■

$\boxed{2}$ 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
&= x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2x\sqrt{1-y^2}\cdot y\sqrt{1-x^2}\\
&= \left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geqq 0,\\
&1-(x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})\\
&= x^2y^2+(1-x^2)(1-y^2)-2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\\
&= \left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

よって　$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$

別解 $x = \cos\alpha$，$y = \cos\beta$ とおくと $(0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
&= x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
&= \cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\\
&= (\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha)^2 = \sin^2(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

このとき，$0 \leqq \sin^2(\alpha+\beta) \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

■

3　(1) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n} \qquad (m,\ n \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき，この両辺を平方すると

$$2=\frac{m^2}{n^2} \quad \text{ゆえに} \quad m^2=2n^2$$

m^2 は偶数であるから，m も偶数で，ある自然数 m' を用いて $m=2m'$ とおける．これを上式に代入して

$$(2m')^2=2n^2 \quad \text{ゆえに} \quad n^2=2m'^{\,2}$$

したがって，n^2 は偶数となり，n も偶数である．このとき，m と n がともに偶数となり，m，n が互いに素であることと矛盾する．

よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではなく，すなわち，無理数である．

次に，$\sqrt[3]{3}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt[3]{3}=\frac{k}{l} \qquad (k,\ l \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき，この両辺を 3 乗すると

$$3=\frac{k^3}{l^3} \quad \text{ゆえに} \quad k^3=3l^3$$

k^3 は 3 の倍数であるから，k も 3 の倍数で，ある自然数 k' を用いて $k=3k'$ とおける．これを上式に代入して

$$(3k')^3=3l^3 \quad \text{ゆえに} \quad l^3=3{\cdot}3k'^{\,3}$$

したがって，l^3 は 3 の倍数となり，l も 3 の倍数である．このとき，k と l がともに 3 の倍数となり，k，l が互いに素であることと矛盾する．

よって，$\sqrt[3]{3}$ は有理数ではなく，すなわち，無理数である．

(2) $\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r$ (r は有理数) $\cdots(*)$ とおく．

$(*)$ より，$\sqrt[3]{3}q=r-\sqrt{2}p$ の両辺を 3 乗すると

$$3q^3=r^3-3r^2p\sqrt{2}+6rp^2-2\sqrt{2}p^3$$

したがって　$\sqrt{2}p(2p^2+3r^2)=6p^2r-3q^3+r^3$

$p\neq 0$ であると仮定すると，$p(2p^2+3r^2)\neq 0$ であるから

$$\sqrt{2}=\frac{6p^2r-3q^3+r^3}{p(2p^2+3r^2)}$$

p, q, r は，有理数であるから，上式の右辺は有理数であり，$\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する．したがって　$p=0$

これを $(*)$ に代入すると　$\sqrt[3]{3}q=r$

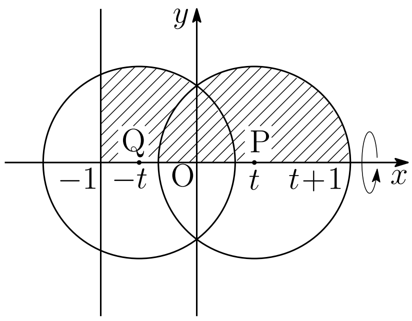
$q\neq 0$ であると仮定すると　$\sqrt[3]{3}=\dfrac{r}{q}$

q, r は有理数であるから，上式の右辺は有理数であり，$\sqrt[3]{3}$ が無理数であることと矛盾する．したがって　$q=0$

よって　$p=q=0$　■

4 (1) 点 P，Q を中心とする半径 1 の球面が xy 平面によって切り取られる円の方程式は，それぞれ次のようになる．

$$(x-t)^2+y^2=1,\quad (x+t)^2+y^2=1$$



$V(t)$ は右の図の斜線部分を x 軸の周りに一回転させた立体の体積であるから

$$\begin{aligned}\frac{V(t)}{\pi}&=\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx+\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx\\&=\left[x-\frac{(x+t)^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[x-\frac{(x-t)^3}{3}\right]_{0}^{t+1}\\&=-\frac{t^3}{3}-t^2+2t+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V(t)=\pi\left(-\frac{t^3}{3}-t^2+2t+\frac{4}{3}\right)}$

(2) (1) の結果から　$V'(t) = \pi(-t^2 + 2t + 2)$

$0 \leqq t \leqq 1$ に注意して，$V(t) = 0$ を解くと　$t = -1 + \sqrt{3}$

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$V(t) = \pi\left\{(-t^2 - 2t + 2)\left(\dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{3}\right) + 2t + \dfrac{2}{3}\right\}$ であること利用すると，$V(t)$ の最大値は

$$V(-1+\sqrt{3}) = \pi\left\{2(-1+\sqrt{3}) + \frac{2}{3}\right\} = \boldsymbol{\pi\left(-\frac{4}{3} + 2\sqrt{3}\right)}$$ ■

5 (1) 第 n 列の第 i 行，第 $i+1$ 行に 0 または 1 がともに現われるとき，第 i 行，第 $i+1$ 行において，各列ごとに交互に 0 と 1 が現われる．このとき，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには，次にようになる．

$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$　または　$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$　$\cdots$①

また，第 n 行の第 j 列，第 $j+1$ 列に 0 または 1 がともに現われるとき，第 j 列，第 $j+1$ 列において，各行ごとに交互に 0 と 1 が現われる．このとき，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには，次にようになる．

$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$　または　$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}$　$\cdots$②

① と ② は一致しないので，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現われる．

(2) 第 n 行および第 n 列の $2n-1$ 個の数字の入れ方が決まれば，残りの $(n-1)^2$ 個の数字の入れ方は決定する (例えば，第 n 行に 0 と 1 が交互に現れると，下の行から一意的に決定する)．(1) の結果から，次の場合分けができる．

(i) 第 n 行に 0 と 1 が交互に現われるとき，第 n 列の第 1 行から第 $n-1$ 行の数字の入れ方は　$2 \times 2^{n-1} = 2^n$　(通り)

(ii) 第 n 列に 0 と 1 が交互に現われるとき，第 n 行の第 1 列から第 $n-1$ 列の数字の入れ方は　$2 \times 2^{n-1} = 2^n$　(通り)

(iii) 第 n 行および第 n 列に 0 と 1 が交互に現われるとき，その数字の入れ方は　2　(通り)

(i)〜(iii) から　$a_n = 2^n + 2^n - 2 = \boldsymbol{2^{n+1} - 2}$ ■

7.2　2016 年 (150 分)

1 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a，b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　　$(n=1,2,3,\cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　　$(n=1,2,3,\cdots)$

以下の問いに答えよ．

(1) $a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) $a=1$，$b=6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ．

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) c を正の定数とする．正の実数 x，y が $x+y=c$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ．

(2) 正の実数 x，y，z が $x+y+z=1$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ．

3 座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 $(a,\ b)$ をもつとする．

(1) a，b，r の値をそれぞれ求めよ．

(2) 連立不等式

$$a \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2,\quad x^2+y^2 \geqq r^2$$

の表す領域を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

4 正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする．

(1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ．

(2) $S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 $(n,\ m)$ をすべて求めよ．

(3) 整数 a と $0 \leqq b < 1$ をみたす実数 b を用いて，

$$A_{20}S_{20} = a + b$$

と表すとき，b の値を求めよ．

5 円上の 5 点 A，B，C，D，E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している．5 点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2 = y(y - x)$ がなりたつことを示せ．

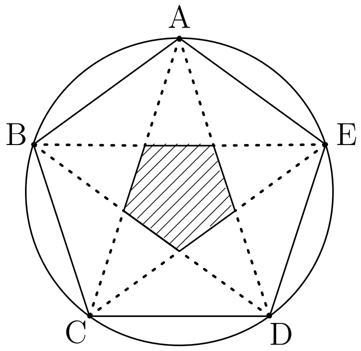
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする．R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ．



斜線部分が R_2

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

（ア）$f_1(x) = \sin(\pi x)$

（イ）$f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$

（ウ）$f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$

ゆえに

$$f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-(-x)\right) = f_{2n-1}\left(x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad \cdots(*)$$

したがって　$f_5(x) = f_1\left(x+2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right)$

よって，$a=2$，$b=3$ のとき，$x=0$ とすると

$$f_5(0) = f_1\left(\frac{5}{3}\right) = \sin\frac{5}{3}\pi = -\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $(*)$ より　$f_{2k-1}(x) = f_1\left(x+(k-1)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right)$

したがって

$$\begin{aligned} f_{2k}(x) &= f_{2k-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right) \\ &= f_1\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right)+(k-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right) \\ &= f_1\left(k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-x\right) \quad \cdots(**) \end{aligned}$$

$a=1$，$b=6$ のとき，$x=0$ とすると

$$f_{2k}(0) = f_1\left(\frac{7}{6}k\right) = \sin\frac{7}{6}k\pi = \sin\left(k\pi+\frac{k}{6}\pi\right) = (-1)^k\sin\frac{k}{6}\pi$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0) &= \sum_{k=1}^{100}(-1)^k\cdot(-1)^k\sin\frac{k}{6}\pi = \sum_{k=1}^{100}\sin\frac{k}{6}\pi \\ &= \sum_{k=1}^{95}\sin\frac{k}{6}\pi + \sum_{k=96}^{100}\frac{k}{6}\pi \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{95}\left(\sin\frac{k}{6}\pi+\sin\frac{96-k}{6}\pi\right) + \sum_{k=96}^{100}\frac{k}{6}\pi \\ &= \sum_{k=96}^{100}\frac{k}{6}\pi = 0+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(3) (∗∗) より　$f_6(x) = f_1\left(3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)-x\right)$

これに $x=0$ を代入すると，(ア) により

$$f_6(0) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right) = \sin 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0)=0$ となるのは，$3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ が整数になるときで，次の 8 組．

$$(a,b) = (1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 6),\ (6,\ 2),\ (3,\ 3),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{8}{6^2} = \mathbf{\dfrac{2}{9}}$　■

2 (1) $x+y=c$ より

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1+\frac{x+y+1}{xy} = 1+\frac{c+1}{xy} \quad \cdots ①$$

$x>0$，$y>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{c}{2} = \frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy} \quad ゆえに \quad \frac{1}{xy} \geqq \frac{4}{c^2} \quad \cdots ②$$

が成立する $\left(等号が成立するのは, x=y=\dfrac{c}{2}のとき\right)$.

①，② より　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right) \geqq 1+(c+1)\cdot\dfrac{4}{c^2} = \left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2$

よって，$x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2}$ をとる．

解説　n 個の正数 $x_1,\ x_2, \cdots, x_n$ の相加平均 A，相乗平均 G，調和平均 H は

$$A = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$
$$G = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$
$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$A \geqq G$ が成り立つから [1]，n 個の整数 $\dfrac{1}{x_1},\ \dfrac{1}{x_2},\ \cdots,\ \dfrac{1}{x_n}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \quad ゆえに \quad \frac{1}{H} \geqq \frac{1}{G}$$

したがって　　$A \geqq G \geqq H$

なお，等号が成立するのは，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限る．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{3}$ を参照

補足 $\dfrac{1}{x}$ と $\dfrac{1}{y}$ の相乗平均・調和平均の大小関係により

$$\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} \geqq \frac{2}{x+y} = \frac{2}{c} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \geqq \frac{4}{c^2} \quad \left(\text{等号は } x = y = \frac{c}{2} \text{ のとき}\right)$$

(2) x，y，z は正の実数，$x+y+z=1$ であるから，$0<z<1$ より

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) > 0, \quad \left(1-\frac{4}{3z}\right) < 0$$

したがって

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right) \quad \cdots(*)$$

これが最大となるのは，z を固定したとき

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

が最小となるときである．$x+y=1-z$ であるから，(1) の結果により，$x = y = \dfrac{1-z}{2}$ を $(*)$ に代入して

$$f(z) = \left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right) \quad (0<z<1)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 2\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\frac{2}{(1-z)^2}\cdot\left(1-\frac{4}{3z}\right) + \left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2} \\
&= 2\cdot\frac{3-z}{1-z}\cdot\frac{2}{(1-z)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z} + \left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2} \\
&= \frac{4(3-z)(3z-4)}{3z(1-z)^3} + \frac{4(3-z)^2}{3z^2(1-z)^2} \\
&= \frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2}\left(\frac{3z-4}{1-z} + \frac{3-z}{z}\right) = \frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2}\cdot\frac{(2z-1)(2z-3)}{z(1-z)}
\end{aligned}$$

z	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		$\nearrow$	$-\frac{125}{3}$	$\searrow$	

$z = \dfrac{1}{2}$，$x = y = \dfrac{1}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{-\dfrac{125}{3}}$ をとる． ■

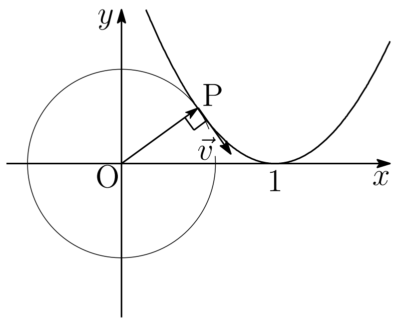
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 放物線上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{2}(t-1)^2)$ について，$f(t)=\mathrm{OP}^2$ とおくと

$$f(t)=t^2+2(t-1)^4,$$
$$f'(t)=2t+8(t-1)^3=8t^3-24t^2+26t-8$$
$$=2(2t-1)(2t^2-5t+4)=2(2t-1)\left\{2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right\}$$

t	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$，$r=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$

補足 放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ 上の動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を



$$x=t,\quad y=\sqrt{2}(t-1)^2,$$
$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\quad \vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

とおき，$f(t)=\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$ を微分すると

$$f'(t)=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}$$

$f'(t)=0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{v}$

$$f''(t)=2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+2x\frac{d^2x}{dt^2}+2y\frac{d^2y}{dt^2}=2|\vec{v}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t,\ \sqrt{2}(t-1)^2)$，$\vec{v}=(1,\ 2\sqrt{2}(t-1))$，$\vec{a}=(0,\ 2\sqrt{2})$ より

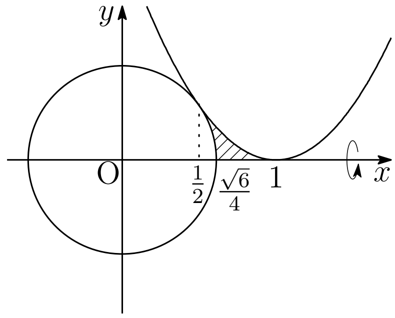
$$|\vec{v}|^2>0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=4(t-1)^2\geqq 0$$

$f''(t)>0$ であるから，$f'(t)=0$ をみたす点において，OP は極小となる．

(2) (1) の結果から，連立不等式

$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2+y^2 \geqq 1$$

の表す領域は，下の図の斜線部分.



この領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \left(\frac{3}{8} - x^2\right) dx \\
&= \left[\,\frac{2}{5}(x-1)^5\,\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[\,\frac{3}{8}x - \frac{x^3}{3}\,\right]_{\frac{\sqrt{6}}{4}}^{1} \\
&= \frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16}
\end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{\left(\frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16}\right)\pi}$　■

4 (1) N は $\log_2 n$ 以下の最大の整数であるから

$$N \leqq \log_2 n < N+1 \quad ゆえに \quad 2^N \leqq n < 2^{N+1}$$

自然数 k に対して，自然数 a_k と奇数 b_k を用いて

$$k = 2^{a_k} \cdot b_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

とおくと

$$2^N A_n S_n = 2^N A_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{a_k} \cdot b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k}$$

$\dfrac{A_n}{b_k}$ は奇数，$k = 2^N$ のとき $a_k = N$，$k \neq 2^N$ のとき $a_k < N$ であるから

$$k = 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{は奇数}, \quad k \neq 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{は偶数}$$

$2^N A_n S_n$ は 1 個の奇数と $n-1$ 個の偶数の和であるから，$2^N A_n S_n$ は奇数.

(2) $S_n = 2 + \dfrac{m}{20} = \dfrac{40+m}{2^2 \cdot 5}$ より

$$2^N A_n S_n = \frac{(40+m)A_n}{5} \cdot 2^{N-2}$$

上式は，奇数であるから，$N \leqq 2$ より，$\log_2 n < N+1$ に注意して

$$\log_2 n < 3 \quad ゆえに \quad n < 8$$

したがって　$S_1 = 1,\ \ S_2 = 1 + \dfrac{1}{2},\ \ S_3 = 1 + \dfrac{5}{6},\ \ S_4 = 2 + \dfrac{1}{12},$

$$S_5 = 2 + \frac{17}{120},\ \ S_6 = 2 + \frac{9}{20},\ \ S_7 = 2 + \frac{83}{140}$$

$S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ となるのは　　$\boldsymbol{(n,\ m) = (6,\ 9)}$

(3)
$$\begin{aligned} A_{20}S_{20} &= A_{20}\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k} \\ &= \left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9}\right) \\ &\qquad + \frac{1}{4}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5}\right) + \frac{A_{20}}{8} + \frac{A_{20}}{16} \qquad \cdots (*) \end{aligned}$$

n が 20 以下の奇数のとき，$\dfrac{A_{20}}{n}$ は奇数の整数であるから

$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19} \text{ は整数} \quad \cdots ①$$

また，$A_{20} + \dfrac{A_{20}}{3} + \dfrac{A_{20}}{5} + \dfrac{A_{20}}{7} + \dfrac{A_{20}}{9}$ は 5 つの奇数の和であるから

$$\frac{1}{2}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9}\right) \text{ の小数部分は } \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

ここで
$$\begin{aligned} A_{20} &= 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19 \\ &\equiv 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot(-7)\cdot(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot1\cdot3 \\ &\equiv 3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot3 \equiv 9\cdot9\cdot1\cdot3 \equiv 81\cdot3 \equiv 1\cdot3 \equiv 3 \pmod{16} \end{aligned}$$

したがって，$p = 4,\ 8,\ 16$ のとき　$A_{20} \equiv 3 \pmod{p}$

$3^2 \equiv 1,\ \ 5^2 \equiv 1 \pmod 4$ であるから

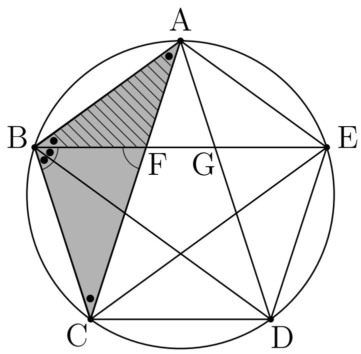
$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} \equiv A_{20} + 3A_{20} + 5A_{20} \equiv 9A_{20} \equiv A_{20} \equiv 3 \pmod 4$$

$$\frac{1}{4}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5}\right) \text{ の小数部分は } \frac{3}{4} \quad \cdots ③$$

また，$\dfrac{A_{20}}{8}$ の小数部分は $\dfrac{3}{8}$，$\dfrac{A_{20}}{16}$ の小数部分は $\dfrac{3}{16}$ であるから，これと $(*)$，①〜③ により

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{29}{16} = 1 + \frac{13}{16} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = \frac{13}{16}}$$ ■

5 (1) AC と BE の交点を F とすると，△BCF は二等辺三角形であるから



$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CF} = x$$
$$\mathrm{AF} = \mathrm{AC} - \mathrm{CF} = y - x$$

$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{AFB}$ であるから

$$x : y = y - x : x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = y(y - x)$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから

$$\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \vec{c} = \frac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{x}{y - x}(\vec{a} + \vec{c})$$

(1) の結果から　$y^2 - xy - x^2 = 0$　ゆえに　$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{y}{x} - 1 = 0$

$\dfrac{y}{x} > 0$ に注意して　$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}(\vec{a} + \vec{c})}$

(3) AD と BE の交点を G とすると，$\mathrm{BF} = \mathrm{AF} = y - x$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{FG} &= \mathrm{AE} - 2\mathrm{BF} \\ &= y - 2(y - x) = 2x - y = \left(2 - \frac{y}{x}\right)x \\ &= \left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x\end{aligned}$$

よって，R_2 の一辺の長さは　$\boldsymbol{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}x}$

(4) (3) の結果から，$r = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad S_n = S_1 \cdot (r^2)^{n-1} = S_1 \cdot r^{2n-2}$$

$|-r^2| < 1$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_1\cdot r^{2k-2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-r^2)^{k-1}\\ &= \frac{1}{1-(-r^2)} = \frac{1}{1+r^2}\\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}\end{aligned}$$

■

7.3　2017 年 (150 分)

1 双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(s,\ t)$ $(t \neq 0)$ を考える．

(1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いてあらわせ．

(2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いてあらわせ．

(3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ．

2 複素数 z は $z^5 = 1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする．硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ とおく．複素数 w を $w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$ と定める．

(1) 5 回とも表が出たとする．w の値を求めよ．

(2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0$，$a_1 = a_4 = 1$ のとき，$|w| < 1$ であることを示せ．

(3) $|w| < 1$ である確率を求めよ．

3 a，b を自然数とし，不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \tag{7.1}$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，$2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい．

(1) 不等式 (A) を満たし $b \geqq 2$ である自然数 a，b に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ．

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 a，b の組のうち，$b \geqq 2$ であるものをすべて求めよ．

4　b，c を実数とする．2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が

$$0 \leqq f(1) \leqq 2, \quad 5 \leqq f(3) \leqq 6$$

を満たすとする．

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

5　xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく．回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく．

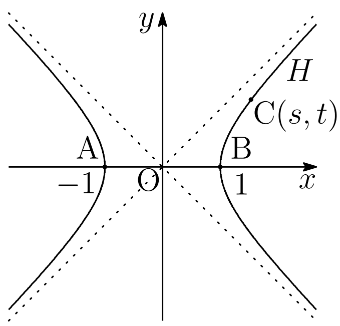
(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする．xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする．$t=(2\cos\theta)^2$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いてあらわせ．

(2) M の体積 V を求めよ．

解答例

1 (1) H 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ における接線の方程式は

$$x = -1$$



H 上の点 $\mathrm{C}(s,\ t)$ は，$t \neq 0$ より　$s \neq \pm 1$
2 点 $\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{t}{s-1}(x-1)$$

上の 2 式を解いて　$\mathbf{P}\left(\mathbf{-1,\ \frac{-2\mathit{t}}{\mathit{s}-1}}\right)$

(2) H 上の点 $\mathrm{C}(s,\ t)$ における接線の方程式は　$sx - ty = 1$
直線 AB の方程式は　$y = 0$
この 2 式を解いて　$\mathbf{Q}\left(\mathbf{\frac{1}{\mathit{s}},\ 0}\right)$

(3) H 上の点 B における接線の方程式は　$x = 1$
2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ を通る直線の方程式は　$y = \dfrac{t}{s+1}(x+1)$
この 2 式を解いて　$\mathrm{R}\left(1,\ \dfrac{2t}{s+1}\right)$
$s^2 - t^2 = 1$ に注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \left(-\frac{s+1}{s}, -\frac{2t}{s-1}\right) = \frac{1}{1-s}\left(\frac{s^2-1}{s}, 2t\right) = \frac{t}{1-s}\left(\frac{t}{s},\ 2\right),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \left(\frac{s-1}{s},\ \frac{2t}{s+1}\right) = \frac{1}{1+s}\left(\frac{s^2-1}{s},\ 2t\right) = \frac{t}{1+s}\left(\frac{t}{s},\ 2\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{QR}}$ であるから，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．

別解　$(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s, -2t)$，$(s+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1+s,\ 2t)$ より

$$(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (s+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (2,\ 0) = 2s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{s-1}{2s}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \dfrac{s+1}{2s}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

このとき，$\dfrac{s-1}{2s} + \dfrac{s+1}{2s} = 1$ より，直線 PR 上に点 Q がある．
よって，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．　■

2　(1)　$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ であるから，$z^5 = 1\ (z \neq 1)$ より

$$w = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = \mathbf{0}$$

(2)　$a_0 = a_2 = a_3 = 0$，$a_1 = a_4 = 1$ のとき

$$w = z + z^4 = z + \frac{z^5}{z} = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = z + \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z + \overline{z}$$

$\theta = \dfrac{2\pi}{5}$ とおくと，$z = \cos\theta + i\sin\theta$，$\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta$ であるから

$$w = z + \overline{z} = 2\cos\theta < 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \qquad \text{よって} \qquad |w| < 1$$

(3)　表が出た枚数を n とする．

(i)　$n = 0$ のとき，$w = 0$ より　$|w| = 0$

(ii)　$n = 1$ のとき，$|w| = 1$

(iii)　$n = 2$ のとき

$$|z + z^2| = |z||1 + z|, \qquad |z^2 + z^3| = |z^2||1 + z|,$$
$$|z^3 + z^4| = |z^3||1 + z|, \qquad |z^4 + 1| = |z^4||1 + z|$$

$1 + z$ の実部について　$1 + \cos\theta > 0$ であるから

$$|1 + z| = |z + z^2| = |z^2 + z^3| = |z^3 + z^4| = |z^4 + 1| > 1$$

$1 + z^2$ について　$\begin{aligned} 1 + z^2 &= 1 + (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\ &= (1 + \cos 2\theta) + i\sin 2\theta \end{aligned}$

ゆえに　$\begin{aligned} |1 + z^2|^2 &= (1 + \cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2 \\ &= 2 + 2\cos 2\theta = (2\cos\theta)^2 < 1 \end{aligned}$

$$|1 + z^2| = |z + z^3| = |z^2 + z^4| = |z^3 + 1| = |z^4 + z| < 1$$

このとき，$|w| < 1$ となるは，5 通り

(iv)　$n = 3$ のとき　$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ より，例えば，$|1 + z + z^2| = |z^3 + z^4|$ であるから，$|w| < 1$ を満たす場合の数は，$n = 2$ の場合と等しい．

(v)　$n = 4$ のとき，例えば，$|1 + z + z^2 + z^3| = |z^4| = 1$ であるから，$|w| < 1$ とならない．

(vi)　$n = 5$ のとき，$w = 0$ であるから，$|w| = 0$

(i)〜(v) から，$|w| < 1$ となる確率は　$\dfrac{1 + 0 + 5 + 5 + 0 + 1}{2^5} = \mathbf{\dfrac{3}{8}}$　■

3 (1) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$ より　$2\sqrt{7}-\dfrac{2}{b^4}<\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}<2\sqrt{7}+\dfrac{2}{b^4}$

$b \geqq 2$ のとき　$2\sqrt{7}-\dfrac{2}{b^4} \geqq 2\sqrt{7}-\dfrac{1}{8}>2\times 2.645-0.125>5.165$

$$2\sqrt{7}+\dfrac{2}{b^4} \leqq 2\sqrt{7}+\dfrac{1}{8}<2\times 2.646+0.125=5.417<6$$

したがって　$5.165<\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}<6$　よって　$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$

(2) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$, $\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$ より

$$\left|\frac{a}{b}+\sqrt{7}\right|\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\frac{12}{b^4}\quad \text{ゆえに}\quad b^2|a^2-7b^2|<12\quad \cdots(*)$$

$\sqrt{7}$ は無理数であるから，自然数 a，b に対して $\dfrac{a}{b}\neq\sqrt{7}$ より　$a^2-7b^2\neq 0$
a^2-7b^2 は整数であるから，$(*)$ を満たす b $(b \geqq 2)$ は，$b=2,\ 3$ について調べればよい．

(i) $b=2$ のとき　$2^2|a^2-28|<12$　ゆえに　$|a^2-28|<3$
　これを満たす自然数 a は存在しない．

(ii) $b=3$ のとき　$3^2|a^2-63|<12$　ゆえに　$|a^2-63|<\dfrac{4}{3}$
　これを満たす自然数 a は　$a=8$

(i),(ii) より，求める a，b の組は　$\boldsymbol{(a,\ b)=(8,\ 3)}$　■

$\boxed{4}$ (1) $m=f(1)$，$M=f(3)$ とおくと，$f(x)=-x^2+bx+c$ より

$$-1+b+c=m,\quad -9+3b+c=M$$

ゆえに　$b=\dfrac{M-m}{2}+4,\quad c=\dfrac{3m-M}{2}-3$

したがって　$f(x)=-x^2+\left(\dfrac{M-m}{2}+4\right)x+\dfrac{3m-M}{2}-3$

$$f(4)=\frac{3M-m}{2}-3$$

$f(4)$ は，$M=5$，$m=2$ のとき最小値 $\dfrac{7}{2}$ をとり，$M=6$，$m=0$ のとき最大値 6 をとる．よって　$\boldsymbol{\dfrac{7}{2} \leqq f(4) \leqq 6}$

(2) $k=\dfrac{M-m}{2}$ とおくと　$b=k+4$，$c=-3k+M-3$

$D=b^2+4c$，$q=\dfrac{D}{4}$ であるから

$$q=\frac{1}{4}\{(k+4)^2+4(-3k+M-3)\}=\frac{1}{4}(k-2)^2+M$$

$0 \leqq m \leqq 2$，$5 \leqq M \leqq 6$，$\dfrac{3}{2} \leqq k \leqq 3$ であるから，q は，

$M=6$，$k=3$ のとき $(m=0)$，最大値 $\dfrac{25}{4}$ をとり，
$M=5$，$k=2$ のとき $(m=1)$，最小値 5 をとる．

よって　$\boldsymbol{5 \leqq q \leqq \dfrac{25}{4}}$

(3) 放物線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，$\alpha+\beta=b$，$\alpha\beta=-c$ より，$D=b^2+4c$，$q=\dfrac{D}{4}$ に注意して

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=b^2+4c=D=4q=4\cdot 6=24$$

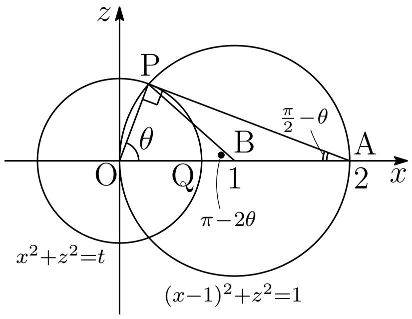
$\beta-\alpha=\sqrt{24}$ であるから　$S=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(\sqrt{24})^3=\boldsymbol{8\sqrt{6}}$ ■

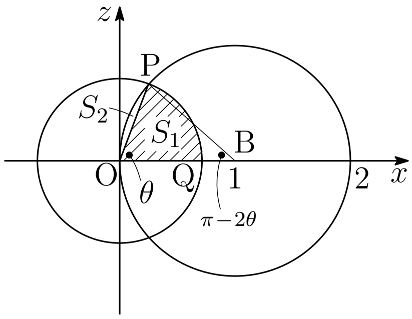
5 (1) xy 平面に垂直で O を通る座標軸を z とすると，立体 M の表す領域は

$$0 \leqq y \leqq 2, \quad y \geqq x^2+z^2, \quad (x-1)^2+z^2 \leqq 1$$

平面 $y=t$ 上に 2 円 $x^2+z^2=t$，$(x-1)^2+z^2=1$ の交点の 1 つを P とし，OP と x 軸方向の正の向きとなす角を θ とすると，左下の図から

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}\cos\theta=2\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad t=\mathrm{OP}^2=(2\cos\theta)^2$$





右上の図において，扇形 OPQ の面積を S_1，弧 OP と線分 OP で囲まれた部分の面積を S_2 とすると (△OPB は BO = BP = 1 の二等辺三角形)

$$S_1=\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta=2\theta\cos^2\theta,$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(\pi-2\theta)=\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$S(t)=2(S_1+S_2)$ であるから

$$S(t)=2\left(2\theta\cos^2\theta+\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$=2\theta(2\cos^2\theta-1)-\sin 2\theta+\pi=\boldsymbol{2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi}$$

(2) $t=(2\cos\theta)^2$ より $\dfrac{dt}{d\theta}=-8\cos\theta\sin\theta=-4\sin 2\theta$

t	$0 \longrightarrow 2$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$V=\int_0^2 S(t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)\frac{dt}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)(-4\sin 2\theta)d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin 4\theta+2\cos 4\theta-2+4\pi\sin 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[-\theta\cos 4\theta+\frac{3}{4}\sin 4\theta-2\pi\cos 2\theta-2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$$

■

7.4 2018年(150分)

1 次の問いに答えよ.

(1) $x > 0$ の範囲で不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ.

(2) x が $x > 0$ の範囲を動くとき,

$$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ.

2 a, b を正の実数とし, $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ とする.

(1) c を実数とし, $f(x)$ が $x - c$ で割り切れるとする. このとき, $c > 0$ であり, $f(x)$ は $(x-c)\left(x - \dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れることを示せ.

(2) $f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるとき, $a \geqq 4$ が成り立つことを示せ.

(3) $a = 5$ とする. $f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ.

3 2 つの関数

$$f(t) = 2\sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2\cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C : x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．

(1) t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ．

(2) t_1，t_2 を $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ を満たす実数とする．このとき $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) C と直線 $x = 1$ が囲む領域の面積 S を求めよ．

4 座標空間に 6 点

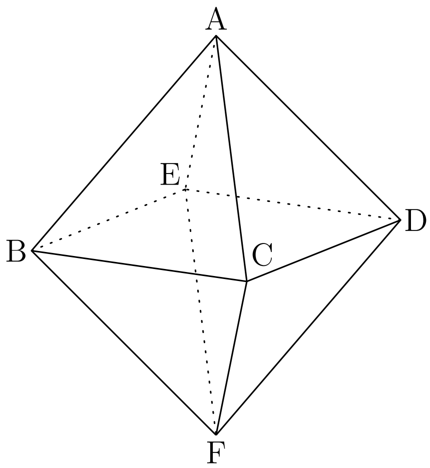
$$\mathrm{A}(0, 0, 1),\ \mathrm{B}(1, 0, 0),\ \mathrm{C}(0, 1, 0),\ \mathrm{D}(-1, 0, 0),\ \mathrm{E}(0, -1, 0),\ \mathrm{F}(0, 0, -1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある．s，t を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ を満たす実数とする．線分 AB，AC をそれぞれ $1 - s : s$ に内分する点を P，Q とし，線分 FD，FE をそれぞれ $1 - t : t$ に内分する点を R，S とする．

(1) 4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあることを示せ．

(2) 線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする．s，t が $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ．

(3) 正八面体 ABCDEF の 4 点 P，Q，R，S を通る平面による切り口の面積を X とする．線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき，X を最大とするような s，t の値と，そのときの X の値を求めよ．



5 p，q を $0 < p < 1$，$0 < q < 1$ を満たす実数とし，n を 2 以上の整数とする．2 つのチーム A，B が野球の試合を n 回行う．1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする．また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする．なお，試合結果に引き分けはなく，勝敗が決まるとする．

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ とする．B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$，$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$ とおくと

$$f(0)=0,\quad g(0)=0$$

$x>0$ において　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0$

$g(x)=\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$ より，$x>0$ において

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{1+x}\\&=\frac{(1+x)-2\sqrt{1+x}+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}>0\end{aligned}$$

したがって，$x>0$ において　$f(x)>0$，$g(x)>0$

よって，$x>0$ の範囲で　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

(2) $y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ より　$y'=-\dfrac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\dfrac{1}{x^2}$

(1) の結果から，$x>0$ において

$$\{\log(1+x)\}^2<\frac{x^2}{1+x}\quad ゆえに\quad -\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\frac{1}{x^2}<0$$

したがって，$x>0$ において，y は単調減少である．

$x-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x(2-x)}{2}$ であるから，$0<x<2$ のとき，(1) の結果から

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)}$$

したがって　$\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{2}{x(2-x)}-\dfrac{1}{x}$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sqrt{1+x}}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to+0}\left\{\frac{2}{x(2-x)}-\frac{1}{x}\right\}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$$

したがって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{2}$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}=0$　よって　$\boldsymbol{0<y<\dfrac{1}{2}}$　■

2　(1)　$f(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$ が $x-c$ で割り切れるから，$f(c)=0$ より

$$c^4-ac^3+bc^2-ac+1=0 \quad ゆえに \quad ac(c^2+1)=c^4+bc^2+1$$

$a,\ b$ は正の実数であるから，上の第2式より　　$c>0$

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2\left(x^2-ax+b-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\ &=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2\right\} \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$f(c)=0$ であるから　$\left(c+\frac{1}{c}\right)^2-a\left(c+\frac{1}{c}\right)+b-2=0$

したがって　$f\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{1}{c}+c\right)^2-a\left(\frac{1}{c}+c\right)+b-2\right\}=0$

(i)　$c\neq 1$ のとき，$f(c)=f\left(\frac{1}{c}\right)=0$ より，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\frac{1}{c}\right)$ で割り切れる．

(ii)　$c=1$ のとき，$f(1)=0$ であるから，$(*)$ より

$$-2a+b+2=0 \quad ゆえに \quad b=2a-2 \quad \cdots①$$

① を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\frac{1}{x}\right)+2a-4\right\}\\ &=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\right\}\\ &=(x^2-1)^2-ax(x-1)^2\\ &=(x-1)^2\{(x+1)^2-ax\} \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\frac{1}{c}\right)$ で割り切れる．

(2) $f(x)$ が $x-s$，$x-t$ で割り切れる，すなわち，これらを因数にもつとき，(1) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-s)(x-t)\left(x-\frac{1}{s}\right)\left(x-\frac{1}{t}\right) \\ &= \left\{x^2-\left(s+\frac{1}{s}\right)x+1\right\}\left\{x^2-\left(t+\frac{1}{t}\right)x+1\right\} \\ &= x^4-\left(s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}\right)x^3+\left\{\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+2\right\}x^2 \\ &\qquad -\left(s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}\right)x+1 \end{aligned}$$

係数を比較して

$$a=s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t},\quad b=\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+2 \quad \cdots(**)$$

(1) の結果から　$s>0$，$t>0$
したがって，相加・相乗平均の大小関係により，$(*)$ の第 1 式は

$$s+\frac{1}{s} \geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{1}{s}}=2,\quad t+\frac{1}{t} \geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2 \quad \text{よって} \quad a \geqq 4$$

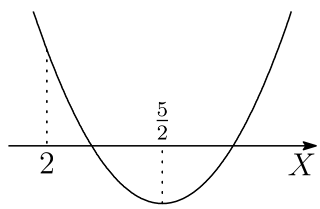
(3) $\alpha=s+\dfrac{1}{s}$，$\beta=t+\dfrac{1}{t}$ とおくと，(2) の結果から　$\alpha \geqq 2$，$\beta \geqq 2$

$a=5$ のとき，$(**)$ より　　$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=b-2$

α，β を解とする 2 次方程式は　$X^2-5X+b-2=0$

$g(X)=X^2-5X+b-2$ とおくと　$g(X)=\left(X-\dfrac{5}{2}\right)^2+b-\dfrac{33}{4}$

$g(X)=0$ の 2 解が $X \geqq 2$ の範囲に実数解をもつことから



$$g(2)=b-8 \geqq 0,\quad b-\frac{33}{4} \leqq 0$$

ゆえに　　$8 \leqq b \leqq \dfrac{33}{4}$

b は自然数であるから　　$\boldsymbol{b=8}$

■

3 (1) $f(t)=2\sin t+\cos 2t$，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ より $(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned}f'(t)&=2\cos t-2\sin 2t=2\cos t-4\sin t\cos t\\&=2\cos t(1-2\sin t)\\g'(t)&=-2\sin t+2\cos 2t=-2\sin t+2(1-2\sin^2 t)\\&=-2(\sin t+1)(2\sin t-1)\end{aligned}$$

$f(t)$，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

よって　$f(t)$ の最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$，$g(t)$ の最大値 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(2) $f(t)=2\sin t+\cos 2t=-2\sin^2 t+2\sin t+1$ より

$$\begin{aligned}f(t_1)-f(t_2)&=-2(\sin^2 t_1-\sin^2 t_2)+2(\sin t_1-\sin t_2)\\&=-2(\sin t_1-\sin t_2)(\sin t_1+\sin t_2-1)\end{aligned}$$

$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$f(t_1)=f(t_2)$ より，$\sin t_1-\sin t_2 \neq 0$ に注意して

$$\sin t_1+\sin t_2-1=0 \quad \cdots ①$$

$g(t)=2\cos t+\sin 2t=2\cos t+2\sin t\cos t=2\cos t(1+\sin t)$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}g(t)^2&=\cos^2 t(1+\sin t)^2=(1-\sin t)(1+\sin t)^3\\&=2(1+\sin t)^3-(1+\sin t)^4\end{aligned}$$

$u=1+\sin t_1$，$v=1+\sin t_2$ とおくと，① より $u+v=3$ であるから

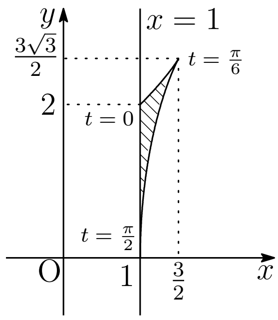
$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\{g(t_1)^2-g(t_2)^2\}&=2(u^3-v^3)-u^4+v^4\\&=2(u-v)(u^2+uv+v^2)-(u-v)(u+v)(u^2+v^2)\\&=2(u-v)(u^2+uv+v^2)-3(u-v)(u^2+v^2)\\&=2(u-v)(-u^2+2uv-v^2)=(v-u)^3\\&=(\sin t_2-\sin t_1)^3\end{aligned}$$

$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin t_2-\sin t_1>0$ であるから，上式より

$$g(t_1)^2-g(t_2)^2 \geqq 0$$

(3) (1) の結果から，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$$f(t) \geqq 1, \quad g(t) \geqq 0$$



(2) の結果から，$0 \leqq t_1 < \dfrac{\pi}{6} < t_2$ において，
$f(t_1) = f(t_2)$ を満たす t_1，t_2 に対して

$$g(t_1) > g(t_2)$$

したがって，右の図の斜線部分の面積が S であるから

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)\cdot(2\sin t + \cos 2t)' dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2 t - 2\sin 2t\cos t - 2\sin^2 2t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2t - \sin 3t - \sin t + \cos 4t + 1)\,dt \\
&= \Big[\sin 2t + \frac{1}{3}\cos 3t + \cos t + \frac{1}{4}\sin 4t + t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

■

4 (1) $\vec{a} = (0,0,1)$，$\vec{b} = (1,0,0)$，$\vec{c} = (0,1,0)$ とすると，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(-\vec{b})$，E$(-\vec{c})$，F$(-\vec{a})$ であるから

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{c}, \\
&\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{b}, \\
&\overrightarrow{\mathrm{OS}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{c}
\end{aligned}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (t-1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{SR}}$ であるから，4 点 P，Q，R，S は同一平面上にある．

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b}+\vec{c})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \left(\dfrac{s+t-2}{2},\ \dfrac{s+t-2}{2}, -(s+t)\right)$

ここで，$s+t=2u$ とおくと $(0<u<1)$　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = (u-1,\ u-1, -2u)$

$$\begin{aligned} m^2 = |\overrightarrow{\mathrm{LM}}|^2 &= (u-1)^2 + (u-1)^2 + (-2u)^2 \\ &= 6u^2 - 4u + 2 = 6\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

よって，$u = \dfrac{1}{3}$，すなわち，$s+t = \dfrac{2}{3}$ のとき，m は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(3) 直線 LM と xy 平面との交点を H とすると，$\vec{a}$ の係数に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{t\overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{s+t} = \frac{t(1-s)+s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

したがって

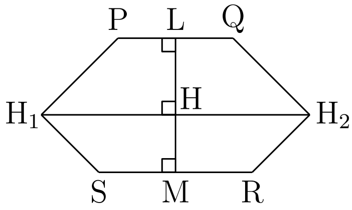
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{HL}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) \\ &= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}), \\ \overrightarrow{\mathrm{HM}} &= -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) \\ &= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) \end{aligned}$$

$s+t = \dfrac{2}{3}$ を上の 2 式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = s(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (s,\ s,\ s),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (-t, -t, -t)$$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{HL}}| = \sqrt{3}s$，$|\overrightarrow{\mathrm{HM}}| = \sqrt{3}t$

平面 PQRS と線分 BE，CD のとの交点を
それぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{2}$

(1) の結果から　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = (1-s)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-s)\sqrt{2}$,
$|\overrightarrow{\mathrm{SR}}| = (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-t)\sqrt{2}$

X は 2 つの台形 $\mathrm{PH_1H_2Q}$，$\mathrm{H_1SRH_2}$ の和であるから

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}(\mathrm{PQ}+\mathrm{H_1H_2})\mathrm{HL} + \frac{1}{2}(\mathrm{SR}+\mathrm{H_1H_2})\mathrm{HM} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(1-s)\sqrt{2}+\sqrt{2}\right\}\sqrt{3}s + \frac{1}{2}\left\{(1-t)\sqrt{2}+\sqrt{2}\right\}\sqrt{3}t \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t)-(s^2+t^2)\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\{4(s+t)-(s+t)^2-(s-t)^2\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{4\cdot\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2-(s-t)^2\right\} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{\frac{20}{9}-(s-t)^2\right\}
\end{aligned}$$

よって，$s-t=0$，すなわち，$s=t=\dfrac{1}{3}$ のとき，X は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}}{9}}$ ■

5 (1) $n+1$ 試合目に A が勝つのは，n 試合目に A が勝っているときと B が勝っているときがあるから，次の確率漸化式が成立する．

$$a_{n+1} = pa_n + q(1-a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = (p-q)a_n + q$$

したがって　$a_{n+1} - \dfrac{q}{1-p+q} = (p-q)\left(p_n - \dfrac{q}{1-p+q}\right)$

$$a_n - \frac{q}{1-p+q} = (p-q)^{n-1}\left(p_1 - \frac{q}{1-p+q}\right)$$

$a_1 = p$ であるから

$$\begin{aligned}
a_n - \frac{q}{1-p+q} &= (p-q)^{n-1}\cdot\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q} \\
a_n &= \boldsymbol{\frac{(1-p)(p-q)^n+q}{1-p+q}}
\end{aligned}$$

(2) (i) n 試合目に A が勝つ場合
勝者が $\boxed{\text{BA}}$ の順で 2 回，$\boxed{\text{A}}$ が $n-4$ 回であるから，その確率は

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_2\{(1-p)q\}^2p^{n-4} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2q^2p^{n-4} $$

(ii) n 試合目に B が勝つ場合
勝者が $\boxed{\text{BA}}$ の順で 1 回，$\boxed{\text{A}}$ が $n-3$ 回，最後に $\boxed{\text{B}}$ であるから，
その確率は

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_1(1-p)q\cdot p^{n-3}\times(1-p) = (n-2)(1-p)^2qp^{n-3} $$

(i),(ii) より

$$ \begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2q^2p^{n-4} + (n-2)(1-p)^2qp^{n-3} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(1-p)^2q(n-2)\{(n-3)q+2p\}p^{n-4}} \end{aligned} $$

■

7.5　2019 年 (150 分)

1 以下の問いに答えよ．ただし，log は自然対数，e はその底とする．

(1) b を実数とする．関数

$$f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ．

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 a，b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める．

$$I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log I_n$$

を求めよ．ただし，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(n+1) = 0$$

を用いてもよい．

$\boxed{2}$ 自然数 a，b に対し，

$$w = \cos\frac{a\pi}{3+b} + i\sin\frac{a\pi}{3+b}$$

とおく．ただし，i は虚数単位とする．複素数 z_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を以下のように定める．

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 - w, \quad z_n = (1-w)z_{n-1} + wz_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $a = 4$，$b = 3$ のとき，複素数平面上の点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ．

(2) $a = 2,\ b = 1$ のとき，z_{63} を求めよ．

(3) さいころを 2 回投げ，1 回目に出た目を a，2 回目に出た目を b とする．このとき $z_{63} = 0$ である確率を求めよ．

$\boxed{3}$ 実数 s，t が $s^2 + t^2 \leqq 6$ を満たしながら変わるとき，xy 平面上で点 $(s+t,\ st)$ が動く領域を A とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $(2,\ \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ．

(2) A を図示せよ．

(3) A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

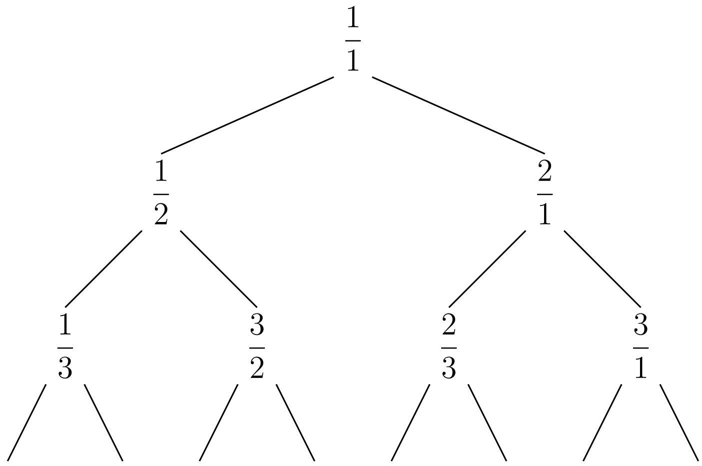
4 下の図は，$\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$，右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ．ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす．

(2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ．

(3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ．

(4) $\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ．たとえば，$\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である．



5 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

を考える．S_1 と S_2 の共通部分を C とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ．

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ．

解答例

1　(1)　$f(x)=\displaystyle\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=-e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\\&=-\frac{2}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}<0\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は単調に減少する．

(2)　$0<a\leqq b$ および (1) の結果より，$f(b)\leqq f(a)$ であるから

$$\int_b^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\qquad\cdots①$$

$0<a\leqq t\leqq b$ において，$e^{-\frac{t^2}{2}}\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}$ であるから

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\leqq\int_a^b e^{-\frac{a^2}{2}}\,dt=\Big[\,e^{-\frac{a^2}{2}}t\,\Big]_a^b=e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)\qquad\cdots②$$

①，② により，$a\leqq b$ を満たす正の実数 a，b に対して，次式が成立する．

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

(3)　(2) の結論において，t を $\sqrt{n}\,t$ に置き換えると

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_{\frac{a}{\sqrt{n}}}^{\frac{b}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{2}}\sqrt{n}\,dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

さらに，$a=\sqrt{n}$，$b=2\sqrt{n}$ とすると

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\frac{2\sqrt{n}}{4n+1}e^{-2n}\leqq\sqrt{n}\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt\leqq e^{-\frac{n}{2}}(2\sqrt{n}-\sqrt{n})$$

$$\frac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}\left(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)\leqq\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt\leqq e^{-\frac{n}{2}}$$

ここで，$J_n=\dfrac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}\left(1-\dfrac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$，$K_n=e^{-\frac{n}{2}}$ とおくと

$$J_n\leqq I_n\leqq K_n\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{n}\log J_n\leqq\frac{1}{n}\log I_n\leqq\frac{1}{n}\log K_n\qquad\cdots③$$

$\log K_n = -\dfrac{n}{2}$ より

$$\frac{1}{n}\log K_n = -\frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log K_n = -\frac{1}{2} \qquad \cdots④$$

$\log J_n = -\log(n+1) - \dfrac{n}{2} + \log\left(1 - \dfrac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$ より

$$\frac{1}{n}\log J_n = -\frac{1}{n}\log(n+1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\log\left(1 - \frac{2+\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1) = 0$ に注意して　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log J_n = -\frac{1}{2} \qquad \cdots⑤$

③，④，⑤ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

■

2　(1)　$z_1 = 1$，$z_2 = 1 - w$，$z_n = (1-w)z_{n-1} + wz_{n-2}$ より

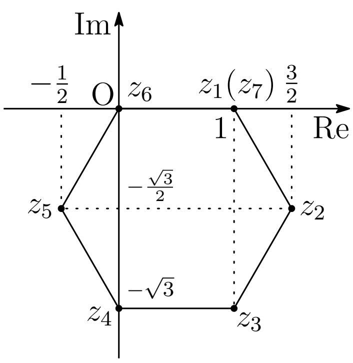
$$z_2 - z_1 = -w,$$
$$z_n - z_{n-1} = -w(z_{n-1} - z_{n-2})$$

したがって　$\dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \dfrac{z_4 - z_3}{z_3 - z_2} = \cdots = \dfrac{z_7 - z_6}{z_6 - z_5} = -w$

$a = 4$，$b = 3$ より　$w = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$$-w = (\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

ゆえに　$|z_n - z_{n-1}| = 1$，$\angle z_{n-1}z_nz_{n+1} = -\dfrac{\pi}{3}$



よって，点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形は，右の図のように 1 辺の長さが 1 の正六角形である．

(2) $z_1=1$，$z_2=1-w$，$z_n=(1-w)z_{n-1}+wz_{n-2}$ より

$$\begin{aligned} z_{n+1}+wz_n &= z_n+wz_{n-1}=z_2+wz_1=1, \\ z_{n+1}-z_n &= -w(z_n-z_{n-1})=(-w)^{n-1}(z_2-z_1)=(-w)^n \end{aligned}$$

上の 2 式から　$z_n=\begin{cases} \dfrac{1-(-w)^n}{1+w} & (w\neq -1) \\ n & (w=-1) \end{cases}$　$\cdots(*)$

$a=2$，$b=1$ より　$w=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i$

よって　$z_{63}=\dfrac{1-(-w)^{63}}{1+w}=\dfrac{1-(-i)^{63}}{1+i}=\dfrac{1-i}{1+i}=\boldsymbol{-i}$

(3) $w=\cos\dfrac{a\pi}{3+b}+i\sin\dfrac{a\pi}{3+b}$，$w\neq -1$ より　$\dfrac{a\pi}{3+b}$ は π の奇数倍でない

$$\begin{aligned} -w &= (\cos\pi+i\sin\pi)\left(\cos\frac{a\pi}{3+b}+i\sin\frac{a\pi}{3+b}\right) \\ &= \cos\left(\frac{a}{3+b}+1\right)\pi+i\sin\left(\frac{a}{3+b}+1\right)\pi \end{aligned}$$

$z_{63}=\dfrac{1-(-w)^{63}}{1+w}=0$ となるとき，$(-w)^{63}=1$ であるから

$$63\left(\frac{a}{3+b}+1\right)\pi \text{は } 2\pi \text{の整数倍　ゆえに　} \frac{63a\pi}{3+b}\text{は}\pi\text{の奇数倍}$$

したがって，$(a,\ b)$ の満たす条件は

$$\frac{63a\pi}{3+b}\text{は}\pi\text{の奇数倍かつ　}\frac{a\pi}{3+b}\text{は}\pi\text{の奇数倍でない}$$

これを満たす $(a,\ b)$ は，次の 7 組．

$a=1$ のとき　$b=4,\ 6$
$a=2$ のとき　$b=3,$
$a=3$ のとき　$b=4,\ 6$
$a=4$ のとき　なし
$a=5$ のとき　$b=4,\ 6$
$a=6$ のとき　なし

よって，求める確率は　$\dfrac{7}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $s+t=2$，$st=\sqrt{2}$ に対し

$$(s-t)^2=(s+t)^2-4st=2^2-4\cdot\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})<0$$

したがって，これを満たす実数 s，t は存在しない．
よって，点 $(2,\ \sqrt{2})$ は領域 A の点ではない．

(2) $s+t=x$，$st=y$ とおくと，2 数 s，t は，2 次方程式 $\lambda^2-x\lambda+y=0$ の解

$$\frac{x\pm\sqrt{x^2-4y}}{2}$$

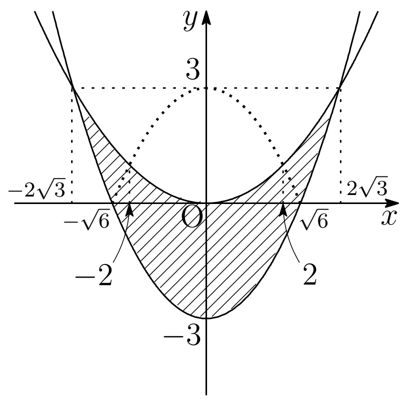
である．これが実数解で，条件 $s^2+t^2\leqq 6$ を満たすから

$$x^2-4y\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2}\right)^2\leqq 6$$

したがって，領域 A の表す不等式は

$$\begin{cases} y\leqq\dfrac{x^2}{4} \\ y\geqq\dfrac{1}{2}x^2-3 \end{cases}$$

右の図の斜線部分で，境界線を含む．



(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{2\pi}&=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}-3\right)^2dx+\int_2^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2dx-\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-3\right)^2dx\\
&=\int_0^2\left(\frac{x^4}{4}-3x^2+9\right)dx+\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{x^4}{16}dx-\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^4}{4}-3x^2+9\right)dx\\
&=\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_0^2+\left[\frac{x^5}{80}\right]_2^{2\sqrt{3}}-\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\\
&=\frac{8(7-3\sqrt{3}+3\sqrt{6})}{5}
\end{aligned}$$

よって，求める回転体の体積は　$V=\boldsymbol{\dfrac{16(7-3\sqrt{3}+3\sqrt{6})}{5}\pi}$ ■

$\boxed{4}$ (1) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記する．

$(p, q)\,|\,(p+q)$ および $(p, q)\,|\,p$ であるから，(p, q) は $p+q$ と p の公約数．

$$(p, q)\,|\,(p+q, p) \quad \cdots ①$$

$q = (p+q)-p$ より，$(p+q, p)\,|\,q$，また，$(p+q, p)\,|\,p$ であるから，$(p+q, p)$ は q と p の公約数．

$$(p+q, p)\,|\,(p, q) \quad \cdots ②$$

①，② から $\qquad (p, q) = (p+q, p) \quad \cdots (*)$

$(*)$ は p と q を交換しても成立するから

$$(q, p) = (q+p, q) \quad \text{ゆえに} \quad (p, q) = (p+q, q) \quad \cdots (**)$$

$(*)$，$(**)$ より，$(p, q) = 1$ のとき，$(p+q, p) = 1$，$(p+q, q) = 1$

したがって，$\dfrac{p}{q}$ が既約分数のとき，$\dfrac{p}{p+q}$，$\dfrac{p+q}{q}$ も既約分数である．

よって，$\dfrac{1}{1}$ から始まるこの樹形図に現れる分数は，すべて既約分数である．

(2) $\dfrac{p}{q}$ について (p，q は自然数)，$n = p+q$ とする．樹形図に現れない既約分数の集合 $A(\neq \phi)$ が存在すると仮定する．A における n の最小値を N とし，その N に対応する既約分数の 1 つを $\dfrac{P}{Q}$ とする．

(i) $P = Q$ のとき，すなわち，$\dfrac{1}{1}$ は樹形図にあるので，矛盾．

(ii) $P < Q$ のとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ に対し，$\dfrac{P}{Q-P}$ は既約分数で

$$n = P + (Q-P) = N - P < N$$

したがって，N の最小性により，既約分数 $\dfrac{P}{Q-P}$ は樹形図に現れる．この既約分数に対して左下に配置する規則を適用すると

$$\frac{P}{P+(Q-P)} = \frac{P}{Q}$$

このとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ が樹形図に現れ，矛盾．

(iii) $P > Q$ のとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ に対し，$\dfrac{P-Q}{Q}$ は既約分数で

$$n = (P-Q)+Q = N-Q < N$$

したがって，N の最小性により，既約分数 $\dfrac{P-Q}{Q}$ は樹形図に現れる．この既約分数に対して右下に配置する規則を適用すると

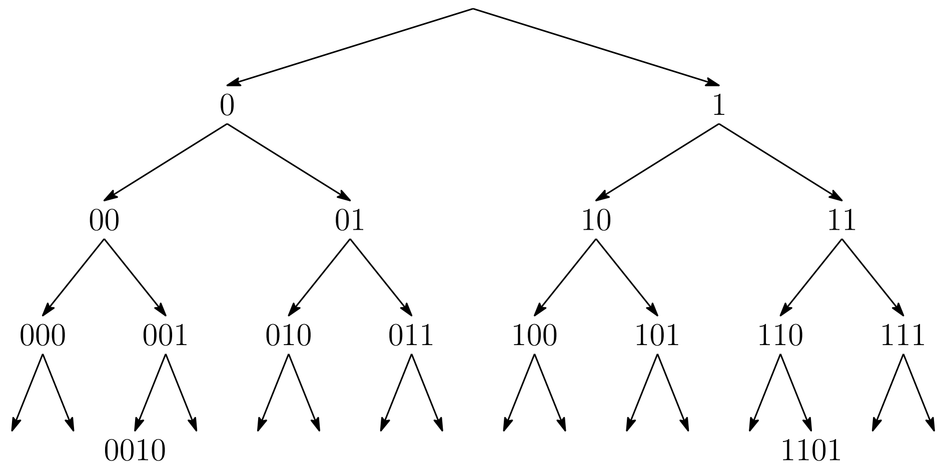
$$\frac{(P-Q)+Q}{Q} = \frac{P}{Q}$$

このとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ が樹形図に現れ，矛盾．

(i)〜(iii) より，$A = \phi$ となり，すべての正の有理数がこの樹形図に現れる．

(3) 樹形図に現れる既約分数 $\dfrac{p}{q}$ に対し，$n = p + q$ とする．
樹形図に現れる有理数 (既約分数) で，等しい 2 数の存在を仮定し，n を最小にするものを考える．その値を n_0 とすると，(2) と同様に，n_0 の最小性により矛盾を生じる．

(4) 樹形図の既約分数に対して，左下 (分母に分子を加える)，右下 (分子に分母を加える) にそれぞれ配置することを配置「0」，配置「1」と表記する．例えば,「左下 → 左下 → 右下 → 左下」,「右下 → 右下 → 左下 → 右下」の配置をそれぞれ 0010，1101 と表記する．これらの文字列は 4 個であるから，5 段目にあり，配置を 2 進数とみると，それぞれ 2，13．起点に注意すると，これらにそれぞれ 1 を加えた 3，14 が左からの順番を表す．



$\dfrac{1}{1}$ から $\dfrac{19}{44}$ に至る配置は，$\dfrac{19}{44}$ から $\dfrac{1}{1}$ へ逆に辿ることにより

$$\frac{19}{44} \overset{0}{\leftarrow} \frac{19}{25} \overset{0}{\leftarrow} \frac{19}{6} \overset{1}{\leftarrow} \frac{13}{6} \overset{1}{\leftarrow} \frac{7}{6} \overset{1}{\leftarrow} \frac{1}{6} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{5} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{4} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{3} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{2} \overset{0}{\leftarrow} \frac{1}{1}$$

したがって，$\dfrac{19}{44}$ の表す配置は　0000011100

文字列が 10 個で，配置を 2 進数とみると 28 であるから，起点に注意して

11 段目の左から 29 番目

■

5　(1) 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$
$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

の中心は，それぞれ (1, 1, 1)，(2, 3, 3) であり，この 2 点間の距離は

$$\sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2} = 3$$

また，S_1，S_2 の半径は，それぞれ $\sqrt{7}$，1 より

$$\sqrt{7} - 1 < 3 < \sqrt{7} + 1$$

したがって，S_1 と S_2 の共通部分 C は円である．S_1 と S_2 の方程式から $x^2 + y^2 + z^2$ の項を消去すると，円 C が存在する次の平面の方程式を得る．

$$2x + 4y + 4z - 25 = 0$$

これから，S_1 との共通部分が C となる球面の方程式は，実数 k を用いて

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 7 + k(2x + 4y + 4z - 25) = 0$$
$$(x+k-1)^2 + (y+2k-1)^2 + (z+2k-1)^2 = 9k^2 + 15k + 7 \quad \cdots (*)$$

ゆえに　$9k^2 + 15k + 7 = 9\left(k + \dfrac{5}{6}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

球面の半径が最小になるのは，$k = -\dfrac{5}{6}$ ときで，その方程式は

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}}$$

(2) 球面の半径が $\sqrt{3}$ になるとき　　$9k^2 + 15k + 7 = 3$

ゆえに　$(3k+1)(3k+4) = 0$　これを解いて　$k = -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}$

上の結果を $(*)$ に代入することにより，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = 3,}$$
$$\boldsymbol{\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 = 3}$$

■

7.6　2020 年 (150 分)

1 関数

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geqq 0)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $f(x)$ とその導関数の極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

をそれぞれ求めよ．ただし，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることを用いてよい．

(3) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない．

2 1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k = 1$，出た目が 2 の場合は $X_k = -1$，その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする．

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき，Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ を Z_n で表す．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) Z_2 が実数でない確率を求めよ．

(2) Z_1，Z_2，Z_3，$\cdots$，Z_n がいずれも実数でない確率を求めよ．

(3) Z_n が実数となる確率を p_n とする．p_n を n を用いて表し，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

3 n を 2 以上の自然数とする．三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す．$\angle\mathrm{ACB} = n\angle\mathrm{ABC}$ であるとき，$c < nb$ を示せ．

4 t を正の実数とする．xy 平面において，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad xy \leqq 1, \quad x + y \leqq t$$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく．極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S(t) - 2\log t)$ を求めよ．

5 3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す．三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．以下の問いに答えよ．

(1) a の値を固定して b の値を変化させるとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．これを示せ．

(2) a，b の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える a，b の値をそれぞれ求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x \geqq 0$ より，$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} > 0$ であるから，$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log f(x) = \frac{1}{x+1}\log(x+1) \qquad \text{(A)}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{(x+1)^2}\log(x+1) + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2} \qquad \text{(B)}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

よって　　最大値 $\boldsymbol{f(e-1) = e^{\frac{1}{e}}}$

(2) (A) より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$　　よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = 1}$

上式および (B) より

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \frac{f(x)}{x+1}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{\log(x+1)}{x+1}\right) = \boldsymbol{0}$$

補足 $g(x) = 2(\sqrt{x+1}-1) - \log(x+1)$ とおくと $(x \geqq 0)$　$g'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+1}$

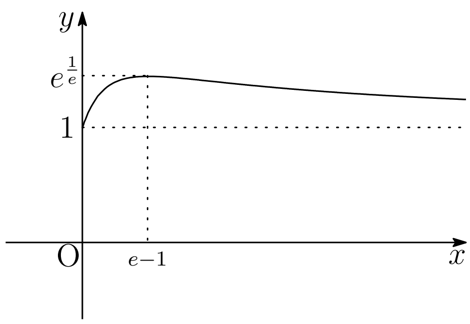
$g(0) = 0$，$x > 0$ において $g'(x) > 0$ であるから　$g(x) \geqq 0$ $(x \geqq 0)$

ゆえに　$x \geqq 0$ において　$0 \leqq \dfrac{\log(x+1)}{x+1} \leqq \dfrac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} \leqq \lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+1}\right) = 0$$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$

(3) (1)，(2) の結果から，$y = f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



■

2 (1) Z_2 が実数となるのは

$$(X_1,\ X_2) = (0,\ 0),\ (1, -1),\ (-1,\ 1)$$

したがって，Z_2 が実数である確率は

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $X_1 = 1$ または $X_1 = -1$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ とすると

$S_n = 1$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = 1) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

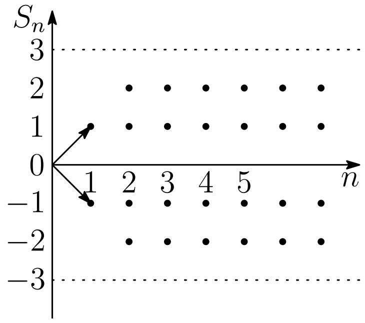
$S_n = 2$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = -1) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$S_n = -1$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = -1) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$S_n = -2$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = 1) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$



(3) 法 3 について

$$p_n = P(S_n \equiv 0),\quad q_n = P(S_n \equiv 1),\quad r_n = P(S_n \equiv 2)\quad (\mathrm{mod}\ 3)$$

とすると，$p_1 = \frac{4}{6}$，$p_{n+1} = \frac{4}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n$ であるから

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}(p_n + q_n + r_n)\quad \text{ゆえに}\quad p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}$$

したがって　$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$　ゆえに　$p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

これから　$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$　よって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3}}$　■

$\boxed{3}$ $C = \angle\mathrm{ACB}$，$B = \angle\mathrm{ABC}$ とする．正弦定理により $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$C = nB$ であるから $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin nB}$　ゆえに $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin nB}{\sin B}$　$\cdots$①

$B + C < \pi$，$C = nB$ $(n \geqq 2)$ より，$B < \dfrac{\pi}{n+1} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，B は鋭角

$0 < B < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，2 以上の自然数 n について

$$\frac{\sin nB}{\sin B} < n \quad \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法で示す．

［1］$n = 2$ のとき，$(*)$ より

$$\frac{\sin 2B}{\sin B} = \frac{2\sin B\cos B}{\sin B} = 2\cos B < 2$$

　このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると $\dfrac{\sin kB}{\sin B} < k$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(k+1)B}{\sin B} &= \frac{\sin kB\cos B + \cos kB\sin B}{\sin B}\\ &= \frac{\sin kB}{\sin B}\cdot\cos B + \cos kB\\ &< k\cdot 1 + 1 = k + 1\end{aligned}$$

　したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，2 以上の自然数 n について，$(*)$ は成立する．

① および $(*)$ により

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin nB}{\sin B} < n \quad よって \quad c < nb$$

別解 $f(\theta) = n\sin\theta - \sin n\theta$ とおくと $\left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{n}\right)$

$$f'(\theta) = n\cos\theta - n\cos n\theta = n(\cos\theta - \cos n\theta)$$

$n \geqq 2$ のとき，$0 < \theta < n\theta < \pi$ において，$\cos n\theta < \cos\theta$ であるから

$$f'(\theta) > 0$$

$f(0)=0$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，$0<\theta<n\theta<\pi$ において

$$f(\theta)=n\sin\theta-\sin n\theta>0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}<n \quad \cdots(**)$$

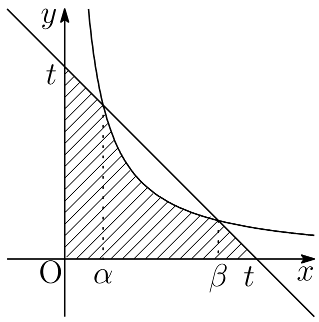
条件から，$B+C<\pi$，$C=nB$ $(n \geqq 2)$ より，$B<\dfrac{\pi}{n+1}<\dfrac{\pi}{n}$

$\theta=B$，$n\theta=C$ とおくと，①，$(**)$ より

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin nB}{\sin B}<n \quad \text{よって} \quad c<nb$$

■

$\boxed{4}$ 曲線 $xy=1$ と直線 $x+y=t$ $(t>2)$ の 2 式から，y を消去すると



$$x(t-x)=1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-tx+1=0$$

この方程式の解を α, β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}, \quad \beta=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2},$$
$$\alpha+\beta=t, \quad \alpha\beta=1, \quad \beta-\alpha=\sqrt{t^2-4}$$

曲線 $xy=1$ と直線 $x+y=t$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left(t-x-\frac{1}{x}\right)dx=\left[tx-\frac{x^2}{2}-\log x\right]_\alpha^\beta \\ &= t(\beta-\alpha)-\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\log\frac{\beta}{\alpha}=(\beta-\alpha)\left(t-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\log\frac{\beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}-2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2} \end{aligned}$$

$S(t)=\dfrac{t^2}{2}-S$ より，$S(t)=\dfrac{t(t-\sqrt{t^2-4})}{2}+2\log\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} S(t)-2\log t &= \frac{t(t-\sqrt{t^2-4})}{2}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}-2\log t \\ &= \frac{2t}{t+\sqrt{t^2-4}}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2t} \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}(S(t)-2\log t) &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}+2\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}{2}\right) \\ &= \frac{2}{1+1}+2\log\frac{1+1}{2}=\mathbf{1} \end{aligned}$$

■

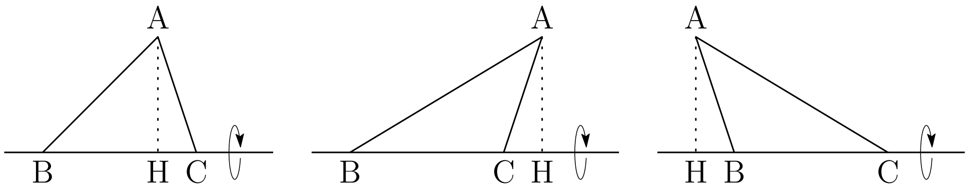
5 (1) 点 A から直線 BC に垂線 AH を引く．$h = \mathrm{AH}$ とすると

(i) H が線分 BC 上にあるとき

$$V = \frac{\pi}{3}ah^2$$

(ii) H が線分 BC 上にないとき

$$V = \frac{\pi}{3}|\mathrm{BH} - \mathrm{CH}|h^2 = \frac{\pi}{3}ah^2$$



(i)，(ii) の結果から，a は定数であるから，V が最大となるのは，h が最大のときである．三角形の成立条件 $|\mathrm{AB} - \mathrm{AC}| < \mathrm{BC} < \mathrm{AB} + \mathrm{CA}$ より

$$|(2-a-b)-b| < a < (2-a-b)+b$$

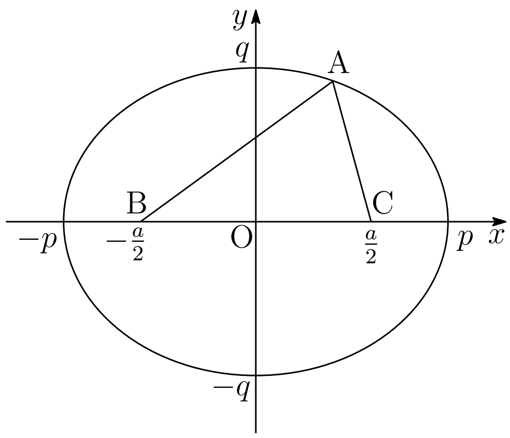
これを解いて　$1 < a+b,\quad a < 1,\quad b < 1$

条件より，$\mathrm{BC} = a$ は定数であるから，$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 2$ より，

$$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = 2 - a \quad \cdots ①$$

は定数であるから，点 A は，2 点 B，C を焦点とする長軸の長さが $2-a$ の楕円上の点である．$\mathrm{BC} = a$ より，座標平面上に $\mathrm{B}\left(-\frac{a}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ をとると，楕円の頂点 $(\pm p,\ 0)$，$(0,\ \pm q)$ は $(p,\ q > 0)$

$$2p = 2-a,\quad \sqrt{p^2 - q^2} = \frac{a}{2}\quad ゆえに\quad p = 1 - \frac{a}{2},\quad q^2 = 1 - a \quad \cdots ②$$



よって，h が最大となるのは，点 A が y 軸上，すなわち，△ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．

(2) (1) の結果から

$$V = \frac{\pi}{3}ah^2$$

が最大となるのは，AB = AC，$h = q$ のときであるから，①，② より

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = b = 1 - \frac{a}{2}$$
$$V = \frac{\pi}{3}a(1-a) = -\frac{\pi}{3}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{12}$$

よって，$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b = \frac{3}{4}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$ をとる． ■

第 8 章　神戸大学

出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	神戸大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明	4		2							
	複素数と方程式	1									
	図形と方程式	2	1				2				
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法										1
III	式と曲線										
	複素数平面								4		
	関数										
	極限			5		4		3·5	2		
	微分法とその応用	5		3	1	2·3		1		1	4
	積分法	3	3·4	4				2			
	積分法の応用		5		5	1	3·5		5	5	2
A	場合の数と確率				4	5		4	3	3	3
	整数の性質				2		4			4	
	図形の性質										
B	平面上のベクトル									2	
	空間のベクトル			1	3		1		1		
	数列										5
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		2								

数字は問題番号

8.1　2015 年 (120 分)

1 座標平面上の 2 つの曲線 $y = \dfrac{x-3}{x-4}$，$y = \dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．以下の問に答えよ．

(1) 2 曲線 C_1，C_2 の交点をすべて求めよ．

(2) 2 曲線 C_1，C_2 の概形をかき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ．

2 座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を C とする．$a > 2$，$0 < \theta < \pi$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる．原点を O とし，直線 AP と y 軸との交点を Q とする．点 Q を通り x 軸に平行な直線と，直線 OP との交点を R とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 R の座標を求めよ．

(2) (1) で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする．このとき，$0 < \theta < \pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) 原点 O と点 R の距離の 2 乗を $g(\theta)$ とする．このとき，$0 < \theta < \pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ．

3 a を正の実数とする．座標平面上の曲線 C を

$$y = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$$

で定める．曲線 C が 2 つの変曲点 P，Q をもち，それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 線分 PQ の中点と x 座標が一致するような，C 上の点を R とする．三角形 PQR の面積を求めよ．

(3) 曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点を P′ とし，点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点を Q′ とする．線分 P′Q′ の中点の x 座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a，b を用いて表せ．

(2) $b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ a，b，c を 1 以上 7 以下の自然数とする．次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 3 辺の長さが a，b，c である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する．

以下の問に答えよ．

(1) $a=b>c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(2) $a>b>c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

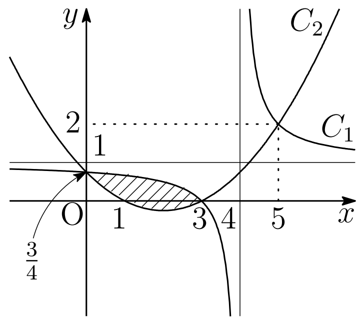
(3) 条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

解答例

1 (1) $C_1 : y = \dfrac{x-3}{x-4}$，$C_2 : y = \dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$

C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{1}{4}(x-1)(x-3) = \frac{x-3}{x-4}$$
$$\frac{x-3}{4(x-4)}\{(x-1)(x-4)-4\} = 0$$
$$\frac{x(x-3)(x-5)}{4(x-4)} = 0$$



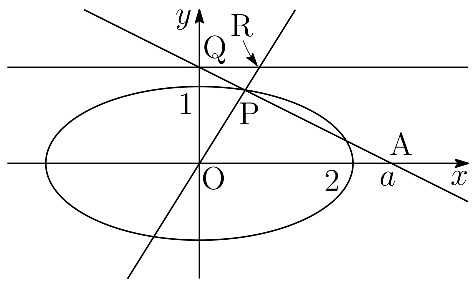
ゆえに　$x = 0,\ 3,\ 5$　よって，求める交点は　$\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$，$(\mathbf{3},\ \mathbf{0})$，$(\mathbf{5},\ \mathbf{2})$

(2) 求める面積を S とすると，上の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{\frac{x-3}{x-4} - \frac{1}{4}(x-1)(x-3)\right\} dx \\ &= \int_0^3 \left\{1 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{4}(x^2-4x+3)\right\} dx \\ &= \left[x + \log|x-4| - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\right]_0^3 \\ &= 3 - \log 4 - \frac{1}{4}(9-18+9) = \mathbf{3 - 2\log 2} \end{aligned}$$

■

2 (1) 2 点 A$(a,\ 0)$，P$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通る直線方程式は $(a>2)$



$$y=\frac{-\sin\theta}{a-2\cos\theta}(x-a)$$

ゆえに　Q$\left(0,\ \dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)$

直線 OP の方程式は　　$x\sin\theta-2y\cos\theta=0$

これに $y=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$ を代入すると $(0<\theta<\pi)$

$$x\sin\theta-2\cdot\frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\cdot\cos\theta=0$$

$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta\neq 0$ であるから　$x=\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}$

よって　　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta},\ \dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}}\right)$

(2) (1) の結果より，$f(\theta)=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$ であるから

$$f'(\theta)=a\cdot\frac{\cos\theta\cdot(a-2\cos\theta)-\sin\theta\cdot 2\sin\theta}{(a-2\cos\theta)^2}=\frac{a(a\cos\theta-2)}{(a-2\cos\theta)^2}$$

$a>2$ より，$f'(\theta)=0$ を満たす θ $(0<\theta<\pi)$ がただ 1 つ存在し，これを α とすると

$$\cos\alpha=\frac{2}{a},\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$$

したがって，$f(\theta)$ の増減表は

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
(θ)		↗	極大	↘	

よって，求める $f(\theta)$ の最大値は

$$f(\alpha)=\frac{a\sin\alpha}{a-2\cos\alpha}=\frac{a\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}}{a-2\cdot\dfrac{2}{a}}=\frac{a\sqrt{a^2-4}}{a^2-4}=\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}}$$

(3) (1) の結果より，$g(\theta) = \mathrm{OR}^2$ であるから

$$g(\theta) = \left(\frac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2$$
$$= \frac{4a^2\cos^2\theta + a^2(1-\cos^2\theta)}{(a-2\cos\theta)^2} = \frac{a^2(1+3\cos^2\theta)}{(a-2\cos\theta)^2}$$

$0 < \theta < \pi$ であるから

$$h(t) = a^2(3t^2+1)(a-2t)^{-2} \quad (-1 < t < 1)$$

とおくと，$h(t)$ の最小値は，$g(\theta)$ の最小値と一致するから

$$h'(t) = a^2\{6t(a-2t)^{-2} + (3t^2+1)\cdot 4(a-2t)^{-3}\}$$
$$= 2a^2\{3t(a-2t) + 2(3t^2+1)\}(a-2t)^{-3}$$
$$= 2a^2(3at+2)(a-2t)^{-3}$$

$a > 2$ より，$-\dfrac{1}{3} < -\dfrac{2}{3a} < 0$ であるから，$h(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{2}{3a}$	$\cdots$	(1)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，求める最小値は

$$h\left(-\frac{2}{3a}\right) = a^2\left\{3\left(-\frac{2}{3a}\right)^2 + 1\right\}\left\{a - 2\cdot\left(-\frac{2}{3a}\right)\right\}^{-2}$$
$$= a^2\cdot\frac{4+3a^2}{3a^2}\cdot\left(\frac{3a^2+4}{3a}\right)^{-2}$$
$$= \frac{3a^2+4}{3}\cdot\frac{9a^2}{(3a^2+4)^2} = \boldsymbol{\frac{3a^2}{3a^2+4}}$$

■

3 (1) $f(x) = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6(a+1)x^2 + 6ax, \\ f''(x) &= 12x^2 - 12(a+1)x + 6a \\ &= 6\{2x^2 - 2(a+1)x + a\} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$ の係数について

$$D/4 = (a+1)^2 - 2a = a^2 + 1 > 0$$

したがって，$f''(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ．この 2 つの実数解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

C 上の 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化するので，これらの 2 点は C の変曲点である．また，$f''(x) = 0$ を解くと

$$\alpha = \frac{a+1-\sqrt{a^2+1}}{2}, \quad \beta = \frac{a+2+\sqrt{a^2+1}}{2}$$

上式より，$\beta - \alpha = \sqrt{a^2+1}$．条件より，$\beta - \alpha = \sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}$$

$a > 0$ であるから　　$\boldsymbol{a = 1}$

注意 $f'(a) = 0$ は $f(a)$ が極値であるための必要条件であるが，十分条件ではないように，$f''(a) = 0$ は点 $(a,\ f(a))$ が変曲点であるための必要条件ではあるが，十分条件ではない．必ず，$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化していることを示す必要がある．なお，$f''(x)$ の符号は曲率[1] の符号を表す．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf の p.10 を参照．

(2) (1) の結果より　$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$，$f''(x) = 6(2x^2 - 4x + 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 4x + 1)\left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{4}\right) - 2x + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{6}f''(x)\left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{4}\right) - 2x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(\alpha, -2\alpha + \frac{3}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\beta, -2\beta + \frac{3}{4}\right)$ とおく．

$$\alpha = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \quad \cdots (*)$$

$f(1) = 0$ より，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = \left(\alpha - 1, -2\alpha + \frac{3}{4}\right), \quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \left(\beta - 1, -2\beta + \frac{3}{4}\right)$$

$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|(\alpha - 1)\left(-2\beta + \frac{3}{4}\right) - (\beta - 1)\left(-2\alpha + \frac{3}{4}\right)\right| \\ &= \frac{5}{8}|\beta - \alpha| = \boldsymbol{\frac{5}{8}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \dfrac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \dfrac{f'''(\alpha)}{3!}(x - \alpha)^3 + (x - \alpha)^4$

曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \quad \cdots ①$$

$f''(\alpha) = 0$，$f'''(x) = 24(x - 1)$ より $f'''(\alpha) = 24(\alpha - 1)$ に注意して，$y = f(x)$ と ① から y を消去すると

$$\begin{aligned} 4(\alpha - 1)(x - \alpha)^3 + (x - \alpha)^4 &= 0 \\ (x - \alpha)^3(x + 3\alpha - 4) &= 0 \end{aligned}$$

したがって，P' の x 座標は　　$-3\alpha + 4$

同様にして，Q' の x 座標は　　$-3\beta + 4$

よって，線分 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ の中点の x 座標は，$(*)$ に注意して

$$-3\cdot\frac{\alpha + \beta}{2} + 4 = -3\cdot 1 + 4 = \mathbf{1}$$

解説

関数 $f(x)=x^4-4x^3+3x^2$ について，$f^{(4)}(x)=4!$ であるから

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(p)+\int_p^x f'(t)\,dt = f(p)-\int_p^x (x-t)'f'(t)\,dt \\
&= f(p)-\Big[\,(x-t)f'(t)\,\Big]_p^x+\int_p^x (x-t)f''(t)\,dt \\
&= f(p)+(x-p)f'(p)-\frac{1}{2!}\int_p^x \{(x-t)^2\}'f''(t)\,dt \\
&= f(p)+(x-p)f'(p)-\frac{1}{2!}\Big[(x-t)^2f''(t)\Big]_p^x+\frac{1}{2!}\int_p^x (x-t)^2f'''(t)\,dt \\
&= f(p)+(x-p)f'(p)+\frac{1}{2!}(x-p)^2f''(p)-\frac{1}{3!}\int_p^x \{(x-t)^3\}'f'''(t)\,dt \\
&= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2-\frac{1}{3!}\Big[(x-t)^3f'''(t)\Big]_p^x \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{1}{3!}\int_p^x (x-t)^3f^{(4)}(t)\,dt \\
&= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3+4\int_p^x (x-t)^3\,dt \\
&= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3-\Big[(x-t)^4\Big]_p^x \\
&= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3+(x-p)^4
\end{aligned}
$$

一般に，n 次関数 $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ について $(n\geqq 2)$

$$
g(x)=g(p)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+a_n(x-p)^n
$$

が成り立つ． ■

4 (1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3} = \dfrac{(p+q+r)k^2 + (4p+3q+r)k + 3p}{k(k+1)(k+3)}$

$x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ であるから

$$p+q+r=0, \quad 4p+3q+r=2a, \quad 3p=6b$$

よって　　$\boldsymbol{p=2b,\ \ q=a-3b,\ \ r=-a+b}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= 2b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) + (a-b)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\\ &= 2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + (a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

(上式は，$n=1,2$ のときも成立する)

$(*)$ より，$b=0$ のとき $(n \geqq 3)$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) = \boldsymbol{\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}}$$

$(*)$ より，$a=0$ のとき $(n \geqq 4)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= 2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right) - b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\ &= b\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}}\end{aligned}$$

(上式は，$n=1,2,3$ のときも成立する)

(3) $(*)$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k = 2b\cdot 1 + (a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{6}a + \frac{7}{6}b}$

■

5 (1) a, b, c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a=b>c$ のとき $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　$b+c>a$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a=b>c$ であるから $\dfrac{2}{b}>\dfrac{1}{c}$ すなわち $2c>b>c$

ゆえに
$c=1$ のとき $2>b>1$ より　なし
$c=2$ のとき $4>b>2$ より　$a=b=3$
$c=3$ のとき $6>b>3$ より　$a=b=4,\ 5$
$c=4$ のとき $8>b>4$ より　$a=b=5,\ 6,\ 7$
$c=5$ のとき $10>b>5$ より　$a=b=6,\ 7$
$c=6$ のとき $12>b>6$ より　$a=b=7$
$c=7$ のとき $14>b>7$ より　なし

よって，求める組の個数は　$1+2+3+2+1=\mathbf{9}$ (個)

(2) a, b, c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a>b>c$ のとき $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　$b+c>a$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

ゆえに　$a-b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a>b>c$ であるから　$1\leqq c\leqq 5$

(i) $a>b>c=1$ のとき　$a-b<1$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>1$

これをみたす $(a,\ b)$ の組はなし

(ii) $a>b>c=2$ のとき　$a-b<2$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{2}$

よって，$(a,\ b)=(4,\ 3)$ の 1 個

(iii) $a>b>c=3$ のとき　$a-b<3$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{3}$

よって，$(a,\ b)=(5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (7,\ 5)$ の 4 個

(iv) $a>b>c=4$ のとき　$a-b<4$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{4}$

よって，$(a,\ b)=(6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$ の 3 個

(v) $a>b>c=5$ のとき　$a-b<5$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{5}$

よって，$(a,\ b)=(7,\ 6)$ の 1 個

したがって，求める組の個数は　$1+4+3+1=\mathbf{9}$ (個)

(3) a，b，c は1以上7以下の自然数であるから，$a > b = c$ のとき $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき $b + c > a$ かつ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

このとき，$a > b = c$ であるから $c + c > a$ すなわち $2c > a > c$

これは (1) の個数に等しいから 9 (個)

また，$a = b = c$ となる個数は7個であるから，以上をまとめると

- $a = b > c$ の場合が9個であるから，
  $b = c > a$，$c = a > b$ の場合もそれぞれ9個
- $a > b = c$ の場合が9個であるから，
  $b > c = a$，$c > a = b$ の場合もそれぞれ9個
- $a > b > c$ の場合が9個であるから，
  $$a > c > b,\ b > a > c,\ b > a > c,\ c > a > b,\ c > b > a$$
  の場合もそれぞれ9個
- $a = b = c$ の場合が7個

よって，条件 $(*)$ をみたす a，b，c の個数は

$$9 \times 3 + 9 \times 3 + 9 \times 6 + 7 = \mathbf{115} \quad (\text{個})$$

■

8.2　2016 年 (120 分)

1 四面体 OABC において，P を OA の中点，Q を辺 OB を 2 : 1 に内分する点，R を辺 BC の中点とする．P，Q，R を通る平面と辺 AC の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ．

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ．

2 a を正の定数とし，$f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $a = 2$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ．

(3) $0 < a \leqq \dfrac{3}{2}$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を a を用いて表せ．また，その条件をみたす点 $(a,\ b)$ の領域を ab 平面上に図示せよ．

3 a を正の定数とし，2 曲線 $C_1 : y = \log x$，$C_2 : y = ax^2$ が点 P で接しているとする．以下の問に答えよ．

(1) P の座標と a の値を求めよ．

(2) 2 曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

4 約数，公約数，最大公約数を次のように定める．

- 2 つの整数 a，b に対して，$a = bk$ をみたす整数 k が存在するとき，b は a の約数であるという．
- 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という．
- 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という．

以下の問に答えよ．

(1) a，b，c，p は 0 でない整数で $a = pb + c$ を満たしているとする．

(i) $a = 18$，$b = 30$，$c = -42$，$p = 2$ のとき，a と b の公約数の集合 S，および b と c の公約数の集合 T を求めよ．

(ii) a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とする．M と N は等しいことを示せ．ただし，a，b，c，p は 0 でない任意の整数とする．

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n \ (n = 1, 2, \cdots), \quad a_1 = 3, \ a_2 = 4$$

で定める．

(i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

(ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ．

(iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ．

5 極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1 + \cos\theta \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ．

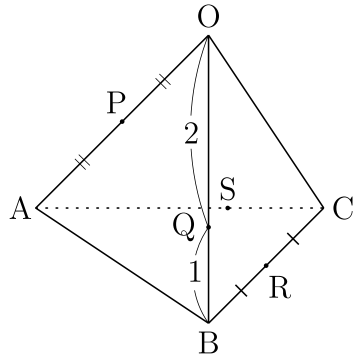
(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi} \frac{dy}{dx}$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ．

(4) 曲線 C の長さを求めよ．

解答例

1 (1) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \boldsymbol{\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}}$$

(2) S は平面 PQR 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + \frac{t}{2}\right)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}$$

このとき，S は直線 AC 上の点であるから

$$\frac{1}{2}(1-s-t) + \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{2}{3}s + \frac{t}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = -1,\ t = \frac{4}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}| = 2 : 1}$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{QS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2$$
$$= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 8\vec{b}\cdot\vec{c} + 4\vec{c}\cdot\vec{a})$$

このとき　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \dfrac{1}{9}(1+4+4-2-4+2) = \dfrac{5}{9}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{QS}}| = \dfrac{\sqrt{5}}{3}}$ ■

2 (1) $g(x) = x^2 + 2ax + a$ とおくと　$g(x) = (x+a)^2 - a^2 + a$

$a > 0$ に注意すると

(i) $-a^2 + a \geqq 0$，すなわち，$0 < a \leqq 1$ のとき，$g(x) \geqq 0$ であるから

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

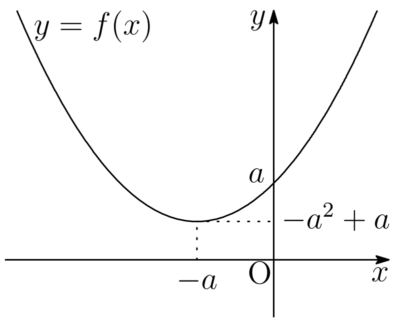
(ii) $-a^2 + a < 0$，すなわち，$1 < a$ のとき，

$g(x) = 0$ の解は　$x = -a \pm \sqrt{a^2 - a}$

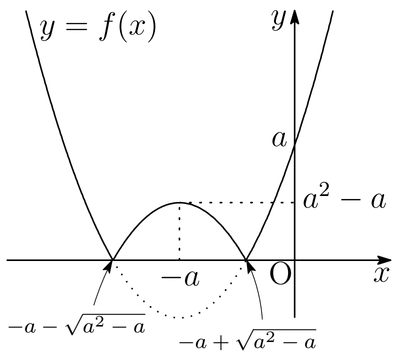
$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & (x \leqq -a - \sqrt{a^2 - a},\ -a + \sqrt{a^2 - a} \leqq x) \\ -g(x) & (-a - \sqrt{a^2 - a} \leqq x \leqq -a + \sqrt{a^2 - a}) \end{cases}$$

(i)，(ii) より，$y = f(x)$ のグラフは，次のようになる．

(i) $0 < a \leqq 1$ のとき



(ii) $1 < a$ のとき



(2) $a = 2$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は，(1)(ii) のグラフに $a = 2$ を代入して

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

また，$g(x) = x^2 + 4x + 2$ であるから，$g'(x) = 2x + 4$ より

$$g'(-2 + \sqrt{2}) = 2(-2 + \sqrt{2}) + 4 = 2\sqrt{2} > 2$$

点 $(-2 + \sqrt{2},\ 0)$ が直線 $y = 2x + b$ の上側またはこの直線上にあるときで

$$0 \geqq 2(-2 + \sqrt{2}) + b \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b \leqq 4 - 2\sqrt{2}}$$

(3)　(i) $0 < a \leqq 1$ のとき，すべての x について，

$$g(x) \geqq 2x + b \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2(a-1)x + a - b \geqq 0$$

が成り立つので，係数について

$$(a-1)^2 - (a-b) \leqq 0 \quad \text{よって} \quad b \leqq -a^2 + 3a - 1$$

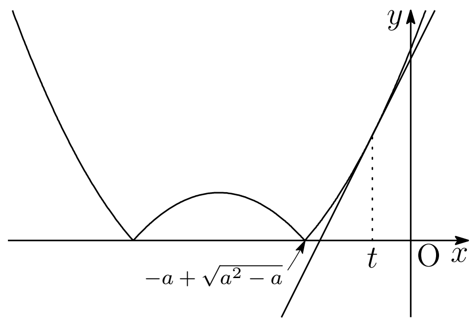
(ii) $1 < a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$g'(x) = 2x + 2a$ より

$$g'(-a + \sqrt{a^2 - a}) = 2(-a + \sqrt{a^2 - a}) + 2a = 2\sqrt{a^2 - a}$$

ここで　$a^2 - a = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$　ゆえに　$0 < a^2 - a \leqq \dfrac{3}{4}$

このとき　$g'(-a + \sqrt{a^2 - a}) \leqq 2\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \sqrt{3} < 2$

したがって，$y = f(x)$ と $y = 2x + b$ のグラフが接するとき，接点は，x 軸の上側にある．接点の x 座標を t とすると，$g'(t) = 2$ より



$$2t + 2a = 2$$

これを解いて　$t = 1 - a$

$y = g(x)$ 上の点 $(1 - a,\ g(1 - a))$ における接線の方程式は

$$y - g(1-a) = 2(x - 1 + a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - a^2 + 3a - 1$$

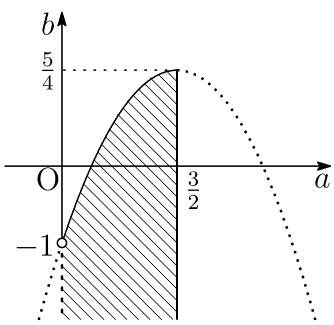
$f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つとき，直線 $y = 2x + b$ はこの直線の下側または一致するので，求める条件は

$$b \leqq -a^2 + 3a - 1$$

よって，(i)，(ii) より，求める領域は

$$\boldsymbol{b \leqq -a^2 + 3a - 1\ (0 < a \leqq 3)}$$

また，点 $(a,\ b)$ の領域は，右の図の斜線部分部分である．



3 (1) $f(x) = \log x$，$g(x) = ax^2$ とすると　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$，$g'(x) = 2ax$

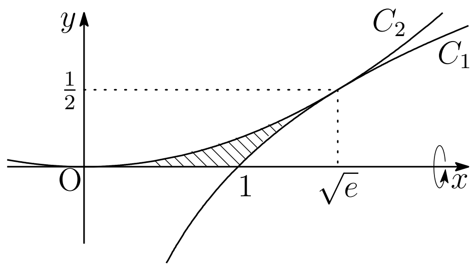
点 P の x 座標を t とすると，$f(t) = g(t)$，$f'(t) = g'(t)$ であるから

$$\log t = at^2, \quad \frac{1}{t} = 2at$$

第２式から　$at^2 = \dfrac{1}{2}$　これを第１式に代入すると

$$\log t = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{t = \sqrt{e},} \quad \boldsymbol{a = \frac{1}{2e}}$$

(2) 求める立体の体積を V とすると



$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{x^2}{2e}\right)^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$$

ここで

$$\int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{x^2}{2e}\right)^2 dx = \frac{1}{4e^2}\int_0^{\sqrt{e}} x^4\,dx = \frac{1}{4e^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{20},$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx &= \Big[x(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} x(2\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{\sqrt{e}}{4} - 2\int_1^{\sqrt{e}} \log x\,dx \\ &= \frac{\sqrt{e}}{4} - 2\Big[x(\log x - 1)\Big]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{\sqrt{e}}{4} + \sqrt{e} - 2 = \frac{5}{4}\sqrt{e} - 2\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{V}{\pi} = \dfrac{\sqrt{e}}{20} - \left(\dfrac{5}{4}\sqrt{e} - 2\right) = 2 - \dfrac{6}{5}\sqrt{e}$

よって　$V = \boldsymbol{\left(2 - \dfrac{6}{5}\sqrt{e}\right)\pi}$ ■

$\boxed{4}$ (1) (i) $a = 18 = 2{\cdot}3^2$，$b = 30 = 2{\cdot}3{\cdot}5$，$c = -42 = -2{\cdot}3{\cdot}7$ より

$$S = \{\pm\mathbf{1},\ \pm\mathbf{2},\ \pm\mathbf{3},\ \pm\mathbf{6}\},$$
$$T = \{\pm\mathbf{1},\ \pm\mathbf{2},\ \pm\mathbf{3},\ \pm\mathbf{6}\}$$

(ii) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記すると

$$(x, y)\,|\,x, \quad (x, y)\,|\,y$$

が成り立つ．$a = pb + c$ より　$(b, c)\,|\,a$　また，$(b, c)\,|\,b$ であるから，(b, c) は a と b の公約数，すなわち

$$(b, c)\,|\,(a, b) \quad \cdots①$$

同様に，$c = a - pb$ より　$(a, b)\,|\,c$　また，$(a, b)\,|\,b$ であるから，(a, b) は b と c の公約数，すなわち

$$(a, b)\,|\,(b, c) \quad \cdots②$$

①，② より　$(a, b) = (b, c)$　よって　$M = N$

(2) (i) (1)(ii) を $a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n$ に適用すると　$(a_{n+2}, a_{n+1}) = (a_{n+1}, a_n)$
よって　$(a_{n+1}, a_n) = (a_2, a_1) = (4, 3) = \mathbf{1}$

(ii) $a_{n+4} = 6a_{n+3} + a_{n+2}$，$a_{n+3} = 6a_{n+2} + a_{n+1}$，

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= 6a_{n+3} + a_{n+2} = 6(6a_{n+2} + a_{n+1}) + a_{n+2} \\ &= 37a_{n+2} + 6a_{n+1} \end{aligned}$$

$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n$ より，$6a_{n+1} = a_{n+2} - a_n$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= 37a_{n+2} + (a_{n+2} - a_n) \\ &= 38a_{n+2} - a_n \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_{n+4} = 38a_{n+2} - a_n}$

(iii) (1)(ii) を $a_{n+4} = 38a_{n+2} + (-a_n)$ に適用すると

$$(a_n + 4,\ a_{n+2}) = (a_{n+2}, -a_n) = (a_{n+2},\ a_n)$$

$a_3 = 6a_2 + a_1 = 6{\cdot}4 + 3 = 27$，$a_4 = 6a_3 + a_2 = 6{\cdot}27 + 4 = 166$

(ii) の結果により

n が奇数のとき　$(a_{n+2}, a_n) = (a_3, a_1) = (27, 3) = \mathbf{3}$

n が偶数のとき　$(a_{n+2}, a_n) = (a_4, a_2) = (166, 4) = \mathbf{2}$　■

$\boxed{5}$ (1) $r = 1 + \cos\theta$ より

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

これらを θ について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta(1+2\cos\theta), \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -(1-\cos^2\theta) + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= (1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta) \end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\mathbf{(2,\ 0),\ (0,\ 0),\ \left(-\dfrac{1}{4},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}$

また，$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = \pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\mathbf{(0,\ 0),\ \left(\dfrac{3}{4},\ \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$

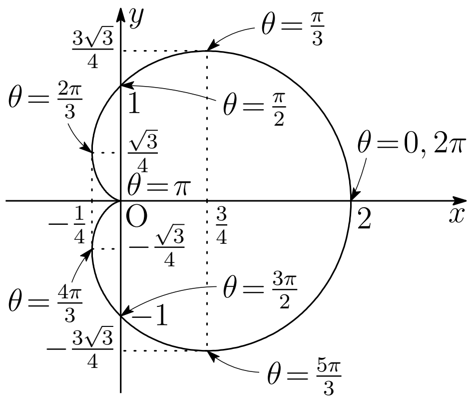
(2) $$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} &= \frac{(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)} \\ &= \frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx} = \lim_{\theta\to\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} = \frac{0}{1+1}\cdot\frac{1+2}{1-2} = \mathbf{0}$

(3) $f(\theta)=1+\cos\theta$ とすると，$f(2\pi-\theta)=r(\theta)$．C は x 軸に関して対称であるから，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における C の増減を調べる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

上の増減表および (2) の結果から，C の概形は次のようになる．



(4) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta$$

ゆえに　$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

$r=1+\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2 \\ &= 2(1+\cos\theta)=4\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって，曲線 C の長さを l とすると

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\left[\,4\sin\frac{\theta}{2}\,\right]_0^{\pi}=4 \end{aligned}$$

よって　$l=\mathbf{8}$

補足 曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ は，カージオイド (cardioid) または心臓形という．

解説

C の x 軸の上側の部分と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\ r^2\sin\theta\cos\theta\ \Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\ \frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin\theta\ \Big]_0^{\pi} = \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

C の x 軸の上側の部分を x 軸のまわりに 1 回転した回転体の体積を V とすると

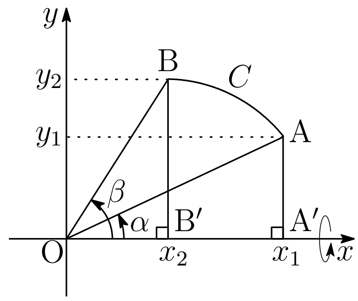
$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y^2\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y^2\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\Big[\ r^3\sin^2\theta\cos\theta\ \Big]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\Big[\ -\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\ \Big]_0^{\pi} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

よって　　$V = \dfrac{8}{3}\pi$

　曲線 $r = f(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の弧長 l，x 軸と囲まれた部分の面積 S，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta, \quad S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,d\theta, \quad V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta$$

極方程式と面積



$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から x 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．$S_A = \triangle\mathrm{OAA'}$，$S_B = \triangle\mathrm{OBB'}$ とし，曲線 C，x 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域 D_C の面積を S_C，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域 D の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S_C &= \int_{x_2}^{x_1} y\,dx = \int_\beta^\alpha r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_\alpha^\beta r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\ r^2\sin\theta\cos\theta\ \Big]_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta + \int_\alpha^\beta r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -S_B + S_A + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$S = S_C + S_B - S_A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$

極方程式と x 軸の周りの回転体の体積

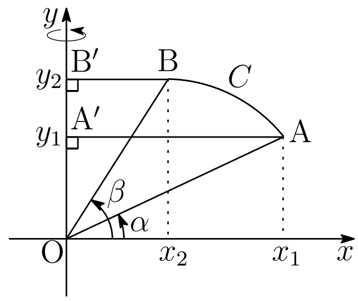
次に $\triangle\mathrm{OAA'}$，$\triangle\mathrm{OBB'}$ を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると

$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi\int_{x_2}^{x_1} y^2\,dx = \pi\int_\beta^\alpha r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_\alpha^\beta (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \pi\int_\alpha^\beta r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\Big[\ r^3\sin^2\theta\cos\theta\ \Big]_\alpha^\beta + \frac{\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)d\theta + \pi\int_\alpha^\beta r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -V_B + V_A + \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$V = V_C + V_B - V_A = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta\,d\theta$

極方程式と y 軸の周りの回転体の体積

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から y 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．曲線 C，y 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域を D_C とし，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域を D とする．△OAA′，△OBB′ を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると



$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy = \pi\int_\alpha^\beta r^2\cos^2\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\int_\alpha^\beta (r^3)'\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + \pi\int_\alpha^\beta r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\Big[\,r^3\cos^2\theta\sin\theta\,\Big]_\alpha^\beta - \frac{\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(-2\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta)d\theta + \pi\int_\alpha^\beta r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= V_B - V_A + \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　$V = V_C + V_A - V_B = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta\,d\theta$

極方程式の計量

- 弧長 l　$\boldsymbol{l = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$
- 面積 S　$\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta}$
- x 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta\,d\theta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi)}$$

- y 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta\,d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)}$$

8.3 2017 年 (120 分)

1 n を自然数とする．

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく．$3 < \pi < 4$ であることを用いて，以下の問に答えよ．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x) < 0$ であることを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ．

(3) (2) における解を x_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n$ を求めよ．

2 n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式をみたす S の値を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

(3) 不等式

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

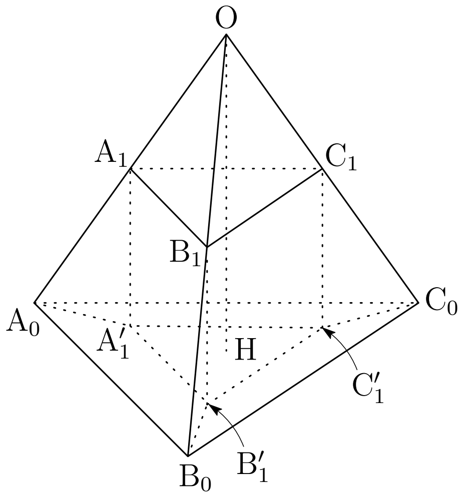
が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ．

3 1 辺の長さが a_0 の正四面体 $\mathrm{OA_0B_0C_0}$ がある．図のように，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上の点 $\mathrm{A_1}$，辺 $\mathrm{OB_0}$ 上の点 $\mathrm{B_1}$，辺 $\mathrm{OC_0}$ 上の点 $\mathrm{C_1}$ から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_1A_1'}$，$\mathrm{B_1B_1'}$，$\mathrm{C_1C_1'}$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_1B_1C_1-A_1'B_1'C_1'}$ は正三角柱になるとする．ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする．同様に，点 $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{A_2'}$，$\mathrm{B_2'}$，$\mathrm{C_2'}$，$\cdots$ を次のように定める．正四面体 $\mathrm{OA_kB_kC_k}$ において，辺 $\mathrm{OA_k}$ 上の点 $\mathrm{A_{k+1}}$，辺 $\mathrm{OB_k}$ 上の点 $\mathrm{B_{k+1}}$，辺 $\mathrm{OC_k}$ 上の点 $\mathrm{C_{k+1}}$ から平面 $\mathrm{A_kB_kC_k}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_{k+1}A_{k+1}'}$，$\mathrm{B_{k+1}B_{k+1}'}$，$\mathrm{C_{k+1}C_{k+1}'}$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}-A_{k+1}'B_{k+1}'C_{k+1}'}$ は正三角柱になるとする．辺 $\mathrm{A_kB_k}$ の長さを a_k とし，正三角柱 $\mathrm{A_kB_kC_k-A_k'B_k'C_k'}$ の体積を V_k とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 O から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta = \angle \mathrm{OA_0H}$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) a_1 を a_0 を用いて表せ．

(3) V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ を求めよ．



$\boxed{4}$ $\vec{v}_1 = (1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}_2 = (1, -1, -1)$，$\vec{v}_3 = (-1,\ 1, -1)$，$\vec{v}_4 = (-1, -1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ (1，2，3，4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る) をふるごとに，出た目が k $(k = 1, 2, 3, 4)$ のときは $\vec{v}_k$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \vec{v}_k$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0 = \mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ．

(4) n を 6 以下の自然数とする．$\mathrm{P}_n = \mathrm{O}$ となる確率を求めよ．

$\boxed{5}$ r，c，ω は正の定数とする．座標平面上の動点 P は時刻 $t = 0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする．また，動点 Q は時刻 $t = 0$ のとき点 $(0, -r)$ にあるとする．点 P から見て，動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問に答えよ．

(1) 時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ．

(2) 動点 Q の描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1 \neq t_2$ ならば $(x(t_1),\ y(t_1)) \neq (x(t_2),\ y(t_2))$ であるための必要十分条件を r，c，ω を用いて与えよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = \sin x - nx^2 + \dfrac{1}{9}x^3$ より

$$f'(x) = \cos x - 2nx + \frac{1}{3}x^2,$$
$$f''(x) = -\sin x - 2n + \frac{2}{3}x$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\pi < 4$ に注意して

$$f''(x) < -2n + \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} < -2\cdot 1 + \frac{\pi}{3} < -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

(2) $f'(0) = 1 > 0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2n\cdot\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$
$$= -\pi\left(n - \frac{\pi}{12}\right) = -\pi\left(1 - \frac{\pi}{12}\right) < 0$$

(1) の結果から，$f'(x)$ は単調減少であるから，上の結果により

$$f'(\alpha) = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす α が唯一存在する．

また　$f(0) = 0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3$
$$< 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{2}\right)^3 = -\frac{13}{36} < 0$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$f(\frac{\pi}{2})$

よって，方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ 1 つの解をもつ．

(3) $f(x_n) = 0$ であるから　$\sin x_n - n{x_n}^2 + \dfrac{1}{9}{x_n}^3 = 0 \quad \cdots(*)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} {x_n}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin x_n + \frac{1}{9}{x_n}^3\right) = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

上式および $(*)$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n} + \frac{1}{9}{x_n}^2\right) = \mathbf{1}$ ■

2 (1) $t \neq 0$ のとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ 　ゆえに $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^n - \frac{1}{1-t} = -\frac{t^{n+1}}{1-t}$

$t = -e^{-x}$ とおいて，上式に代入すると

$$\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k - \frac{1}{1+e^{-x}} = -\frac{(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} &= 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-kx} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \int_0^1 e^{-kx}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big[-\frac{e^{-kx}}{k}\Big]_0^1 - \Big[\log(1+e^{-x})\Big]_0^1 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - \log\frac{1+e^{-1}}{2} \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S = \log\dfrac{1+e^{-1}}{2}}$

(3) $0 \leqq \dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \leqq e^{-(n+1)x}$ であるから

$$\begin{aligned}0 \leqq \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leqq \int_0^1 e^{-(n+1)x}dx &= \Big[-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\Big]_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-n-1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ から，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} = 0$

$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - \log\frac{1+e^{-1}}{2} = 0$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} = \boldsymbol{\log\frac{1+e^{-1}}{2}}$ ■

3 (1) 直角三角形 $\mathrm{OA_0H}$ について　$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{A_0H}}{\mathrm{OA_0}} = \dfrac{\mathrm{A_0H}}{a_0}$

H は $\triangle\mathrm{A_0B_0C_0}$ の外心であるから，正弦定理により

$$\frac{a_0}{\sin 60^\circ} = 2\mathrm{A_0H}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{\mathrm{A_0H}}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

また　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2}{3}}}$

(2) $\mathrm{OA_1} = \mathrm{A_1B_1} = a_1$ より　$\mathrm{A_0A_1} = a_0 - a_1$

$\mathrm{A_1A_1'} = \mathrm{A_0A_1}\sin\theta = (a_0 - a_1)\sin\theta$ であるから，$\mathrm{A_1B_1} = \mathrm{A_1A_1'}$ のとき

$$a_1 = (a_0 - a_1)\sin\theta\quad \text{ゆえに}\quad a_1 = \frac{a_0\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

よって　$a_1 = \dfrac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}a_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}a_0 = \boldsymbol{(\sqrt{6}-2)a_0}$

(3) (2) と同様にして　$a_{k+1} = (\sqrt{6}-2)a_k$　ゆえに　$a_k = (\sqrt{6}-2)^k a_0$

したがって　$V_k = \dfrac{1}{2}{a_k}^2\sin 60^\circ\cdot a_k = \dfrac{\sqrt{3}}{4}{a_k}^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}-2)^{3k}{a_0}^3$

$|\sqrt{6}-2| < 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} V_k &= \frac{\sqrt{3}{a_0}^3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{6}-2)^{3k}\\ &= \frac{\sqrt{3}{a_0}^3}{4}\cdot\frac{(\sqrt{6}-2)^3}{1-(\sqrt{6}-2)^3} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18}{a_0}^3}\end{aligned}$$

■

4 (1) $i, j = 1, 2, 3, 4$ とし，$\vec{v}_i + \vec{v}_j$ が x 軸と平行になる組み合わせは

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (2,\ 0,\ 0)\\ \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = (-2,\ 0,\ 0)\end{aligned}$$

したがって，求める確率は　$\dfrac{2!+2!}{4^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) $\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，次のベクトルからなる．

$$\begin{aligned}
&\vec{v_1}+\vec{v_1}=2\vec{v_1}, && \vec{v_2}+\vec{v_2}=2\vec{v_2},\\
&\vec{v_3}+\vec{v_3}=2\vec{v_3}, && \vec{v_4}+\vec{v_4}=2\vec{v_4},\\
&\vec{v_1}+\vec{v_2}=\vec{v_2}+\vec{v_1}=2\vec{e_1}, && \vec{v_1}+\vec{v_3}=\vec{v_3}+\vec{v_1}=2\vec{e_2},\\
&\vec{v_1}+\vec{v_4}=\vec{v_4}+\vec{v_1}=2\vec{e_3}, && \vec{v_2}+\vec{v_3}=\vec{v_3}+\vec{v_2}=-2\vec{e_3},\\
&\vec{v_2}+\vec{v_4}=\vec{v_4}+\vec{v_2}=-2\vec{e_2}, && \vec{v_3}+\vec{v_4}=\vec{v_4}+\vec{v_3}=-2\vec{e_1}
\end{aligned}$$

$\vec{v_j}\cdot\vec{e_k}\neq 0$ であるから $(j=1,2,3,4,\ k=1,2,3)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ となるのは，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ が座標軸に平行で，互いに垂直な場合について調べればよい．(1) の結果と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，x 軸，y 軸，z 軸と平行となる確率は $\dfrac{1}{4}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\times{}_3\mathrm{P}_2=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(3) $i\neq j,\ j\neq k,\ k\neq i$ のとき，$\vec{v_i},\ \vec{v_j},\ \vec{v_k}$ は 1 次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}$ がすべて異なる場合を除く確率であるから

$$1-\frac{{}_4\mathrm{P}_3}{4^3}=1-\frac{4\cdot3\cdot2}{4^3}=\boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

(4) $\vec{v_i}(i=1,2,3,4)$ の成分はすべて奇数である．
ゆえに，$n=1,\ 3,\ 5$ のとき，$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ となる確率は　0
$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_4P_6}}$ は (2) で求めたベクトルである．
ゆえに，$n=2,6$ のとき，$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ のとなる確率は　0
$n=4$ のとき，$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ のとなるのは，$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}+\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ が

$$\begin{aligned}
&2\vec{e_1}+(-2\vec{e_1}), && 2\vec{e_2}+(-2\vec{e_2}), && 2\vec{e_3}+(-2\vec{e_3}),\\
&-2\vec{e_1}+2\vec{e_1}, && -2\vec{e_2}+2\vec{e_2}, && -2\vec{e_3}+2\vec{e_3}
\end{aligned}$$

の場合である．このとき，求める確率は　$\dfrac{2}{4^2}\cdot\dfrac{2}{4^2}\times6=\dfrac{3}{32}$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{n=1,2,3,5,6}$ **のとき** $\boldsymbol{0}$，　$\boldsymbol{n=4}$ **のとき** $\boldsymbol{\dfrac{3}{32}}$

$\boxed{5}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (ct,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (r\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}),\ r\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})) = (r\sin\omega t, -r\cos\omega t)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (ct + r\sin\omega t, -r\cos\omega t)$

よって　$\mathbf{Q}(\boldsymbol{ct + r\sin\omega t, -r\cos\omega t})$

(2) $(x(t_1),\ y(t_1)) = (x(t_2),\ y(t_2))$ ならば $t_1 = t_2$ であるための必要十分条件を求めればよい．(1) の結果から，$(x(t_1),\ y(t_1)) = (x(t_2),\ y(t_2))$ のとき

$$ct_1 + r\sin\omega t_1 = ct_2 + r\sin\omega t_2, \quad -r\cos\omega t_1 = -r\cos\omega t_2$$

上の 2 式から

$$r(\sin\omega t_2 - \sin\omega t_1) = c(t_2 - t_1), \quad r(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1) = 0$$

したがって

$$\begin{aligned} c^2(t_2 - t_1)^2 &= r^2(\sin\omega t_2 - \sin\omega t_1)^2 + r^2(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1)^2 \\ &= 2r^2\{1 - \cos\omega(t_2 - t_1)\} \\ &= 4r^2\sin^2\frac{\omega(t_2 - t_1)}{2} \end{aligned}$$

ここで，$\theta = \dfrac{\omega(t_2 - t_1)}{2}$ とおくと

$$c^2\left(\frac{2\theta}{\omega}\right)^2 = 4r^2\sin^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{c}{r\omega}|\theta| = |\sin\theta|$$

これが $\theta = 0$ 以外に解をもたない条件，すなわち，方程式

$$\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| = \frac{c}{r\omega} \qquad \cdots(*)$$

が解を持たない条件を求めればよい．$f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ とすると，$f(-\theta) = f(\theta)$ であるから，$\theta > 0$ について調べる．

$$\lim_{\theta \to +0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

$y = \sin\theta$ と $y = \theta$ のグラフから，$0 < \theta \leqq \pi$ のとき

$$\theta > \sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

$\theta > \pi$ のとき　$\left|\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right| < \dfrac{1}{\pi}$　したがって　$\left|\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right| < 1$

$(*)$ が解をもたないとき　$\dfrac{c}{r\omega} \geqq 1$　よって　$\boldsymbol{c \geqq r\omega}$ ■

8.4　2018 年 (120 分)

1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする．辺 OA を $1-t : t$ に内分する点を P，辺 OB を $t : 1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする．また $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ．

(3) t が (2) で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ．

2 k を 2 以上の整数とする．また

$$f(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $x > 0$ において，関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$，$x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を満たすとき，$x_n > 1$ を示せ．

(3) (2) の数列 $\{x_n\}$ に対し，

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ．また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

3 さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots (*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ．

(2) $(*)$ が整数を解にもつとする．このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ．

(3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ．

4 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ 3 次式で，3 次の係数は 1，定数項は -3 とする．方程式 $f(x)=0$ は，1 と虚数 α, β を解にもつとし，α の実部は 1 より大きく，α の虚部は正とする．複素数平面上で α, β, 1 が表す点を順に A，B，C とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．

(1) α の絶対値を求めよ．

(2) θ を α の偏角とする．$\triangle$ABC の面積 S を θ を用いて表せ．

(3) S を最大にする θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ．

5 座標空間において，O を原点とし，A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(1, 1, 0) とする．$\triangle$OAB を直線 OC の周りに 1 回転してできる回転体を L とする．以下の問に答えよ．

(1) 直線 OC 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$ から直線 OC におろした垂線を PH とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x，y，z の式で表せ．

(2) 点 P$(x,\ y,\ z)$ が L の点であるための条件は

$$z^2 \leqq 2xy \text{ かつ } 0 \leqq x+y \leqq 2$$

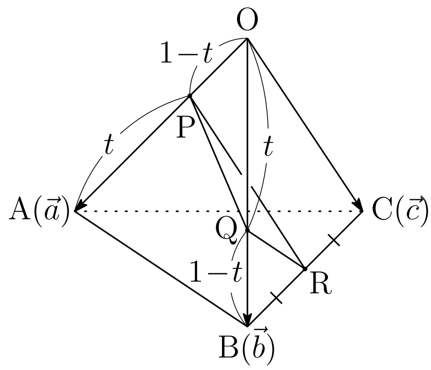
であることを示せ．

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする．L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ．

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y, z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

(2) $\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ であるから

$$\{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right\}=0$$

ゆえに　$(1-t)\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{2}(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}-t\left(\dfrac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2-\dfrac{1}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

上式に $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{b}|=1$ を代入すると

$$\frac{1}{2}(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)+\frac{1}{4}(1-t)-t\left(\frac{1}{2}-t\right)-\frac{1}{4}t=0$$

整理すると　$6t^2-7t+2=0$　ゆえに　$(2t-1)(3t-2)=0$

$0<t<1$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}}$

(3) (i) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{2}|\vec{c}|=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2-2\cdot\frac{1}{2}+1^2}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

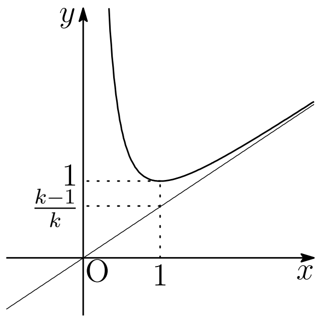
(ii) $t=\dfrac{2}{3}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{6}(-\vec{a}+3\vec{c})$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot1^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2}=\dfrac{1}{6}\sqrt{1^2-6\cdot\frac{1}{2}+9\cdot1^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{6}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{36}}$　■

2 (1) $f(x) = \dfrac{1}{k}\left((k-1)x + \dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ より



$$f'(x) = \frac{1}{k}(k-1)\left(1 - \frac{1}{x^k}\right) \quad \cdots (*)$$

$x > 0$ において，$f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \infty，\quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \frac{k-1}{k}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{kx^{k-1}} = 0$$

したがって，$y = f(x)$ の漸近線は　　$\boldsymbol{x = 0，y = \dfrac{k-1}{k}x}$

よって，グラフの概形は右の図のようになる．

(2) $x_n > 1$ であることを数学的帰納法により示す．

［1］$x_1 > 1$ であるから，$n = 1$ のとき成立する．

［2］$n = j$ のとき，$x_j > 1$ であると仮定すると，平均値の定理により

$$\frac{x_{j+1} - 1}{x_j - 1} = \frac{f(x_j) - f(1)}{x_j - 1} = f'(c)$$

を満たす c $(1 < c < x_j)$ が存在する．このとき，$(*)$ より

$$0 < f'(c) = \frac{k-1}{k}\left(1 - \frac{1}{c^k}\right) < \frac{k-1}{k}$$

したがって　　$0 < \dfrac{x_{j+1} - 1}{x_j - 1} < \dfrac{k-1}{k} \quad \cdots (**)$

よって，$x_j > 1$ のとき，$x_{j+1} > 1$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$x_n > 1$ が成立する．

(3) $(**)$ より，$n > 1$ のとき　$0 < \displaystyle\prod_{j=1}^{n-1}\frac{x_{j+1} - 1}{x_j - 1} < \prod_{j=1}^{n-1}\frac{k-1}{k}$

したがって　　$0 < \dfrac{x_n - 1}{x_1 - 1} < \left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - 1) = 0 \quad すなわち \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

解説 (2) ですべての自然数 n について，$x_n > 1$ を示した (下に有界).

$x > 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right) - x \\ &= \frac{1}{k}\left(-1 + \frac{1}{x^{k-1}}\right) = \frac{1-x^k}{kx^{k-1}} < 0 \end{aligned}$$

$x_j > 1$ のとき，$f(x_j) - x_j < 0$　ゆえに　$x_{j+1} < x_j$

$\{x_n\}$ は下に有限な単調減少列であるから，$\{x_n\}$ は極限値をもつ[2].

$x > 1$ $(0 < x < 1$ でもよい$)$ のとき，$f(x) - 1 > 0$ は，次式からも示される.

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{kx^{k-1}}\{(k-1)x^k - kx^{k-1} + 1\} \\ &= \frac{(x-1)^2}{kx^{k-1}}\sum_{j=1}^{k-1} jx^{j-1} \end{aligned}$$

または，$f''(x) = \dfrac{k-1}{x^{k+1}}$ より，$x > 0$ において，$f''(x) > 0$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) - 1 = f(x) - f(1) &= \int_1^x f'(t)\,dt = -\int_1^x (x-t)'f'(t)\,dt \\ &= -\Big[\,(x-t)f'(t)\,\Big]_1^x + \int_1^x (x-t)f''(t)\,dt \\ &= (x-1)f'(1) + \int_1^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_1^x (x-t)f''(t)\,dt \end{aligned}$$

$1 < x$ のとき，$1 < t < x$ において，$x - t > 0$ より　$\displaystyle\int_1^x (x-t)f''(t)\,dt > 0$

$x < 1$ のとき，$x < t < 1$ において，$t - x > 0$ より

$$\int_1^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_x^1 (t-x)f''(t) > 0$$

したがって，$0 < x_1 < 1$ であっても，$x_j > 1$ $(j = 2, 3, \cdots)$ より

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

■

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2008.pdf $\boxed{8}$ を参照.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2次方程式 $x^2 - ax + b = 0 \cdots (*)$ が $x = 1$ を解にもつから　$b = a - 1$

$1 \leqq a \leqq 6$，$2 \leqq b \leqq 12$ であるから

$$(a,\ b) = (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$$

a の値に対する確率は $\dfrac{1}{6}$，それぞれの b の値に対する確率は

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36}\right) = \frac{10}{216} = \mathbf{\frac{5}{108}}$$

(2) 2次方程式 $(*)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

$(*)$ の整数解を α とすると，上の第1式から

$$\beta = a - \alpha$$

上式の右辺は整数であるから，β も整数である．

2整数 α，β について，$\alpha \leqq \beta$ とおいても一般性を失わないから

$$2\alpha \leqq \alpha + \beta = a \leqq 6 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha \leqq 3$$

(3) (i) $x = 2$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき　$b = 2a - 4$

$$(a,\ b) = (3,\ 2),\ (4,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 8)$$

(ii) $x = 3$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき　$b = 3a - 9$

$$(a,\ b) = (4,\ 3),\ (5,\ 6)\ (6,\ 9)$$

(1),(i),(ii) より

a	3	4	4,5	6	5	6	6
b	2	3	4	5	6	8	9

よって，求める確率は

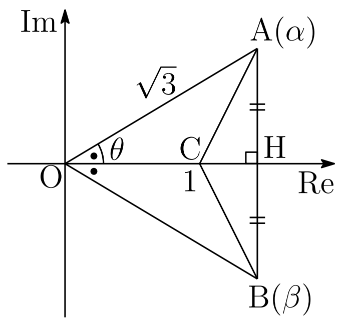
$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36}\cdot 2 + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36}\right) = \frac{27}{216} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

■

4 (1) 実数を係数とする 3 次方程式が虚数 α を解にもつとき，$\overline{\alpha}$ もこの方程式の解であるから，$\beta=\overline{\alpha}$ である．3 次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha\beta\cdot 1=|\alpha|^2=-\frac{-3}{1}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{|\alpha|=\sqrt{3}}$$

(2) 右の図において



$$\mathrm{CH}=\mathrm{OH}-\mathrm{OC}=\sqrt{3}\cos\theta-1$$
$$\mathrm{AH}=\sqrt{3}\sin\theta$$

よって　$S=2\triangle\mathrm{ACH}=2\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{CH}$
$\qquad=\boldsymbol{\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)}$

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の解を $\theta=\varphi$ とし，

$$g(\theta)=\frac{S}{\sqrt{3}}=\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)\quad (0<\theta<\varphi)$$

とすると

$$\begin{aligned} g'(\theta)&=\cos\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)+\sin\theta(-\sqrt{3}\sin\theta)\\ &=2\sqrt{3}\cos^2\theta-\cos\theta-\sqrt{3}\\ &=(\sqrt{3}\cos\theta+1)(2\cos\theta-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$\cos\dfrac{\pi}{6}>\cos\varphi$，すなわち，$\dfrac{\pi}{6}<\varphi$ に注意して

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	(φ)
$g'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$g(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，S を最大にする θ は　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$

ゆえに　$\alpha=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=\overline{\alpha}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

したがって，$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=3$ より，2 数 α, β を解とする 2 次方程式は

$$x^2-3x+3=0$$

よって　$f(x)=(x-1)(x^2-3x+3)=\boldsymbol{x^3-4x^2+6x-3}$

別解 $\alpha = p + qi$ とおくと $(1 < p < \sqrt{3},\ q > 0)$ $p^2 + q^2 = 3$

$S = (p-1)q$ より $S^2 = (p-1)^2q^2 = (p-1)^2(3-p^2)$

$h(p) = (p-1)^2(3-p^2)$ とおくと $(1 < p < \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} h'(p) &= 2(p-1)(3-p^2) + (p-1)^2\cdot(-2p) \\ &= 2(p-1)\{(3-p^2) - p(p-1)\} \\ &= -2(p-1)(2p^2-p-3) \\ &= -2(p-1)(2p-3)(p+1) \end{aligned}$$

p	(1)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$h'(p)$		$+$	0	$-$	
$h(p)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

S が極大となるとき，$p = \dfrac{3}{2}$ であるから

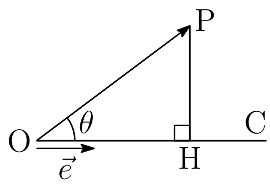
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + q^2 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって $\alpha = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\theta = \arg\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ ■

5 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e})\vec{e}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{x+y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{x+y}{2}(1,\ 1,\ 0)=\left(\boldsymbol{\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2},\ 0}\right),\\\overrightarrow{\mathrm{HP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2},\ 0\right)\\&=\left(\boldsymbol{\frac{x-y}{2},\ \frac{y-x}{2},\ z}\right)\end{aligned}$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ方向の単位ベクトルを $\vec{e}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta)\vec{e}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e})\vec{e}$

(2) P が L 上の点であるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|^2\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2$ より

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{y-x}{2}\right)^2+z^2\leqq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

これを整理すると　$z^2\leqq 2xy$　$\cdots$①

また，H は線分 OC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{x+y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$0\leqq\frac{x+y}{2}\leqq 1\quad すなわち\quad 0\leqq x+y\leqq 2\quad\cdots②$$

①，② より，求める条件は　$z^2\leqq 2xy$ かつ $0\leqq x+y\leqq 2$

(3) L の平面 $x=a\ (1 \leqq a \leqq 2)$ による断面の領域は

$$z^2 \leqq 2ay,\ 0 \leqq a+y \leqq 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{z^2}{2a} \leqq y \leqq 2-a$$

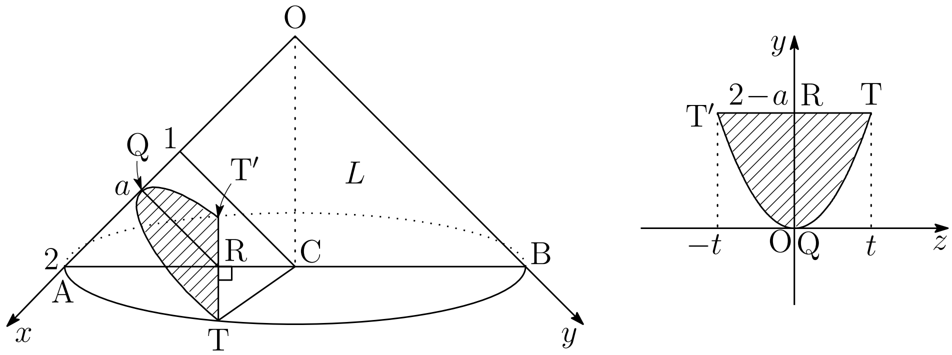
放物線 $y=\dfrac{z^2}{2a}$ と直線 $y=2-a$ の交点の z 座標は

$$2-a=\frac{z^2}{2a} \quad \text{ゆえに} \quad z=\pm\sqrt{2a(2-a)}$$

したがって，$S(a)$ は下の図の斜線部分の面積である．

ここで，$t=\sqrt{2a(2-a)}$ とおくと，$2-a=\dfrac{t^2}{2a}$ に注意して

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_{-t}^{t}\left(\frac{t^2}{2a}-\frac{z^2}{2a}\right)dz=\frac{1}{2a}\int_{-t}^{t}(t+z)(t-z)dz\\&=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{6}\cdot(2t)^3=\frac{2t^3}{3a}\\&=\frac{2\cdot 2a(2-a)\sqrt{2a(2-a)}}{3a}=\boldsymbol{\frac{4}{3}(2-a)\sqrt{2a(2-a)}}\end{aligned}$$



別解 平面 $x=a$ と x 軸，線分 AB との交点をそれぞれ Q，R とすると

$$\mathrm{QR}=\mathrm{QA}=2-a$$

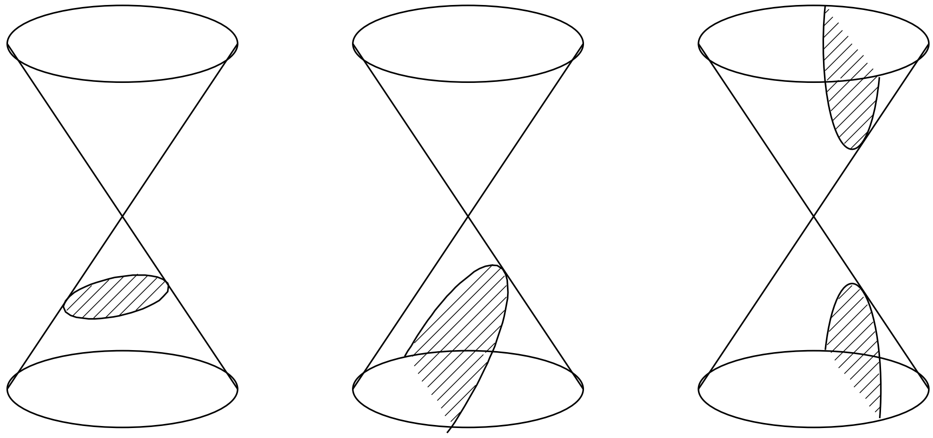
上の図において，$\mathrm{CR}=\sqrt{2}(a-1)$，$\mathrm{CT}=\mathrm{CA}=\sqrt{2}$ であるから

$$\mathrm{RT}=\sqrt{\mathrm{CT}^2-\mathrm{CR}^2}=\sqrt{2-2(a-1)^2}=\sqrt{2a(2-a)}$$

円錐の母線に平行な平面 $x=a$ による切り口は放物線であるから

$$\begin{aligned}S(a)&=\frac{2}{3}\mathrm{QR}\cdot\mathrm{TT'}=\frac{2}{3}\mathrm{QR}\cdot 2\mathrm{RT}\\&=\frac{2}{3}(2-a)\cdot 2\sqrt{2a(2-a)}=\frac{4}{3}(2-a)\sqrt{2a(2-a)}\end{aligned}$$

補足　平面による円錐面の切り口は 2 次曲線である．そのため，2 次曲線を円錐曲線ともいう．とくに，放物線となるのは，平面が母線と平行な場合である．また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合である．とくに，平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は 1 点に退化する．



楕円　　　　放物線　　　　双曲線

(4)　(3) の結果から，求める立体の体積を V とすると

$$V=\int_1^2 S(a)\,da=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_1^2(2-a)\sqrt{1-(a-1)^2}\,da$$

$u=a-1$ とおくと　$\dfrac{du}{da}=1$

a	$1\longrightarrow 2$
u	$0\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\int_1^2(2-a)\sqrt{1-(a-1)^2}\,da&=\int_0^1(1-u)\sqrt{1-u^2}\,du\\&=\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,du-\int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,du\\&=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{1}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

よって　　$V=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4}{9}\right)\sqrt{2}}$　■

8.5　2019 年 (120 分)

1 以下の問に答えよ．

(1) 関数
$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$
の $x > 0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ．

(2) a を $a \neq 1$ をみたす正の実数とする．曲線 $y = e^x$ と曲線 $y = x^a$ $(x > 0)$ が共有点 P をもち，さらに点 P において共通の接線をもつとする．点 P の x 座標を t とするとき，a と t の値を求めよ．

(3) a と t を (2) で求めた実数とする．x を $x \neq t$ をみたす正の実数とするとき，e^x と x^a の大小を判定せよ．

2 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2$ をみたす $\triangle$PAB を考え，辺 AB の中点を M，$\triangle$PAB の重心を G とする．以下の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ．

(3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ．ただし，$0 < \angle\mathrm{ABG} < \pi$ とする．

3 n を 2 以上の整数とする．2 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする．以下の問に答えよ．

(1) P_2，P_3，P_4 を求めよ．

(2) $n \geqq 36$ のとき，P_n を求めよ．

(3) $P_n = \dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする．

$$1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\cdots$$

すなわち，$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=4$ で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n=a_{n-3}$ とする．この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の問に答えよ．

(1) S_n を求めよ．

(2) $S_n=2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ．

(3) どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ．

$\boxed{5}$ 媒介変数表示

$$x=\sin t,\quad y=(1+\cos t)\sin t\quad (0\leqq t\leqq\pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ．

(2) C の凹凸を調べ，C の概形を描け．

(3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ を微分すると　$f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

よって　$\boldsymbol{x = e}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$

(2) $g(x) = e^x$，$h(x) = x^a$ とおくと　$g'(x) = e^x$，$h'(x) = ax^{a-1}$
条件より，$g(t) = h(t)$，$g'(t) = h'(t)$ であるから

$$(*) \begin{cases} e^t = t^a \\ e^t = at^{a-1} \end{cases}$$

上の2式から，e^t を消去すると

$$t^a = at^{a-1} \quad \text{ゆえに} \quad (t-a)t^{a-1} = 0$$

$t > 0$ より，$t = a$ であるから，これを $(*)$ の第1式に代入して

$$e^a = a^a \quad \text{ゆえに} \quad a = e \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = t = e}$$

(3) 条件より，e^x $(x \neq e)$ と x^e の大小を比較する．(1) の結果から

$$\frac{1}{e} > \frac{\log x}{x} \quad \text{ゆえに} \quad x > e\log x \quad \text{よって} \quad e^x > x^e$$

■

2　(1) 点 M は辺 AB の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}})$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} \quad \cdots ①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}} - \overrightarrow{\mathrm{PA}}| = 2$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = 4 + 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

上の結果を ① に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \frac{1}{4}(4 + 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 1}$$

(2) 点 G は △PAB の重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = 3\overrightarrow{\mathrm{GM}} \quad \cdots ②$

また，$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}})$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \dfrac{3}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}) \quad \cdots ③$

$\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} = 0 \quad \text{および} \quad |\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 2^2 = 4$$

③ より　$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \dfrac{9}{4}|\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2 = \dfrac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2)$

$$= \frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2) = \frac{9}{4}\cdot 4 = 9$$

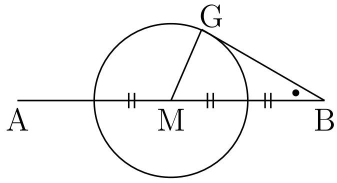
これを (1) の結果に代入して　$9 = \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 1$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 8}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ を (1) の結果に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = 1 + \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PM}}| = \frac{3}{2}$$

これに ② を代入することにより　$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{MG}}| = \dfrac{1}{2}$

したがって，G は M を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある．B からこの円に引いた接線と辺 AB のなす角が求める最大値であるから，$\mathrm{MB} = 1$ より



$$\boldsymbol{\angle\mathrm{ABG} = \frac{\pi}{6}}$$

■

3 (1) 2個のさいころの出た目をそれぞれa，bとし，$X = ab - 1$とおくと，Xは右の表のようになる．

$X = ab - 1$

$a \backslash b$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	7	9	11
3	2	5	8	11	14	17
4	3	7	11	15	19	23
5	4	9	14	19	24	29
6	5	11	17	23	29	35

$$X \equiv 0 \pmod{n} \quad \cdots (*)$$

を満たすXの個数について

$n = 2$のとき，次の9個

$0,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 14,\ 14,\ 24$

$n = 3$のとき，次の8個

$0,\ 3,\ 3,\ 3,\ 9,\ 9,\ 15,\ 24$

$n = 4$のとき，次の5個

$0,\ 4,\ 4,\ 8,\ 24$

よって　$P_2 = \dfrac{9}{36} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$，$P_3 = \dfrac{8}{36} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$，$P_4 = \boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$

(2) $n \geqq 36$のとき，$(*)$を満たすXの個数は　1個

よって，$n \geqq 36$のとき　$P_n = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$

(3) $P_n = \dfrac{1}{18} = \dfrac{2}{36}$であるから，$(*)$を満たす$X$が2個，すなわち，0以外に1個だけ，$(*)$を満たす$n$を求めればよい．$a \neq b$のときの次の$X$について

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 17, 19, 23, 29\} \quad \cdots ①$$

これらは，$(*)$を満たすXが2個以上存在するので，これらは含まない．

また，(2)の結果から，$n \geqq 36$を含まない．

以上を除く，$a = b$のとき

$$8 = 2^3, \quad 15 = 3{\cdot}5, \quad 24 = 2^3{\cdot}3, \quad 35 = 5{\cdot}7$$

これらの4数の約数で他の数の約数に含まれないこと，さらに①に含まれないことに注意すると，求めるnは

$$2{\cdot}3, \quad 2^2{\cdot}3, \quad 3{\cdot}5, \quad 2^3{\cdot}3, \quad 5{\cdot}7 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{6,\ 12,\ 15,\ 24,\ 35}$$

$\boxed{4}$ (1) (i) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_3 + (1+3+4)\frac{n-3}{3} = 8 + \frac{8}{3}(n-3) = \frac{8n}{3}$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_1 + (3+4+1)\frac{n-1}{3} = 1 + \frac{8}{3}(n-1) = \frac{8n-5}{3}$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_2 + (4+1+3)\frac{n-2}{3} = 4 + \frac{8}{3}(n-2) = \frac{8n-4}{3}$$

よって　$$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} \dfrac{8n}{3} & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-5}{3} & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-4}{3} & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}}$$

(2) $n = 3m + r$ とおくと $(r = 0,\ 1,\ 2)$

$r = 0$ のとき　$S_{3m} = \dfrac{8 \cdot 3m}{3} = 8m$

$r = 1$ のとき　$S_{3m+1} = \dfrac{8(3m+1)-5}{3} = 8m+1$

$r = 2$ のとき　$S_{3m+2} = \dfrac{8(3m+2)-4}{3} = 8m+4$

$2019 \equiv 3 \pmod 8$ であるから，$S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しない．

(3) i) $k \equiv 0, \pm 4 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 0 \pmod 8$

ii) $k \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 1 \pmod 8$

iii) $k \equiv \pm 2 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 4 \pmod 8$

i)〜iii) および (2) の結果から，どのような自然数 k に対しても，

$$S_n = k^2$$

となる自然数 n が存在する．　■

5　(1)　$x = \sin t$，$y = (1+\cos t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t = 2\cos^2 t + \cos t - 1$$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos^2 t + \cos t - 1}{\cos t} = 2\cos t + 1 - \frac{1}{\cos t}$$

$$= \boldsymbol{\frac{(\cos t + 1)(2\cos t - 1)}{\cos t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(2\cos t + 1 - \frac{1}{\cos t}\right)$$

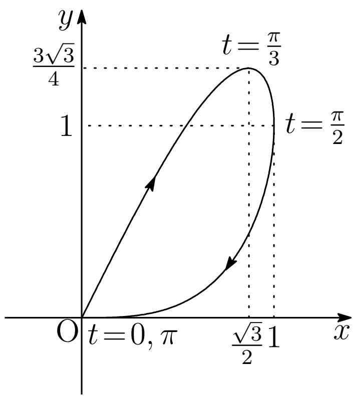
$$= \frac{d}{dt}\left(2\cos t + 1 - \frac{1}{\cos t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \left(-2\sin t - \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= -\frac{\sin t(2\cos^2 t + 1)}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t} = \boldsymbol{-\frac{\sin t(2\cos^2 t + 1)}{\cos^3 t}}$$

(2)　(1) の結果から　　$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$ より　上に凸

$\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$ のとき　$\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$ より　下に凸

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	$(0, 0)$		$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$		$(1, 1)$		$(0, 0)$



(3) 曲線 C で囲まれる領域の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} y\,dx - \int_{\sin\pi}^{\sin\frac{\pi}{2}} y\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{\pi} (1+\cos t)\sin t\cos t\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} \{\cos t + (\cos t)^2\}(\cos t)'dt \\
&= -\left[\,\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{3}\cos^3 t\,\right]_0^{\pi} = \mathbf{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

別解　　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ のとき　$\cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t}$

$x = \sin t$，$y = (1+\cos t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$y = (1 \pm \sqrt{1-x^2})x$$

したがって，求める面積 S は，2 曲線

$$y = (1+\sqrt{1-x^2})x, \quad y = (1-\sqrt{1-x^2})x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

で囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 (1+\sqrt{1-x^2})x\,dx - \int_0^1 (1-\sqrt{1-x^2})x\,dx \\
&= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\,-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

■

8.6　2020 年 (120 分)

1 α は実数とし，$f(x)$ は係数が実数である 3 次式で，次の条件 (i)，(ii) をみたすとする．

(i) $f(x)$ の x^3 の係数は 1 である．

(ii) $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$$

が成り立つ．

以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ．

(2) $f(\alpha+2) = 0$ とする．$f'(x) = 0$ かつ $x \neq \alpha$ をみたす x を α を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで $\alpha = 0$ とする．xy 平面において不等式

$$y \geqq f(x) \quad \text{かつ} \quad y \geqq f'(x) \quad \text{かつ} \quad y \leqq 0$$

の表す部分の面積を求めよ．

2 θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とし，原点 O，A$(1,\ 0)$，B$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ を頂点とする △OAB の内接円の中心を P とする．また，θ がこの範囲を動くときに点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分を D とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の座標は $\left(1 - \sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$ で表されることを示せ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ．

4 n を自然数とし，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ に対して $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) (1) の x の値を x_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\tan x_n}$ を求めよ．

5 p を 2 以上の自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = \frac{1}{2^p+1}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) $p = 3$ のとき，x_n を求めよ．

(2) $x_{p+1} = x_1$ であることを示せ．

解答例

1　(1)　条件 (i) から

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta) + px + q$$

とおいて，これを微分すると

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2 + p$$

条件 (ii) から

$$f(\alpha) = p\alpha + q = 0, \quad f'(\alpha) = p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p = q = 0$$

したがって　$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta) \quad \cdots①$

よって，$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる．

(2)　$f(\alpha+2) = 0$ および ① より，$\beta = \alpha + 2$ であるから

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\alpha-2) \tag{A}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-\alpha)(x-\alpha-2) + (x-\alpha)^2 \\ &= (x-\alpha)\{2(x-\alpha-2) + (x-\alpha)\} \\ &= (x-\alpha)(3x-3\alpha-4) \end{aligned} \tag{B}$$

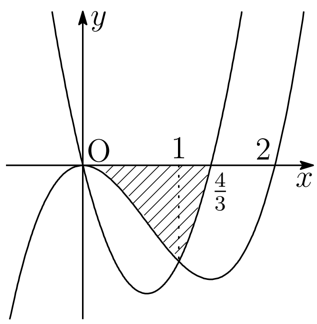
したがって，$f'(x) = 0$ かつ $x \neq \alpha$ をみたす x は

$$3x - 3\alpha - 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x = \alpha + \frac{4}{3}}$$

(3)　(A)，(B) に $\alpha = 0$ を代入すると

$$f(x) = x^2(x-2), \quad f'(x) = x(3x-4)$$

$y \geqq f(x)$，$y \geqq f'(x)$，$y \leqq 0$ の表す領域は，右の図の斜線部分でその面積を S とすると

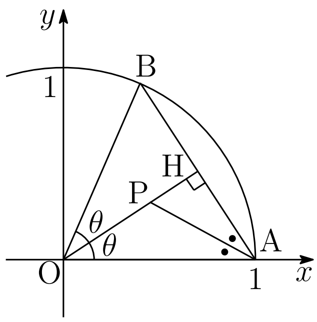


$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{-f(x)\}\,dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \{-f'(x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 (-x^3 + 2x^2)\,dx + \int_1^{\frac{4}{3}} (-3x^2 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-x^3 + 2x^2\right]_1^{\frac{4}{3}} = \boldsymbol{\frac{65}{108}} \end{aligned}$$

■

2 (1) A(1, 0)，B$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

直線 OP と辺 AB の交点を H とすると，H は AB の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2},\ \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$
$$= \left(\cos^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta\right)$$

OH⊥AH であるから　$\mathrm{AH} = \sin\theta$

AP は ∠OAH の二等分線であるから

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PH} = \mathrm{OA} : \mathrm{AH} = 1 : \sin\theta$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OP}+\mathrm{PH}}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{1+\sin\theta}(\cos^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta)$

$$= \left(1-\sin\theta,\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

よって，点 P の座標は　$\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$

別解　点 P の y 座標は △OAB の内接円の半径に等しいから

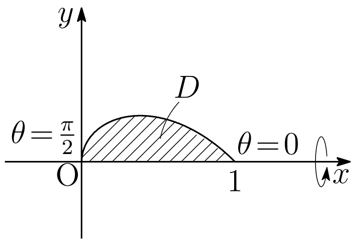
$$\frac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{AB})y = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 2\theta$$
$$\frac{1}{2}(1+1+2\sin\theta)y = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 2\theta$$

ゆえに　$(1+\sin\theta)y = \sin\theta\cos\theta$　　これから　$y = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$

また，$\dfrac{y}{x} = \tan\theta$ であるから

$$x = \frac{y}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)\tan\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = 1-\sin\theta$$

(2) (1) の結果から



$$x = 1 - \sin\theta, \quad y = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

ゆえに $\dfrac{dx}{d\theta} = -\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 (-\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^3\theta}{(1+\sin\theta)^2}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\{(1+\sin\theta)(-\sin^2\theta+2\sin\theta-2)+2\}}{1+\sin\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(-\sin^2\theta+2\sin\theta-2)\cos\theta + \frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}\right\} d\theta \\
&= \left[-\frac{1}{3}\sin^3\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta + 2\log(1+\sin\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\log 2 - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

よって $V = \boldsymbol{\pi\left(2\log 2 - \frac{4}{3}\right)}$

別解 $x = 1-\sin\theta$ より，$\sin\theta = 1-x$ であるから

$$\begin{aligned}
y^2 &= \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2} = \frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^2} \\
&= \frac{(1-x)^2\{1-(1-x)^2\}}{(1+1-x)^2} = \frac{(1-x)^2x(2-x)}{(2-x)^2} \\
&= \frac{(1-x)^2x}{2-x} = \frac{(2-x)(-x^2-1)+2}{2-x} \\
&= -x^2 - 1 + \frac{2}{2-x}
\end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 y^2\,dx = \int_0^1 \left(-x^2-1+\frac{2}{2-x}\right) dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} - x - 2\log(2-x)\right]_0^1 = 2\log 2 - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

■

3 (1) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 1 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$$ {}_{29}\mathrm{C}_1 = \mathbf{29} \ (\text{個}) $$

(2) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 2 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$$ {}_{29}\mathrm{C}_2 = \frac{29\cdot 28}{2\cdot 1} = \mathbf{406} \ (\text{個}) $$

(3) 和 30 になる 3 つの自然数の組合せについて

(i) 3 数が等しいものが $\{10,\ 10,\ 10\}$ の 1 組

(ii) 2 数だけが等しいものが，次の 13 組

$$ \{1,1,28\},\ \{2,2,26\},\ \cdots,\ \{9,9,12\},\ \{11,11,8\},\ \cdots\{14,14,2\} $$

(iii) 3 数がすべて異なるものが，n 組とすると，(i)，(ii) および (2) から

$$ 1 + 13\cdot 3 + n\cdot 3! = 406 \quad \text{これを解いて} \quad n = 61 \ (\text{組}) $$

よって，求める組合せの総数は，(i)〜(iii) から

$$ 1 + 13 + 61 = \mathbf{75} \ (\text{組}) $$

■

4 (1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ を微分すると $(2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi)$

$$ f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} $$

$g(x) = x\cos x - \sin x$ とおくと，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において

$$ g'(x) = -x\sin x < 0 $$

$g(x)$ は単調減少，$g(2n\pi) = 2n\pi$，$g((2n+1)\pi) = -(2n+1)\pi$ であるから

$$ g(c) = 0, \quad 2n\pi < c < (2n+1)\pi $$

を満たす c がただ一つ存在する．したがって

x	$2n\pi$	$\cdots$	c	$\cdots$	$(2n+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

よって，$f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在する．

(2) $g\left(\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)=-1$ であるから，c，すなわち，x_n は

$$f'(x_n)=0,\quad 2n\pi < x_n < \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

上の第 1 式から

$$\frac{x_n\cos x_n-\sin x_n}{{x_n}^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad x_n\cos x_n=\sin x_n$$

さらに第 2 式から，$\cos x_n \neq 0$ であることに注意して

$$x_n=\frac{\sin x_n}{\cos x_n}=\tan x_n \quad \text{ゆえに} \quad 2n\pi < \tan x_n < \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

したがって　$$\frac{1}{\left(2+\frac{1}{2n}\right)\pi} < \frac{n}{\tan x_n} < \frac{1}{2\pi}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{2n}\right)\pi}=\frac{1}{2\pi}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tan x_n}=\boldsymbol{\frac{1}{2\pi}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $p=3$ のとき，$x_1=\dfrac{1}{2^3+1}=\dfrac{1}{9}$ より

$$x_2=\left|2\cdot\frac{1}{9}-1\right|=\frac{7}{9},\quad x_3=\left|2\cdot\frac{7}{9}-1\right|=\frac{5}{9},\quad x_4=\left|2\cdot\frac{5}{9}-1\right|=\frac{1}{9}$$

$x_4=x_1$ であるから

$$\boldsymbol{x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & (n\equiv 1)\\[2mm] \dfrac{7}{9} & (n\equiv 2)\\[2mm] \dfrac{5}{9} & (n\equiv 0)\end{cases}\quad (\mathrm{mod}\ 3)}$$

(2) $2 \leqq q \leqq p$ のとき

$$x_q = \frac{2^p - (2^{q-1} - 1)}{2^p + 1} \quad \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す.

［1］ $q = 2$ のとき

$$x_2 = \left| 2 \cdot \frac{1}{2^p + 1} - 1 \right| = \left| \frac{2 - 2^p - 1}{2^p + 1} \right| = \frac{2^p - 1}{2^p + 1}$$

したがって，$q = 2$ のとき成立する.

［2］ $q = k$ のとき $(2 \leqq k \leqq p)$，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \left| 2 \cdot \frac{2^p - (2^{k-1} - 1)}{2^p + 1} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{2 \cdot 2^p - 2^k + 2 - (2^p + 1)}{2^p + 1} \right| \\ &= \left| \frac{2^p - (2^k - 1)}{2^p + 1} \right| = \frac{2^p - (2^k - 1)}{2^p + 1} \end{aligned}$$

したがって，$q = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する.

よって，$2 \leqq q \leqq p$ である整数 q について，$(*)$ は成立する.

この結果から．$q = p + 1$ のとき

$$\begin{aligned} x_{p+1} = |2x_p - 1| &= \left| 2 \cdot \frac{2^p - (2^{p-1} - 1)}{2^p + 1} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{2^p + 2 - (2^p + 1)}{2^p + 1} \right| = \frac{1}{2^p + 1} = x_1 \end{aligned}$$

■

第 9 章　広島大学

出題分野 (2011-2020)

◀	広島大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式									5	
	三角関数										1
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法							2	1		
III	式と曲線										
	複素数平面						3		2	4	2
	関数										
	極限					2		1			
	微分法とその応用			4		3			5	5	
	積分法								3		
	積分法の応用		3	5	2	1	2	4		3	3·4
A	場合の数と確率		5			5	4	3		2	5
	整数の性質	2					5	5			
	図形の性質	3								5	
B	平面上のベクトル	4	4	3							
	空間のベクトル				3	3	1				
	数列	5	2	2	4				4	1	
	確率分布と統計				5						
C	行列 (旧課程)	1	1	1	1						

数字は問題番号

9.1　2015 年 (150 分)

1　座標平面上の点 P(1, 1) を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする．k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}$ $(x>0)$ を C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q，R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする．点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする．次の問いに答えよ．

(1) k，q，r の値を求めよ．

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ，OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

2　座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を考える．ただし，p_n，q_n は

$$p_1{}^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n{}^2 - 4q_n > 0 \quad (n=2,3,4\cdots)$$

を満たす実数とする．C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを ℓ_n とする．また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) C_n の頂点の y 座標を ℓ_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{\ell_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数である．

$\boxed{3}$ 座標空間内に 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{C}(s,\ t,\ 0),\ \mathrm{D}(0,\ u,\ 0)$$

がある．ただし，s，t，u は実数で，$s>0$，$t>0$，$s+t=1$ を満たすとする．3 点 A，B，C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ．

(2) u を t を用いて表せ．また，$0<u<1$ であることを示せ．

(3) 点 $(0,\ 1,\ 0)$ を E とする．点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき，t の値を求めよ．

$\boxed{4}$ a，b，p は $a>0$，$b>0$，$p<0$ を満たす実数とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1: y=e^x, \quad C_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を考える．ただし，e は自然対数の底である．C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ．

(1) p を a を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ．

5 m，n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) $m \geqq 2$，$n \geqq 2$ とする．異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる．このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(2) $n \geqq 3$ とする．3 種類の文字 a，b，c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる．このとき a，b，c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(3) $n \geqq 3$ とする．n 人を最大 3 組までグループ分けする．このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ．ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする．

たとえば，$n = 3$ のとき，A，B，C の 3 人のグループ分けする方法は

$$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\},$$
$$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\},\ \{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$$

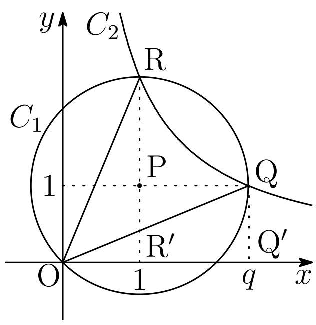
の 5 通りであるので，$p_3 = \dfrac{3}{5}$ である．

(4) (3) の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の範囲を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\mathrm{OP}=\sqrt{2}$ より，C_1 は中心 $(1,\ 1)$，半径 $\sqrt{2}$ の円．$k>0$ より，C_1 と C_2 の交点 Q，R は第 1 象限あるから，$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}$ より

$$q-1=\sqrt{2}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{q=1+\sqrt{2}}$$



C_1，C_2 は直線 $y=x$ に関して対称であるから，R は直線 $y=x$ に関して $\mathrm{Q}(1+\sqrt{2},\ 1)$ と対称．

したがって　$\mathrm{R}(1,\ 1+\sqrt{2})$　よって　$\boldsymbol{r=1}$

R は $C_2: y=\dfrac{k}{x}$ 上の点であるから　$1+\sqrt{2}=\dfrac{k}{1}$　よって　$\boldsymbol{k=1+\sqrt{2}}$

(2) $\mathrm{R}'(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}'(1+\sqrt{2},\ 0)$ とおく．求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned}S_1&=\triangle\mathrm{ORR}'+\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{x}\,dx-\triangle\mathrm{OQQ}'\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\Big[\ \log x\ \Big]_1^{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\cdot1\\&=\boldsymbol{(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

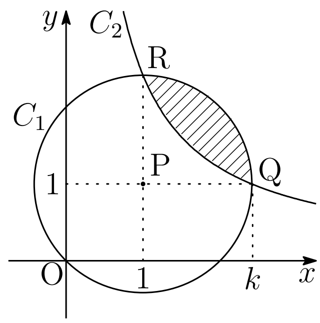
(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ より　$\dfrac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

x	$1\longrightarrow 1+\sqrt{2}$
θ	$0\longrightarrow\ \frac{\pi}{2}$

したがって，求める定積分は

$$\begin{aligned}\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta\\&=\Big[\ \theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

(4) $f(x) = \sqrt{2-(x-1)^2}$ とおくと，$q = k$ により



$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_1^k \{f(x)+1\}^2\,dx - \int_1^k \left(\frac{k}{x}\right)^2 dx \\ &= \int_1^k \left(\{f(x)\}^2+1\right) dx + 2\int_1^k f(x)\,dx \\ &\qquad - \int_1^k \frac{k^2}{x^2}\,dx \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

このとき，(3) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\int_1^k \left(\{f(x)\}^2+1\right) dx &= \int_1^k \{3-(x-1)^2\}\,dx \\ &= \left[\ 3x - \frac{1}{3}(x-1)^3\ \right]_1^k \\ &= 3(k-1) - \frac{1}{3}(k-1)^3 \\ &= 3\sqrt{2} - \frac{1}{3}(\sqrt{2})^3 = \frac{7\sqrt{2}}{3},\end{aligned}$$

$$2\int_1^k f(x)\,dx = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi,$$

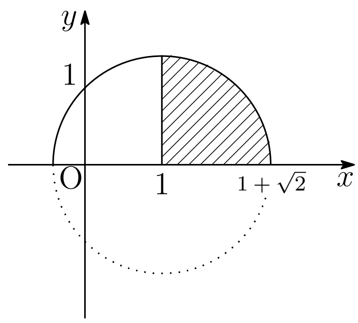
$$\int_1^k \frac{k^2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{k^2}{x}\right]_1^k = k(k-1) = 2+\sqrt{2}$$

これらを (∗) に代入して，整理すると

$$\frac{V}{\pi} = \pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{V = \pi\left(\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\right)}$$

別解 (3) $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ とおくと

$$(x-1)^2+y^2=2$$



したがって，求める定積分の値は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$S=\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{2}$$

補足 上の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^3=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$

図の斜線部分は，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ にあるから，上の図形の重心の y 座標 h は，パップス・ギュルダンの定理 $(V=2\pi hS)$ により [1]

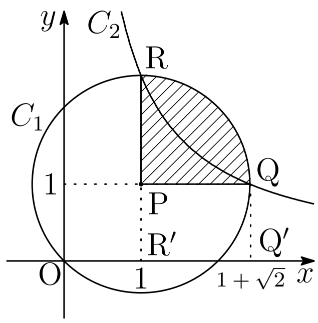
$$h=\frac{V}{2\pi S}=\frac{\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}}{2\pi\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

図形の対称性により，重心の x 座標 d は

$$d=1+h=1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

したがって，斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V_0 は

$$V_0=2\pi dS=2\pi\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\left(\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$



右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積も V_0 に等しい．
また，長方形 PQQ′R′ を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体は，半径 1，高さ $\sqrt{2}$ の円柱であるから，$f(x)=\sqrt{2-(x-1)^2}$ について，次が成り立つ．

$$\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\{f(x)+1\}^2\,dx=V_0+\sqrt{2}\pi$$

パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外である．入試では使用できないが，便利な検算法である．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

2 (1) 2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の解は

$$x = \frac{p_n \pm \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}}{2}$$

これが放物線 $y = x^2 - p_n x + q_n$ と x 軸との共有点の x 座標であるから，これらの差をとることにより

$$\ell_n = \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n} \quad \cdots (*)$$

$y = x^2 - p_n x + q_n$ を変形すると

$$y = \left(x - \frac{p_n}{2}\right)^2 - \frac{{p_n}^2 - 4q_n}{4}$$

よって，頂点の y 座標は　$-\dfrac{{p_n}^2 - 4q_n}{4} = \boldsymbol{-\dfrac{{\ell_n}^2}{4}}$

(2) $S_n = \dfrac{1}{6}{\ell_n}^3$ であるから　$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\right)^3$

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$ より　$\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{(n+2)\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$

したがって　$\dfrac{\ell_{n+1}}{(n+2)\sqrt{n+1}} = \dfrac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}}$

ゆえに　$\dfrac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}} = \dfrac{\ell_1}{2} = \dfrac{\sqrt{{p_1}^2 - 4q_1}}{2} = 1$　　よって　$\boldsymbol{\ell_n = (n+1)\sqrt{n}}$

(3) $(*)$ を平方すると　${\ell_n}^2 = {p_n}^2 - 4q_n$

これに $p_n = n\sqrt{n}$ および (2) の結果を代入すると

$$(n+1)^2 n = n^3 - 4q_n \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{2q_n}{n^2} = 1 + \frac{1}{2n}$$

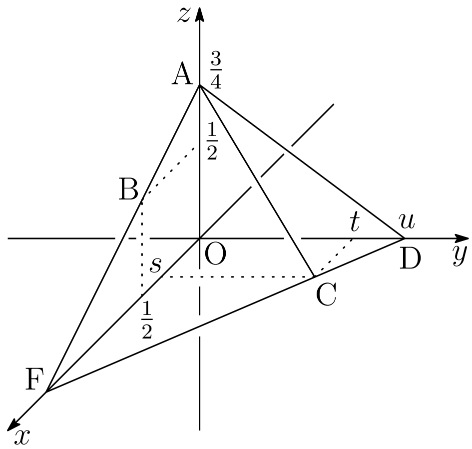
よって

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

■

3 (1) 2 点 A$\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，B$\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線と x 軸との交点を F とすると，実数 k を用いて



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right) + k\left(\frac{1}{2},\ 0, -\frac{1}{4}\right)\\ &= \left(\frac{k}{2},\ 0,\ \frac{3}{4} - \frac{k}{4}\right)\end{aligned}$$

F は x 軸上の点であるから

$$\frac{3}{4} - \frac{k}{4} = 0 \quad これを解いて \quad k = 3 \quad よって \quad \boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$$

(2) 3 点 A，B，C の定める平面は，3 点 A，F，C の定める平面でもある．C は直線 FD 上の点であるから，$u = 0$ とすると，C は x 軸上の点となり，条件に反する．ゆえに，$u \neq 0$．xy 平面上の直線 FD の方程式は

$$\frac{2}{3}x + \frac{y}{u} = 1$$

点 C はこの直線上の点であるから　$\dfrac{2}{3}s + \dfrac{t}{u} = 1 \quad \cdots ①$

$s > 0$，$t > 0$，$s + t = 1$ より，$s = 1 - t > 0$　ゆえに　$0 < t < 1$

$s = 1 - t$ を ① に代入すると

$$\frac{2}{3}(1-t) + \frac{t}{u} = 1 \quad ゆえに \quad u = \frac{3t}{2t+1} > 0$$

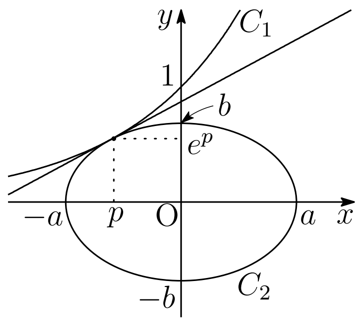
また　$1 - u = 1 - \dfrac{3t}{2t+1} = \dfrac{1-t}{2t+1} > 0$　よって　$0 < u < 1$

(3) D$\left(0,\ \dfrac{3t}{2t+1},\ 0\right)$ は，OE を 12 : 1 に内分するから，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{12}{13}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より

$$\left(0,\ \frac{3t}{2t+1},\ 0\right) = \frac{12}{13}(0,\ 1,\ 0) \quad ゆえに \quad \frac{3t}{2t+1} = \frac{12}{13}$$

これを解いて　$\boldsymbol{t = \dfrac{4}{5}}$　■

4 (1) 点 $(p,\ e^p)$ は C_2 上の点であるから



$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{e^{2p}}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$

C_2 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は

$$\frac{px}{a^2}+\frac{e^p y}{b^2}=1$$

すなわち $\quad y=-\dfrac{b^2p}{a^2e^p}x+\dfrac{b^2}{e^p}$

$y=e^x$ を微分すると $\quad y'=e^x$

この直線の傾きが C_1 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の傾きに等しいから

$$-\frac{b^2p}{a^2e^p}=e^p \quad ゆえに \quad \frac{e^{2p}}{b^2}=-\frac{p}{a^2} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{p}{a^2}=1 \quad 整理すると \quad p^2-p-a^2=0$$

$p<0$ に注意してこれを解くと $\quad \boldsymbol{p=\dfrac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$p+a=\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}+a=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4a^2}-2a}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}+2a}\right)$$

よって $\quad \displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}+2a}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) ② より，$b^2=-\dfrac{a^2e^{2p}}{p}$ であるから

$$\frac{b^2e^{2a}}{a}=-\frac{a^2e^{2p}}{p}\cdot\frac{e^{2a}}{a}=-\frac{ae^{2p+2a}}{p}=\frac{a}{a-(p+a)}e^{2(p+a)}$$

したがって，(2) の結果を利用して

$$\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{a-(p+a)}e^{2(p+a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{a}(p+a)}e^{2(p+a)}=\boldsymbol{e}$$

■

5　(1) m 種類の文字から 2 種類の文字を選らぶ場合の総数は

$$_m\mathrm{C}_2 = \frac{m(m-1)}{2} \quad \text{(通り)}$$

特定の 2 種類の文字列，例えば，a，b を 1 列に並べる場合の総数は 2^n 通りある．この中で a だけが 1 列に並ぶ場合が 1 通りと，b だけが 1 列に並ぶ場合が 1 通りある．したがって，両方の文字が並ぶ場合の総数は

$$2^n - 2 \quad \text{(通り)} \quad \cdots①$$

よって，求める場合の数は

$$\frac{m(m-1)}{2} \times (2^n - 2) = \boldsymbol{m(m-1)(2^{n-1}-1)} \quad \text{(通り)}$$

(2) 重複を許して，a，b，c の 3 種類の文字を 1 列に並べる場合の総数は 3^n 通りある．この内，1 種類の文字だけからなるものが 3 通りあり，2 種類の文字からなる場合の数は，(1) の結果に $m = 3$ を代入して $6(2^{n-1} - 1)$ 通りある．したがって，a，b，c すべての文字を含む文字列の総数は

$$3^n - 3 - 6(2^{n-1} - 1) = \boldsymbol{3^n - 3{\cdot}2^n + 3} \quad \text{(通り)}$$

(3) (i) n 人を 1 グループとする場合の総数は　1 通り

(ii) n 人を a，b の 2 グループに分ける場合の総数は，① の結果から

$$2^n - 2 \quad \text{(通り)}$$

このとき，a，b のグループの区別をなくすと

$$\frac{2^n - 2}{2!} = 2^{n-1} - 1 \quad \text{(通り)}$$

(iii) n 人を a，b，c の 3 グループに分ける場合の総数は，(2) の結果から

$$3^n - 3{\cdot}2^n + 3 \quad \text{(通り)}$$

このとき，a，b，c のグループの区別をなくすと

$$\frac{3^n - 3{\cdot}2^n + 3}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$$

(i)〜(iii) から，求める確率 p_n は

$$p_n = \frac{2^{n-1} - 1}{1 + (2^{n-1} - 1) + \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}} = \boldsymbol{\frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1}}$$

(4) $p_n \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき $(n \geqq 3)$，(3) の結果から

$$\frac{2^n-2}{3^{n-1}+1} \leqq \frac{1}{3} \quad \text{整理すると} \quad 3^{n-1}-3\cdot 2^n+7 \geqq 0 \quad \cdots(*)$$

$f(n)=3^{n-1}-3\cdot 2^n+7$ とおくと

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2-3\cdot 2^3+7=-8 \\ f(4) &= 3^3-3\cdot 2^4+7=-14 \\ f(5) &= 3^4-3\cdot 2^5+7=-8 \\ f(6) &= 3^5-3\cdot 2^6+7=58 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} f(n+1)-f(n) &= (3^n-3\cdot 2^{n+1}+7)-(3^{n-1}-3\cdot 2^n+7) \\ &= 2\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^n = 2^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3\right\} \end{aligned}$$

したがって　　$f(3)>f(4)<f(5)<f(6)<\cdots$

よって，$(*)$ を満たす n の範囲は　　$\boldsymbol{n \geqq 6}$

解説

異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べるとき，k 種類の文字を含む文字列の総数を ${}_n\mathrm{Q}_k$ とすると $(1 \leqq k \leqq m)$，次が成立する．

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{Q}_1 &= 1 \\ {}_n\mathrm{Q}_2 &= 2^n-{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{Q}_1 \\ {}_n\mathrm{Q}_3 &= 3^n-{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{Q}_1-{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{Q}_2 \\ {}_n\mathrm{Q}_4 &= 4^n-{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{Q}_1-{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{Q}_2-{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_n\mathrm{Q}_3 \\ {}_n\mathrm{Q}_5 &= 5^n-{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{Q}_1-{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{Q}_2-{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_n\mathrm{Q}_3-{}_5\mathrm{C}_4\cdot{}_n\mathrm{Q}_4 \\ &\vdots \\ {}_n\mathrm{Q}_k &= k^n-\sum_{j=1}^{k-1}{}_k\mathrm{C}_j\cdot{}_n\mathrm{Q}_j \end{aligned}$$

${}_n\mathrm{Q}_1=1$ より，${}_n\mathrm{Q}_2=2^n-2$ となり，これらを用いて (本題 (2) の計算)

$${}_n\mathrm{Q}_3=3^n-{}_3\mathrm{C}_1\cdot 1-{}_3\mathrm{C}_2\cdot(2^n-2)=3^n-3\cdot 2^n+3$$

例 1　n 個並べたときに丁度 3 種類の文字がそろう確率を $P_3(n)$ とすると

$$P_3(n) = \frac{3 \times {}_{n-1}\mathrm{Q}_2}{3^n} = \frac{3(2^{n-1}-2)}{3^n} = \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$$

また，文字が 3 種類そろうまで並べる文字数の期待値を E_3 とすると

$$\begin{aligned} E_3 &= \sum_{n=3}^{\infty} nP_3(n) = \sum_{n=3}^{\infty} n\cdot\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\left\{n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - 1 - 2\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - 1\right\} = \frac{11}{2} \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

補足　$|x| < 1$ のとき，$1 + x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ を微分すると

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

この計算は，次の公式[2] を利用すると簡単に求めることができる．

Coupon collector's problem

m 種類の文字すべてがそろうまで並べる文字数の期待値 E_m は

$$E_m = m\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

実際　$$E_3 = 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2}$$

例 2　サイコロを投げて，すべての目がそろうまで投げる回数の期待値 (期待回数) は

$$E_6 = 6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{147}{10}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf (p.12 に証明)

9.2　2016 年 (150 分)

1 座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(s,\ s,\ s),\ \mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

がある．ただし，$s>0$ とする．t，u，v を実数とし，

$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u，v を s を用いて表せ．

(3) (2) のとき，2 点 D，E を

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$$

となる点とする．四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) a を正の定数とする．関数 $f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ．

(3) c を定数とする．x 軸，y 軸，直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

3 複素数平面上を，点 P が次のように移動する．

1. 時刻 0 では，P は原点にいる．時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する．移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると，$z_1 = 1$ である．
2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向が $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する．移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると，$z_2 = \dfrac{3+i}{2}$ である．
3. 以下同様に，時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する．移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする．ただし n は自然数である．

$\alpha = \dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ．

(1) z_3，z_4 を求めよ．

(2) z_n を α，n を用いて表せ．

(3) P が $Q_1(z_1)$，$Q_2(z_2)$，$\cdots$ と移動するとき，P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく．w を求めよ．

(4) z_n の実部が (3) で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ．

4 xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う．

> 1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く．ただし，点 $(3,\ 1)$ に到達したら Q は原点に戻る．

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $(x_4,\ y_4) = (0,\ 0)$ となる確率を求めよ．

(2) $(x_8,\ y_8) = (5,\ 3)$ となる確率を求めよ．

(3) $x_8 + y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ．

(4) $x_{4n} + y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ．ここで k は n 以下の自然数とする．

5 数列

$$x_n = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を考える．この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, $\cdots$ であるが，各項の下 1 桁をみると，1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, $\cdots$ となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすことにする．たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする．

(2) 4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ．

(3) 8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ．

(4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) O(0, 0, 0), A(s, s, s), B(-1, 1, 1), C(0, 0, 1) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= s(1,\ 1,\ 1),\\ \vec{d} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 1,\ 1) - t(s,\ s,\ s)\\ &= (-1-st,\ 1-st,\ 1-st)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{d}=0$ であるから $(s>0)$，

$$1(-1-st)+1(1-st)+1(1-st)=0 \quad よって \quad \boldsymbol{t=\frac{1}{3s}}$$

(2) (1) の結果から，$st=\dfrac{1}{3}$ より $\vec{d}=\left(-1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - u\overrightarrow{\mathrm{OA}} - v\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 0,\ 1) - u(s,\ s,\ s) - v(-1,\ 1,\ 1)\\ &= (-us+v, -us-v,\ 1-us-v)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$, $\vec{d}\perp\vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=0$, $\vec{d}\cdot\vec{e}=0$ であるから

$$\begin{aligned}1(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0,\\ -2(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0\end{aligned}$$

整理すると $\begin{cases}-3us-v+1=0\\ -4v+1=0\end{cases}$ よって $\boldsymbol{u=\dfrac{1}{4s},\ v=\dfrac{1}{4}}$

(3) (2) の結果から，$su=v=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$\vec{e}=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}(0, -1.\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

このとき，四面体 OADE の体積が 2 であるから，$\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=2$ より

$$\frac{1}{6}\cdot s\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=2 \quad よって \quad \boldsymbol{s=6}$$

解説

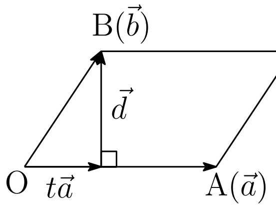
座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$$

があるとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

$\vec{d}=\vec{b}-t\vec{a}$ が $\vec{a}\perp\vec{d}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{d}=0$ より

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-t\vec{a})=0 \quad \text{ゆえに} \quad t|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$$



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S^2&=(|\vec{a}||\vec{d}|)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}-t\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2(|\vec{b}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{a}|^2)\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-2t|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+(t|\vec{a}|^2)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ であるから

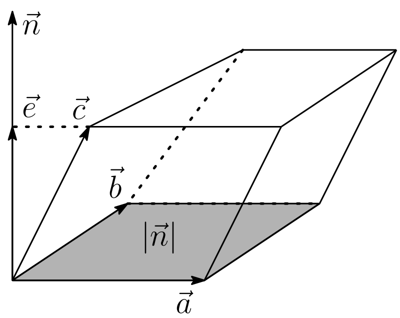
$$\begin{aligned}S^2&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\end{aligned}$$

ここで，$\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$ とおくと

$$|\vec{n}|=S, \quad \vec{n}\cdot\vec{a}=0, \quad \vec{n}\cdot\vec{b}=0$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $\vec{n}$ に平行なベクトル $\vec{e}$ を用いて

$$\vec{c}=\vec{e}+u\vec{a}+v\vec{b} \quad (u,\ v \text{ は定数})$$



とかける．このとき

$$\vec{n}\cdot\vec{e}=\vec{n}\cdot(\vec{c}-u\vec{a}-v\vec{b})=\vec{n}\cdot\vec{c}$$

$\vec{n}$ と $\vec{e}$ のなす角は $0°$ または $180°$ であるから　$|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}||\vec{e}|$

この平行六面体の体積を V とすると，$V=|\vec{n}||\vec{e}|$ であるから

$$V=|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}\cdot\vec{c}|=|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

よって，四面体 OABC の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S\cdot|\vec{e}|=\dfrac{1}{6}|\vec{n}||\vec{e}|=\dfrac{1}{6}V$ より

$$\frac{1}{6}|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

■

2 (1) $y=f(x)$ とおくと，$y=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}\cdots$ ① より

$$e^{2x}-2ye^x+y^2=y^2+a \quad ゆえに \quad (e^x-y)^2=y^2+a$$

① より　$e^x-y=e^x-\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}=\dfrac{e^x+ae^{-x}}{2}>0 \qquad (a>0)$

したがって　$e^x-y=\sqrt{y^2+a}$　すなわち　$x=\log(y+\sqrt{y^2+a}\,)$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{f^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2+a}\,)}$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}}$

別解 $y=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ より　$y'=\dfrac{e^x+ae^{-x}}{2}$

ここで，$e^x=y+\sqrt{y^2+a}$，$e^{-x}=\dfrac{-y+\sqrt{y^2+a}}{a}$ であるから

$$y'=\frac{y+\sqrt{y^2+a}+a\cdot\dfrac{-y+\sqrt{y^2+a}}{a}}{2}=\sqrt{y^2+a}$$

$y=f(x)$，$x=g(y)$ とおき，$g(y)=x$ を x について微分すると

$$g'(y)y'=1 \quad ゆえに \quad g'(y)=\frac{1}{y'}=\frac{1}{\sqrt{y^2+a}}$$

よって　$\dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

(3) (1),(2) の結果を用いると　$\{\log(x+\sqrt{x^2+c^2}\,)\}'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^c\frac{dx}{\sqrt{x^2+c^2}}=\Big[\ \log(x+\sqrt{x^2+c^2})\ \Big]_0^c\\&=\log(c+\sqrt{2}c)-\log c\\&=\boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

■

$\boxed{3}$ (1) $z_1=1$，$z_2-z_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+i}{2}$,

$$z_3-z_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot i=\frac{i}{2},$$

$$z_4-z_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{4}$$

したがって $z_3=z_1+(z_2-z_1)+(z_3-z_2)=1+\dfrac{1+i}{2}+\dfrac{i}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3+2i}{2}}$,

$$z_4=z_3+(z_4-z_3)=\frac{3+2i}{2}+\frac{-1+i}{4}=\boldsymbol{\frac{5+5i}{4}}$$

(2) k を自然数とすると

$$\begin{aligned}z_{k+1}-z_k&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^k=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k=\alpha^k\end{aligned}$$

よって $z_n=z_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=\boldsymbol{\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}$

(3) $|\alpha|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$

よって $w=\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\frac{1+i}{2}}=\boldsymbol{1+i}$

(4) $\dfrac{1}{1-\alpha}=1+i=2\alpha$ であるから，(2) の結果より

$$\begin{aligned}z_n&=2\alpha(1-\alpha^n)=2\alpha-2\alpha^{n+1}\\&=1+i-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\left(\cos\frac{n+1}{4}\pi+i\sin\frac{n+1}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{Re}(z_n)=1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\cos\dfrac{n+1}{4}\pi$

また，(3) の結果から $\mathrm{Re}(w)=1$ であるから

$$\mathrm{Re}(z_n)-\mathrm{Re}(w)=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\cos\frac{n+1}{4}\pi>0$$

$\dfrac{\pi}{2}+2j\pi<\dfrac{n+1}{4}\pi<\dfrac{3}{2}\pi+2j\pi$ (j は整数) であるから $8j+1<n<8j+5$

よって $\boldsymbol{n=8j+2,\ 8j+3,\ 8j+4}$ (**j は負でない整数**) ■

4 (1) $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となるのは，硬貨を 4 回投げて，表が 3 回，裏が 1 回出る確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となるのは，点 $(3, 1)$ を通らずに，点 $(5,\ 3)$ に到達する確率であるから，(1) の結果を利用して

$$ {}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{4}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{7}{32}-\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\boldsymbol{\frac{1}{8}} $$

(3) $x_8+y_8\leqq 4$ となるのは，4 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達することである．したがって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(4) $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となるのは，4 回目，8 回目，$\cdots$，$4(n-k)$ 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達する，すなわち，ちょうど $n-k$ 回原点に戻る．よって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}=\boldsymbol{\frac{1}{4^{n-k}}} $$

■

5 (1) $x_n=2^n$ の下 2 桁は，次のようになる．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_n	02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
x_n	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

よって，**04** から循環が始まり循環の周期は **20** である．

(2) 25 で割って 1 余る 2 桁の数は　26，51，76

A は 4 の倍数であるから　　$\boldsymbol{A=76}$

別解　$4x\equiv 1 \pmod{25}$ を満たす整数 x は

$$ 24x\equiv 6\quad \text{ゆえに}\quad -x\equiv 6\quad \text{すなわち}\quad x\equiv -6\pmod{25} $$

$x=25k-6$ であるから (k は整数)　$4x=100k-24$

A は 2 桁の自然数であるから，$k=1$ を代入して　$\boldsymbol{A=76}$

(3) 125 で割って 1 余る 3 桁の自然数は

$$126,\ 251,\ 376,\ 501,\ 626,\ 751,\ 876$$

B は 8 の倍数であるから　$\boldsymbol{B = 376}$

別解 $8y \equiv 1 \pmod{125}$ を満たす整数 y は

$$120y \equiv 15 \quad \text{ゆえに} \quad -5y \equiv 15 \pmod{125}$$

$24y \equiv 3,\quad -25y \equiv 75 \pmod{125}$ であるから

$$24y - 25y \equiv 3 + 75 \quad \text{ゆえに} \quad y \equiv -78 \pmod{125}$$

$y = 125j - 78$ であるから (j は整数)　$8y = 1000j - 624$

B は 3 桁の自然数であるから，$j = 1$ を代入して　$\boldsymbol{B = 376}$

(4) 循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 m に対して

$$2^{m+e} - 2^m = 1000M \ (M \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{m-3}(2^e - 1) = 125M$$

2^{m-3} は整数であるから，これを満たす最小の m は　3

したがって，循環の始まりは　2^3　すなわち　**008**

$2^e - 1$ は 125 で割り切れるから　$2^e \equiv 1 \pmod{125}$

これを満たす最小の自然数 e は 100 であるから，求める周期は　**100**

解説

1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ 関数 (phi function) といい，以下の定理が成り立つ．

定理 1

p_1，$p_2, \cdots, p_l$ を素数，k_1，$k_2, \cdots, k_l$ を自然数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

フェルマー・オイラーの定理 (Fermat-Euler Theorem)

自然数 n と互いに素である自然数 a について，次式が成り立つ．

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証明　http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p6 を参照)．

定理 2

自然数 n と互いに素である自然数 a について

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 e(位数) は，$\varphi(n)$ の約数である．

証明　$\varphi(n)$ が e で割り切れないと仮定し，$\varphi(n)$ を e で割った商を q，余りを r とすると

$$\varphi(n) = eq + r \quad (0 < r < e)$$

したがって　$$a^{\varphi(n)} = a^{eq+r} = (a^e)^q a^r$$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1$，$a^e \equiv 1 \pmod{n}$ であるから

$$a^r \equiv 1 \qquad \pmod{n}$$

これは，e が位数であることに反する．　証終

別解 (1)

循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 n に対して

$$2^{n+e} - 2^n = 100N \ (N \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-2}(2^e - 1) = 25N$$

2^{n-2} は整数であるから，これを満たす最小の n は　2

したがって，循環の始まりは　2^2　すなわち　**04**

$2^e - 1$ は 25 で割り切れるから　　$2^e \equiv 1 \pmod{25}$　$\cdots$①

$25 = 5^2$ より，$\varphi(25) = 25\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 20$ であるから，フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$$

① を満たす最小の自然数 e(位数) は，20 の約数であるから，法 25 について

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^4 \equiv 16, \quad 2^5 \equiv 7, \quad 2^{10} \equiv 7^2 \equiv -1$$

よって，求める周期 (位数) は　　**20**

別解 (4)

循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 m に対して

$$2^{m+e} - 2^m = 1000M \ (M \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{m-3}(2^e - 1) = 125M$$

2^{m-3} は整数であるから，これを満たす最小の m は　3

したがって，循環の始まりは　2^3　すなわち　**008**

$2^e - 1$ は 125 で割り切れるから　　$2^e \equiv 1 \pmod{125}$　$\cdots$②

$125 = 5^3$ より，$\varphi(125) = 125\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 100$ であるから，フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$$

② を満たす最小の自然数 e(位数) は，100 の約数であるから，法 125 について

$$\begin{aligned}
&2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^4 \equiv 16, \quad 2^5 \equiv 32, \\
&2^{10} \equiv 32^2 \equiv 1024 \equiv 24, \quad 2^{20} \equiv 24^2 \equiv 576 \equiv -24, \\
&2^{25} \equiv -24 \cdot 32 \equiv -768 \equiv -43, \quad 2^{50} \equiv (-43)^2 \equiv 1849 \equiv -1
\end{aligned}$$

よって，求める周期 (位数) は　　**100**　■

9.3　2017 年 (150 分)

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \tan\frac{\pi}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) $a_2 = \tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ．

(2) 一般項 a_n の表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$ を求めよ．

2 $a > 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ．

(2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく．A^3 を求めよ．

(3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする．C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ．

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える．その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ．

3 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある．ただし，$0<p<1$ である．このとき，下図のような正三角形の3頂点A，B，Cを次の規則で移動する動点Rを考える．

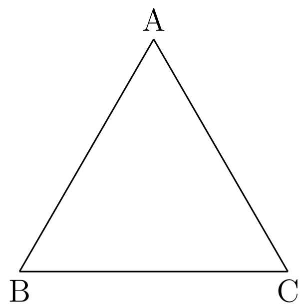
> コインを投げて表が出ればRは反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出ればRは時計まわりに隣の頂点に移動する．

Rは最初Aにあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する．ここで，N は自然数である．移動回数がちょうど k に達したときにRがAに初めて戻る確率を P_k $(k=2,3,\cdots,2N+3)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) P_2，P_3 を求めよ．

(2) P_{2m}，P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ．

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする．移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときにRがAに2度目に戻る確率 Q を求めよ．

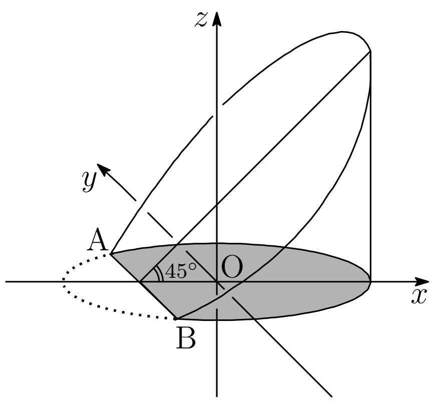


4 座標空間内の平面 $H: z=0$ とその上の曲線 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える．C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする．C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする．ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする．平面 H，平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする．次の問いに答えよ．

(1) 立体 V と平面 H の共通部分 (下図の灰色で示される部分) の面積を求めよ．

(2) 立体 V を平面 $x=t\ (-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．

(3) 立体 V の体積を求めよ．



5 x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ．格子点 O(0, 0) および A(50, 14) を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ．

(2) m を自然数とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする．P_1 および P_2 を求めよ．

(3) P_m を (2) で定めた格子点とする．自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ．

(4) P_m を (2) で定めた格子点とする．Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする．四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $a_n = \tan\theta_n \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}\right) \cdots (*)$ とおくと

$$a_1 = \tan\frac{\pi}{3} \text{ より} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad \cdots①$$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}$ より

$$\begin{aligned}\tan\theta_{n+1} &= \frac{\tan\theta_n}{\sqrt{\tan^2\theta_n+1}+1} = \frac{\sin\theta_n}{1+\cos\theta_n} \\ &= \frac{2\sin\dfrac{\theta_n}{2}\cos\dfrac{\theta_n}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta_n}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\theta_n}{2}}{\cos\dfrac{\theta_n}{2}} = \tan\frac{\theta_n}{2}\end{aligned}$$

ゆえに　$\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2} \quad \cdots②$　すなわち　$\theta_n = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} \quad \cdots (**)$

したがって　$a_n = \tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$　よって　$a_2 = \tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$

(2) $(*)$ を用いて，a_n は $(**)$ であると推定する．

［1］$n=1$ のとき，① より，$(**)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(**)$ が成立する，

すなわち，$\theta_k = \dfrac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}$ と仮定すると，② より

$$\theta_{k+1} = \frac{1}{2}\theta_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}} = \frac{\pi}{3\cdot 2^k}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(**)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ は成立する．

よって　$a_n = \tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$

(3) $(**)$ より，$2^n = \dfrac{2\pi}{3\theta_n}$ であるから　$2^n a_n = \dfrac{2\pi}{3\theta_n}\tan\theta_n = \dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{\tan\theta_n}{\theta_n}$

$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\theta_n \longrightarrow +0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{\theta_n\to+0}\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\tan\theta_n}{\theta_n} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $f(t) = t^3 - 2at + 1\ (a > 0)$ より

$$f'(t) = 3t^2 - 2a = 3\left(t + \sqrt{\frac{2a}{3}}\right)\left(t - \sqrt{\frac{2a}{3}}\right)$$

$t \geqq 0$ における $f(t)$ 増減表は

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，最小値は　$f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) = \dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{2a}{3}} - 2a\sqrt{\dfrac{2a}{3}} + 1 = \boldsymbol{-\dfrac{4a}{3}\sqrt{\dfrac{2a}{3}} + 1}$

(2) $a = A$ のとき，最小値が 0 であるから，(1) の結果より

$$-\frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}} = 1$$

両辺を平方すると　$\dfrac{16A^2}{9}\cdot\dfrac{2A}{3} = 1$　　よって　$\boldsymbol{A^3 = \dfrac{27}{32}}$

(3) $C_1 : y = x^4$，$C_2 : x^2 + (y - a)^2 = a^2$ から y を消去すると

$$x^2 + (x^4 - a)^2 = a^2 \quad \text{整理すると} \quad x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) = 0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 の共有点の個数は，方程式 $(*)$ の実数解の個数に等しい．

$t = x^2 \cdots$ ① とおくと，上の方程式は　　$tf(t) = 0 \quad \cdots(**)$

(1) の結果を利用すると，$f(t) = 0\ (t \geqq 0)$ の解の個数は，次のようになる．

$f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) > 0$，すなわち，$0 < a < \dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のとき　0 個

$f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) = 0$，すなわち，$a = \dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のとき　　1 個

$f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) < 0$，すなわち，$\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}} < a$ のとき　　2 個

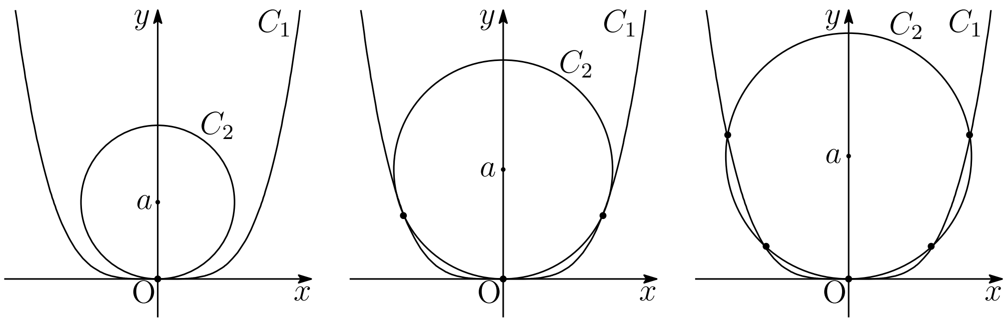
① より，これらの正の解 t に対し，$(*)$ の解はそれぞれ $x = \pm\sqrt{t}$ である．

$(*)$，$(**)$ より　　$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}}$ **のとき　1 個**

$\boldsymbol{a = \dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}}$ **のとき　　3 個**

$\boldsymbol{\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}} < a}$ **のとき　　5 個**

補足 a の値による C_1 と C_2 の共有点は次のようになる．



共有点 1 個 $(a < A)$ 共有点 3 個 $(a = A)$ 共有点 5 個 $(a > A)$

(4) C_1 上の点 $(x,\ x^4)$ と点 $(0,\ a)$ 間の距離を d とすると

$$d^2 = x^2 + (x^4 - a)^2 = x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2$$

d の最小値が a であるとき，$d^2 \geqq a^2$ であるから

$$x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2 \geqq a^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) \geqq 0$$

上式が常に成り立つとき，任意の x に対して

$$x^6 - 2ax^2 + 1 \geqq 0$$

が成立する a の範囲であるから，$t = x^2$ とおくと，$t \geqq 0$ において，常に

$$f(t) \geqq 0$$

を満たす a の範囲である．

したがって，(1) の結果から $f\left(\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right) \geqq 0$ を満たす a の範囲は $(a > 0)$

$$-\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0 < a \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}}$$

■

3 (1) P_2 は，A → B → A または A → C → A と移動する確率より

$$P_2 = p(1-p) + (1-p)p = \boldsymbol{2p(1-p)}$$

P_3 は，A → B → C → A または A → C → B → A と移動する確率より

$$P_3 = \boldsymbol{p^3 + (1-p)^3}$$

(2) 移動回数がちょうど $2m$ に達したとき，R が A に初めて戻る場合，最初に A → B と移動し BC 間を $m-1$ 回往復して最後に B → A と移動するか，最初に A → C と移動し CB 間を $m-1$ 回往復して最後に C → A と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p) + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p \\ &= \boldsymbol{2\{p(1-p)\}^m} \end{aligned}$$

移動回数がちょうど $2m+1$ に達したとき，R が A に初めて戻る場合，最初に A → B と移動し BC 間を $m-1$ 回往復して最後に B → C → A と移動するか，最初に A → C と移動し CB 間を $m-1$ 回往復して最後に C → B → A と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2 + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= \boldsymbol{\{p^3 + (1-p)^3\}\{p(1-p)\}^{m-1}} \end{aligned}$$

(3) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき　$p(1-p) = \dfrac{1}{4}$,　$p^3 + (1-p)^3 = \dfrac{1}{4}$

$q = \dfrac{1}{4}$ とおくと，(2) の結果から　$P_{2m} = 2q^m$,　$P_{2m+1} = q{\cdot}q^{m-1} = q^m$

移動回数が $2k$ $(1 \leqq k \leqq N)$ のとき R が A に初めて戻り，$2N+3$ 回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} = 2q^k{\cdot}q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

移動回数が $2k+1$ $(1 \leqq k \leqq N)$ のとき R が A に初めて戻り，$2N+3$ 回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k+1}P_{2(N-k+1)} = q^k{\cdot}2q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N}\{P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} + P_{2k+1}P_{2(N-k+1)}\} &= \sum_{k=1}^{N}(2q^{N+1} + 2q^{N+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} q^N = Nq^N = \boldsymbol{\frac{N}{4^N}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ より，求める面積を S とすると　$S=2\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$

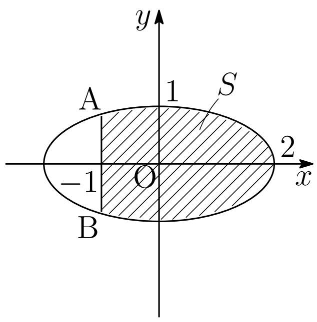
$x=2\cos\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$

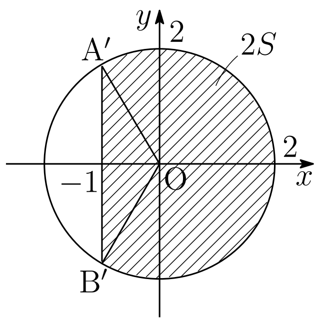
x	$-1 \longrightarrow 2$
θ	$\frac{2}{3}\pi \longrightarrow 0$

よって
$$S=2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}(-2\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}4\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(2-2\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\Big[\,2\theta-\sin 2\theta\,\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

別解 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大したものは，中心が原点で半径 2 の円．このとき，2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が移動した点をそれぞれ $\mathrm{A}'(-1,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}'(-1,-\sqrt{3})$ とおくと，$\angle\mathrm{A'OB}=\dfrac{2\pi}{3}$

$$2S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}\quad よって\quad S=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\pi}{3}$$





(2) 平面 $x=t\ (-1<t<2)$ と楕円柱面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ との交点の y 座標は

$$\frac{t^2}{4}+y^2=1\quad ゆえに\quad y=\pm\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}$$

平面 $x=t\ (-1<t<2)$ と平面 $T:z=x+1$ との交点の z 座標は　$z=t+1$

V を平面 $x=t\ (-1<t<2)$ で切った断面は，底面 $2\sqrt{1-\dfrac{t^2}{4}}$，高さ $t+1$ の長方形であるから

$$\boldsymbol{S(t)=2(t+1)\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}$$

(3) V の体積は，(2) の結果および (1) で求めた定積分に注意して

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} S(t)\,dt &= \int_{-1}^{2} 2t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}dt + 2\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt \\ &= \left[-\frac{8}{3}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2} + S \\ &= \sqrt{3} + \left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{4\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

■

5 (1) O(0, 0)，A(50, 14) より，P$(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ より

$$50x + 14y = 6 \quad ゆえに \quad 25x + 7y = 3 \quad \cdots ①$$

x，y は整数であるから，$25 \equiv 4 \pmod 7$ より，① は

$$4x \equiv 3 \quad ゆえに \quad 8x \equiv 6 \quad すなわち \quad x \equiv -1 \pmod 7$$

整数 k を用いて，$x = 7k-1$ とおき，これを ① に代入すると

$$25(7k-1) + 7y = 3 \quad ゆえに \quad y = -25k + 4$$

したがって　$(x,\ y) = (7k-1, -25k+4)$　$\cdots(*)$

$k = 0$ を $(*)$ に代入すると　$\boldsymbol{(-1,\ 4)}$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= (7k-1)^2 + (-25k+4)^2 = 674k^2 - 214k + 17 \\ &= 647\left(k - \frac{107}{647}\right)^2 - \frac{107^2}{647} + 17\end{aligned}$$

したがって，m と k は次のように対応する．

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
k	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	$\cdots$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{P}_1(-1,\ 4),\ \mathrm{P}_2(6, -21)}$

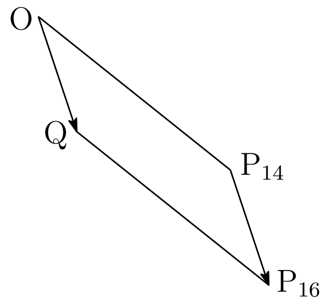
(3) $(*)$ および (2) の表から　$\mathrm{P}_{2k}(7k-1, -25k+4)$　$\cdots(**)$

また　$\mathrm{P}_{2k+1}(7(-k)-1,\ -25(-k)+4)$　すなわち　$\mathrm{P}_{2k+1}(-7k-1,\ 25k+4)$

$(**)$ より，$\mathrm{P}_{2k+2}(7k+6,\ -25k-21)$ であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}} = (-14k,\ 50k),\quad \overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}} = (7, -25)}$$

(4) $(**)$ および (3) の結果に $k=7$ を代入すると



$$\mathrm{P}_{14}(48,-171),\quad \overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}=(7,-25)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ より　　$\mathrm{Q}(7,-25)$

直線 OQ の方程式は　　$25x+7y=0$

直線 $\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}$ の方程式は

$$25(x-48)+7(y+171)=0 \quad \text{すなわち} \quad 25x+7y=3$$

直線 OP_{14} の方程式は　　$171x+48y=0$

直線 QP_{16} の方程式は

$$171(x-7)+48(y+25)=0 \quad \text{すなわち} \quad 171x+48y=-3$$

したがって，四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_14$ の周および内部を表す領域は

$$\begin{cases} 0 \leqq 25x+7y \leqq 3 \\ -3 \leqq 171x+48y \leqq 0 \end{cases}$$

この領域内の点 $(x,\ y)$ が格子点であるとき，$25x+7y$ および $171x+48y$ は整数であるから，整数 $i,\ j$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ -3 \leqq j \leqq 0)$ を用いて

$$\begin{cases} 25x+7y=i \\ 171x+48y=j \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad x=16i-\frac{7j}{3},\ y=-57i+\frac{25j}{3}$$

x，y は整数であるから，条件を満たす $(i,\ j)$ の組は

$$(i,\ j)=(0,\ 0),(1,\ 0),(2,\ 0),(3,\ 0),(0,-3),(1,-3),(2,-3),(3,-3),$$

よって，これに対応する格子点 $(x,\ y)$ は

$$\mathbf{(0,\ 0),\ (16,-57),\ (32,-114),\ (48,-171),}$$
$$\mathbf{(7,-25),\ (23,-82),\ (39,-139),(55,-196)}$$

■

9.4　2018 年 (150 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(A) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(B) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(3) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ．

2 複素数平面上の 4 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$，$\mathrm{D}(\delta)$ を頂点とする四角形 ABCD を考える．ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が 180° より小さい四角形 (凸四角形) であるとする．また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A，B，C，D の順に並んでいるとする．四角形 ABCD の外側に，4 辺 AB，BC，CD，DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB，BQC，CRD，DSA を作る．次の問いに答えよ．

(1) 点 P を表す複素数を求めよ．

(2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ．

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ．

3 次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 次の不等式を示せ．

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$$

4 0，1，2，3 の数字が一つずつ書かれた 4 枚のカードがある．この中から 1 枚を取り出し，書かれた数字を見て元に戻す．この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，$\cdots$，Z_n とする．ここで，N は 3 以上の自然数である．さらに，複素数

$$\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, \quad X_{n+1} = X_n\alpha^{Z_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots, N-1)$$

により定める．$n = 1, 2, \cdots, N$ に対し，$X_n = \alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n = \alpha^2$ となる確率を Q_n とする．次の問いに答えよ．

(1) P_1 を求めよ．

(2) $n = 1, 2, \cdots, N-1$ とする．$\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ となる確率を求めよ．

(3) $n = 1, 2, \cdots, N$ とする．$X_n = 1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ．

(4) $n = 1, 2, \cdots, N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ．

(5) $n = 1, 2, \cdots, N$ に対し，P_n を求めよ．

5 座標平面上で，曲線 $C : y = x^3 - 3x$ と，$b > a^3 - 3a$ を満たすように動く点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える．また，点 P に対し，二つの不等式

$$|x - a| \leqq 1, \quad |y - b| \leqq 1$$

によって表される座標平面上の領域を B とする．領域 B と曲線 C に対して，B と C が共有点 Q をもち，さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき，B と C は点 Q で接するということにする．次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概形をかき，さらに点 P の座標が $(-2,\ 3)$ のときの領域 B を図示せよ．

(2) B と C が $x < -1$ の範囲にある点で接するように，点 P は動くとする．このときの点 P の軌跡を求めよ．

(3) B と C がある点で接するように点 P は動くとする．このときの点 P の軌跡を求めよ．

(4) (3) の点 P の軌跡は，ある関数 $y = f(x)$ のグラフで表すことができる．この $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．

解答例

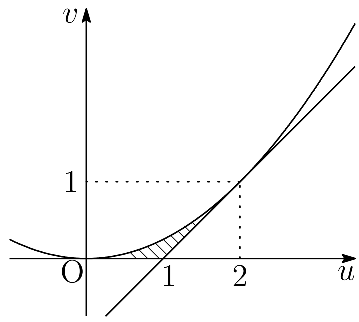
1 (1) $f(t)=t^2-ut+v$ とおくと　$f(t)=\left(t-\dfrac{u}{2}\right)^2+v-\dfrac{u^2}{4}$

2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 x, y が $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$ および上式より

$$v \geqq 0, \quad 1-u+v \geqq 0, \quad 0 \leqq \frac{u}{2} \leqq 1, \quad v-\frac{u^2}{4} \leqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} 0 \leqq u \leqq 2 \\ v \geqq 0 \\ v \geqq u-1 \\ v \leqq \dfrac{u^2}{4} \end{cases}$$



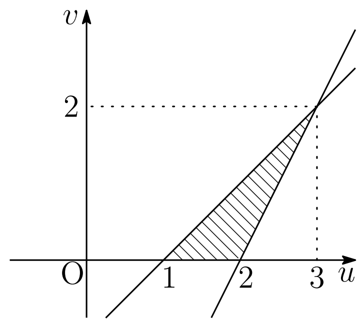
よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．

(2) 2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 x, y が $0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \leqq 0$，$f(2) \geqq 0$ より

$$v \geqq 0, \quad 1-u+v \leqq 0, \quad 4-2u+v \geqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} v \geqq 0 \\ v \leqq u-1 \\ v \geqq 2u-4 \end{cases}$$



よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．

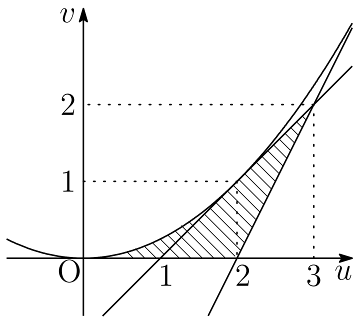
(3) $A=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$，$B=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1\leqq y\leqq 2\}$ とすると，$(x,\ y)$ が4点 $(0,0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部は $A\cup B$ である．(1)，(2) で求めた領域をそれぞれ E，F とすると

点 $(x+y,\ xy)$　すなわち　点 $(u,\ v)$

の表す領域は $E\cup F$ で，右の図のようになる．

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^2\frac{u^2}{4}\,du+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$$
$$=\left[\frac{u^3}{12}\right]_0^2+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{7}{6}}$$



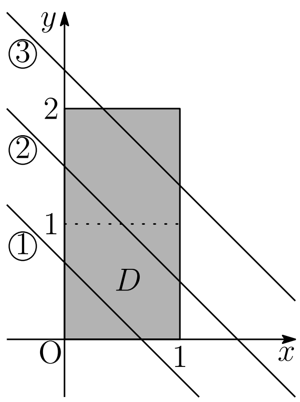
別解　$D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2\}$ とし，直線 $x+y=u$ 上の点 $(x,\ y)\in D$ における $v=xy$ のとる値の範囲を求める．

$$v=x(u-x)=-\left(x-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u^2}{4}$$

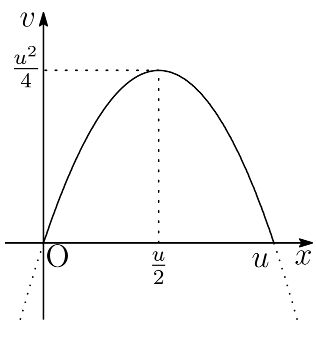
① $0\leqq u\leqq 1$ のとき　$0\leqq x\leqq u$

② $1\leqq u\leqq 2$ のとき　$0\leqq x\leqq 1$

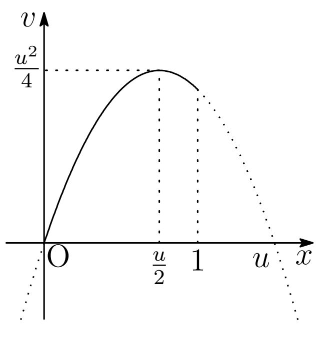
③ $2\leqq u\leqq 3$ のとき　$u-2\leqq x\leqq 1$



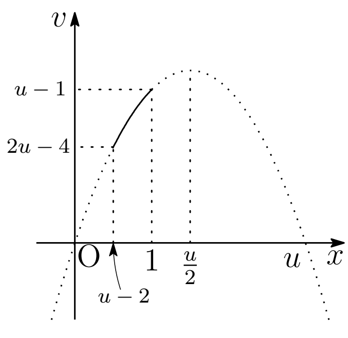
① $0\leqq u\leqq 1$



② $1\leqq u\leqq 2$



③ $2\leqq u\leqq 3$

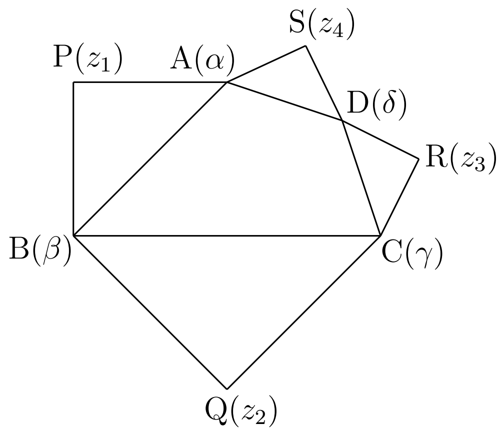


(i) $0\leqq u\leqq 2$ のとき　$0\leqq v\leqq\dfrac{u^2}{4}$

(ii) $2\leqq u\leqq 3$ のとき　$2u-4\leqq v\leqq u-1$

よって　$S=\displaystyle\int_0^2\frac{u^2}{4}\,du+\int_2^3\{(u-1)-(2u-4)\}\,du=\frac{7}{6}$　■

2 (1) $\mathrm{P}(z_1)$ とすると



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BA}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \angle\alpha\beta z_1=\frac{\pi}{4}$$

したがって

$$\frac{z_1-\beta}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに　$z_1-\beta=\dfrac{1}{2}(1+i)(\alpha-\beta)$

よって　$z_1=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(1+i)\alpha+\dfrac{1}{2}(1-i)\beta}$

(2) $\mathrm{Q}(z_2)$，$\mathrm{R}(z_3)$，$\mathrm{S}(z_4)$ とおくと，(1) と同様にして

$$z_2=\frac{1}{2}(1+i)\beta+\frac{1}{2}(1-i)\gamma,\quad z_3=\frac{1}{2}(1+i)\gamma+\frac{1}{2}(1-i)\delta$$
$$z_4=\frac{1}{2}(1+i)\delta+\frac{1}{2}(1-i)\alpha$$

ゆえに
$$\begin{aligned}-z_1+z_2-z_3+z_4&=\frac{1}{2}(1+i)(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\\&\quad+\frac{1}{2}(1-i)(-\beta+\gamma-\delta+\alpha)\\&=i(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\end{aligned}$$

したがって　$-z_1+z_2-z_3+z_4=0 \iff -\alpha+\beta-\gamma+\delta=0$

すなわち　$z_2-z_1=z_3-z_4 \iff \beta-\alpha=\gamma-\delta$

よって，四角形 ABCD が平行四辺形であることは四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件である．

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるから，(2) の結果より，$\delta-\gamma=\alpha-\beta$

$$\begin{aligned}z_1-z_2&=\frac{1}{2}(1+i)(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}(1-i)(\beta-\gamma),\\z_3-z_2&=\frac{1}{2}(1+i)(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}(1-i)(\delta-\gamma)\\&=\frac{1}{2}(1+i)(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}(1-i)(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

したがって　$i(z_3-z_2)=\dfrac{1}{2}(i-1)(\gamma-\beta)+\dfrac{1}{2}(i+1)(\alpha-\beta)=z_1-z_2$

上式から　$\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=i$　ゆえに　$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}$，$\angle\mathrm{PQR}=90^\circ$

四角形 PQRS は平行四辺形でもあるから，四角形 PQRS は正方形．■

3　(1) $f(t)=e^t-1-t$ とおくと　$f'(t)=e^t-1$

t	$\cdots$	0	$-$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，すべての実数 t に対し，次式が成立する．

$$e^t-1-t \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 1+t \leqq e^t \quad \cdots(*)$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx \\ &= \left[\tan x-\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathbf{2-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(3) $(*)$ より　$1-t \leqq e^{-t}$

$t>-1$ のとき，$1+t>0$ であるから，$(*)$ より　$e^{-t} \leqq \dfrac{1}{1+t}$

したがって，$t>-1$ のとき　$1-t \leqq e^{-t} \leqq \dfrac{1}{1+t}$　$\cdots(**)$

$t=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$ とすると，$(**)$ を満たすから

$$1-\sin x \leqq e^{-\sin x} \leqq \frac{1}{1+\sin x}$$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

このとき　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)\,dx = \Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) および上の結果から

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $X_1=\alpha$，すなわち，$Z_1=1$ となる確率であるから $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) $\alpha^{Z_{n+1}}=1$，すなわち，$Z_{n+1}=0,\ 3$ となる確率であるから $\dfrac{2}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) $X_n=1$ となる確率を R_n とすると　$P_n+Q_n+R_n=1$　$\cdots(*)$

よって　　$R_n=\boldsymbol{1-P_n-Q_n}$

(4) 条件により，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} P_{n+1}&=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}Q_n+\frac{1}{4}R_n\\ Q_{n+1}&=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{2}Q_n+\frac{1}{4}R_n\\ R_{n+1}&=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}Q_n+\frac{1}{2}R_n \end{aligned}$$

上の第 2 式と第 3 式の辺々を加えると

$$Q_{n+1}+R_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{3}{4}(Q_n+R_n)$$

$(*)$ より，$Q_n+R_n=1-P_n$ であるから，これを上式に代入すると

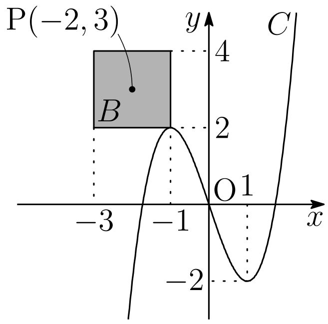
$$1-P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{3}{4}(1-P_n)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{P_{n+1}=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}}$$

(5) (4) の結果から　　$P_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left(P_n-\dfrac{1}{3}\right)$

ゆえに　　$P_n-\dfrac{1}{3}=\left(P_1-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

(1) の結果を代入して　　$\boldsymbol{P_n=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)}$　■

5 (1) $y = x^3 - 3x$ より



$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

曲線 C の概形は右の図のようになる．

P が $(-2,\ 3)$ のとき，領域 B は　　$|x+2| \leqq 1,\quad |y-3| \leqq 1$

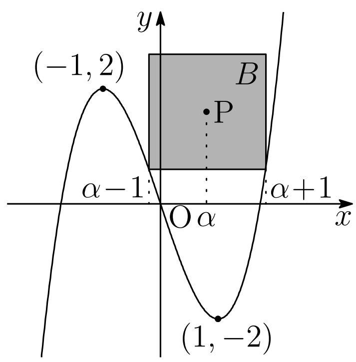
よって，右の図のようになる．

(2) $g(x) = x^3 - 3x$ とおくと，P は $C : y = g(x)$ $(x < -1)$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから

$$y = g(x+1) + 1 \quad (x + 1 < -1)$$

よって　　$\boldsymbol{y = x^3 + 3x^2 - 1 \quad (x < -2)}$

(3) 右の図のように B と C が 2 点で接するときの P の x 座標を α とすると



$$g(\alpha - 1) = g(\alpha + 1)$$

$$(\alpha-1)^3 - 3(\alpha-1) + 1 = (\alpha+1)^3 - 3(\alpha+1) + 1$$

整理すると　　$3\alpha^2 - 2 = 0$

このとき，$\alpha > 0$ であることに注意して

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$g(x) = x^3 - 3x$ とおくと，点 P の軌跡の方程式は

$$y = \begin{cases} g(x+1)+1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ g(x-1)+1 & (0 < x \leqq \alpha) \\ g(x+1)+1 & (\alpha < x) \end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 3 & (0 < x \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}) \\ x^3 + 3x^2 - 1 & (\frac{\sqrt{6}}{3} < x) \end{cases}}$$

(4) (3) の結果から

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2-1 & (x<-2) \\ 3 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ x^3-3x^2+3 & (0<x \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}) \\ x^3+3x^2-1 & (\frac{\sqrt{6}}{3}<x) \end{cases}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{3-3}{x}=0,$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{(x^3-3x^2+3)-3}{x}=0$$

ゆえに　$\displaystyle f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

よって，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能である．

補足 $f(x)$ は微分可能 (C^1級) である．

実際，$f(x)=3$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$，$f(x)=x^3-3x^2+3$ $(0 \leqq x < \frac{\sqrt{6}}{3})$ より

$$f''(x)=0 \ \ (-2<x<0), \quad f''(x)=6x-6 \ \ \left(0<x<\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}f''(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f''(x)=-6$ より，C^2 級ではない．■

9.5 2019年(150分)

1 $a>0$，$r>0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする．また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される．

$$b_1=a_1,\quad b_{n+1}=b_na_{n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) b_n を a，r および n を用いて表せ．

(2) 一般項が

$$c_n=\frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ．

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする．すなわち，

$$M_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k$$

とする．このとき，一般項が

$$d_n=2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ．

2 箱の中に1から N までの数が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．ただし，N を2以上の自然数とする．「カードをよく混ぜて1枚取り出し，そのカードに書かれた数を読み取り，そのカードをもとに戻す」という試行を4回繰り返す．1回目，2回目，3回目および4回目に取り出したカードに書かれた数を，それぞれ a_1，a_2，a_3，a_4 とする．また，座標平面上に4点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{P}_3(a_1-a_3,\ a_2)$，$\mathrm{P}_4(a_1-a_3,\ a_2-a_4)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) P_4 が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ．

(2) P_4 が連立不等式 $x \geqq 0$，$y \leqq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ．

(3) P_4 が直線 $y=x$ 上にある確率を N を用いて表せ．

(4) $N=2^m$ とする．ただし，m を自然数とする．P_4 が原点 O に一致し，かつ，四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ．

3 関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt$$

を満たすとする．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．また，$f'(x) = 2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲にただ一つの解をもつことを示せ．

(4) (3) のただ一つの解を α とする．曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y = f(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \pi)$，$x$ 軸および直線 $x = \pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 の大小を判定せよ．

4 i を虚数単位とし，複素数 z に対して，

$$w = z^2 + 2z + 1 - 2i$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ．

(2) $w = 0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し，それぞれを $a + bi$ (a, b は実数) の形に書き表せ．

(3) (2) で求めた二つの複素数のうち実部の大きい方を α，実部の小さい方を β とし，対応する複素数平面上の点をそれぞれ A，B とする．また，線分 AB の中点を M とする．複素数 z に対応する複素数平面上の点が，線分 AM 上 (両端を含む) を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(4) 複素数 z に対応する複素数平面上の点が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

5 原点を O とする座標平面上において，点 A$(0,\ 3)$，B$(0, -1)$ および x 軸上の正の部分を動く点 P$(t,\ 0)$ があり，$\angle$APB は鈍角でないとする．$\triangle$ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする．次の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている．その交点のことを，三角形の垂心という．

(1) $\angle$APB が直角となる t の値を求めよ．

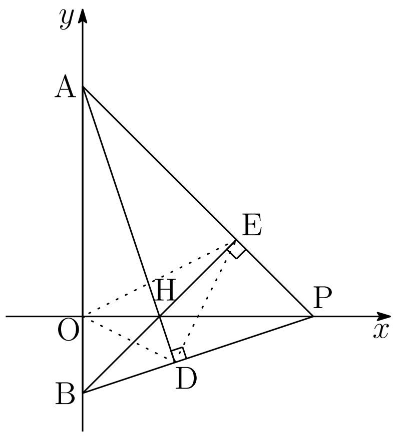
(2) 点 H の座標を t を用いて表せ．

以下では，t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする．

(3) 点 H が $\triangle$ODE の内心であることを証明せよ．ただし，1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい．

(4) $\triangle$ODE の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ．

(5) (4) で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ．ただし，最大値を与える t の値を求める必要はない．



解答例

$\boxed{1}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 r の等比数列であるから $(a>0,\ r>0)$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$b_1 = a_1 = a$，$b_{n+1} = b_n a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ より　$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$

$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} ar^k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{a} = a^{n-1} r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$n = 1$ のときも，上式は成立することから　$\boldsymbol{b_n = a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$

(2) (1) の結果から　$\log_2 b_n = n\log_2 a + \dfrac{1}{2}n(n-1)\log_2 r$

したがって　$c_n = \dfrac{\log_2 b_n}{n} = \log_2 a + \dfrac{1}{2}(n-1)\log_2 r$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $\log_2 a$，公差 $\dfrac{1}{2}\log_2 r$ の等差数列

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{\log_2 a + \frac{1}{2}(k-1)\log_2 r\right\} = n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r$$

ゆえに

$$\begin{aligned} M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \frac{1}{n}\left\{n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r\right\} \\ &= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1)\log_2 r \end{aligned}$$

したがって　$d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$

よって，数列 $\{d_n\}$ は，初項 a，公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列である． ■

$\boxed{2}$ (1) $a_1 - a_3 = 0$，すなわち，$a_1 = a_3$ を満たす $(a_1,\ a_3)$ の組は　N (組)

同様に，$a_2 - a_4 = 0$ を満たす $(a_2,\ a_4)$ の組も　N (組)

よって，求める確率は　$\dfrac{N \cdot N}{N^4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{N^2}}$

(2) $a_1 - a_3 > 0$，すなわち，$a_1 > a_3$ を満たす $(a_1,\ a_3)$ の組は　${}_N\mathrm{C}_2$ (組)

$a_1 - a_3 = 0$ を満たす $(a_1,\ a_3)$ の組は，(1) で示した　N (組)

ゆえに，$a_1 - a_3 \geqq 0$ を満たす組は　${}_N\mathrm{C}_2 + N = \dfrac{1}{2}N(N+1)$

同様に，$a_2 - a_4 \geqq 0$ を満たす組も　$\dfrac{1}{2}N(N+1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{\left\{\frac{1}{2}N(N+1)\right\}^2}{N^4} = \boldsymbol{\dfrac{(N+1)^2}{4N^2}}$

(3) P_4 が直線 $y = x$ 上にあるとき

$$a_1 - a_3 = a_2 - a_4 = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(N-1)\,)$$

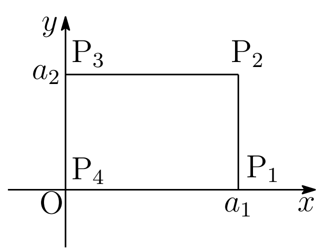
それぞれの k に対する $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ の組数は　$N - |k|$

その総数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=-(N+1)}^{N+1} (N - |k|)^2 &= N^2 + 2\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)^2 = N^2 + 2\sum_{k=1}^{N-1} k^2 \\ &= N^2 + 2 \cdot \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1) \\ &= \frac{1}{3}N(2N^2+1)\end{aligned}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{\frac{1}{3}N(2N^2+1)}{N^4} = \boldsymbol{\dfrac{2N^2+1}{3N^3}}$

(4) $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(a_1,\ a_2)$．P_4 が原点に一致するとき，$a_1 - a_3 = 0$ より，$\mathrm{P}_3(0,\ a_2)$．ゆえに，四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ は右の図のようになる．この四角形の面積が $2^m\ (= N)$ となるとき



$$(a_1,\ a_2) = (2^j,\ 2^{m-j}) \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{m+1}{N^4} = \dfrac{m+1}{(2^m)^4} = \boldsymbol{\dfrac{m+1}{2^{4m}}}$ ■

3　(1) 与えられた関数 $f(x)$ から

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt \quad \cdots(*)$$

これに $x=0$ を代入すると　　$\boldsymbol{f(0)=1}$

$(*)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)\cos x + x\sin x - e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt - e^x{\cdot}e^{-x}f(x) \\ &= (x-1)\cos x + x\sin x - e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt - f(x) \end{aligned}$$

上式および $(*)$ から $f(x)$ を消去すると　$f'(x) = 2(x-1)\cos x$

(2) (1) の結果から

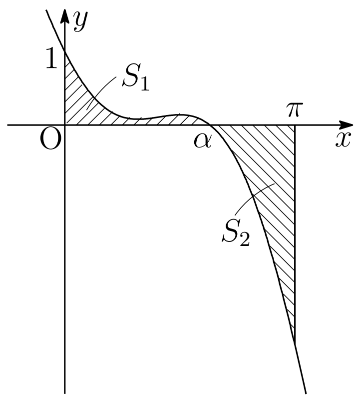
$$f(x) = \int 2(x-1)\cos x\,dx = 2(x-1)\sin x + 2\cos x + C$$

$f(0)=1$ より　$2+C=1$　ゆえに　$C=-1$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = 2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1}$

(3) (1)，(2) の結果から

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{2})$	$\searrow$	-3



$1 < \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\cos 1 > \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ より

$$f(1) = 2\cos 1 - 1 > 0$$

よって，方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲にただ一つの解をもつ．

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)\,dx &= \int_0^\pi \{2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1\}\,dx \\ &= \Big[-2(x-1)\cos x + 4\sin x - x\Big]_0^\pi = \pi - 4 < 0 \end{aligned}$$

$S_1 = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx$，$S_2 = -\displaystyle\int_\alpha^\pi f(x)\,dx$ であるから

$$S_1 - S_2 = \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi f(x)\,dx < 0$$

よって　　$\boldsymbol{S_1 < S_2}$　■

$\boxed{4}$ (1) $w=(z+1)^2-2i$ であるから，$z=x+yi$ とすると

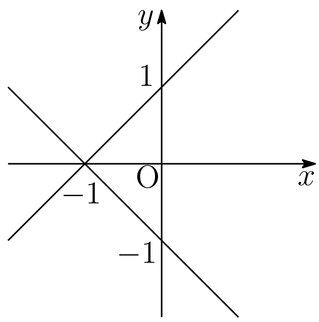
$$
\begin{aligned}
w &= (x+yi+1)^2-2i=(x+1)^2+2(x+1)yi-y^2-2i \\
&= (x+1)^2-y^2+2\{(x+1)y-1\}i \quad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

w の実部が 0 のとき，$(*)$ より

$$(x+1)^2-y^2=0$$

したがって　　$y=\pm(x+1)$

よって，z の表す図形は右の図のとおり．



(2) $w=0$ のとき，$(*)$ より $\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ (x+1)y-1=0 \end{cases}$

第 1 式から，次の場合分けを行う．

(i) $y=x+1$ のとき，これを第 2 式に代入して

$$(x+1)^2-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad x(x+2)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=0,-2$$

したがって　$x=0$ のとき $y=1$，$x=-2$ のとき $y=-1$

(ii) $y=-(x+1)$ のとき，これを第 2 式に代入して

$$-(x+1)^2-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)^2=-1$$

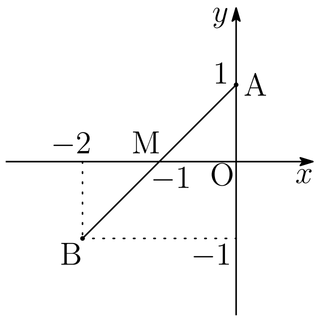
これを満たす実数 x は存在しない．

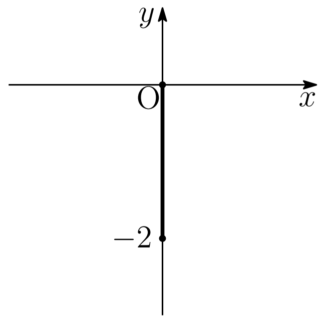
(i)，(ii) より，求める複素数は　　$\boldsymbol{i,\ -2-i}$

(3) 条件より，A(i)，B($-2-i$) であり，線分 AB の中点は M(-1)
線分 AM 上 (両端を含む) の点 $x+yi$ は $y=x+1$ $(-1 \leqq x \leqq 0)$ であるから，これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} w &= (x+1)^2-(x+1)^2+2\{(x+1)(x+1)-1\}i \\ &= \{2(x+1)^2-2\}i \end{aligned}$$

$-1 \leqq x \leqq 0$ より，$-2 \leqq 2(x+1)^2-2 \leqq 0$ であるから，w は，右下の図のように，虚軸上の 2 点 $-2i$ と 0 を結ぶ線分 (両端を含む) 上を動く．





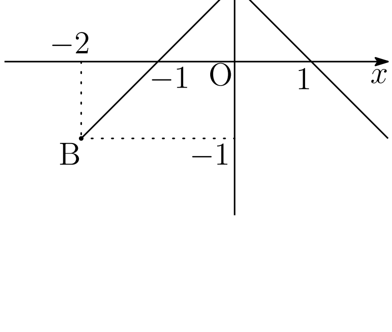
(4) 点 z が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線 $y=-x+1$ 上を動くとき，これを $(*)$ に代入して

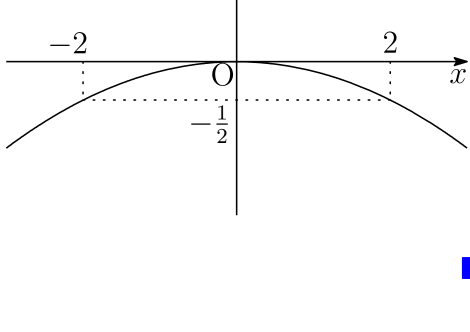
$$\begin{aligned} w &= (x+1)^2-(-x+1)^2+2\{(x+1)(-x+1)-1\}i \\ &= 4x-2x^2 i \end{aligned}$$

上式において，x を $\dfrac{x}{4}$ に置き換えると

$$w = 4\cdot\frac{x}{4}-2\left(\frac{x}{4}\right)^2 i = x-\frac{x^2}{8}i$$

よって，複素数平面上の点 $z=x+yi$ は，右下の図のように放物線 $y=-\dfrac{x^2}{8}$ 上を動く．





5　(1)　3点 A$(0,\ 3)$，B$(0, -1)$，P$(t,\ 0)$ $(t>0)$ により

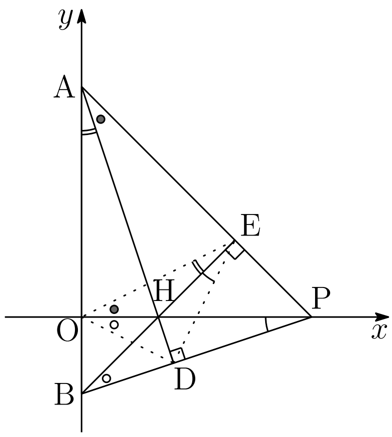
$$\text{直線 AP の傾きは } -\frac{3}{t},\quad \text{直線 BP の傾きは } \frac{1}{t}$$

2直線 AP，BP は直交するから　$-\dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{1}{t}=-1$　よって　$\boldsymbol{t=\sqrt{3}}$

(2)　直線 BE は点 B$(0,-1)$ を通り，傾き $\dfrac{t}{3}$ であるから (直線 AP に垂直)

$$y=\frac{t}{3}x-1 \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{t}{3}\left(x-\frac{3}{t}\right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{3}{t}},\ \mathbf{0}\right)$$

(3)　四角形 AOHE，四角形 OBDH，四角形 HDPE は，それぞれ対角の和が 180° であるから，円に内接する．



四角形 AOHE において　$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{EAH}$

$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{OAH}$

四角形 OBDH において　$\angle\mathrm{HOD}=\angle\mathrm{HBD}$

四角形 HDPE において　$\angle\mathrm{HED}=\angle\mathrm{HPD}$

$\triangle\mathrm{AHE}\backsim\triangle\mathrm{BHD}$ より　$\angle\mathrm{EAH}=\angle\mathrm{HBD}$

$\triangle\mathrm{AHO}\backsim\triangle\mathrm{PHD}$ より　$\angle\mathrm{OAH}=\angle\mathrm{HPD}$

上の第1，第3，第5式から

$$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{HOD} \quad \cdots ①$$

同様に，上の第2，第4，第6式から

$$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{HED} \quad \cdots ②$$

①，② より，$\triangle\mathrm{ODE}$ において，線分 OH，EH は，それぞれ $\angle\mathrm{O}$，$\angle\mathrm{E}$ の二等分線である．よって，点 H は $\triangle\mathrm{ODE}$ の内心である．

(4)　点 E は，直線 AP : $y=-\dfrac{3}{t}x+3$ と (2) の直線 $y=\dfrac{t}{3}x-1$ 交点である．

これらの連立方程式を解くと　$\mathrm{E}\left(\dfrac{12t}{t^2+9},\ \dfrac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$

ゆえに，直線 OE の方程式は　$y=\dfrac{3t^2-9}{12t}x$　すなわち　$(t^2-3)x-4ty=0$

$\triangle\mathrm{ODE}$ の内接円の半径 $f(t)$ は，点 H$\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ から直線 OE までの距離であるから $(t>\sqrt{3})$

$$f(t)=\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}-4t\cdot 0\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+(-4t)^2}}=\boldsymbol{\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}}$$

(5) (4) の結果から

$$f(t)^2 = \frac{9(t^2-3)^2}{t^2\{(t^2-3)^2+16t^2\}}$$

$t > \sqrt{3}$ より，$t^2 - 3 = \dfrac{1}{u}$ とおくと $(u > 0)$

$$f(t)^2 = \frac{9\left(\frac{1}{u}\right)^2}{\left(\frac{1}{u}+3\right)\left\{\left(\frac{1}{u}\right)^2+16\left(\frac{1}{u}+3\right)\right\}} = \frac{9}{\left(\frac{1}{u}+3\right)\{1+16u(1+3u)\}}$$

$g(u) = \left(\frac{1}{u}+3\right)\{1+16u(1+3u)\}$ とおくと $(u > 0)$

$$g(u) = 144u^2 + 96u + 19u + \frac{1}{u}$$
$$g'(u) = 288u + 96 - \frac{1}{u^2}$$
$$g''(u) = 288 + \frac{2}{u^3} > 0$$

$g'(u)$ は単調増加，$\displaystyle\lim_{u\to+0} g'(u) < 0$，$\displaystyle\lim_{u\to\infty} g'(u) > 0$
したがって，$g'(u) = 0$ を満たす u_0 が唯一存在する．

u	(0)	$\cdots$	u_0	$\cdots$
$g'(u)$		$-$	0	$+$
$g(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに，$g(u)$ は最小値 $g(u_0)$ をとる．

よって，$t = \sqrt{3 + \dfrac{1}{u_0}}$ のとき $f(t)$ は最大値をとる．■

9.6　2020 年 (150 分)

1 $a,\ b$ を正の定数とする．$0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の三つの条件 (i)，(ii)，(iii) を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える．

(i) $\mathrm{PA} = a$，$\mathrm{PB} = b$，$\angle\mathrm{APB} = \theta$ である．

(ii) 2 点 C，D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある．

(iii) $\mathrm{AB} = 3\mathrm{AD}$ である．

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(2) S を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする．M を $a,\ b$ を用いて表せ．また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) $a = 16,\ b = 25$ とする．また，β を (3) で定めた値とする．$\theta = \beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ．

2 i を虚数単位とする．$z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し，

$$w = \frac{z - i}{z + 1}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $z \neq -1$ のとき $w \neq 1$ であることを示せ．また，$w \neq 1$ のとき，z を w を用いて表せ．

(2) t を -1 と異なる実数とする．複素数平面において，実部が t である複素数全体の描く直線を ℓ_t とおく．点 z が直線 ℓ_t 上を動くとき，点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く．この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ．

(3) P_t を (2) で定義した点とする．t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を，複素数平面上に図示せよ．

3 関数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ．また，極大値をとるときの x の値，および極小値をとるときの x の値を求めよ．

(2) $a > 0$ とし，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える．また，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ_t とおく．ℓ_t が点 A を通るような実数 t がちょうど二つあるとする．このとき，a の値を求めよ．さらに，その二つの t の値を $p,\ q$ (ただし，$p < q$) とおくとき，$p,\ q$ を求めよ．

(3) q を (2) で定めた値とする．曲線 $y = f(x)$，直線 $x = q$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

4 n を正の整数とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\, dx$$

の値を求めよ．

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi} |\sin nx|\, dx$$

の値を求めよ．

(3) 座標平面において連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}, \quad y \leqq |\sin nx|$$

の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(4) 座標平面において連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\,|\sin nx|$$

の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

5 1個のさいころを3回投げる．1回目に出た目を a_1，2回目に出た目を a_2，3回目に出た目を a_3 とする．次に，1枚の硬貨を3回投げる．$k=1,2,3$ に対し，k 回目に表が出た場合は $b_k=1$，裏が出た場合は $b_k=a_k$ とおく．ベクトル

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\quad \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $a_1+a_2+a_3=7$ である確率を求めよ．

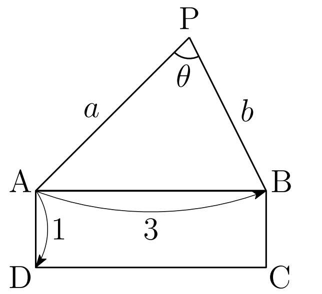
(2) $b_1=1$ である確率を求めよ．

(3) $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$ である条件付き確率を求めよ．

(4) $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$a_1+a_2+a_3=7$ である条件付き確率を求めよ．

解答例

1 (1) $\triangle$PAB に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

AB > 0 であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$$

(2) $\mathrm{AD} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$ であるから

$$\text{長方形 ABCD の面積} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$$

また，$\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{6}(3\sin\theta - 4\cos\theta)} \end{aligned}$$

(3) $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$，$\sin\varphi = -\dfrac{4}{5}$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < 0\right)$，(2) の結果から

$$S = \frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{5ab}{6}\sin(\theta + \varphi)$$

$0 < \theta < \pi$ より，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta + \varphi < \pi$ であるから，S が最大なるとき，$\theta = \beta$ であるから

$$\beta + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

よって

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \boldsymbol{-\frac{4}{5}}$$

(4) $a = 16$，$b = 25$，$\theta = \beta$ のとき　$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 16\cdot 25\cdot\dfrac{3}{5} = 120$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{16^2 + 25^2 - 2\cdot 16\cdot 25\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1521} = 39$$

点 P から直線 AB までの距離を h とすると，$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h$ であるから

$$120 = \frac{1}{2}\cdot 39h \quad \text{よって} \quad h = \boldsymbol{\frac{80}{13}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $w=\dfrac{z-i}{z+1}$ より　$w-1=-\dfrac{1+i}{z+1}\neq 0$

したがって，$z\neq -1$ のとき，$w-1\neq 0$，すなわち，$w\neq 1$

また　$w(z+1)=z-i$　ゆえに　$(w-1)z=-w-i$

$w\neq 1$ に注意して　$\boldsymbol{z=-\dfrac{w+i}{w-1}}$

(2) 実部が t の直線 ℓ_t 上の点 z において　$z+\overline{z}=2t$

これに (1) の結果を代入すると　$-\dfrac{w+i}{w-1}-\dfrac{\overline{w}-i}{\overline{w}-1}=2t$

$$(w+i)(\overline{w}-1)+(w-1)(\overline{w}-i)+2t(w-1)(\overline{w}-1)=0$$
$$2(t+1)|w|^2-(2t+1+i)w-(2t+1-i)\overline{w}+2t=0$$

$t\neq -1$ より，$t+1\neq 0$ であるから

$$|w|^2-\frac{2t+1+i}{2(t+1)}w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\overline{w}=-\frac{t}{t+1}$$
$$\left|w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\right|^2=\frac{(2t+1)^2+1}{4(t+1)^2}-\frac{t}{t+1}$$

したがって　$\left|w-\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}|t+1|}$

上式および (1) の結果から，点 w は点 $\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}|t+1|}$

の点1を除く円周上を動く．よって，求める円 S_t の中心 P_t は　$\boldsymbol{\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}}$

補足　ℓ_t の点を $z=t+(t+1)i\tan\theta$ とおくと [3] $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned}
w&=1-\frac{1+i}{z+1}=1-\frac{1+i}{(t+1)(1+i\tan\theta)}\\
&=1-\frac{(1+i)\cos\theta}{(t+1)(\cos\theta+i\sin\theta)}=1-\frac{(1+i)\cos\theta(\cos\theta-i\sin\theta)}{t+1}\\
&=1-\frac{(1+i)(1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta)}{2(t+1)}\\
&=1-\frac{1+i}{2(t+1)}-\frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\{\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\}}{2(t+1)}\\
&=\frac{2t+1-i}{2(t+1)}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\theta\right)}{\sqrt{2}(t+1)}
\end{aligned}$$

$-\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-2\theta<\frac{5\pi}{4}$ であるから，点1を除く円周上を動く．

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2019.pdf $\boxed{5}$ の解説を参照．

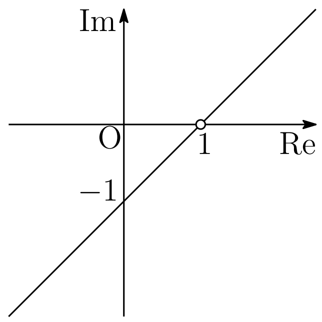
(3) (2) の結果から

$$\frac{2t+1-i}{2(t+1)} = x+yi \quad (x,\ y \text{ は実数})$$

ゆえに　　$x = \dfrac{2t+1}{2(t+1)},\quad y = -\dfrac{1}{2(t+1)}$

したがって　$x-1 = y = -\dfrac{1}{2(t+1)} \neq 0$

よって　　$\boldsymbol{y = x-1 \ \ (x \neq 1)}$



3 (1) $f(x) = xe^{-2x^2}$ より

$$f'(x) = e^{-2x^2} + x(-4x)e^{-2x^2} = (1+2x)(1-2x)e^{-2x^2}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{e}}}$**，**$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}}$

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ_t の方程式は

$$y - te^{-2t^2} = (1-4t^2)e^{-2t^2}(x-t)$$

ℓ_t が点 $(a,\ 0)$ を通ることから

$$-t = (1-4t^2)(a-t) \quad \text{ゆえに} \quad 4t^3 - 4at^2 + a = 0 \quad \cdots (*)$$

$g(t) = 4t^3 - 4at^2 + a$ とおくと　$g'(t) = 12t^2 - 8at = 4t(3t-2a)$
$a > 0$ より，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2a}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$-\frac{16}{27}a^3 + a$	$\nearrow$

$g(t) = 0$ の解がちょうど 2 個であるから，$a \neq 0$ に注意して

$$-\frac{16}{27}a^3 + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a\left(a^2 - \frac{27}{16}\right) = 0$$

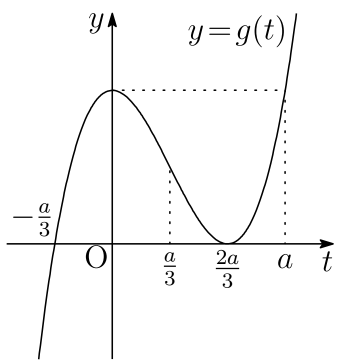
$a > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$

このとき，$p < 0 < q = \dfrac{2a}{3}$ であり，方程式 $(*)$ の解は p, q (q は2重解) であるから，解と係数の関係により

$$p + \frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} = a \quad \text{ゆえに} \quad p = -\frac{a}{3}$$

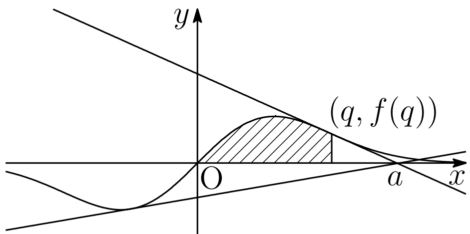
よって $\quad p = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

$$q = \frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



補足 右上の $y = g(t)$ のグラフの t 座標 $-\dfrac{a}{3}$, 0, $\dfrac{a}{3}$, $\dfrac{2a}{3}$, a は等差数列をなす[4].

$f'(x) = (1-4x^2)e^{-2x^2}$ より，$f''(x) = 4x(4x^2-3)e^{-2x^2}$ であるから，曲線 $y = f(x)$ 上の変曲点は $(-q,\ f(-q))$, $(0,\ 0)$, $(q,\ f(q))$ である．点 $(q, f(q))$ における接線が点 A$(a,\ 0)$ を通る $(a > 0)$．3次関数のグラフに引いた接線の本数についても，変曲点を通る場合が2本である[5].



(3) (2) の結果から，求める図形の面積は

$$\int_0^q xe^{-2x^2} = \left[-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\right]_0^q = \frac{1}{4}(1 - e^{-2q^2}) = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1 - e^{-\frac{3}{2}})}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \boldsymbol{\frac{2}{n}}$

(2) $\left|\sin n\left(x + \dfrac{\pi}{n}\right)\right| = |\sin nx|$ より，$y = |\sin nx|$ は周期 $\dfrac{\pi}{n}$ の周期関数であるから，求める面積を S とすると

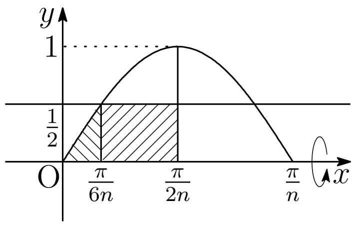
$$\frac{S}{n} = \int_0^{\frac{\pi}{n}} |\sin nx|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{n}{\pi}} = \frac{2}{n}$$

よって $\quad S = \boldsymbol{2}$

---

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2015.pdf (p.4 の解説を参照)
[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf $\boxed{2}$ の解説を参照

(3) 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_n とすると



$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{6n}} \sin^2 nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{6n}}^{\frac{\pi}{2n}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6n}} \frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{6n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{4}\,dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4n}\sin 2nx\right]_0^{\frac{\pi}{6n}} + \left[\frac{x}{4}\right]_{\frac{\pi}{6n}}^{\frac{\pi}{2n}} \\ &= \frac{\pi}{6n} - \frac{\sqrt{3}}{8n}\end{aligned}$$

よって，求める体積は　$2nV_n = 2n\left(\frac{\pi}{6n} - \frac{\sqrt{3}}{8n}\right)\pi = \boldsymbol{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\pi}$

別解 y 軸を元に $y = |\sin nx|$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ を x 軸方向に n 倍に拡大したものは，$y = |\sin x|$ $(0 \leqq x \leqq n\pi)$ であり，x 軸の周りの回転体の体積が n 倍される．求める体積を V_0 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_0}{2\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[\frac{x}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

(4) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\pi} (\sqrt{x}\,|\sin nx|)^2\,dx = \int_0^{\pi} x\sin^2 nx\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x}{2}(1-\cos 2nx)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4n}x\sin 2nx - \frac{1}{8n^2}\cos 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \frac{\pi^3}{4}}$　■

5 (1) $a_1+a_2+a_3=7$ の場合の数の総数は，7 個の○を一列に並べ，間の 6 カ所のうち 2 カ所に仕切りを作り，区切られた○の個数を順番に a_1，a_2，a_3 としたときの場合の総数に等しい．よって，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{72}}$$

(2) $b_1=1$ となるのは，次の事象である．

- 1 回目に投げた硬貨が表である．
- 1 回目に投げた硬貨が裏で，$a_1=1$ である．

これらの事象は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{7}{12}}$$

(3) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$，$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ となる事象をそれぞれ A，B とする．(2) の結果から

$$P(B)=\left(\frac{7}{12}\right)^3$$

$A\cap B$ は，さいころの出た目が順に 1，1，5 で，硬貨は，1，2 回目は表・裏どちらでもよく，3 回目が裏となる事象であるから

$$P(A\cap B)=\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{12}{7}\right)^3=\mathbf{\frac{4}{343}}$$

(4) $a_1+a_2+a_3=7$ となる事象を C とする．$B\cap C$ は，$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ の組合せが $\{1,\ 1,\ 5\}$，$\{1,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 3,\ 3\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$ の場合であるから

$$\begin{aligned}P(B\cap C)&=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left\{\frac{3!}{2!}\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}+3!\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3!}{2!}\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3!}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\\&=\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{33}{8}\end{aligned}$$

求める条件付き確率は　$P_B(C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(B)}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\dfrac{33}{8}\times\left(\dfrac{12}{7}\right)^3=\mathbf{\dfrac{33}{343}}$ ■

第 10 章　九州大学

出題分野 (2011-2020) 150 分

◀	九州大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	数と式										
I	2 次関数		3								
	図形と計量										
	データの分析										
	式と証明									2	
	複素数と方程式										2
II	図形と方程式				3						
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法					1					
	式と曲線				3				1		
	複素数平面						5	5	5	3·5	
	関数										
III	極限		3·4	1			1			1·4	
	微分法とその応用	2			1			1			1
	積分法					2					
	積分法の応用	1	1	1·4	1	3	1	1	2		5
	場合の数と確率	5	5	3	4*	4	3	4	3	3	4
A	整数の性質				2	5	4	3	4		2
	図形の性質						2				
	平面上のベクトル										
B	空間のベクトル	4		2				2			3
	数列	3	5					3			
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		2	5							

数字は問題番号 ($*$ は旧課程の内容を含む)

10.1　2015 年 (150 分)

1　C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leqq x \leqq 2$$
$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leqq x \leqq 0$$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が (1) の条件を満たすとする。このとき，ℓ と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

2　以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

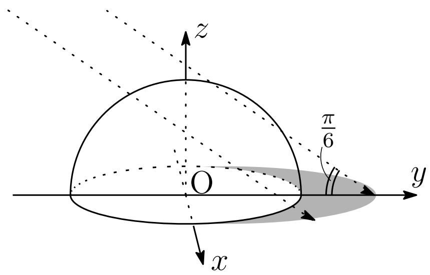
が成り立つことを示せ。

3 座標空間内に，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当っている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当らない部分の y 座標を k を用いて表せ。

(2) xy 平面上において，球の外で光が当らない部分の面積を求めよ。

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当らない部分の体積を求めよ。



4 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

(1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

5 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。

(3) p，q を異なる素数とする。$2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=-x^2+2x$ と $y=a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2+2x=a(x+4) \quad \text{すなわち} \quad x^2+(a-2)x+4a=0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と ℓ が接するとき，$(*)$ より

$$(a-2)^2-4\cdot1\cdot4a=0, \quad 0<-\frac{a-2}{2\cdot1}<2$$

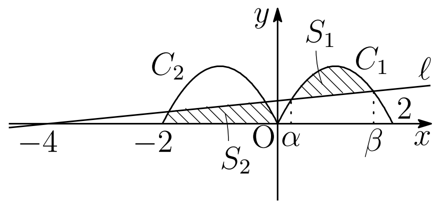
上の第1式および第2式から

$$a=10\pm4\sqrt{6}, \quad -2<a<2 \quad \text{すなわち} \quad a=10-4\sqrt{6}$$

よって，求める a の値の範囲は　　$\boldsymbol{0 \leqq a < 10-4\sqrt{6}}$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=-(a-2), \quad \alpha\beta=4a,$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{a^2-20a+4}$$



したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_\alpha^\beta \{(-x^2+2x)-a(x+4)\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \{x^2+(a-2)x+4a\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(3) $y=-x^2-2x$ と $y=a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2-2x=a(x+4) \quad \text{すなわち} \quad x^2+(a+2)x+4a=0 \quad \cdots(**)$$

方程式 $(**)$ の解を γ，δ とすると $(\gamma<\delta)$

$$\gamma+\delta=-(a+2), \quad \gamma\delta=4a,$$
$$\delta-\gamma=\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}=\sqrt{a^2-12a+4}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^0 \{-x^2-2x\}\,dx + \int_\gamma^\delta \{-x^2-2x-a(x+4)\}\,dx \\ &= -\int_{-2}^0 x(x+2)\,dx - \int_\gamma^\delta (x-\gamma)(x-\delta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}\cdot2^3-\frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3 = \frac{4}{3}-\frac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$S_1 = S_2$ より　$\dfrac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}}$

整理すると　$(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$

ここで，$f(a) = (a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8$ とおくと

$$f(0) = 8 > 0, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{41\sqrt{41}-999}{125} < \frac{41\cdot 7 - 999}{125} < 0,$$

$$10 - 4\sqrt{6} = 2(5-2\sqrt{6}) = \frac{2}{5+2\sqrt{6}} > \frac{2}{5+5} = \frac{1}{5}$$

$f(a)$ は連続であるから，中間値の定理により，$f(a) = 0$，すなわち $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する．■

2 (1) $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ を微分すると　$y' = -\dfrac{\log x + 2x}{x^2(\log x)^3}$

したがって，$x > 1$ において　$y' < 0$

よって，$y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において，単調減少．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2}\,dx = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\log x}} + \boldsymbol{C}$　**($\boldsymbol{C}$ は積分定数)**

別解　$t = \log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ であるから

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\log x} + C$$

(3) (1)，(2) の結果から，n が 3 以上の整数であるとき

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k(\log k)^2}\,dx$$

$$< \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{2}^{n} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$$

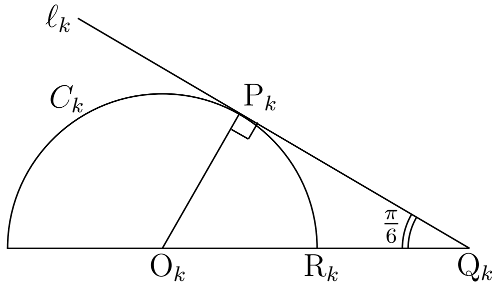
$$= \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n = -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log 2}$$

■

3 (1) 球 $x^2+y^2+z^2=1$ の $z \geqq 0$ の部分の平面 $x=k$ $(-1<k<1)$ による断面の表す図形は，中心 $\mathrm{O}_k(k,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{1-k^2}$ の半円

$$y^2+z^2=1-k^2\ (-1<k<1),\quad z \geqq 0$$

この半円を C_k とし，C_k 上の点を $\mathrm{R}_k(k, \sqrt{1-k^2})$ とする．方向ベクトルが $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ で C_k に接する直線を ℓ_k とし，ℓ_k と C_k の接点を P_k，ℓ_k と xy 平面との共有点を Q_k とすると



$$\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=\sqrt{1-k^2}$$
$$\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k=2\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=2\sqrt{1-k^2}$$

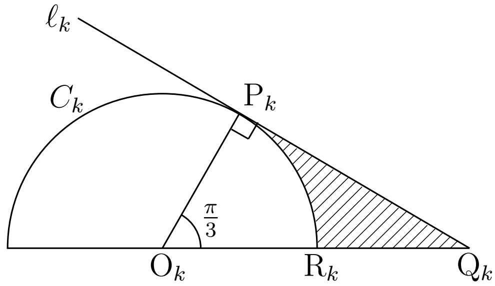
よって　　$\boldsymbol{\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq 2\sqrt{1-k^2}}$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{R}_k\mathrm{Q}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k-\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\sqrt{1-k^2}$

よって　　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(3) 右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k\cdot\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k-\frac{1}{2}\mathrm{O}_k{\mathrm{R}_k}^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k^2)-\frac{\pi}{6}(1-k^2)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}(1-k^2)$$



よって，求める体積を V とすると

$$V=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\int_{-1}^{1}(1-k^2)\,dk=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 求める確率は，2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

(3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個であるから，2 回目の操作で青玉が 1 個である確率を p とすると，(1) の結果から

$$p=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p)=p^3(1-p)=\left(\frac{7}{9}\right)^3\frac{2}{9}=\boldsymbol{\frac{686}{6561}}$$

(4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp=p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp=p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q=p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}3\times p^2(1-p)q+p^3(1-p)&=2p^2(1-p)+p^3(1-p)\\&=p^2(1-p)(2+p)\\&=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{25}{9}=\boldsymbol{\frac{2450}{6561}}\end{aligned}$$

研究

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が 3 個とも青玉になることなしに，青玉の個数が 1 個である確率を p_n とする．

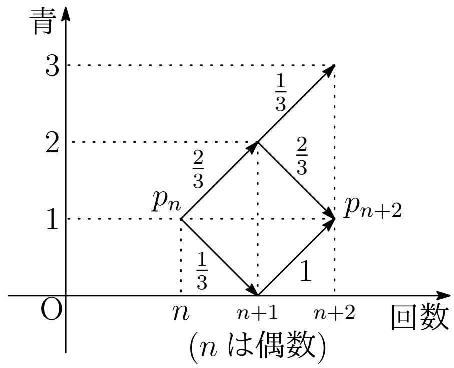
(i) n が奇数のとき

(2) で示したように奇数回目に青玉が 1 個になることはないから　$p_n=0$

(ii) n が偶数のとき　$p_0=1$

$$p_{n+2}=p_n\times\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\frac{7}{9}p_n$$

ゆえに　$p_n=\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$



n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2}\times\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

東大理科 2008 年

白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (**A**) を考える．

(**A**) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

以下の問 (1)，(2) に答えよ．

(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

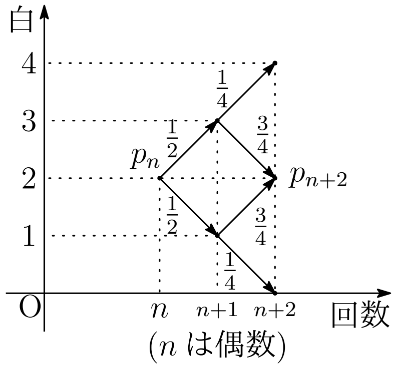
(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

解答 (1) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 4 枚とも同じ色になることなしに，白と黒のカードが 2 枚づつである確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき
奇数回目に 4 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は **0**

(ii) n が偶数のとき $p_0=1$

$$p_{n+2}=p_n\times\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{4}p_n$$



ゆえに $p_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

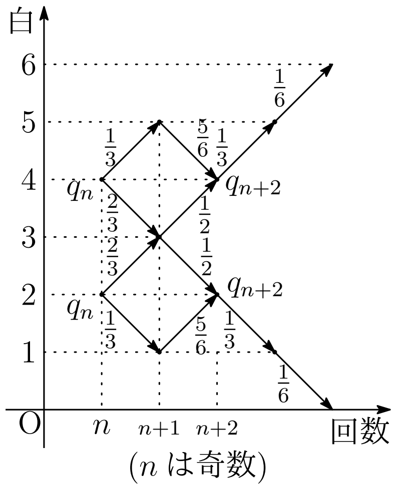
求める確率は

$$p_{n-2}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\times 2=\boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

(2) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 6 枚とも同じ色になることなしに，白のカードが 2 枚である確率を q_n とすると，対称性により白のカードが 4 枚である確率も q_n である．

(i) n が奇数のとき $q_1=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}q_{n+2}&=q_n\times\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}+q_n\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{17}{18}q_n\end{aligned}$$



ゆえに $q_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

求める確率は，3 以上の奇数のとき

$$q_{n-2}\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\times 2=\boldsymbol{\frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}}$$

(ii) n が 1 または偶数のとき
6 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は **0**

■

$\boxed{5}$ (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n-1 \equiv 4^{\frac{n}{2}}-1 \equiv 1^{\frac{n}{2}}-1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である．

(2) n が自然数のとき，2^n-1 は奇数である．

i) $n=1$ のとき，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である．

ii) $n \geqq 2$ のとき

$$2^n+1=1(2^n-1)+2$$

上式より，2^n+1 を 2^n-1 で割った余りは 2．
2^n-1 を 2 で割った余りは 1 であるから，ユークリッドの互除法により，2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数は 1 である．

よって，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である．

(3) $2^{p-1}-1=pq^2$　(p，q は異なる素数)　$\cdots(*)$

$(*)$ について，$p=2$ のとき　　$1=2q^2$

これを満たす素数 q は存在しない．

$p \neq 2$ となり，p は奇素数であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数である．

(1) の結果から，$2^{p-1}-1$ は 3 の倍数であるから，pq^2 は 3 を因数にもつ．

i) $p=3$ のとき，$(*)$ より　　$3=3q^2$

q は素数であるから，不適．

ii) $q=3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{p-1}-1=9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}}+1)(2^{\frac{p-1}{2}}-1)=9p$$

i) より，奇素数 p は $p \geqq 5$ であること，(2) の結果から，$2^{\frac{p-1}{2}}+1$ と $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ は互いに素であることに注意して

$$\text{(A)}\left\{\begin{array}{l} 2^{\frac{p-1}{2}}+1=9 \\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1=p \end{array}\right. \quad \text{または} \quad \text{(B)}\left\{\begin{array}{l} 2^{\frac{p-1}{2}}+1=p \\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1=9 \end{array}\right.$$

(A) を解いて，$p=7$．　(B) の第 2 式を満たす奇素数 p は存在しない．

よって　　$\boldsymbol{(p,\ q)=(7,\ 3)}$ ■

10.2 2016年(150分)

1 座標平面上の曲線 C_1, C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし，a は実数である。n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が2点P，Qで交わり，P，Qの x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている。また，曲線 C_1 と直線PQで囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線PQで囲まれた領域を T_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が1である三角形ABCにおいて，辺AB，BC，CAをそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点をD，E，Fとする。また，AEとBF，BFとCD，CDとAEの交点をそれぞれP，Q，Rとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3直線AE，BF，CDが1点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形BCQの面積を求めよ。

(4) 三角形PQRの面積を求めよ。

3　座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $\mathrm{P_0}(1,\ 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を $\mathrm{P_0}$ から反時計まわりに順に $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_4}$，$\mathrm{P_5}$ とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し，1 つのサイコロを 1 回投げ，出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

(規則)　(i) 1 から 5 までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば，コインが $\mathrm{P_4}$ にあるとき 4 の目が出た場合は $\mathrm{P_2}$ まで動かす。

(ii) 6 の目が出た場合は，x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときは動かさない。例えば，コインが $\mathrm{P_5}$ にあるときに 6 の目が出た場合は $\mathrm{P_1}$ に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ $\mathrm{P_0}$ に置き，1 つのサイコロを続けて何回か投げて，1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 回サイコロを投げた後に，コインが $\mathrm{P_0}$ の位置ある確率を求めよ。

(2) 3 回サイコロを投げた後に，コインが $\mathrm{P_0}$ の位置ある確率を求めよ。

(3) n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが $\mathrm{P_0}$ の位置ある確率を求めよ。

4　自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

5 以下の問いに答えよ。

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ。

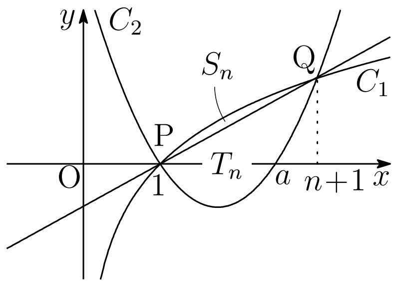
$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

解答例

1 (1) C_1 と C_2 の交点 Q の x 座標が $n+1$ であるから



$$\log(n+1) = (n+1-1)(n+1-a)$$

$n \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{a = n + 1 - \frac{\log(n+1)}{n}}$$

上式より $\quad a - 1 = \dfrac{n^2 - \log(n+1)}{n}$

ここで $\quad \displaystyle\int_0^n \frac{t}{t+1}\,dt = \Big[\, t - \log(t+1) \,\Big]_0^n = n - \log(n+1) > 0$

上の 2 式から $\quad a - 1 = \dfrac{n^2 - \log(n+1)}{n} > \dfrac{n^2 - n}{n} = n - 1 \geqq 0$

よって $\quad \boldsymbol{a > 1}$

(2) $\displaystyle S_n = \int_1^{n+1} \log x\,dx - \frac{1}{2}\{(n+1)-1\}\log(n+1)$

$$= \Big[\, x\log x - x \,\Big]_1^{n+1} - \frac{n}{2}\log(n+1) = \boldsymbol{\frac{n+2}{2}\log(n+1) - n}$$

C_2 の x^2 の係数および 2 点 P，Q の x 座標に注意して

$$T_n = \frac{1}{6}\{(n+1)-1\}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3}$$

(3) (2) の結果から

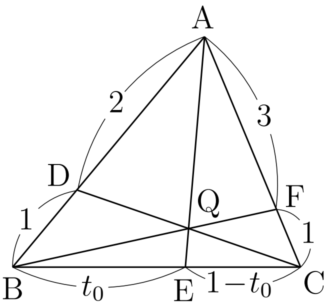
$$\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\frac{n+2}{2}\log(n+1) - n}{n\log\frac{n^3}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - 1}{3\log n - \log 6}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left\{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} - 1}{3\log n - \log 6}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)\left\{1 + \dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\} - \dfrac{1}{\log n}}{3 - \dfrac{\log 6}{\log n}}$$

よって $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}+0\right)(1+0) - 0}{3 - 0} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$ ■

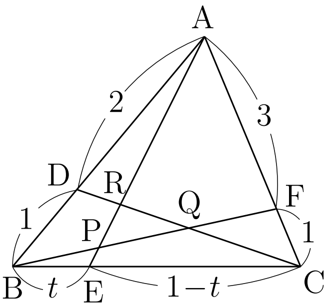
2　(1) チェバの定理により



$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{t_0=\frac{3}{5}}$

(2) $\triangle$AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad ゆえに \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\frac{3}{t}$

よって　$k=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\frac{3}{3+t}}$

$\triangle$BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\frac{3(1-t)}{2t}$

よって　$\ell=\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\frac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\frac{3(1-t)}{3-t}}$

(3) (2) の図について，$\triangle$BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\frac{3(1-t)}{4t}$　$\cdots$①

$t=\frac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので　$\frac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\frac{1}{2}$　$\cdots$②

よって　$\triangle\mathrm{BCQ}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot1=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって $\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}{\cdot}\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}{\cdot}\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5t)^2$$

(3) の結果から $\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$

解説 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2{\cdot}\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると[1]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって $\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると $\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

3 (1) n 回サイコロ投げた後に，コインが P_i $(i=0,1,\cdots,5)$ の位置にある確率を $P_i(n)$ とすると

$$\begin{aligned}P_0(n+1)&=\frac{1}{6}P_0(n)+\frac{1}{6}P_1(n)+\frac{1}{6}P_2(n)+\frac{1}{6}P_3(n)+\frac{1}{6}P_4(n)+\frac{1}{6}P_5(n)\\&=\frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\}\end{aligned}$$

自然数 n に対して　$P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)=1$

したがって　$P_0(n)=\dfrac{1}{6}\times 1=\dfrac{1}{6}\quad\cdots(*)$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(2) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

解説　$P_i(n+1)$ は $P_j(n)$ によって決定する確率過程 (マルコフ連鎖) である．

$$\begin{aligned}P_0(n+1)&=\frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\}\\P_1(n+1)&=\frac{1}{6}\{P_0(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+2P_5(n)\}\\P_2(n+1)&=\frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_3(n)+2P_4(n)+P_5(n)\}\\P_3(n+1)&=\frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\}\\P_4(n+1)&=\frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+2P_2(n)+P_3(n)+P_5(n)\}\\P_5(n+1)&=\frac{1}{6}\{P_0(n)+2P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)\}\end{aligned}$$

したがって　$P_0(n)=P_3(n)=\dfrac{1}{6}$,

$$P_1(n+1)-P_5(n+1)=-\frac{1}{3}\{P_1(n)-P_5(n)\},$$

$$P_2(n+1)-P_4(n+1)=-\frac{1}{3}\{P_2(n)-P_4(n)\}$$

$P_1(1)=P_2(1)=P_4(1)=P_5(1)=\dfrac{1}{6}$ より　$P_1(n)=P_5(n)$，$P_2(n)=P_4(n)$

これらの結果から　$P_1(n+1)=P_2(n+1)=\dfrac{1}{3}\left\{P_1(n)+P_2(n)+\dfrac{1}{6}\right\}$

ゆえに　$P_1(n+1)=\dfrac{2}{3}P_1(n)+\dfrac{1}{18}$

$P_1(1)=\dfrac{1}{6}$ であるから　$P_1(n)=\dfrac{1}{6}$　よって　$P_i(n)=\dfrac{1}{6}$ $(i=0,1,\cdots 5)$

■

$\boxed{4}$ (1) 仮定から $10^n \equiv a_n,\quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より $\boldsymbol{a_1 = 10}$

(1) の結果を用いると，法 13 について

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9 \\ a_3 &\equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12 \\ a_4 &\equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3 \\ a_5 &\equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4 \\ a_6 &\equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1 \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N = p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q$$

とおくと，法 13 に関して

$$\begin{aligned} N &\equiv p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q \\ &\equiv p\cdot 4 + 2\cdot 3 + 9 + 6\cdot 10 + q = 4p + q + 75 \\ &\equiv 4p + q - 3 \end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

■

5　(1) ド・モアブルの定理により

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,\quad \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の辺々を加えると

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \quad ゆえに \quad \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

$(*)$ の辺々を引くと

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \quad ゆえに \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
\cos 2x &= \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1 \\
\cos 3x &= \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t,\quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1,\quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = 1$$

整理すると　$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$　ゆえに　$(t-1)(t+2)(t-2) = 0$

これを解いて　$t = 1, -2,\ 2$　したがって　$\cos x = \dfrac{1}{2},\ -1,\ 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(3) (1) の結果から

$$\sin^2 n\theta = \left\{-\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\right\}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$$

$\theta = 20^\circ$ とすると，$z^{18} = 1$ であるから

$$(z^2 - 1)(z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1) = 0$$

$z^2 \neq 1$ であるから　$z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1 = 0$

また，$z \neq 0$ であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) = -1$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4}\sin^2 n\theta &= \sum_{n=1}^{4}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)\right\} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

別解 $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$ および $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ により

$$\begin{aligned}&\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ =&\frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ}{2}\end{aligned}$$

方程式 $\cos 3\theta + \dfrac{1}{2} = 0\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の解は　$\theta = 40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

ここで，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから，方程式

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \frac{1}{2} = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

の解と係数の関係により　$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

補足 また，解と係数の関係により　$\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ = -\dfrac{1}{8}$

参考 $\theta = \dfrac{\pi}{n}$，$\alpha = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ とおくと

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \alpha^k)$$

また　$z^n - 1 = (z-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k) = \sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \prod_{k=1}^{n-1}(1 - \cos 2k\theta - i\sin 2k\theta) = \prod_{k=1}^{n-1}(2\sin^2 k\theta - 2i\sin k\theta\cos k\theta) \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1}(\sin k\theta - i\cos k\theta) \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - k\theta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - k\theta\right)\right\} \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \times (\cos 0 - i\sin 0) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta
\end{aligned}$$

$(\text{右辺}) = n$

よって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

たとえば，$n=9$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9} = \frac{9}{256}$

したがって　$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{3}{16}$　$\cdots$①

同様に，$n=18$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{17}\sin\frac{k\pi}{18} = \frac{9}{2^{16}}$

したがって　$\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \cdots \sin 80^\circ = \dfrac{3}{256}$　$\cdots$②

さらに，①，② から　$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \dfrac{1}{16}$　■

10.3　2017 年 (150 分)

1 定数 $a > 0$ に対し，曲線 $y = a\tan x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_1，曲線 $y = \sin 2x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。

(2) a が (1) の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし，P の x 座標を p とする。P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき，a および $\cos 2p$ の値を求めよ。

(3) a が (2) で求めた値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 2 つの定数 $a > 0$ および $b > 0$ に対し，座標空間内の 4 点を

$$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を a，b を用いて表せ。

(2) さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a，b を用いて表せ。

3 初項 $a_1 = 1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

4 赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A，B，C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール (a)，(b)，(c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

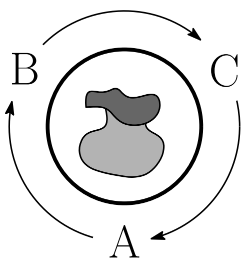
(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A，B，C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ。

(3) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。

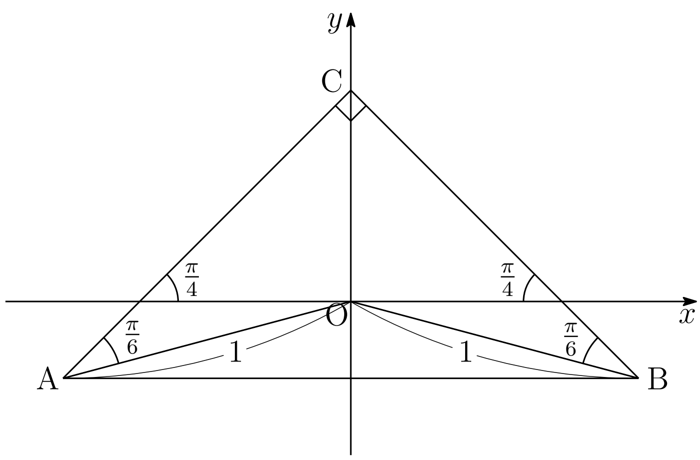


5 2 つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ により定める。ただし，i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2) $|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3) 下図のように，複素数平面上の $\triangle\mathrm{ABC}$ は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお A，B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A，B の距離はともに 1 である。点 P_n が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



解答例

$\boxed{1}$ (1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y = a\tan x$ と $y = \sin 2x$ から y を消去すると

$$a\tan x = \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sin 2x}{\tan x} = 2\cos^2 x \quad \cdots ①$$

このとき，$0 < 2\cos^2 x < 2$ より　　$\mathbf{0 < a < 2}$

(2) $f(x) = a\tan x$，$g(x) = \sin 2x$ とおいて，これらを微分すると

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2 x}, \quad g'(x) = 2\cos 2x$$

交点 P の x 座標が p であるから，① より　　$a = 2\cos^2 p \quad \cdots ②$

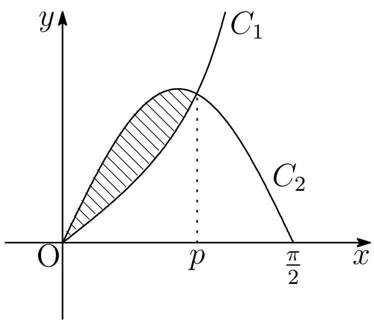
$f'(p)g'(p) = -1$ であるから　　$\dfrac{a}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1$

② を上式に代入すると

$$\frac{2\cos^2 p}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\cos 2p = -\frac{1}{4}}$$

したがって　　$a = 2\cos^2 p = \cos 2p + 1 = -\dfrac{1}{4} + 1 = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(3) 求める面積は右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left(\sin 2x - \frac{3}{4}\tan x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\log|\cos x|\right]_0^p \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2p + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log|\cos p| \end{aligned}$$

ここで，(2) の結果から　　$\log|\cos p| = \dfrac{1}{2}\log\cos^2 p = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8}$

よって　　$S = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8} = \boldsymbol{\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\log\dfrac{3}{8}}$　■

2 (1) A$(a,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$，D$(a,\ b,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a,\ 0,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{CD}}=(a,\ b,\ 0)$$

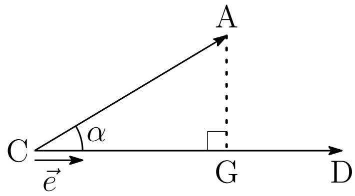
したがって $$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$$

ゆえに $$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=(0,\ 0,\ 1)+\frac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$$
$$=\left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$$

よって $$\mathbf{G}\left(\boldsymbol{\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1}\right)$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を α とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を

$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}\quad\cdots①$$



とすると，A から CD に下ろした垂線と CD の交点 G について

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=(|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha)\vec{e}\quad\cdots②$$

また，$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$ であるから $\quad |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$

これと ① を ② に代入すると $$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$$

(2) B$(0,\ b,\ 0)$ から，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ b,-1)$ であるから，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=(0,\ 0,\ 1)+\frac{b^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)-(a,\ 0,\ 0)\\&=\left(-\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right),\\\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)-(0,\ b,\ 0)\\&=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ -\frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)\end{aligned}$$

$\vec{u}=(a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\vec{v}=(a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ とおくと

$$\vec{u}=(-ab^2,\ a^2b,\ a^2+b^2),\quad \vec{v}=(ab^2,-a^2b,\ a^2+b^2)$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=-a^2b^4-a^4b^2+(a^2+b^2)^2\\&=(a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2),\\|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2&=a^2b^4+a^4b^2+(a^2+b^2)^2\\&=(a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)\end{aligned}$$

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は θ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)}=\boldsymbol{\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2+a^2b^2}}$$

■

3　(1) 初項 $a_1=1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1+4(n-1) = 4n-3 \cdots ①$$

a_n が 7 の倍数であるとき，$4n-3 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8n \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -1 \pmod 7$$

このとき，n は整数 m を用いて

$$n = 7m-1 \quad \cdots ②$$

したがって，$1 \leqq 7m-1 \leqq 600$ を満たす整数 m の個数は

$$\frac{2}{7} \leqq m \leqq \frac{601}{7} \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq m \leqq 85$$

よって，求める個数は　**85** (個)

(2) ② を ① に代入すると

$$a_n = 4(7m-1)-3 = 7(4m-1)$$

a_n が 7^2 の倍数であるとき，$4m-1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8m \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv 2 \pmod 7$$

このとき，m は整数 l を用いて

$$m = 7l+2$$

これを ② に代入すると

$$n = 7(7l+2)-1 = 49l+13 \quad \cdots ③$$

したがって，$1 \leqq 49l+13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) ③ を ① に代入すると

$$a_n = 4(49l + 13) - 3 = 7^2(4l + 1)$$

a_n が 7^3 の倍数であるとき，$4l + 1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8l \equiv -2 \quad ゆえに \quad l \equiv -2 \pmod 7$$

このとき，l は整数 k を用いて

$$l = 7k - 2$$

これを ③ に代入すると

$$n = 49(7k - 2) + 13 = 343k - 85 \quad \cdots ④$$

$1 \leqq 343k - 85 \leqq 600$ を満たす整数 k は 1 で，このとき　$n = 258$

④ を ① に代入すると

$$a_n = 4(343k - 85) - 3 = 7^3(4k - 1)$$

これから，a_n が 7^4 の倍数となることはない．

以上の結果および ②，③ より，$1 \leqq n \leqq 600$ に対して

a_n が 7 の倍数であるとき　$n \equiv -1 \pmod 7$
a_n が 7^2 の倍数であるとき　$n \equiv 13 \pmod{49}$
a_n が 7^3 の倍数であるとき　$n = 258$

数列 $\{a_n\}$ のうち，7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

上の表で 2 列目のみ 7^2 を因数にもち，それ以外の列は 7 を因数にもつ．
ただし，第 6 行目第 2 列の a_{258} のみ 7^3 を因数にもつ．
したがって，2 列目以外の 32 項 (7 を因数にもつ)，2 列目の第 1 行から第 5 行目までの 5 項 (7^2を因数にもつ) および第 6 行目第 2 列の a_{258} より

$$32 \times 1 + 2 \times 5 + 3 = 45$$

よって，求める n の最小値は　　$\boldsymbol{n = 265}$

別解 (2) $a_n = 4n-3$ より，a_n が 7^2 の倍数であるとき

$$4n-3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 12(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 13 \pmod{7^2}$$

n は整数 l を用いて　$n = 49l + 13$

したがって，$1 \leqq 49l + 13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) $a_n = 4n-3$ より，a_n が 7^3 の倍数であるとき

$$4n-3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 86(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 258 \pmod{7^3}$$

n は整数 m を用いて　$n = 343m + 258$

したがって，$1 \leqq 343m + 258 \leqq 600$ を満たす整数 m は $m = 0$ の 1 個で

$$a_{258} = 4\cdot 258 - 3 = 1029 = 3\cdot 7^3$$

また，$\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^4 で割り切れる項はない．

(1),(2) の結果から，数列 $\{a_n\}$ のうち，7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

これら 38 個の項をそれぞれ 7 で割ると，さらに 7 で割り切れる項が第 2 列に 6 個あり，これらをまた 7 で割ると，最後に残った a_{258} だけが 7 で 1 回割れる．

したがって，これら 38 個の積は 7 で $38 + 6 + 1$，すなわち，45 回割り切れる．

よって，求める n の最小値は　$\boldsymbol{n = 265}$ ■

4 (1) 定められたルールにより，次の確率漸化式が得られる．

$$(*) \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n), \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n)$$

$d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とすると

$$d_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 1 + 0 + 0 = 1$$

$(*)$ の辺々を加えることにより

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n \quad \text{ゆえに} \quad d_n = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \cdots ①$$

したがって，$(*)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - b_n\right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - c_n\right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - a_n\right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}a_n \end{aligned}$$

上の 3 式から，$n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4}c_{n-1}\right) = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{16}c_{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4}a_{n-2}\right) = \frac{3}{2^{n+3}} - \frac{1}{64}a_{n-2} \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

② に $n = 3,\ 6$ を代入することにより

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{3}{2^6} - \frac{1}{64}a_1 = \frac{3}{64} - \frac{1}{64}\cdot 1 = \frac{1}{32} \\ a_7 &= \frac{3}{2^9} - \frac{1}{64}a_4 = \frac{3}{512} - \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{32} = \frac{11}{2048} \end{aligned}$$

よって　A が 4 回目に勝つ確率は　$a_4 \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{32} \times \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{64}}$

A が 7 回目に勝つ確率は　$a_7 \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{11}{2048} \times \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{11}{4096}}$

(2) ① より　$\boldsymbol{d_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}}$

(3) ② より　$\boldsymbol{a_{n+1} = \dfrac{3}{2^{n+3}} - \dfrac{1}{64}a_{n-2}}$　■

$\boxed{5}$ (1)
$$\alpha = 10000 + 10000i = 10000\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに　$z_n = \alpha w^n = \dfrac{10000\sqrt{2}}{2^n}\left\{\cos\left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\pi + i\sin\left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\pi\right\}$

よって　$\boldsymbol{|z_n| = \dfrac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}},\quad \arg z_n = \left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\pi}$

(2) (1) の結果から，$|z_n| \leqq 1$ のとき

$$\frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}} \leqq 1 \quad ゆえに \quad 2^{n-\frac{1}{2}} \geqq 10^4$$

両辺の常用対数をとると

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\log_{10} 2 \geqq 4 \quad ゆえに \quad n \geqq \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2}$$

ここで　$\dfrac{4}{\log_{10} 2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{0.301} + 0.5 = 13.7\cdots$

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 14}$

(3) (1),(2) の結果から

$$|z_{14}| = \frac{10000}{2^{14-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4\cdot 5^4}{2^{13}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^9}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{512}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\arg z_{14} = \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{7}{12}\pi + 2\pi$$
$$|z_{15}| = \frac{10000}{2^{15-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4\cdot 5^4}{2^{14}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{1024}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{125}{128}\cdot\frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{125}{128}\sqrt{\frac{25}{32}} < \frac{1}{2}$$
$$\arg z_{15} = \left(\frac{15}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi$$

したがって，P_{14} は △ABC の外部にあり，P_{15} は △ABC の内部にある．

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 15}$　■

10.4　2018 年 (150 分)

1 座標空間において，xy 平面上にある双曲線 $x^2-y^2=1$ のうち $x \geqq 1$ を満たす部分を C とする。また，z 軸上の点 A$(0,\ 0,\ 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき，直線 AP と平面 $x=d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，d は正の定数とする。

2 原点を中心とする半径 3 の半円 $C: x^2+y^2=9\ (y \geqq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2) 点 P を $(-3,\ 0)$ に固定する。Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

3 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

4 整数 a，b は 3 の倍数ではないとし，

$$f(x)=2x^3+a^2x^2+2b^2x+1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2) $f(x)=0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

(3) $f(x)=0$ を満たす有理数 x が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

5 α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

解答例

1 C 上の点 P を $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,\ 0\right)$ とおく $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 直線 AP と平面 $x=d$ との交点を Q とすると，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &=(0,\ 0,\ 1)+k\left(\frac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,-1\right)\\ &=\left(\frac{k}{\cos\theta},\ k\tan\theta,\ 1-k\right) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

点 Q の x 座標が d であるから

$$\frac{k}{\cos\theta}=d \quad \text{ゆえに} \quad k=d\cos\theta$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &=(d,\ d\sin\theta,\ 1-d\cos\theta)\\ &=(d,\ 0,\ 1)+d(0,\ \sin\theta,-\cos\theta)\end{aligned}$$

ここで
$$\begin{aligned}\sin\theta &=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ -\cos\theta &=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(d,\ 0,\ 1)+d\left(0,\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

このとき，$-\pi<\theta-\dfrac{\pi}{2}<0$ であるから，求める軌跡は，

平面 $\boldsymbol{x=d}$ 上の点 $\boldsymbol{(d,\ 0,\ 1)}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{d}$ の円周上で $\boldsymbol{z<1}$.

別解 軌跡の方程式を，次のように表してもよい.

$$\begin{cases} x=d \\ y^2+(z-1)^2=d^2 \\ z<1 \end{cases}$$

双曲線の媒介変数表示

　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$ により，

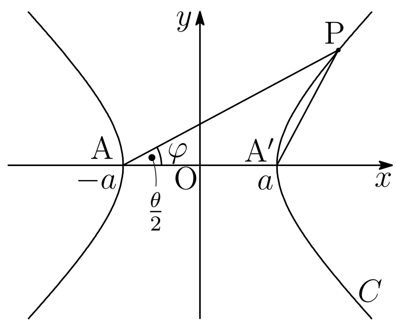
$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{y}{b}=\tan\theta$$

とおくと，双曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，次のように媒介変数表示ができる．

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$

とくに，$a=b$ のとき，直角双曲線となる．

　直角双曲線 $C: x^2-y^2=a^2$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，2 頂点を $\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(a,0)$ とおく．



直線 AP の傾きを m，直線 A′P の傾きを m' とすると

$$m=\frac{y}{x+a},\quad m'=\frac{y}{x-a}\quad \text{ゆえに}\quad mm'=\frac{y^2}{x^2-a^2}=1$$

P は 2 直線 $\mathrm{AP}: y=m(x+a)$，$\mathrm{A'P}: y=\dfrac{1}{m}(x-a)$ の交点であるから

$$x=\frac{1+m^2}{1-m^2}a,\quad y=\frac{2m}{1-m^2}a$$

ここで，$m=\tan\varphi$ とおくと　　$x=\dfrac{a}{\cos 2\varphi}$，$y=a\tan 2\varphi$

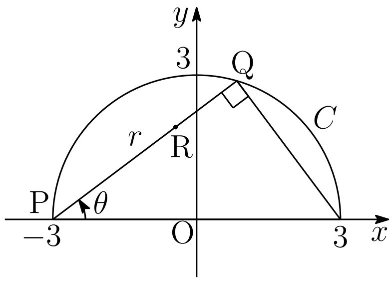
さらに，$\theta=2\varphi$ とおくことにより　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=a\tan\theta$

　直角双曲線の漸近線が $y=x$ と $y=-x$ であるから，$0\leqq\theta<2\pi$，すなわち，$0\leqq\varphi<\pi$ において，$\varphi\neq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$ である．$\varphi=\frac{\pi}{4}-0$ のとき P は第 1 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{\pi}{4}+0$ のとき P は第 3 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi-0$ のとき P は第 2 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi+0$ のとき P は第 4 象限の無限遠点にある．■

2　(1) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$ であるから，$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}\mathrm{PQ}$ より

$$S = \int_0^3 \mathrm{PR}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{3\pi}$$

(2) $\theta = \angle\mathrm{OPQ}$，$r = \mathrm{PQ}$ とおくと $(r = 6\cos\theta)$



$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{9}{2}\pi$$

$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}r$ より

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}r\right)^2 d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{2\pi}$$

(3) $C : x^2 + y^2 = 9\ (y \geqq 0)$ の第 1 象限と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は，半径 3 の半球の体積であるから

$$\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 18\pi$$

$\mathrm{P}(-x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ を $2:1$ に内分する点は　$\left(\dfrac{x}{3},\ y\right)$　$(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

この点の軌跡は C の第 1 象限の部分を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ だけ縮小したものであるから，図形 S と第 1 象限の共通部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi\int_0^3\left(\frac{x}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{9}\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{9}\cdot 18\pi = 2\pi$$

$\mathrm{P}(-3,\ 0)$，$\mathrm{Q}(s,\ t)$ を $2:1$ に内分する点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{2s-3}{3},\quad y = \frac{2t}{3}\quad \text{ゆえに}\quad s = \frac{3}{2}(x+1),\quad t = \frac{3}{2}y$$

Q は C 上の点であるから　$s^2 + t^2 = 9\ \ (t \geqq 0)$

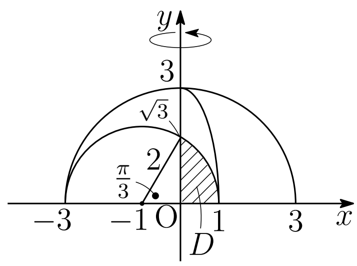
これに上の結果を代入することにより，R の軌跡の方程式は

$$\frac{9}{4}(x+1)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9\quad \text{ゆえに}\quad (x+1)^2 + y^2 = 4\ \ (y \geqq 0)\quad \cdots(*)$$

$(*)$ の y 軸との交点の y 座標は，$(*)$ に $x=0$ を代入して

$$y=\sqrt{3}$$

右の図の領域 D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると



$$\begin{aligned} V_2 &= \pi\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,dy \\ &= \pi\int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2-1\}\,dy - 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy \qquad \cdots(**) \end{aligned}$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2-1\}\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} (3-y^2)\,dy$

$$= \left[\ 3y-\frac{1}{3}y^3\ \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

また，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy$ は，D の面積であるから

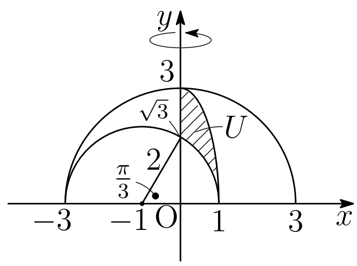
$$\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy = \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これらを $(**)$ に代入すると

$$V_2 = 2\sqrt{3}\pi - 2\pi\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

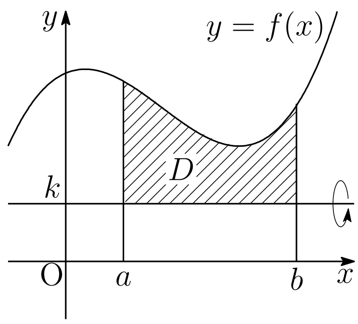
U の表す領域は右の図の斜線部分で，これを y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= 2\pi - \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)\pi \\ &= \boldsymbol{\left(2 - 3\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi\right)\pi} \end{aligned}$$



注意　$(**)$ の $\displaystyle\pi\int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2-1\}\,dy$ は，D を直線 $x=-1$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を表す.

解説

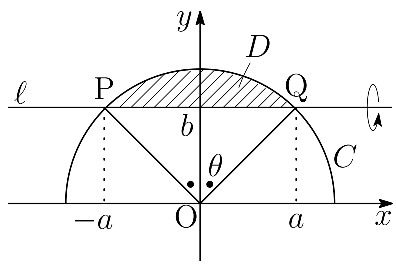


$k > 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ が，区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq k$ であるとき，この区間において，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ で囲まれた領域 D を直線 $y = k$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V とすると

$$V = \pi \int_a^b (y-k)^2\, dy$$
$$= \pi \int_a^b (y^2 - k^2)\, dx - 2\pi k \int_a^b (y-k)\, dx$$

D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると

$$\boldsymbol{V = V_x - 2\pi k S}$$



半円 $C : x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ $(y \geqq 0)$ と直線 $\ell : y = b$ $(b \geqq 0)$ で囲まれた領域を D とする．D を ℓ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V，D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} (y^2 - b^2)\, dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

とくに，V_x は C の半径 r に関係なく a の値により決定する．
C と ℓ の 2 つの交点 P，Q に対し，$\angle\mathrm{POQ} = 2\theta$，$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = r$ とおくと

$$S = \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2}\cdot 2a \cdot b = r^2\theta - ab,$$
$$V = V_x - 2\pi b S = \frac{4}{3}\pi a^3 - 2\pi b(r^2\theta - ab)$$
$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}a^3 + ab^2 - br^2\theta\right)$$

例えば，$C : x^2 + y^2 = 4$，$\ell : y = 1$ のとき，$a = \sqrt{3}$，$b = 1$，$r = 2$，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ より

$$V = 2\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

これは，前ページで求めた V_2 の 2 倍に等しい．

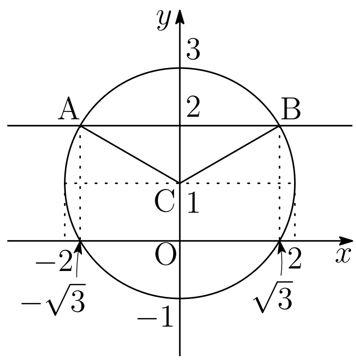
このように，領域 D を回転させた回転体の体積 V は，D の面積 S を利用すると，簡単に求めることができる．

例題 次の領域 D_1 および D_2 をそれぞれ x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$$D_1 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

解答 D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．

右図において，$\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$
$$S_2 = \pi\cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$y = 1 + \sqrt{4-x^2}\ (-2 \leqq x \leqq 2)\cdots(*)$ とすると

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx = S_1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

D_1 および D_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする．$(*)$ より，$x^2+(y-1)^2 = 4$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y^2 - 2^2)\,dx \\ &= 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)\,dx \\ &= 2\pi S_1 + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)\,dx \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{6}(2\sqrt{3})^3 \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{4 - x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 2 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{4 - x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

とすると

$$f(x) + g(x) = 2, \qquad \int_{-2}^{2} \{f(x) - g(x)\}\, dx = S_2$$

したがって

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x)^2 - g(x)^2\}\, dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x) + g(x)\}\{f(x) - g(x)\}\, dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} 2\{f(x) - g(x)\}\, dx = 2\pi \int_{-2}^{2} \{f(x) - g(x)\}\, dx \\ &= 2\pi S_2 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

補足　D_2 の重心は $(0,\ 1)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理[2] により

$$V_2 = 2\pi S_2 \cdot 1 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)$$

九大理系 2012 年

円 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答　求める体積は　　$V_1 + V_2 = 2\pi \left(\frac{8\pi}{3} + 3\sqrt{3} \right)$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 参照)

九大理系 2013 年

原点 O を中心とし，点 A(0, 1) を通る円を S とする。点 B$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

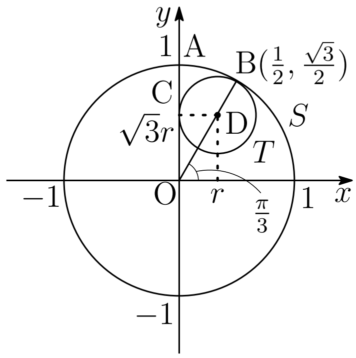
(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 (1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから，T の半径を r とすると，D の座標は $(r,\ \sqrt{3}r)$，$\mathrm{OD} = 2r$ である．
右の図より，$\mathrm{OD} + \mathrm{DB} = 1$ であるから

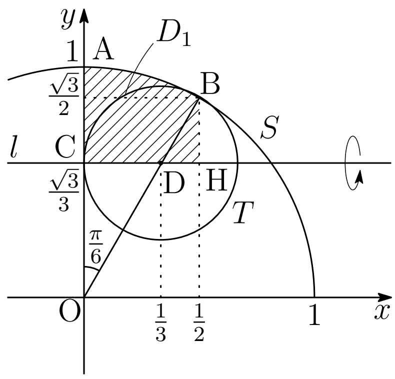
$$2r + r = 1 \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{1}{3}$$

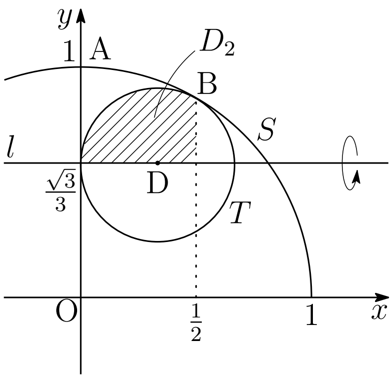
よって　　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$



(2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ とすると，S と y 軸，l，直線 $x = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた領域 D_1 の面積は，左下の図から

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \triangle\mathrm{OCD} + \triangle\mathrm{BDH} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$





D_1 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると，$x^2+y^2=1$ および $(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\frac{1}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right)\end{aligned}$$

D_2 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると，

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

に注意して

$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}x-x^2\right) dx$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{V_1}{\pi} - \frac{V_2}{\pi} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\,dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right) \\ &= \frac{2}{3}\Big[\,x-\frac{x^2}{2}\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi\end{aligned}$$

よって　　$$\boldsymbol{V = \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\right)}$$ ■

3 法 4 に関する 0, 1, 2, 3 の積は，右のようになる．
したがって，次の確率漸化式が成立する．

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$p_1 = q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4}$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ①$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ②$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ③$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ④$$

$q_1 = s_1 = \dfrac{1}{4}$ および ②，④ より，$q_n = s_n$ であるから

$$q_1 = \frac{1}{4},\quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \quad \text{ゆえに} \quad q_n = q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

したがって　$\boldsymbol{q_n = s_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}}$　これを ③ に代入すると

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n+1}r_{n+1} = 2^n r_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{2^n r_n\}$ は初項 $2r_1 = \dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$2^n r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r^n = \frac{n}{2^{n+1}}}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - q_n - r_n - s_n \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \boldsymbol{1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 整数 $a,\ b$ は3の倍数ではないから

$$a \equiv \pm 1,\ b \equiv \pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 1 \pmod 3 \qquad \cdots (*)$$

$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$ より，法3に関して

$$f(1) = a^2 + 2b^2 + 3 \equiv 1 + 2 \cdot 1 + 3 \equiv 0 \pmod 3$$
$$f(2) = 4a^2 + 4b^2 + 17 \equiv 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 17 \equiv 1 \pmod 3$$

よって，$f(1)$ と $f(2)$ を3で割った余りはそれぞれ**0**と**1**

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x が m であるとき

$$2m^3 + a^2m^2 + 2b^2m + 1 = 0$$

したがって　$m(2m^2 + a^2m + 2b^2) = -1$

上式より，次の (i), (ii) の場合分けができる．

(i) $m = 1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = -1$ のとき，
第1式を第2式を代入すると

$$2 + a^2 + 2b^2 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 2b^2 = -3$$

$a^2 + 2b^2 \geqq 0$ であるから，不適．

(ii) $m = -1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = 1$ のとき，
第1式を第2式を代入すると

$$2 - a^2 + 2b^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad -a^2 + 2b^2 = -1$$

$(*)$ より，$-a^2 + 2b^2 \equiv 1 \pmod 3$ であるから，不適．

(i), (ii) より，$f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しない．

補足 x を整数とするとき　$x + 3 \equiv x \pmod 3$
n を自然数とするとき　$(x + 3)^n \equiv x^n \pmod 3$
ゆえに　$f(x + 3) \equiv f(x) \pmod 3$

これと (1) の結果および $f(0) = 1$ から，$x \equiv 1$ (mod) が $f(x) = 0$ を満たす x であるための必要条件である．したがって，(2) は，(ii) の $m = 1$ の場合についてのみ調べればよい．

(3) $f(x)=0$ を満たす x は負である．(2) の結果に注意すると，$f(x)=0$ を満たす有理数 x は整数ではないから，x を $\dfrac{p}{q}$ とすると ($p,\ q$ は互いに素である整数，$p<0,\ q>1$)

$$\begin{aligned}2\left(\frac{p}{q}\right)^3+a^2\left(\frac{p}{q}\right)^2+2b^2\cdot\frac{p}{q}+1&=0\\ 2p^3+a^2p^2q+2b^2pq^2+q^3&=0\\ \frac{2p^3}{q}+a^2p^2+2b^2pq+q^2&=0 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

上式の $a^2p^2+2b^2pq+q^2$ が整数であるから，$\dfrac{2p^3}{q}$ は整数である．このとき，p と q は互いに素であるから ($q>1$)，$q=2$．これを ① に代入すると

$$p^3+a^2p^2+4b^2p+4=0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p^2+a^2p+4b^2)=-4 \quad \cdots ②$$

負の整数 p は -4 の約数で，$q\ (=2)$ と互いに素であるから　$p=-1$

$p=-1$ を ② に代入すると

$$-(1-a^2+4b^2)=-4 \quad \text{ゆえに} \quad |a|^2-4|b|^2=-3$$

したがって　　$(|a|+2|b|)(|a|-2|b|)=-3$

$a,\ b$ は 3 の倍数でない整数であるから，$|a|+2|b|\geqq 3$ に注意すると

$$\begin{cases}|a|+2|b|=3\\ |a|-2|b|=-1\end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |a|=|b|=1$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,-1),\ (-1,\ 1),\ (-1,-1)}$　■

5 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ より

$$\frac{\alpha}{2|\alpha|^2+1}+\frac{\overline{z}i}{|z|^2+2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\overline{z}}{|z^2|+2}=\frac{\alpha i}{2|\alpha|^2+1}$$

上の第 2 式の共役複素数は　$\dfrac{z}{|z|^2+2}=\dfrac{-\overline{\alpha}i}{2|\alpha|^2+1}$　$\cdots(*)$

(i) $\alpha=0$ のとき，$(*)$ より　$z=0$

(ii) $\alpha\neq 0$ のとき，$(*)$ より，$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ とおくと $(k>0)$

$|z|=k|\alpha|$ であるから，これを $\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ に代入すると

$$\frac{k^2|\alpha|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2k^2-(2|\alpha|^2+1)k+2=0$$

したがって　$(k-2)(|\alpha|^2k-1)=0$　これを解いて　$k=2,\ \dfrac{1}{|\alpha|^2}$

$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=k$ であるから　$z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}$

(i), (ii) より　$\boldsymbol{\alpha=0}$ **のとき**　$\boldsymbol{z=0}$

$\boldsymbol{\alpha\neq 0}$ **のとき**　$\boldsymbol{z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}}$

■

10.5　2019 年 (150 分)

1 n を自然数とする。x，y がすべての実数を動くとき，定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\,dt$$

の最小値を I_n とおく。極限値 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

2 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7$$
$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

3 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に a，b，c とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解 z_1，z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ とする。また，複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。

(2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3) P_1 と O を通る直線を ℓ_1 とし，P_2 と O を通る直線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 のなす鋭角が 60° である確率を求めよ。

4 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2，P_3，$\cdots\cdots$ を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \to \infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

$\boxed{5}$ a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az+b}{cz+1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり，$z = -i$ のときに $w = -i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a，b，c の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

解答例

$\boxed{1}$ まず，次の定積分を計算する．

$$\int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 4n\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\,t - \frac{1}{4n\pi}\sin 4n\pi t\,\Big]_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt = \Big[\,-\frac{t}{2n\pi}\cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi t\,\Big]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi},$$
$$\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi}\Big[\,\cos 2n\pi t\,\Big]_0^1 = 0,$$
$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3},\quad \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2},\quad \int_0^1 dt = 1$$

上の結果により

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\,dt \\
&\qquad = \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt + x^2\int_0^1 t^2\,dt + y^2\int_0^1 dt \\
&\qquad\qquad - 2x\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt - 2y\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt + 2xy\int_0^1 t\,dt \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 - 2x\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) - 2y\cdot 0 + 2xy\cdot\frac{1}{2} \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \frac{x}{n\pi} + xy \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2} \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

したがって　$x = -\dfrac{6}{n\pi}$，$y = \dfrac{3}{n\pi}$ のとき，$(*)$ は最小値 $I_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{n^2\pi^2}$ をとる．

よって　　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{I_n = \frac{1}{2}}$

別解 $\displaystyle\int_0^1 dt = 1$，$\displaystyle\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ より，$f(t) = t - \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0,\quad \int_0^1 f(t)^2\,dt = \frac{1}{3}\Big[\ \left(t-\frac{1}{2}\right)^3\ \Big]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$\displaystyle\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt = 0$，$\displaystyle\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi}$ より

$$\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi} = -\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{1}{12} = -\frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)^2\,dt$$

したがって　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\left\{\sin 2n\pi t + \frac{6}{n\pi}f(t)\right\}dt = 0$

$g(t) = \sin 2n\pi t + \dfrac{6}{n\pi}f(t)$ とおくと　$\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(t)\,dt &= \int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt + \frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)\,dt = 0,\\
\int_0^1 g(t)^2\,dt &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt + \frac{12}{n\pi}\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt + \frac{36}{n^2\pi^2}\int_0^1 f(t)^2\,dt\\
&= \frac{1}{2} + \frac{12}{n\pi}\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) + \frac{36}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

$\sin 2n\pi t = -\dfrac{6}{n\pi}f(t) + g(t)$，$t = f(t) + \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
\sin 2n\pi t - xt - y &= -\frac{6}{n\pi}f(t) + g(t) - x\left(f(t) + \frac{1}{2}\right) - y\\
&= -\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)f(t) + g(t) - \left(\frac{x}{2} + y\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\sin 2n\pi t - xt - y)^2\,dt &= \left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2\int_0^1 f(t)^2\,dt + \int_0^1 g(t)^2\,dt + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2\\
&= \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2\\
&\geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} = I_n
\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}}$　■

2　(1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2) = (x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3) = x^4f(x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とすると

$$\begin{cases} 2m = 2+n & \cdots ① \\ 3n = \max(4+m,\ 2+n) & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n = 4+m$　ゆえに　$m = 3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m = n = 2$

(ii) $4+m < 2+n$ のとき，② より　$3n = 2+n$　ゆえに　$n = 1$
これを ① に代入すると，$m = \dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x) = g(x)$　$\cdots ③$
また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(-x) - 6x^2 - 2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x) = f(x)$
また，$(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0)+7,\ \ g(0) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 3$$

以上の結果から，$f(x) = ax^2+3$，$g(x) = px^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4+3 = (x^2+2)(px^2-2)+7 \\ px^6-2 = x^4(ax^2+3) - 3x^2(px^2-2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

整理すると　$$\begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p,\ \ p-1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = p = 1$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = x^2+3,\ \ g(x) = x^2-2}$　■

$\boxed{3}$ (1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\cdots(*)$ の解 z_1，z_2 が $z_1=z_2$，すなわち，2 次方程式 $(*)$ が重解をもつ確率である．係数について，$b^2-4ac=0$ であるから，$b^2=4ac$ より

$b=2$ のとき，$ac=1$ より　$(a,\ c)=(1,\ 1)$
$b=4$ のとき，$ac=4$ より　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b=6$ のとき，$ac=9$ より　$(a,\ c)=(3,\ 3)$

よって，求める確率は　$\dfrac{1+3+1}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{216}}$

(2) (i) 2 次方程式 $(*)$ が単位円周上に実数解をもつとき，その解は 1 ではないから，$(*)$ は -1 を重解にもち，その方程式は

$$a(x+1)^2=0 \quad ゆえに \quad b=2a,\quad c=a$$

これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の 3 組である．

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 2),\ (3,\ 6,\ 3)$$

(ii) 2 次方程式 $(*)$ が単位円周上に虚数解をもつとき　$b^2-4ac<0$　$\cdots$①
$(*)$ の解と係数の関係および $z_2=\overline{z_1}$，$|z_1|=1$ に注意して

$$z_1z_2=\frac{c}{a} \quad ゆえに \quad |z_1|^2=\frac{c}{a} \quad すなわち \quad c=a \quad \cdots②$$

② を ① に代入して　$b^2-4a^2<0$　ゆえに　$\dfrac{b}{2}<a=c$

$b=1$ のとき　$a=c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=2,\ 3$ のとき　$a=c=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=4,\ 5$ のとき　$a=c=3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=6$ のとき　$a=c=4,\ 5,\ 6$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$6+2\cdot5+2\cdot4+3=27$ 組

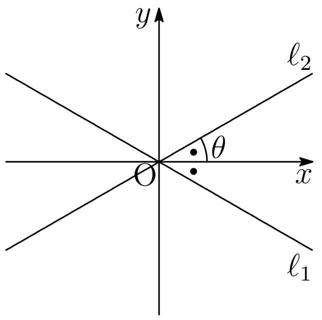
よって，求める確率は　$\dfrac{3+27}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{36}}$

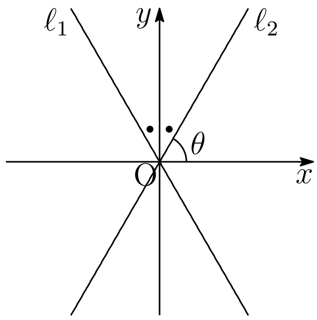
(3) 条件を満たす z_1，z_2 は虚数であるから

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$$

ℓ_2 の偏角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{b}$

(i)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　　(ii)　$\tan\theta = \sqrt{3}$





(i) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より

$$\sqrt{3(4ac-b^2)} = b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 3ac$$

$b=3$ のとき，$ac=3$ より　$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3,1)$

$b=6$ のとき，$ac=12$ より　$(a,\ c)=(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$2+4=6$ 組

(ii) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{b} = \sqrt{3}$ より

$$\sqrt{4ac-b^2} = \sqrt{3}b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = ac$$

$b=1$ のとき，$ac=1$ より　$(a,\ c)=(1,\ 1)$

$b=2$ のとき，$ac=4$ より　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

$b=3$ のとき，$ac=9$ より　$(a,\ c)=(3,\ 3)$

$b=4$ のとき，$ac=16$ より　$(a,\ c)=(4,\ 4)$

$b=5$ のとき，$ac=25$ より　$(a,\ c)=(5,\ 5)$

$b=6$ のとき，$ac=36$ より　$(a,\ c)=(6,\ 6)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$5\cdot1+3=8$ 組

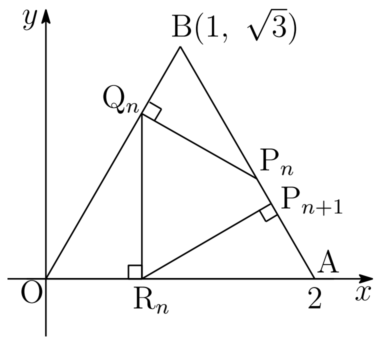
よって，求める確率は　$\dfrac{6+8}{6^3} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{108}}$　■

4 点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を通り，直線 OB に垂直な直線は

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$

これと直線 OB : $y = \sqrt{3}x$ の交点の x 座標は

$$\sqrt{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$



これを解くことにより，点 Q_n の x 座標は $\quad x = \dfrac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$

次に，点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

これを解くことにより，点 R_n の x 座標は $\quad x = x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1}$

点 Q_n と点 R_n の x 座標は等しいから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$$

2 点 P_n，P_{n+1} は直線 AB : $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上の点であるから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_{n+1} + 2\sqrt{3}) = \frac{x_n + \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3})}{4}$$

整理すると $\quad x_{n+1} = -\dfrac{1}{8}x_n + \dfrac{15}{8} \quad$ ゆえに $\quad x_{n+1} - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{1}{8}\left(x_n - \dfrac{5}{3}\right)$

数列 $\left\{x_n - \dfrac{5}{3}\right\}$ は初項 $x_1 - \dfrac{5}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$x_n - \frac{5}{3} = \left(x_1 - \frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{5}{3}$$

また $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}\cdot\frac{5}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

よって，求める点の座標は $\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}$ ■

5

$$C : w = \frac{az+b}{cz+1} \quad \cdots (*)$$

条件 (ア) により　$i = \dfrac{ai+b}{ci+1}$,　$-i = \dfrac{a(-i)+b}{c(-i)+1}$

ゆえに　$b+c+(a-1)i = 0$,　$b+c-(a-1)i = 0$

上の 2 式から　$a = 1$,　$b = -c$

これを $(*)$ に代入すると　$w = \dfrac{z-c}{cz+1} \cdots$ ①　ゆえに　$z = -\dfrac{w+c}{cw-1}$

点 z は虚軸全体を動くから，$z+\overline{z} = 0$ より　$-\dfrac{w+c}{cw-1} - \dfrac{\overline{w}-\overline{c}}{\overline{c}\,\overline{w}-1} = 0$

整理すると　$(c+\overline{c})|w|^2 + (|c|^2-1)(w+\overline{w}) - (c+\overline{c}) = 0 \quad \cdots$ ②

条件 (イ) に注意すると，① により　$c \neq 0$

さらに，c は純虚数ではないから　$c+\overline{c} \neq 0$

$k = \dfrac{|c|^2-1}{c+\overline{c}} \cdots$ ③ とおいて (k は実数)，② に適用すると

$$|w|^2 + k(w+\overline{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w+k|^2 = k^2+1$$

条件 (イ) により　$k^2+1 = 1$　ゆえに　$k = 0$　よって　$|w| = 1 \quad \cdots (**)$

また，③ により　$|c|^2 - 1 = 0$　ゆえに　$c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき，① により

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2z}{z+1}$$

$z = 0$ のとき，$w = -1$ となり，条件 (ウ) に反する．

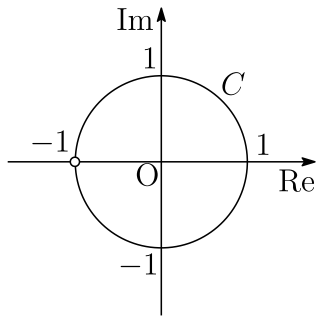
(ii) $c = -1$ のとき，① により

$$w = \frac{z+1}{-z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2}{-z+1} \neq 0$$

これは，条件 (ウ) を満たす．

よって　$\boldsymbol{a = 1,\ b = 1,\ c = -1}$

$(**)$ および $w \neq -1$ により，C の概形は右の図のようになる．



補足 $z = i\tan\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $w = \dfrac{z+1}{-z+1}$ に代入すると

$$w = \frac{i\tan\theta + 1}{-i\tan\theta + 1} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ より，w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある．

解説 一般に，1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は複素数，} ad - bc \neq 0)$$

は，拡縮 (回転)kz，平行移動 $z + \alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換である．
特に反転に関して，次の性質がある [3]．

- 原点を通らない円は，原点を通らない円に移る．
- 原点を通る円は，原点を通らない直線に移る．
- 原点を通らない直線は，原点を通る円から原点を除いた図形に移る．
- 原点を通る直線は，原点を通る直線から原点を除いた図形に移る．

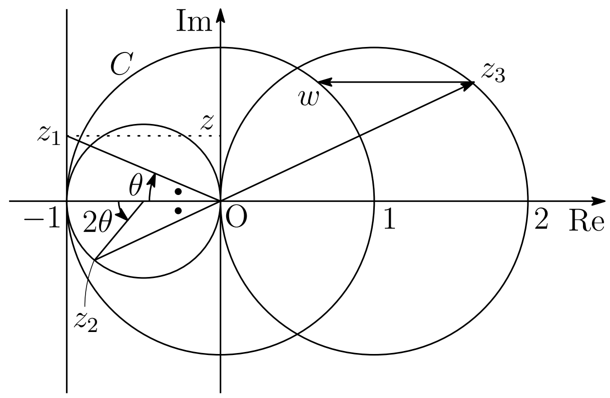
次の変換 (平行移動，反転，拡縮，平行移動)

$$f_1(z) = z - 1, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -2z, \quad f_4(z) = z - 1$$

について，合成変換 $f(z) = f_4{\circ}f_3{\circ}f_2{\circ}f_1(z)$ は　　$f(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$

$z = i\tan\theta$，$z_1 = f_1(z)$，$z_2 = f_2(z_1)$，$z_3 = f_3(z_2)$，$w = f_4(z_3)$ とすると

$$\begin{aligned} z_2 = f_2{\circ}f_1(z) &= \frac{1}{i\tan\theta - 1} = \frac{-\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\ &= -\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \end{aligned}$$



■

[3]http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照．

10.6　2020 年 (150 分)

1 点 $(a,\ 0)$ を通り，曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

2 a，b，c，d を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) c，d を a，b を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り，11 で割ると 10 余るとする。また，$f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り，11 で割ると 10 余るとする。a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

3 四面体 OABC において，辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を ℓ，辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m，辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。$\ell \perp m$，$m \perp n$，$n \perp \ell$ であり，$\mathrm{AB} = \sqrt{5}$，$\mathrm{BC} = \sqrt{3}$，$\mathrm{CA} = 2$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(2) 四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

4 4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

5 座標空間において，中心 $(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。D を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱 (内部を含む) を E とする。点 $(0,\ 2,\ 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また，T の体積を求めよ。

(2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ $y = e^{-x} - e^{-2x}$ より　$y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$

曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ 上の点 $(t,\ e^{-t} - e^{-2t})$ における接線の方程式は

$$y - (e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(x - t)$$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るから

$$-(e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(a - t)$$

したがって　$(e^t - 2)(a - t) = (e^t - 1)$　$\cdots(*)$

$e^t - 2 = 0$，すなわち，$t = \log 2$ は，$(*)$ は満たさない．

$t \neq \log 2$ のとき，$(*)$ から

$$a - t = \frac{e^t - 1}{e^t - 2} \quad \text{ゆえに} \quad a = t + 1 + \frac{1}{e^t - 2}$$

$f(t) = t + 1 + \dfrac{1}{e^t - 2}$ とおくと

$$f'(t) = 1 - \frac{e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 2)^2 - e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 1)(e^t - 4)}{(e^t - 2)^2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$(\log 2)$	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{3}{2} + 2\log 2$	$\nearrow$

このとき　$\displaystyle\lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty,\quad \lim_{t \to \infty} f(t) = \infty$

$\displaystyle\lim_{t \to \log 2 - 0} f(t) = -\infty,\quad \lim_{t \to \log 2 + 0} f(t) = \infty,$

したがって，$f(t)$ のとり得る値の範囲は　$f(t) \leqq 0,\ \dfrac{3}{2} + 2\log 2 \leqq f(t)$

よって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a \leqq 0,\ \dfrac{3}{2} + 2\log 2 \leqq a}$　■

2 (1) $w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x)=0$ の解であるから，
$f(x)$ は，$(x-w)(x-\overline{w})$，すなわち，x^2-x+1 を因数にもつ．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4+ax^2+bx^2+cx+d \\ &= (x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+a+b\} \\ &\qquad\qquad + (b+c-1)x-a-b+d \end{aligned}$$

したがって　$b+c-1=0,\quad -a-b+d=0$
よって　$\boldsymbol{c=1-b,\ \ d=a+b}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+(1-b)x+a+b$
ゆえに　$f(1)=2a+b+2,\ \ f(-1)=3b$
$f(1)$，$f(-1)$ を 7 で割った余りが，それぞれ 1，3 であるから

$$2a+b+2\equiv 1,\quad 3b\equiv 3 \pmod 7$$

上の第 2 式から　$b\equiv 1 \pmod 7$　これを第 1 式に代入すると

$$2a+1+2\equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad a\equiv -1 \pmod 7$$

$f(1)$，$f(-1)$ を 11 で割った余りが，ともに 10 であるから

$$2a+b+2\equiv 10,\quad 3b\equiv 10 \pmod{11}$$

上の第 2 式から　$b\equiv 7 \pmod{11}$　これを第 1 式に代入すると

$$2a+7+2\equiv 10 \quad \text{ゆえに} \quad 2a\equiv 1 \pmod{11}$$

さらに　$6{\cdot}2a\equiv 6{\cdot}1$　ゆえに　$a\equiv 6 \pmod{11}$

ゆえに　$(*)\begin{cases} a\equiv -1 \pmod 7 \\ a\equiv 6 \pmod{11}\end{cases}$　　$(**)\begin{cases} b\equiv 1 \pmod 7 \\ b\equiv 7 \pmod{11}\end{cases}$

$(*)$ の第 1 式から，$a=-1+7k$ とおき (k は整数)，これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$-1+7k\equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad k\equiv 1 \pmod{11}$$

$k=1+11\ell$ とおくと (ℓ は整数)

$$a=-1+7(1+11\ell)=6+77\ell$$

a の絶対値が 40 以下であるから，$\ell=0$ より　$a=6$　$\cdots$①

$(**)$ の第2式から，$b=7+11m$ とおき (m は整数)，これを $(**)$ の第1式に代入すると

$$7+11m \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4m \equiv 1 \quad \text{したがって} \quad m \equiv 2 \pmod 7$$

$m=2+7n$ とおくと (n は整数)

$$b=7+11(2+7n)=29+77n$$

b の絶対値が40以下であるから，$n=0$ より　$b=29$　$\cdots$②

(1) の結果から

$$f(x)=(x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+a+b\}$$

①，② をこれに代入して

$$f(x)=(x^2-x+1)(x^2+7x+35)$$

$f(x)=0$ の解は，$x^2-x+1=0$，$x^2+7x+35=0$ を解いて

$$\boldsymbol{x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-7\pm\sqrt{91}i}{2}}$$

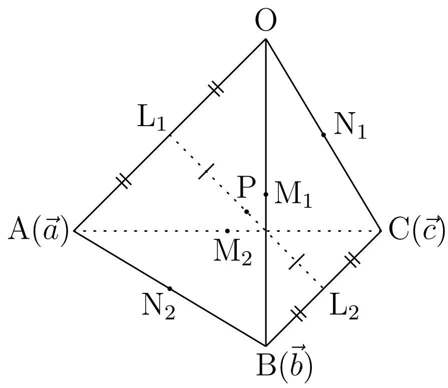
補足 $(*)\begin{cases} a\equiv -1 \pmod 7 \\ a\equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$　$(**)\begin{cases} b\equiv 1 \pmod 7 \\ b\equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$ より

$$\begin{cases} a-6\equiv 0 & \pmod 7 \\ a-6\equiv 0 & \pmod{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} b-29\equiv 0 & \pmod 7 \\ b-29\equiv 0 & \pmod{11} \end{cases}$$

したがって　$a-6\equiv 0,\ \ b-29\equiv 0 \pmod{77}$

$a,\ b$ の絶対値がともに40以下であるから　$a=6$，$b=29$　■

3 (1) 点 O を始点とし，3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする．線分 OA，OB，OC の中点をそれぞれ L_1，M_1，N_1 とし，線分 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L_2，M_2，N_2 とすると



$$2\overrightarrow{L_1L_2} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a},$$
$$2\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{c} + \vec{a} - \vec{b},$$
$$2\overrightarrow{N_1N_2} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

直線 L_1L_2，M_1M_2，N_1N_2 はそれぞれ直線 ℓ，m，n であるから，$\ell \perp m$ より，$\overrightarrow{L_1L_2} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$ であるから

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{L_1L_2})\cdot(2\overrightarrow{M_1M_2}) &= (\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}) \\ &= |\vec{c}|^2 - |\vec{b}-\vec{a}|^2 = 0 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$m \perp n$，$n \perp \ell$ であるから，同様にして

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{M_1M_2})\cdot(2\overrightarrow{N_1N_2}) &= (\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{c}-\vec{b}|^2 = 0 \quad \cdots ② \\ (2\overrightarrow{N_1N_2})\cdot(2\overrightarrow{L_1L_2}) &= (\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{c}|^2 = 0 \quad \cdots ③\end{aligned}$$

①～③ より

$$\begin{aligned}|\vec{c}| &= |\vec{b}-\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{5} \\ |\vec{a}| &= |\vec{c}-\vec{b}| = |\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{3} \\ |\vec{b}| &= |\vec{a}-\vec{c}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = 2\end{aligned}$$

①～③ をそれぞれ整理すると

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = 3+4-5 = 2 \quad ゆえに \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$$
$$2\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 = 4+5-3 = 6 \quad ゆえに \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 3$$
$$2\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 5+3-4 = 4 \quad ゆえに \quad \vec{c}\cdot\vec{a} = 2$$

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ と $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$ のなす角を φ とすると $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})}{|\vec{b}||\vec{a}-\vec{c}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1-3}{2^2} = -\frac{1}{2} \quad ゆえに \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

よって，直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ は

$$\theta = \pi - \varphi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot(2\overrightarrow{L_1L_2}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2 = 1+2-3 = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot(2\overrightarrow{L_1L_2}) &= (\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 5-4+1-2 = 0\end{aligned}$$

したがって　　$OA\perp L_1L_2$，$BC\perp L_1L_2$

2 点 L_1，L_2 の中点を P とすると　$PO = PA = PB = PC$

点 P は，四面体 OABC の 4 頂点を通る球面の中心である．したがって

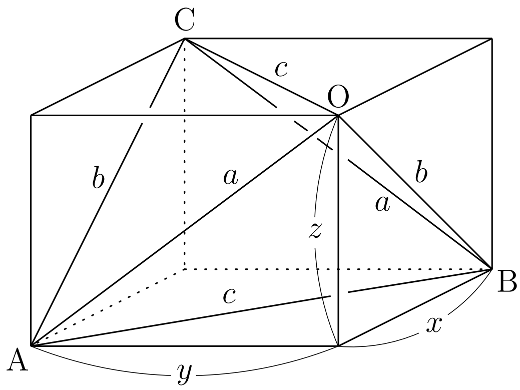
$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OL_1}+\overrightarrow{OL_2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

このとき　$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$$= 3+4+5+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot2 = 24$$

よって，求める半径は　$\dfrac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \dfrac{1}{4}\sqrt{24} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

補足　四面体 OABC のすべての面が合同である四面体を等面四面体という．$a = \mathrm{OA}$，$b = \mathrm{OB}$，$c = \mathrm{OC}$ とすると，直方体の縦，横，高さがそれぞれ x，y，z で



$$\begin{aligned}y^2+z^2 &= a^2\\ z^2+x^2 &= b^2\\ x^2+y^2 &= c^2\end{aligned}$$

を満たすものが唯一存在する．

$$x^2 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad z^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

したがって，等面四面体はこの直方体に埋め込まれ，求める球面の半径はこの長方形に外接する球面の半径 R に等しい．

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

等面四面体の体積を V とすると [4](直方体から 4 つの直角四面体を除く)

$$\begin{aligned}V &= xyz - 4\cdot\frac{1}{6}xyz = \frac{1}{3}xyz\\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\end{aligned}$$

■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.11-12)

4 (1) X が 5 で割り切れない，すなわち，4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0，X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-(p_0+p_1) = 1-\left(\frac{626}{1296}+\frac{500}{1296}\right) = \boldsymbol{\frac{19}{144}}$$

(2) X が 2 で割り切れない，すなわち，4 回とも奇数の目が出る確率を q_0，X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-(q_0+q_1) = 1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{37}{48}}$$

(3) X が 100 の倍数となるは，出る目の組合せが次の (i)～(iv) の場合である．

(i) $\{\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ 5,\ 5\}$ のとき $(\mathrm{A}=2,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

(ii) $\{4,\ 5,\ 5,\ \mathrm{B}\}$ のとき $(\mathrm{B}=1,\ 2,\ 3,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

(iii) $\{4,\ 4,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

(iv) $\{4,\ 5,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

(i)～(iv) より，求める確率は $\dfrac{24+48+6+4}{1296} = \dfrac{82}{1296} = \boldsymbol{\dfrac{41}{648}}$ ■

5　(1) T の表す領域は

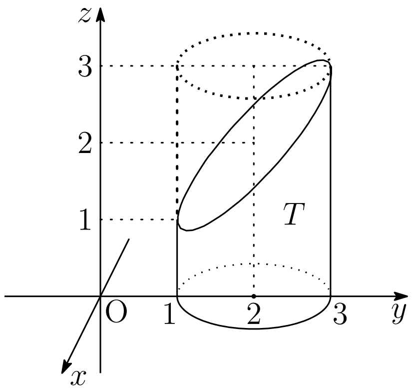
$$x^2+(y-2)^2 \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

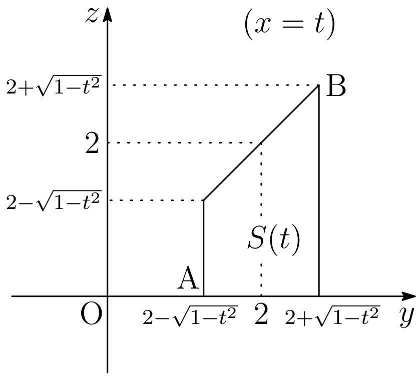
T を平面 $x=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの断面を表す領域は

$$x=t, \quad 2-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 2+\sqrt{1-t^2}, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

右下の図で中央の z 座標が 2 であることに注意して

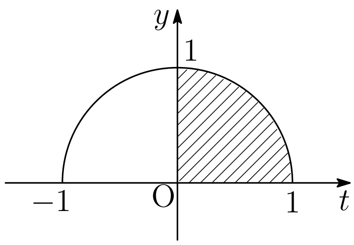
$$S(t)=2\{(2+\sqrt{1-t^2})-(2-\sqrt{1-t^2})\}=\boldsymbol{4\sqrt{1-t^2}}$$





右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$$



よって，求める T の体積を V_1 とすると

$$V_1=\int_{-1}^{1} S(t)\,dt=\int_{-1}^{1} 4\sqrt{1-t^2}\,dt=8\int_0^1 \sqrt{1-t^2}=8\cdot\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{2\pi}$$

(2) 2 点 A，B を (1) の図のようにとると

$$\mathrm{OA}=2-\sqrt{1-t^2}, \quad \mathrm{OB}=\sqrt{2}(2+\sqrt{1-t^2})$$

求める立体の体積を V_2 とすると，T が yz 平面に関して対称であるから

$$\frac{V_2}{2\pi}=\int_0^1 (\mathrm{OB}^2-\mathrm{OA}^2)\,dt=\int_0^1 \{2(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2\}\,dt$$
$$=\int_0^1 (5-t^2)\,dt+12\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt=\left[\,5t-\frac{t^3}{3}\,\right]_0^1+12\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{14}{3}+3\pi$$

よって　　$V_2=\boldsymbol{2\pi\left(\frac{14}{3}+3\pi\right)}$ ■