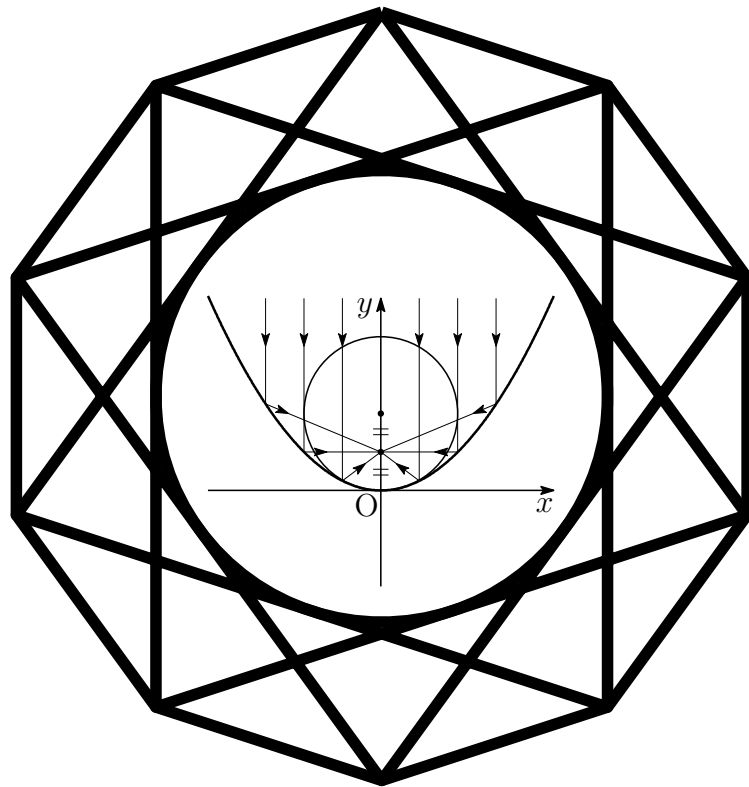


# 入試の軌跡

難関大学 理系

2015 - 2019

数学



2020 年 4 月 3 日

*Typed by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>*

# 序

本書には、関東・中京・関西・中国地区の主な難関国立大学(理系)

東京大学・東京工業大学・名古屋大学・京都大学・大阪大学・神戸大学・広島大学

が、現行教育課程で実施した平成27年(2015年)度から平成31年(2019年)度までの一般前期試験問題(数学)および解答例をすべて掲載した。

また、これらの問題および解答例は、年度ごとに次のサイトにも掲載している。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html>

本書の作成にあたり、以下の点に留意した。

1. 解答は、図や解説を充実させ、自学自習ができるように配慮した。
2. ICT教材として、電子黒板やプロジェクターでの使用を視野に入れており、この機能を利用する際には、全画面表示 ( $\boxed{\text{Ctrl}}+\text{L}$ ) および描画領域に合わせる ( $\boxed{\text{Ctrl}}+3$ ) と見やすくなる。ページスクロールには、( $\boxed{\text{Ctrl}}+\blacktriangle$ ,  $\boxed{\text{Ctrl}}+\blacktriangledown$ ) が利用でき、リンク(ジャンプ)先から戻る ( $\boxed{\text{Alt}}+\blacktriangleleft$ ), 進む ( $\boxed{\text{Alt}}+\blacktriangleright$ ) も利用できる。なお、全画面表示を解除するには  $\boxed{\text{ESC}}$ 。
3. スマートフォンでの使用も想定し、ページリンクの操作性を配慮した ICT 教材でもある。問題および解答には相互リンクを施した。各問の解答の終わりにある ■ をクリックすると、各大学の出題分野に戻る。また、出題分野の左上にある ◀ をクリックすると、最初のページに戻る。

上の2, 3の機能をサポートするPDFブラウザとして、Adobe Readerをご使用ください(フリーソフト)。スマートフォンには、同アプリがインストールされていない場合が多いので、同アプリをインストールしてからご使用ください。

令和元年6月 編者



# 目次

序	i
<b>第1章 東京大学</b>	<b>1</b>
出題分野	1
1.1 2015年(150分)	2
1.2 2016年(150分)	11
1.3 2017年(150分)	21
1.4 2018年(150分)	32
1.5 2019年(150分)	45
<b>第2章 東京工業大学</b>	<b>57</b>
出題分野	57
2.1 2015年(180分)	58
2.2 2016年(180分)	67
2.3 2017年(180分)	74
2.4 2018年(180分)	84
2.5 2019年(180分)	92
<b>第3章 名古屋大学</b>	<b>107</b>
出題分野	107
3.1 2015年(150分)	108
3.2 2016年(150分)	119
3.3 2017年(150分)	129
3.4 2018年(150分)	140
3.5 2019年(150分)	146
<b>第4章 京都大学</b>	<b>155</b>
出題分野	155
4.1 2015年(150分)	156
4.2 2016年(150分)	164
4.3 2017年(150分)	171
4.4 2018年(150分)	178
4.5 2019年(150分)	188

<b>第 5 章 大阪大学</b>	<b>195</b>
出題分野 . . . . .	195
5.1 2015 年 (150 分) . . . . .	196
5.2 2016 年 (150 分) . . . . .	203
5.3 2017 年 (150 分) . . . . .	213
5.4 2018 年 (150 分) . . . . .	220
5.5 2019 年 (150 分) . . . . .	231
<b>第 6 章 神戸大学</b>	<b>243</b>
出題分野 . . . . .	243
6.1 2015 年 (120 分) . . . . .	244
6.2 2016 年 (120 分) . . . . .	255
6.3 2017 年 (120 分) . . . . .	267
6.4 2018 年 (120 分) . . . . .	275
6.5 2019 年 (120 分) . . . . .	286
<b>第 7 章 広島大学</b>	<b>295</b>
出題分野 . . . . .	295
7.1 2015 年 (150 分) . . . . .	296
7.2 2016 年 (150 分) . . . . .	308
7.3 2017 年 (150 分) . . . . .	319
7.4 2018 年 (150 分) . . . . .	329
7.5 2019 年 (150 分) . . . . .	338

# 第 1 章 東京大学

## 出題分野 (2010-2019) 150 分

◀	東京大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2次関数								5		
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式		4				1				
	三角関数					1			1		
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法										2
III	式と曲線										
	複素数平面							4	3	5	6
	関数										
	極限					4					
	微分法とその応用		1	1	2	6		1		1.4	5
	積分法	2	3				6				1
	積分法の応用	1.4	6	3	6	3	3	6	6	6	
A	場合の数と確率	3			3	2	2	2	2		
	整数の性質	5		4	5	5	5	5	4		4
	図形の性質										
B	平面上のベクトル				4					3	
	空間のベクトル	6						3			3
	数列		2.5	2			4			2	
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)			5.6	1						

数字は問題番号

## 1.1 2015年(150分)

- 1 正の実数  $a$  に対して、座標平面上で次の放物線を考える.

$$C: y = ax^2 + \frac{1 - 4a^2}{4a}$$

$a$  が正の実数全体を動くとき、 $C$  の通過する領域を図示せよ.

- 2 どの目も出る確率が  $\frac{1}{6}$  のさいころを1つ用意し、次のように左から順に文字を書く. さいころを投げ、出た目が1, 2, 3のときは文字列 AA を書き、4のときは文字 B を、5のときは文字 C を、6のときは文字 D を書く. さらに繰り返しさいころを投げ、同じ規則に従って、AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく. たとえば、さいころを5回投げ、その出た目が順に2, 5, 6, 3, 4であったとすると、得られる文字列は

AACDAAB

となる. このとき、左から4番目の文字はD, 5番目の文字はAである.

- (1)  $n$  を正の整数とする.  $n$  回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率を求めよ.
  - (2)  $n$  を2以上の整数とする.  $n$  回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n - 1$  番目の文字が A で、かつ  $n$  番目の文字が B となる確率を求めよ.
- 3  $a$  を正の実数とし、 $p$  を正の有理数とする.  
座標平面上の2つの曲線  $y = ax^p$  ( $x > 0$ ) と  $y = \log x$  ( $x > 0$ ) を考える. この2つの曲線の共有点が1点のみであるとし、その共有点を Q とする. 以下の問いに答えよ. 必要であれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$  を証明なしに用いてよい.
- (1)  $a$  および点 Q の  $x$  座標を  $p$  を用いて表せ.
  - (2) この2つの曲線と  $x$  軸で囲まれる図形を、 $x$  軸のまわりに1回転してできる立体の体積を  $p$  を用いて表せ.
  - (3) (2) で得られる立体の体積が  $2\pi$  になるときの  $p$  の値を求めよ.

4 数列  $\{p_n\}$  を次のように定める.

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$  が  $n$  によらないことを示せ.  
 (2) すべての  $n = 2, 3, 4, \dots$  に対し,  $p_{n+1} + p_{n-1}$  を  $p_n$  のみを使って表せ.  
 (3) 数列  $\{q_n\}$  を次のように定める.

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すべての  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し,  $p_n = q_{2n-1}$  を示せ.

5  $m$  を 2015 以下の正の整数とする.  ${}_{2015}C_m$  が偶数となる最小の  $m$  を求めよ.

6  $n$  を正の整数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数  $g(x)$  を次のように定める.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$  を連続な関数とし,  $p, q$  を実数とする.  $|x| \leq \frac{1}{n}$  をみたす  $x$  に対して  $p \leq f(x) \leq q$  が成り立つとき, 次の不等式を示せ.

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

- (2) 関数  $h(x)$  を次のように定める.

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$$



解答例

$$\boxed{1} \quad C: y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a} \text{ を } a \text{ について整理すると } 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0$$

$$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 \text{ とおくと}$$

$$f(a) = \begin{cases} 4(x^2-1) \left\{ a - \frac{y}{2(x^2-1)} \right\}^2 + \frac{x^2-y^2-1}{x^2-1} & (x^2 \neq 1) \\ -4ya + 1 & (x^2 = 1) \end{cases}$$

$f(a) = 0$  が正の解  $a$  を持つためには,  $f(0) = 1$  に注意して

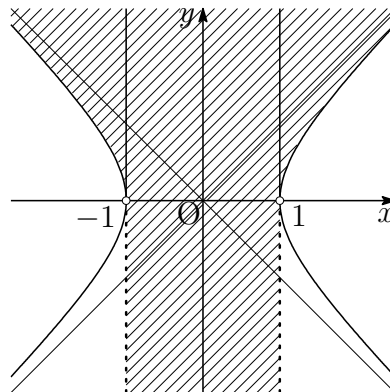
$$(i) \quad x^2 - 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad |x| < 1$$

$$(ii) \quad x^2 - 1 > 0, \quad \frac{y}{2(x^2-1)} > 0, \quad \frac{x^2-y^2-1}{x^2-1} \leq 0$$

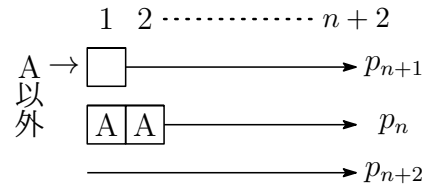
$$\text{ゆえに} \quad y > 0, \quad x^2 - y^2 - 1 \leq 0 \quad (|x| > 1)$$

$$(iii) \quad x^2 - 1 = 0, \quad -4y < 0 \quad \text{ゆえに} \quad y > 0 \quad (|x| = 1)$$

求める領域は, 下の図の斜線部分. ただし, 点線部の境界は含まない.



- 2 (1) 文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率を  $p_n$  とすると,  $p_{n+2}$  は最初に出た目が 4, 5, 6 の場合と 1, 2, 3 の場合により



$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n \geq 1) \quad \cdots (*)$$

このとき  $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

(\*) より  $p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n),$

$$p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

第 1 式から  $p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から  $p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = 1$

上の 2 式から  $p_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \quad (n \geq 1)$

- (2) 文字列の左から  $n - 1$  番目の文字が A で, かつ  $n$  番目の文字列が B となる確率を  $q_n$  とすると,  $q_{n+2}$  は, (1) と同様に

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n \quad (n \geq 2) \quad \cdots (**)$$

このとき  $q_2 = 0, q_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

(\*\*) より  $q_{n+2} - q_{n+1} = -\frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n),$

$$q_{n+2} + \frac{1}{2}q_{n+1} = q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$$

第 1 式から  $q_{n+1} - q_n = (q_3 - q_2) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

第 2 式から  $q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n = q_3 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{12}$

上の 2 式から  $q_n = \frac{1}{18} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\} \quad (n \geq 2)$  ■

**3** (1)  $f(x) = ax^p - \log x$  とおくと ( $x > 0$ )

$$f'(x) = apx^{p-1} - \frac{1}{x} = \frac{p}{x} \left( ax^p - \frac{1}{p} \right)$$

$aq^p = \frac{1}{p} \dots \textcircled{1}$ , すなわち,  $q = \frac{1}{(ap)^{\frac{1}{p}}}$  とおくと,  $f'(q) = 0$  より

$x$	(0)	...	$q$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

2 曲線  $y = ax^p$  ( $x > 0$ ) と  $y = \log x$  ( $x > 0$ ) の共有点が 1 点のみであるとき,  $f(q) = 0$  であるから

$$aq^p - \log q = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて  $q = e^{\frac{1}{p}}, a = \frac{1}{pe}$

(2) 求める体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^q (ax^p)^2 dx - \int_1^q (\log x)^2 dx \\ &= a^2 \left[ \frac{1}{2p+1} x^{2p+1} \right]_0^q - \left[ x \{ (\log x)^2 - 2 \log x + 2 \} \right]_1^q \\ &= \frac{(aq^p)^2 q}{2p+1} - q \{ (\log q)^2 - 2 \log q + 2 \} + 2 \\ &= \frac{q}{(2p+1)p^2} - q \left( \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2 \right) + 2 \\ &= q \left( \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{4}{2p+1} \right) - q \left( \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2 \right) + 2 \\ &= \frac{q(2-4p)}{1+2p} + 2 = \frac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = \pi \left\{ \frac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2 \right\}$$

(3) (2) の結果から,  $V = 2\pi$  のとき

$$\pi \left\{ \frac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2 \right\} = 2\pi \quad \text{よって} \quad p = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

4 (1)  $p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) より

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+2}^2 + p_{n+1}^2 + 1}{p_{n+2}p_{n+1}} &= \frac{1}{p_{n+1}} \left( p_{n+2} + \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_{n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{p_{n+1}} \left( \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} + p_n \right) = \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n} \end{aligned}$$

よって  $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n} = \frac{p_2^2 + p_1^2 + 1}{p_2p_1} = \frac{2^2 + 1^2 + 1}{2 \cdot 1} = 3$

(2) (1)の結果から,  $p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1 = 3p_{n+1}p_n$  であるから

$$p_{n+1}^2 + 1 = p_n(3p_{n+1} - p_n) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} = 3p_{n+1} - p_n$$

したがって  $p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n \dots \textcircled{1}$  すなわち  $p_{n+2} + p_n = 3p_{n+1}$

よって  $p_{n+1} + p_{n-1} = 3p_n$

(3)  $q_1 = 1, q_2 = 1, q_{n+2} = q_{n+1} + q_n$  であるから,  $q_3 = q_2 + q_1 = 2$

$$p_n = q_{2n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \dots (*)$$

$p_1 = q_1, p_2 = q_3$  より,  $n = 1, 2$  のとき, (\*) は成立する.

(\*) が  $n + 1$  以下の自然数について成立すると仮定すると,  $\textcircled{1}$  より

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= 3q_{2n+1} - q_{2n-1} \\ &= 2q_{2n+1} + (q_{2n+1} - q_{2n-1}) = 2q_{2n+1} + q_{2n} \\ &= (q_{2n+1} + q_{2n}) + q_{2n+1} = q_{2n+2} + q_{2n+1} = q_{2n+3} \end{aligned}$$

したがって,  $n + 2$  のときも, (\*) が成立する.

よって, すべての自然数について, (\*) が成立する.

補足 漸化式より,  $p_3 = 5, p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2 = 1$  であるから ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+2} + p_n}{p_{n+1}} - \frac{p_{n+1} + p_{n-1}}{p_n} &= \frac{p_n(p_{n+2} + p_n) - p_{n+1}(p_{n+1} + p_{n-1})}{p_{n+1}p_n} \\ &= \frac{(p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2) - (p_{n+1}p_{n-1} - p_n^2)}{p_{n+1}p_n} = 0 \end{aligned}$$

したがって  $\frac{p_{n+2} + p_n}{p_{n+1}} = \frac{p_3 + p_1}{p_2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$

ここで,  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  とおくと

$$p_{n+2} - (\alpha^2 + \beta^2)p_{n+1} + \alpha^2\beta^2p_n = 0, \quad q_{n+2} - (\alpha + \beta)q_{n+1} + \alpha\beta q_n = 0$$

よって  $p_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha - \beta}, \quad q_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$  ■

5 正の整数  $k$  に対し,  $k = l_k \cdot 2^{n_k}$  ( $l_k$  は奇数,  $n_k$  は 0 以上の整数) とすると

$${}_{2015}C_m = \prod_{k=1}^m \frac{2016 - k}{k} = \prod_{k=1}^m \frac{63 \cdot 2^5 - l_k \cdot 2^{n_k}}{l_k \cdot 2^{n_k}} \prod_{k=1}^m \frac{63 \cdot 2^{5-n_k} - l_k}{l_k}$$

$1 \leq k < 2^5$  のとき,  $0 \leq n_k < 5$  であるから,  $63 \cdot 2^{5-n_k} - l_k$  は奇数.

したがって,  $1 \leq m < 32$  のとき,  ${}_{2015}C_m$  は奇数. 次に

$${}_{2015}C_{32} = \frac{63 \cdot 2^5 - 2^5}{2^5} \times {}_{2015}C_{31} = 2 \cdot 31 \times {}_{2015}C_{31}$$

は, 偶数である. よって, 求める最小の正の整数  $m$  は **32**

東京大学 1999 年前期 理科

- (1)  $k$  を自然数とする.  $m$  を  $m = 2^k$  とおくと,  $0 < n < m$  を満たすすべての整数  $n$  について, 二項係数  ${}_m C_n$  は偶数であることを示せ.
- (2) 以下の条件を満たす自然数  $m$  をすべて求めよ.

条件:  $0 \leq n \leq m$  を満たすすべての整数  $n$  について二項係数  ${}_m C_n$  は奇数である.

解答 (1) 
$${}_m C_n = \frac{m \times {}_{m-1} C_{n-1}}{n} = \frac{2^k \times {}_{m-1} C_{n-1}}{n}$$

$m = 2^k$ ,  $0 < n < m$  であるから,  $n$  が  $2^{k-1}$  を因数にもつことがあっても  $2^k$  を因数にもつことはないので, 二項係数  ${}_m C_n$  は偶数である.

- (2)  ${}_{m-1} C_0 = 1$  および (1) の結果を  ${}_{m-1} C_j = {}_m C_j - {}_{m-1} C_{j-1}$  に適用すると,  ${}_{m-1} C_j$  ( $0 \leq j \leq m-1$ ) は奇数.

${}_{2^{k+1}} C_j = {}_{2^k} C_{j-1} + {}_{2^k} C_j$  であるから, (1) の結果により

$$j = 2, 3, \dots, 2^k - 1 \text{ のとき } {}_{2^{k+1}} C_j \text{ は偶数}$$

${}_{2^{k+2}} C_j = {}_{2^{k+1}} C_{j-1} + {}_{2^{k+1}} C_j$  であるから, 上の結果により

$$j = 3, 4, \dots, 2^k - 1 \text{ のとき } {}_{2^{k+2}} C_j \text{ は偶数}$$

順次繰り返すことにより,  $i = 0, 1, \dots, 2^k - 2$  に対して

$$i + 1 \leq j \leq 2^k - 1 \text{ のとき } {}_{2^{k+i}} C_j \text{ は偶数}$$

よって  $m = 2^k - 1$  ( $k$  は自然数)

別解 整数を係数とする多項式を、偶数の係数を0に置き換え、奇数の係数を1に置き換える。2つの整式がこの置き換えによって、等しくなるとき、この2つの整式は合同( $\equiv$ )とする。例えば、 $k$ を正の整数とすると

$$(1+x)^{2^k} \equiv 1+x^{2^k},$$

$$(1+x)^{2^k-1} \equiv 1+x+x^2+\cdots+x^{2^k-1}$$

2015 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 であるから

$$(1+x)^{2015} = (1+x)^{1024}(1+x)^{512}(1+x)^{256}(1+x)^{128}(1+x)^{64}$$

$$\times (1+x)^{16}(1+x)^8(1+x)^4(1+x)^2(1+x)$$

$$\sum_{m=0}^{2015} {}_{2015}C_m x^m \equiv (1+x^{1024})(1+x^{512})(1+x^{256})(1+x^{128})(1+x^{64})$$

$$\times (1+x^{16})(1+x^8)(1+x^4)(1+x^2)(1+x)$$

右辺の係数が0になる最も次数の低い項は  $x^{32}$  よって 32 ■

6 (1) 
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これより 
$$g(nx) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi nx) + 1}{2} & (|x| \leq \frac{1}{n} \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{n} \text{ のとき}) \end{cases}$$

したがって 
$$n \int_{-1}^1 g(nx)f(x) dx = n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x) dx \quad \cdots (*)$$

$|x| \leq \frac{1}{n}$  のとき、 $p \leq f(x) \leq q$ ,  $g(nx) \geq 0$  に注意して

$$np \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) dx \leq n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x) dx \leq nq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) dx$$

ここで 
$$n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) dx = \int_{-1}^1 g(t) dt = \left[ \frac{1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{t}{2} \right]_{-1}^1 = 1$$

上の諸式により 
$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx)f(x) dx \leq q$$

$$(2) \quad h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\text{これより } h(nx) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi nx) & (|x| \leq \frac{1}{n} \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{n} \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\text{したがって } n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx = n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$$

$g'(x) = h(x)$  であるから

$$\begin{aligned} & n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx \\ &= n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g'(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx = n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \{g(nx)\}' \log(1 + e^{x+1}) dx \\ &= n \left[ g(nx) \log(1 + e^{x+1}) \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) \cdot \frac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}} dx \\ &= -n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) \cdot \frac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}} dx \end{aligned}$$

ここで、 $f(x) = \frac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}} = 1 - \frac{1}{1 + e^{x+1}}$  ( $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ ) とおくと、 $f(x)$  は単調増加であるから

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{すなわち} \quad \frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{-\frac{1}{n}+1}} \leq f(x) \leq \frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{\frac{1}{n}+1}}$$

(\*) および (1) の結果にこれを適用すると

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{-\frac{1}{n}+1}} \leq n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx \leq \frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{\frac{1}{n}+1}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{-\frac{1}{n}+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{\frac{1}{n}+1}} = e$  から、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx = \frac{e}{1 + e}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx \right\} = -\frac{e}{1 + e} \end{aligned}$$

■

## 1.2 2016年(150分)

- 1  $e$  を自然対数の底, すなわち  $e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$  とする. すべての正の実数  $x$  に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

- 2 A, B, C の3つのチームが参加する野球の大会を開催する. 以下の方式で試合を行い, 2連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する.
- (a) 1試合目で A と B が対戦する.
  - (b) 2試合目で, 1試合目の勝者と, 1試合目で待機していた C が対戦する.
  - (c)  $k$  試合目で優勝チームが決まらない場合は,  $k$  試合目の勝者と,  $k$  試合目で待機していたチームが  $k+1$  試合目で対戦する. ここで  $k$  は2以上の整数とする.

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は  $\frac{1}{2}$  で, 引き分けはないものとする.

- (1)  $n$  を2以上の整数とする. ちょうど  $n$  試合目で A が優勝する確率を求めよ.
  - (2)  $m$  を正の整数とする. 総試合数が  $3m$  回以下で A が優勝したとき, A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ.
- 3  $a$  を  $1 < a < 3$  をみたす実数とし, 座標空間内の4点  $P_1(1, 0, 1)$ ,  $P_2(1, 1, 1)$ ,  $P_3(1, 0, 3)$ ,  $Q(0, 0, a)$  を考える. 直線  $P_1Q$ ,  $P_2Q$ ,  $P_3Q$  と  $xy$  平面の交点をそれぞれ  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  として, 三角形  $R_1R_2R_3$  の面積を  $S(a)$  とする.  $S(a)$  を最小にする  $a$  と, そのときの  $S(a)$  の値を求めよ.
- 4  $z$  を複素数とする. 複素数平面上の3点  $A(1)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z^2)$  が鋭角三角形をなすような  $z$  の範囲を求め, 図示せよ.



**5**  $k$  を正の整数とし、10進法で表された小数点以下  $k$  桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を1つとる. ここで,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  は0から9までの整数で,  $a_k \neq 0$  とする.

(1) 次の不等式をみたす正の整数  $n$  をすべて求めよ.

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2)  $p$  が  $5 \cdot 10^{k-1}$  以上の整数ならば, 次の不等式をみたす正の整数  $m$  が存在することを示せ.

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数  $x$  に対し,  $r \leq x < r+1$  をみたす整数  $r$  を  $[x]$  で表す.  $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1a_2\cdots a_k$  をみたす正の整数  $s$  は存在しないことを示せ.

**6** 座標空間内を, 長さ2の線分 AB が次の2条件 (a), (b) をみたしながら動く.

(a) 点 A は平面  $z = 0$  上にある.

(b) 点 C(0, 0, 1) が線分 AB 上にある.

このとき, 線分 AB が通過することのできる範囲を  $K$  とする.  $K$  と不等式  $z \geq 1$  の表す範囲との共通部分の体積を求めよ.

解答例

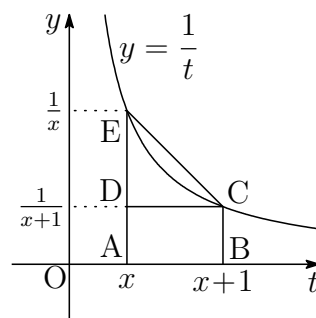
1  $f(x) = x\{\log(x+1) - \log x\}$ ,  $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\{\log(x+1) - \log x\}$  とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log(x+1) - \log x + x \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{x+1}, \\ g'(x) &= \log(x+1) - \log x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) \end{aligned}$$

区間  $x \leq t \leq x+1$  における  $y = \frac{1}{t}$  のグラフと  $t$  軸で囲まれた部分の面積, 右の図の長方形 ABCD および台形 ABCE の面積の大小関係から

$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right)$$

したがって  $f'(x) > 0$ ,  $g'(x) < 0$



$f(x)$  は単調増加であるから

$$f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1$$

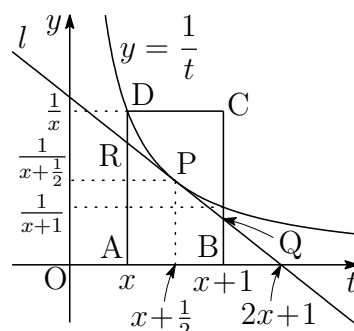
また  $\lim_{x \rightarrow \infty} \{g(x) - f(x)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 0$

すなわち  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$

$g(x)$  は単調減少であるから  $g(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$

したがって  $f(x) < 1 < g(x)$  よって  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

別解 曲線  $y = \frac{1}{t}$  の点  $P\left(x + \frac{1}{2}, \frac{1}{x + \frac{1}{2}}\right)$  における接線を  $l$  とし ( $x > 0$ ),  $l$  と直線  $t = x$ ,  $t = x + 1$  との交点をそれぞれ  $R$ ,  $Q$  とする. 右の図のように  $x \leq t \leq x + 1$  において, 曲線  $y = \frac{1}{t}$  および  $t$  軸で囲まれた図形の面積と2つの四角形  $ABCD$  および  $ABQR$  の面積との大小関係により



$$\frac{1}{x + \frac{1}{2}} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x + \frac{1}{2}} < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\text{したがって} \quad \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 1 < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

$$\text{よって} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

補足 上の図から,  $x > 0$  のとき  $\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{x}$

$$\text{別解と同様にして}^1 \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$h(x) = (x+1)\{\log(x+1) - \log x\}$  とおくと, 上の図に注意して

$$\begin{aligned} h'(x) &= \log(x+1) - \log x + (x+1)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{x} < 0 \end{aligned}$$

$f(x)$  は単調増加,  $h(x)$  は単調減少であるから, 前ページと同様の議論により

$$f(x) < 1 < h(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$$

$$F(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad H(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad \text{とすると}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = e$$

$F(x) = H(-x-1)$  であるから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} H(-x-1) = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x-1) = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = e, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = e \quad \text{であるから} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \quad \blacksquare$$

<sup>1</sup>数列の証明は, [http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_tech.2017\\_kouki.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2017_kouki.pdf) の p.9 を参照.

2 (1)  $n_1 \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $n_2 = n_1 + 1$ ,  $n_3 = n_1 + 2$  とする.

優勝チームが決まらず対戦が続くとき、勝者・敗者・控えは3順ごとに、次の (i),(ii) のように繰り返す.

(i) 初戦で A が B に勝つとき

回数	1	2	3	...	$n_1$	$n_2$	$n_3$	...
勝者	A	C	B	...	A	C	B	...
敗者	B	A	C	...	B	A	C	...
控え	C	B	A	...	C	B	A	...

(ii) 初戦で B が A に勝つとき

回数	1	2	3	...	$n_1$	$n_2$	$n_3$	...
勝者	B	C	A	...	B	C	A	...
敗者	A	B	C	...	A	B	C	...
控え	C	A	B	...	C	A	B	...

$n$  試合目に A が優勝するのは、(i) の場合、 $n \equiv 2 \pmod{3}$  のとき、A は最後に C に勝って優勝し、(ii) の場合、 $n \equiv 1 \pmod{3}$  のとき、A は最後に B に勝って優勝する. これらの場合の確率は、ともに  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

よって、求める確率は

$$n \not\equiv 0 \text{ のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \equiv 0 \text{ のとき } 0 \quad (\text{mod } 3)$$

(2) (1) の結果から、A が最後に C に勝って、優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7} \left\{ 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}$$

また、A が最後に B に勝って、優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{2} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}$$

よって、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{2} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}}{\frac{1}{7} \left\{ 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\} + \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{2} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}} = \frac{1 - 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{5 - 12 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}$$

補足 初項  $a$ , 公比  $r$ , 末項  $l$  の等比数列の和は  $\frac{a - rl}{1 - r}$  ■

- 3** (1)  $R_1, R_2, R_3$  は、それぞれ直線  $P_1Q, P_2Q, P_3Q$  の点であるから、実数  $t_1, t_2, t_3$  を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR_1} &= \overrightarrow{OP_1} + t_1 \overrightarrow{P_1Q} = (1, 0, 1) + t_1(-1, 0, a-1) \\ &= (1-t_1, 0, 1+t_1(a-1)), \\ \overrightarrow{OR_2} &= \overrightarrow{OP_2} + t_2 \overrightarrow{P_2Q} = (1, 1, 1) + t_2(-1, -1, a-1) \\ &= (1-t_2, 1-t_2, 1+t_2(a-1)), \\ \overrightarrow{OR_3} &= \overrightarrow{OP_3} + t_3 \overrightarrow{P_3Q} = (1, 0, 3) + t_3(-1, 0, a-3) \\ &= (1-t_3, 0, 3+t_3(a-3)),\end{aligned}$$

$R_1, R_2, R_3$  は、 $xy$  平面上の点であるから

$$1+t_1(a-1)=0, \quad 1+t_2(a-1)=0, \quad 3+t_3(a-3)=0$$

これを解いて  $t_1 = \frac{1}{1-a}, \quad t_2 = \frac{1}{1-a}, \quad t_3 = \frac{3}{3-a}$

したがって

$$\overrightarrow{OR_1} = \left( \frac{a}{a-1}, 0, 0 \right), \quad \overrightarrow{OR_2} = \left( \frac{a}{a-1}, \frac{a}{a-1}, 0 \right), \quad \overrightarrow{OR_3} = \left( \frac{a}{a-3}, 0, 0 \right)$$

ゆえに  $\overrightarrow{R_1R_2} = \left( 0, \frac{a}{a-1}, 0 \right), \quad \overrightarrow{R_1R_3} = \left( \frac{2a}{(a-1)(a-3)}, 0, 0 \right)$

$0 < a < 3$  に注意して  $S(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a-1} \cdot \frac{2a}{(a-1)(3-a)} = \frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$

両辺の対数をとって、微分すると

$$\log S(a) = 2 \log a - 2 \log(a-1) - \log(3-a),$$

$$\frac{S'(a)}{S(a)} = \frac{2}{a} - \frac{2}{a-1} + \frac{1}{3-a} = -\frac{2}{a(a-1)} + \frac{1}{3-a} = \frac{(a+3)(a-2)}{a(a-1)(3-a)}$$

$$S'(a) = \frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)} \cdot \frac{(a+3)(a-2)}{a(a-1)(3-a)} = \frac{a(a+3)(a-2)}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

$a$	(1)	...	2	...	(3)
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		↘	極小 4	↗	

よって 最小値  $S(2) = 4$  ■

4 3点  $A(1)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z^2)$  を頂点とする三角形であるから  $z \neq 1$

$$\begin{aligned} AB &= |z-1| & BC &= |z^2-z| & CA &= |z^2-1| \\ & & &= |z||z-1| & &= |z+1||z-1| \end{aligned}$$

したがって  $AB:BC:CA = 1:|z:|z+1|$

$\triangle ABC$  が鋭角三角形であるとき、次の3式を満たせばよい。

$$1^2 + |z|^2 > |z+1|^2, \quad 1^2 + |z+1|^2 > |z|^2, \quad |z|^2 + |z+1|^2 > 1^2$$

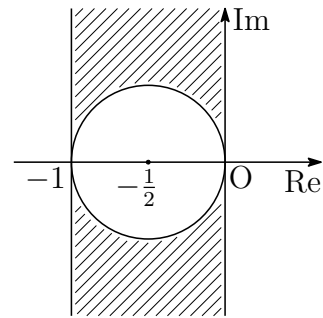
第1式から  $z + \bar{z} < 0$  すなわち  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} < 0 \quad \dots \textcircled{1}$

第2式から  $z + \bar{z} > -2$  すなわち  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} > -1 \quad \dots \textcircled{2}$

第3式から  $|z|^2 + \frac{z + \bar{z}}{2} > 0$  すなわち  $\left|z + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$

①~③より 
$$\begin{cases} -1 < \operatorname{Re}(z) < 0 \\ \left|z + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$z$  の満たす領域は、右の図の斜線部分。  
ただし、境界線を含まない。



■

- 5 (1)  $d_k = 0.a_1a_2\cdots a_k$  とおくと,  $d_k \leq \sqrt{n} - 10^k < d_k + 10^{-k}$  より

$$10^k + d_k \leq \sqrt{n} < 10^k + d_k + 10^{-k}$$

上式の辺々を平方すると

$$10^{2k} + 2d_k \cdot 10^k + d_k^2 \leq n < 10^{2k} + 2d_k \cdot 10^k + 2 + (d_k + 10^{-k})^2$$

ここで,  $d_k \cdot 10^k$  が整数であることと

$$0 < d_k^2 < 1, \quad 0 < (d_k + 10^{-k})^2 \leq 1$$

であることに注意すると, 求める正の整数  $n$  は

$$n = 10^{2k} + 2d_k \cdot 10^k + 1, \quad 10^{2k} + 2d_k \cdot 10^k + 2$$

- (2)  $d_k \leq \sqrt{m} - p < d_k + 10^{-k}$  より

$$p + d_k \leq \sqrt{m} < p + d_k + 10^{-k}$$

上式の辺々を平方すると

$$(p + d_k)^2 \leq m < (p + d_k + 10^{-k})^2$$

$p$  が  $5 \cdot 10^{k-1}$  の整数のとき

$$\begin{aligned} (p + d_k + 10^{-k})^2 - (p + d_k)^2 &= 2(p + d_k) \cdot 10^{-k} + 10^{-2k} \\ &> 2p \cdot 10^{-k} \geq 2 \cdot 5 \cdot 10^{k-1} \cdot 10^{-k} = 1 \end{aligned}$$

よって, 条件をみたす正の整数  $m$  が存在する.

- (3)  $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = d_k$  をみたす正の整数  $s$  が存在するとき

$$\sqrt{s} = [\sqrt{s}] + d_k \quad (0 < d_k < 1)$$

これから  $\sqrt{s}$  は有限小数, すなわち, 有理数であるから

$$\sqrt{s} = \frac{q}{r} \quad (\text{正の整数 } q, r \text{ は互いに素})$$

とおき, 両辺を平方すると

$$s = \frac{q^2}{r^2}$$

左辺は正の整数であるから,  $r = 1$  となる. このとき,  $\sqrt{s} = [\sqrt{s}] = q$  より,  $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0$  であるから, 条件をみたす正の整数  $s$  は存在しない. ■

- 6 Bの $z$ 座標を $1+t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), Bから $z$ 軸に降ろした垂線BHの長さを $x$ とすると

$$BC = \sqrt{t^2 + x^2}, \quad CA = \frac{BC}{t} = \frac{\sqrt{t^2 + x^2}}{t}$$

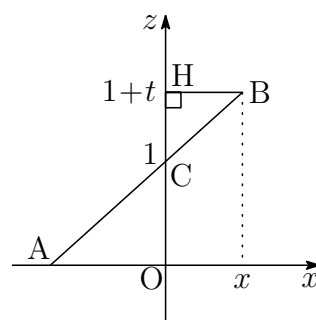
BC + CA = 2であるから

$$\sqrt{t^2 + x^2} + \frac{\sqrt{t^2 + x^2}}{t} = 2$$

ゆえに  $\sqrt{t^2 + x^2} = \frac{2t}{t+1}$  したがって  $x^2 = \left(\frac{2t}{t+1}\right)^2 - t^2$

求める体積を $V$ とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 dt = \pi \int_0^1 \left\{ \left(\frac{2t}{t+1}\right)^2 - t^2 \right\} dt \\ &= \pi \int_0^1 \left\{ \left(2 - \frac{2}{t+1}\right)^2 - t^2 \right\} dt \\ &= \pi \int_0^1 \left\{ 4 - \frac{8}{t+1} + \frac{4}{(t+1)^2} - t^2 \right\} dt \\ &= \pi \left[ 4t - 8 \log(t+1) - \frac{4}{t+1} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \pi \left( \frac{17}{3} - 8 \log 2 \right) \end{aligned}$$



極方程式による曲線の回転体の体積

$xy$ 平面において、極方程式 $r = r(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ )で表される曲線を $x$ 軸の回りに回転させた立体の体積 $V$ は

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^3 \sin \theta d\theta \quad (0 \leq \alpha < \beta \leq \pi)$$

また、この曲線を $y$ 軸の回りに回転させた立体の体積 $V$ は

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^3 \cos \theta d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

証明 p.266の極方程式の計量を参照.



別解  $zx$  平面上で  $C$  を極として,  $r = CB$ ,  $CB$  と  $x$  軸の正の向きとなす角を  $\theta$  とすると, 求める体積  $V$  は

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos \theta d\theta$$

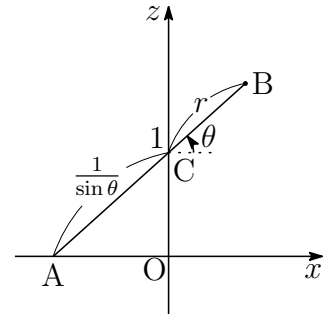
このとき,  $r = 2 - \frac{1}{\sin \theta}$  であるから

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{\sin \theta}\right)^3 \cos \theta d\theta$$

ここで,  $u = \sin \theta$  とおくと  $\frac{du}{d\theta} = \cos \theta$

$\theta$	$\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
$u$	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	1

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2 - \frac{1}{u}\right)^3 du \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(8 - \frac{12}{u} + \frac{6}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right) du \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[ 8u - 12 \log u - \frac{6}{u} + \frac{1}{2u^2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \pi \left( \frac{17}{3} - 8 \log 2 \right) \end{aligned}$$



■

## 1.3 2017年(150分)

**1** 実数  $a, b$  に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a \cos 2\theta + b \cos \theta$$

とし、 $0 < \theta < \pi$  で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos \theta - 1}$$

を考える。

- (1)  $f(\theta)$  と  $g(\theta)$  を  $x = \cos \theta$  の整式で表せ。
- (2)  $g(\theta)$  が  $0 < \theta < \pi$  の範囲で最小値 0 をとるための  $a, b$  についての条件を求めよ。また、条件をみたす点  $(a, b)$  が描く図形を座標平面上に図示せよ。

**2** 座標平面上で  $x$  座標と  $y$  座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点  $P$  を考える。

- (a) 最初に、点  $P$  は原点  $O$  にある。
- (b) ある時刻で点  $P$  が格子点  $(m, n)$  にあるとき、その 1 秒後の点  $P$  の位置は、隣接する格子点  $(m+1, n)$ ,  $(m, n+1)$ ,  $(m-1, n)$ ,  $(m, n-1)$  のいずれかであり、また、これらの点に移動する確率は、それぞれ  $\frac{1}{4}$  である。

- (1) 点  $P$  が、最初から 6 秒後に直線  $y = x$  上にある確率を求めよ。
- (2) 点  $P$  が、最初から 6 秒後に原点  $O$  にある確率を求めよ。

**3** 複素数平面上の原点以外の点  $z$  に対して、 $w = \frac{1}{z}$  とする。

- (1)  $\alpha$  を 0 でない複素数とし、点  $\alpha$  と原点  $O$  を結ぶ線分の垂直二等分線を  $L$  とする。点  $z$  が直線  $L$  上を動くとき、点  $w$  の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。
- (2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを  $\beta$  とする。点  $\beta$  と点  $\beta^2$  を結ぶ線分上を点  $z$  が動くときの点  $w$  の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。

4  $p = 2 + \sqrt{5}$  とおき, 自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める. 以下の問いに答えよ. ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい.

- (1)  $a_1, a_2$  の値を求めよ.
- (2)  $n \geq 2$  とする. 積  $a_1 a_n$  を,  $a_{n+1}$  と  $a_{n-1}$  を用いて表せ.
- (3)  $a_n$  は自然数であることを示せ.
- (4)  $a_{n+1}$  と  $a_n$  の最大公約数を求めよ.

5  $k$  を実数とし, 座標平面上で次の2つの放物線  $C, D$  の共通接線について考える.

$$C: y = x^2 + k$$

$$D: x = y^2 + k$$

- (1) 直線  $y = ax + b$  が共通接線であるとき,  $a$  を用いて  $k$  と  $b$  を表せ. ただし  $a \neq -1$  とする.
- (2) 傾きが2の共通接線が存在するように  $k$  の値を定める. このとき, 共通接線が3本存在することを示し, それらの傾きと  $y$  切片を求めよ.

6 点  $O$  を原点とする座標空間内で, 一辺の長さが1の正三角形  $OPQ$  を動かす. また, 点  $A(1, 0, 0)$  に対して,  $\angle AOP$  を  $\theta$  とおく. ただし  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする.

- (1) 点  $Q$  が  $(0, 0, 1)$  にあるとき, 点  $P$  の  $x$  座標がとりうる値の範囲と,  $\theta$  がとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) 点  $Q$  が平面  $x = 0$  上を動くとき, 辺  $OP$  が通過しうる範囲を  $K$  とする.  $K$  の体積を求めよ.

解答例

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad f(\theta) &= \cos 3\theta + a \cos 2\theta + b \cos \theta \\
 &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + a(2 \cos^2 \theta - 1) + b \cos \theta \\
 &= 4x^3 - 3x + a(2x^2 - 1) + bx \\
 &= 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a
 \end{aligned}$$

$f(0) = 4 + 2a + (b-3) - a$  であるから

$$\begin{aligned}
 f(\theta) - f(0) &= 4(x^3 - 1) + 2a(x^2 - 1) + (b-3)(x-1) \\
 \frac{f(\theta) - f(0)}{x-1} &= 4(x^2 + x + 1) + 2a(x+1) + b-3
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos \theta - 1} = 4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1$$

(2)  $x = \cos \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) より  $-1 < x < 1$

$h(x) = 4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1$  ( $-1 < x < 1$ ) とおくと

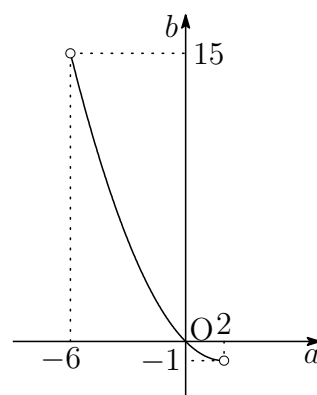
$$h(x) = 4 \left( x + \frac{a+2}{4} \right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + b$$

$h(x)$  は  $-1 < x < 1$  で最小値 0 をとるから

$$-1 < -\frac{a+2}{4} < 1, \quad -\frac{a^2}{4} + a + b = 0$$

$$\text{よって } b = \frac{1}{4}(a-2)^2 - 1 \quad (-6 < a < 2)$$

条件を満たす点  $(a, b)$  が描く図形は、右の図のとおり。



■

- 2 (1)  $x$  軸方向に  $1, -1$ ,  $y$  軸方向に  $1, -1$  だけ平行移動する回数をそれぞれ  $i, j, k, l$  とすると ( $0 \leq i, j, k, l \leq 6$ ), その確率は

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=6 \\ 0 \leq i, j, k, l \leq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!} \left(\frac{1}{4}\right)^6$$

このとき  $i+j+k+l=6$ ,  $i-j=k-l$  すなわち  $i+l=j+k=3$  よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i+l=j+k=3 \\ 0 \leq i, j, k, l \leq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 &= \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+l=3 \\ 0 \leq i, l \leq 3}} \frac{3!}{i!l!} \sum_{\substack{j+k=3 \\ 0 \leq j, k \leq 3}} \frac{3!}{j!k!} \\ &= \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

- (2)  $i+j+k+l=6$ ,  $i=j$ ,  $k=l$  すなわち  $i+k=3$  よって, 求める確率は

$$\sum_{\substack{i+k=3 \\ 0 \leq i, k \leq 3}} \frac{6!}{(i!k!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{4^6} \left\{ \frac{1}{(3!)^2} + \frac{1}{(1!2!)^2} + \frac{1}{(2!1!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} \right\} = \frac{25}{256}$$

別解  $(1+x)^3 = {}_3C_0 + {}_3C_1x + {}_3C_2x^2 + {}_3C_3x^3$ ,  
 $(1+x)^3 = {}_3C_3 + {}_3C_2x + {}_3C_1x^2 + {}_3C_0x^3$

上の2式の積と  $(1+x)^6$  の  $x^3$  の係数  ${}_6C_3$  との比較により

$$({}_3C_0)^2 + ({}_3C_1)^2 + ({}_3C_2)^2 + ({}_3C_3)^3 = {}_6C_3$$

一般には,  $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$  の  $x^n$  の係数を比較することにより

$$\sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 = {}_{2n}C_n$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i+k=3 \\ 0 \leq i, k \leq 3}} \frac{6!}{(i!k!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^6 &= \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+k=3 \\ 0 \leq i, k \leq 3}} \left(\frac{3!}{i!k!}\right)^2 \\ &= \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{k=0}^3 ({}_3C_k)^2 \\ &= {}_6C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^6 {}_6C_3 = ({}_6C_3)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{25}{256} \end{aligned}$$

■

- 3** (1) 点  $\alpha \neq 0$  と  $O$  を結ぶ線分の垂直二等分線  $L$  の方程式は  $|z| = |z - \alpha|$   
 $w = \frac{1}{z}$  より,  $z = \frac{1}{w}$  ( $w \neq 0$ ) であるから

$$\left| \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{1}{w} - \alpha \right| \quad \text{ゆえに} \quad \left| \frac{w}{\alpha} \right| \left| \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{w}{\alpha} \right| \left| \frac{1}{w} - \alpha \right|$$

したがって  $\left| w - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|}$  よって,  $w$  は中心  $\frac{1}{\alpha}$ , 半径  $\frac{1}{|\alpha|}$  の円

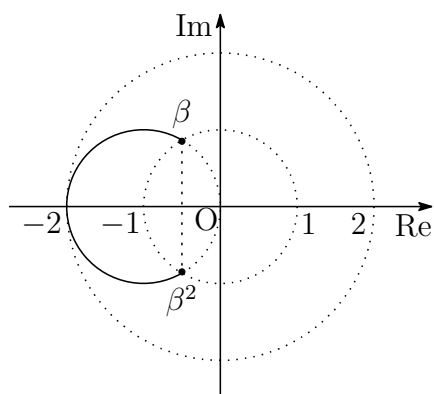
- (2)  $\beta = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ,  $\beta^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$  であるから, 2点  $\beta$ ,  $\beta^2$  を結ぶ線は, 点  $-1$  と原点  $O$  を結ぶ線分の垂直二等分であるから, (1) の結果から

$$|w + 1| = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$z$  は, 点  $\beta$  と点  $\beta^2$  を結ぶ線分上を点  $z$  が動くから

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad 1 \leq |w| \leq 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

したがって, 点  $w$  の軌跡は, ①, ② の共通部分で下の図の実線部分.

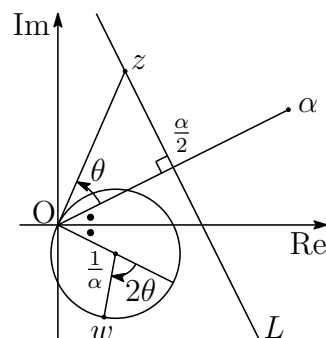


解説  $L$  上の点  $z$  は

$$z = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha i}{2} \tan \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$w = \frac{1}{z} \text{ により}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + i \tan \theta} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\alpha} (2 \cos^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta) \\ &= \frac{1}{\alpha} (1 + \cos 2\theta - i \sin 2\theta) \end{aligned}$$



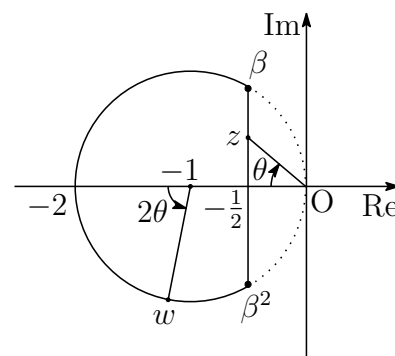
点  $w$  は点  $\frac{1}{\alpha}$  を中心とし、半径  $\frac{1}{|\alpha|}$  の円周上にある。  $-\pi < 2\theta < \pi$  であるから、点  $w$  の表す軌跡はこの円から原点  $O$  を除いたものになる。

また、点  $\beta$  と  $\beta^2$  を結ぶ線分上の点  $z$  は

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \tan \theta \quad \left(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

$$w = \frac{1}{z} \text{ により}$$

$$\begin{aligned} w &= -\frac{2}{1 - i \tan \theta} = -\frac{2 \cos \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \\ &= -2(\cos^2 \theta + i \sin \theta \cos \theta) \\ &= -1 - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \end{aligned}$$



4 (1)  $a_1 = p - \frac{1}{p} = 2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 2) = 4$

$$a_2 = p^2 + \frac{1}{p^2} = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$$

(2)  $p^{n+1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1} = \left(p - \frac{1}{p}\right) \left\{ p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n \right\} + p^{n-1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}$  より

$$a_{n+1} = a_1 a_n + a_{n-1} \quad \text{よって} \quad a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$$

補足  $\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$

(3) (1), (2)の結果から  $a_1 = 4, a_2 = 18, a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1} \cdots (*)$   
よって, すべての自然数  $n$  について,  $a_n$  は自然数である.

(4) 2つの自然数  $k, l$  の最大公約数を  $\gcd(k, l)$  とする.

(\*) にユークリッドの互除法を順次適用することにより

$$\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(a_n, a_{n-1}) = \cdots = \gcd(a_2, a_1) = 2$$

### ユークリッドの互除法

$n$  が  $m$  で割り切れること ( $m$  が  $n$  の約数) を  $m | n$  と表記し, 整数  $x, y$  の最大公約数を  $(x, y)$  と表記すると, 次は自明である.

$$(x, y) | x, (x, y) | y$$

#### ユークリッドの互除法

2 整数  $a, b$  について ( $a > b > 0$ ),  $a$  を  $b$  で割ったときの商を  $q$ , 余りを  $c$  とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき } (a, b) = (b, c)$$

$$c = 0 \text{ のとき } (a, b) = b$$

証明  $c \neq 0$  のとき,  $a = bq + c$  より  $(b, c) | a$  また,  $(b, c) | b$  であるから,  $(b, c)$  は  $a$  と  $b$  の公約数, したがって

$$(b, c) | (a, b) \cdots \textcircled{1}$$

同様に,  $c = a - bq$  より  $(a, b) | c$  また,  $(a, b) | b$  であるから,  $(a, b)$  は  $b$  と  $c$  の公約数, したがって

$$(a, b) | (b, c) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } (a, b) = (b, c)$$

$c = 0$  のとき, 自明.

証終





5 (1)  $y = x^2 + k$  と  $y = ax + b$  から  $y$  を消去すると

$$x^2 + k = ax + b \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - ax + k - b = 0$$

このとき、方程式の係数について

$$(-a)^2 - 4(k - b) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 4k = a^2 + 4b \quad \dots \textcircled{1}$$

$x = y^2 + k$  と  $y = ax + b$ , すなわち,  $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$  について, ① より

$$4k = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 4\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a^2} - \frac{4b}{a} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から  $k$  を消去すると

$$a^2 - \frac{1}{a^2} + 4b\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 0$$

$$(a+1)(a-1)(a^2+1) + 4ab(a+1) = 0$$

$a \neq -1$  より,  $a+1 \neq 0$  であるから

$$(a-1)(a^2+1) + 4ab = 0 \quad \text{よって} \quad b = \frac{(1-a)(1+a^2)}{4a} \quad \dots \textcircled{3}$$

これを ① に代入して

$$4k = a^2 + 4 \cdot \frac{(1-a)(1+a^2)}{4a} \quad \text{よって} \quad k = \frac{a^2 - a + 1}{4a} \quad \dots \textcircled{4}$$

(2)  $a = 2$  を ④ に代入すると  $k = \frac{3}{8}$  これを ①, ② に代入すると

$$\frac{3}{2} = a^2 + 4b, \quad \frac{3}{2} = \frac{1}{a^2} - \frac{4b}{a}$$

上の2式から  $b$  を消去して整理すると

$$(a+1)(a-2)(2a-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = -1, 2, \frac{1}{2}$$

$k = \frac{3}{8}$  を ① に代入すると

$$\frac{3}{2} = a^2 + 4b \quad \text{ゆえに} \quad b = -\frac{a^2}{4} + \frac{3}{8}$$

よって  $(a, b) = \left(-1, \frac{1}{8}\right), \left(2, -\frac{5}{8}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{16}\right)$

別解 ③, ④に  $a = 2$  を代入すると  $b = -\frac{5}{8}$ ,  $k = \frac{3}{8}$

このとき,  $C, D$  の共通接線の1本は  $y = 2x - \frac{5}{8}$

$C$  と  $D$  は直線  $y = x$  に関して対称であるから, 上の共通接線と直線  $y = x$  に関して対称な直線

$$x = 2y - \frac{5}{8} \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}$$

も  $C$  と  $D$  の共通接線である.

また, 直線  $y = x$  に関して対称な直線  $x + y = d$  が  $C: y = x^2 + \frac{3}{8}$  と接するとき, 2式から  $y$  を消去して整理すると

$$x^2 + x + \frac{3}{8} - d = 0$$

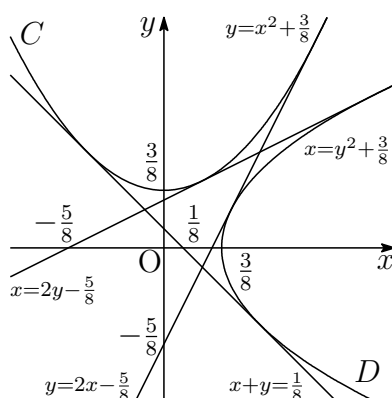
このとき, 係数について

$$1^2 - 4 \cdot 1 \left( \frac{3}{8} - d \right) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad d = \frac{1}{8}$$

直線  $y = x$  に関する  $C$  と  $D$  の対称性により, 直線

$$x + y = \frac{1}{8} \quad \text{すなわち} \quad y = -x + \frac{1}{8}$$

は,  $C$  と  $D$  の共通接線である.



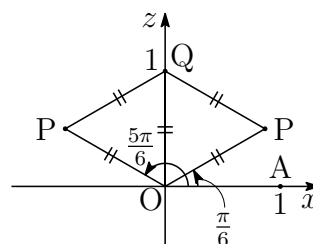
よって, 求める3本の共通接線は

$$y = 2x - \frac{5}{8}, \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}, \quad y = -x + \frac{1}{8}$$

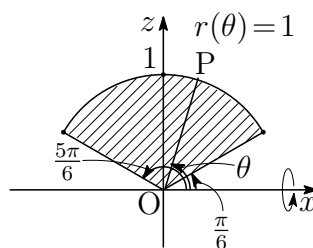
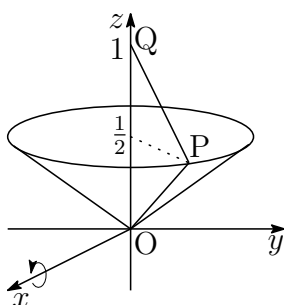


- 6 (1)  $\theta$  が最大または最小となるのは,  $zx$  平面上において, P が右の図で示した位置にあるときである.  $x = \cos \theta$  であるから

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$



- (2) 点 Q が平面  $x = 0$  上の点  $(0, 0, 1)$  にあるとき, 辺 OP は左図の円錐面を描く. 点 Q を平面  $x = 0$  を動かす, すなわち, OQ を平面  $x = 0$  上で O を中心に回転させると, この円錐面が  $zx$  平面を通過してできる  $zx$  平面に描く輪郭は右図の斜線部分になる.



極方程式による曲線の回転体の体積

極方程式  $r = r(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) で表される曲線を  $x$  軸の回りに回転させた立体の体積  $V$  は

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^3 \sin \theta \, d\theta$$

したがって, (上の公式<sup>2</sup>に  $r(\theta) = 1$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ,  $\beta = \frac{5\pi}{6}$  を代入すると)

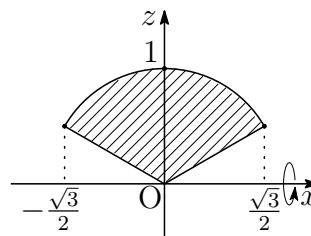
$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 1^3 \sin \theta \, d\theta = \frac{2\pi}{3} \left[ -\cos \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$

別解 2012年九大理系 p.7 の例5で示した公式<sup>3</sup>

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi r^2 a$$

に  $r = 1$ ,  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$  を代入すると

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$



<sup>2</sup>p.266 の極方程式の計量を参照.

<sup>3</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2012.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf)

## 2009 京都大学(理系) 前期

$xy$  平面上で原点を極,  $x$  軸の正の部分を出線とする極座標に関して, 極方程式  $r = 2 + \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) により表される曲線を  $C$  とする.  $C$  と  $x$  軸とで囲まれた図形を  $x$  軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ.

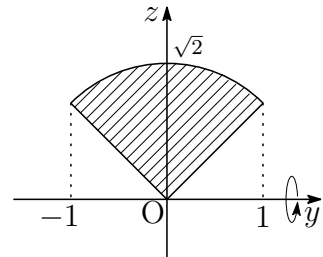
$$\text{解答 } V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi (2 + \cos \theta)^3 \sin \theta \, d\theta = \frac{2\pi}{3} \left[ -\frac{1}{4}(2 + \cos \theta)^4 \right]_0^\pi = \frac{40}{3}\pi$$

## 2013 大阪大学(理系) 前期

$xyz$  空間内の 3 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$  を頂点とする三角形  $OAB$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを  $V$  とする. 円すい  $V$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

解答 右の図の斜線部分を  $y$  軸のまわりに 1 回転させた立体の体積であるから

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{8}{3}\pi$$



## 1.4 2018年(150分)

## 1 関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり,  $x \rightarrow +0$ ,  $x \rightarrow \pi - 0$  のときの極限を調べよ.

2 数列  $a_1, a_2, \dots$  を

$$a_n = \frac{2^{n+1} C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める.

(1)  $n \geq 2$  とする.  $\frac{a_n}{a_{n-1}}$  を既約分数  $\frac{q_n}{p_n}$  として表したときの分母  $p_n \geq 1$  と分子  $q_n$  を求めよ.

(2)  $a_n$  が整数となる  $n \geq 1$  をすべて求めよ.

3 放物線  $y = x^2$  のうち  $-1 \leq x \leq 1$  をみたす部分を  $C$  とする. 座標平面上の原点  $O$  と点  $A(1, 0)$  を考える.  $k > 0$  を実数とする. 点  $P$  が  $C$  上を動き, 点  $Q$  が線分  $OA$  上を動くとき,

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k} \overrightarrow{OP} + k \overrightarrow{OQ}$$

をみたす点  $R$  が動く領域の面積を  $S(k)$  とする.

$S(k)$  および  $\lim_{k \rightarrow +0} S(k)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$  を求めよ.

4  $a > 0$  とし,

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく. 次の2条件をみたす点  $(a, b)$  の動きうる範囲を求め, 座標平面上に図示せよ.

条件1: 方程式  $f(x) = b$  は相異なる3実数解をもつ.

条件2: さらに, 方程式  $f(x) = b$  の解を  $\alpha < \beta < \gamma$  とすると  $\beta > 1$  である.

- 5 複素数平面上の原点を中心とする半径1の円を  $C$  とする. 点  $P(z)$  は  $C$  上にあり, 点  $A(1)$  とは異なるとする. 点  $P$  における円  $C$  の接線に関して, 点  $A$  と対称な点を  $Q(u)$  とする.  $w = \frac{1}{1-u}$  とおき,  $w$  と共役な複素数を  $\bar{w}$  で表す.
- (1)  $u$  と  $\frac{\bar{w}}{w}$  を  $z$  についての整式として表し, 絶対値の商  $\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|}$  を求めよ.
  - (2)  $C$  のうち実部が  $\frac{1}{2}$  以下の複素数で表される部分を  $C'$  とする. 点  $P(z)$  が  $C'$  上を動くときの点  $R(w)$  の軌跡を求めよ.
- 6 座標空間内の4点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(1, 1, 1)$  を考える.  $\frac{1}{2} < r < 1$  とする. 点  $P$  が線分  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$  上を動くときに点  $P$  を中心とする半径  $r$  の球 (内部を含む) が通過する部分を, それぞれ  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  とする.
- (1) 平面  $y = t$  が  $V_1$ ,  $V_3$  双方と共有点をもつような  $t$  の範囲を与えよ. さらに, この範囲の  $t$  に対し, 平面  $y = t$  と  $V_1$  の共通部分および, 平面  $y = t$  と  $V_3$  の共通部分を同一平面上に図示せよ.
  - (2)  $V_1$  と  $V_3$  の共通部分が  $V_2$  に含まれるための  $r$  についての条件を求めよ.
  - (3)  $r$  は (2) の条件をみたすとする.  $V_1$  の体積を  $S$  とし,  $V_1$  と  $V_2$  の共通部分の体積を  $T$  とする.  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  を合わせて得られる立体  $V$  の体積を  $S$  と  $T$  を用いて表せ.
  - (4) ひきつづき  $r$  は (2) の条件をみたすとする.  $S$  と  $T$  を求め,  $V$  の体積を決定せよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot \sin x - x \cos x}{\sin^2 x} - \sin x = \frac{\sin x(1 - \sin^2 x) - x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x \cos^2 x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\sin x \cos x - x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\sin 2x - 2x)}{2 \sin^2 x} \end{aligned}$$

ここで,  $g(x) = \sin 2x - 2x$  ( $0 \leq x < \pi$ ) とおくと

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = 2(\cos 2x - 1) < 0 \quad (0 < x < \pi)$$

したがって  $0 < x < \pi$  のとき  $g(x) < 0$

$f'(x) = \frac{g(x) \cos x}{\sin^2 x}$  により,  $f(x)$  の増減表は次のようになる.

$x$	$(0)$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$	$\cdots$	$(\pi)$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

$$\text{また} \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{x}{\sin x} + \cos x \right) = 1 + 1 = \mathbf{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi-0} \left( \frac{x}{\sin x} + \cos x \right) = \infty$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad a_n = \frac{{}^{2n+1}C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{より} \quad a_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!} \cdot \frac{\{(n-1)!\}n!}{(2n-1)!} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{\{(n-1)!\}^2}{(n!)^2} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= 2n(2n+1) \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} \end{aligned}$$

連続する2つの整数の積  $n(n+1)$  は2で割り切れるから

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n+1}{\frac{1}{2}n(n+1)} \quad \dots (*)$$

$$\text{このとき} \quad 2n+1 = 2 \cdot n + 1, \quad 2n+1 = 2(n+1) - 1$$

$2n+1$  と  $n$  は互いに素, また,  $2n+1$  と  $n+1$  も互いに素である.

$$\text{よって} \quad p_n = \frac{1}{2}n(n+1), \quad q_n = 2n+1$$

$$(2) \quad a_1 = \frac{{}^3C_1}{1!} = 3, \quad a_2 = \frac{{}^5C_2}{2!} = 5, \quad (1) \text{の結果から, } q_n \text{ は奇数, } p_3 = 6.$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \prod_{k=2}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^n \frac{q_k}{p_k} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^n \frac{q_k}{p_k}$$

$$\text{したがって} \quad a_n = 3 \prod_{k=2}^n \frac{q_k}{p_k} = \frac{3q_2q_3 \cdots q_n}{p_2p_3 \cdots p_n}$$

$n \geq 3$  のとき,  $p_2p_3 \cdots p_n$  は偶数であり, 一方,  $3q_2q_3 \cdots q_n$  は奇数であるから,  $a_n$  は整数ではない. よって,  $a_n$  が整数となる  $n$  は

$$n = 1, 2$$

$$\text{別解} \quad \frac{q_n}{p_n} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \quad \text{より}$$

$$n \leq 3 \text{ のとき} \quad \frac{q_n}{p_n} > 1, \quad 4 \leq n \text{ のとき} \quad \frac{q_n}{p_n} < 1.$$

$$\text{したがって} \quad a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > a_n$$

$$a_3 = \frac{35}{6}, \quad a_4 = \frac{21}{4}, \quad a_5 = \frac{77}{20}, \quad a_6 = \frac{143}{60}, \quad a_7 = \frac{143}{112}, \quad a_8 = \frac{2431}{4032}$$

$n \geq 8$  のとき,  $a_n < 1$  となる. よって,  $a_n$  が整数となる  $n$  は  $n = 1, 2$





3 C 上の点  $P(p, p^2)$  に対して  $(-1 \leq p \leq 1)$ ,  $\overrightarrow{OP'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OP}$  とおくと

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{k}(p, p^2) = \left(\frac{p}{k}, k\left(\frac{p}{k}\right)^2\right)$$

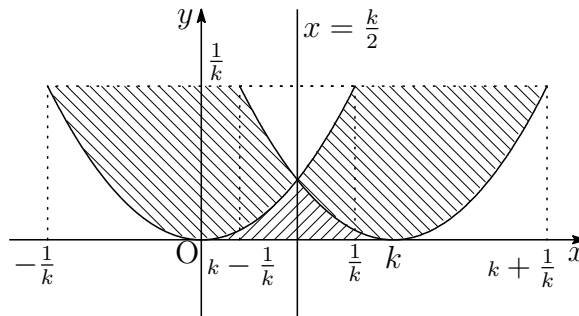
$-\frac{1}{k} \leq \frac{p}{k} \leq \frac{1}{k}$  から,  $P'$  は放物線  $y = kx^2$   $\left(-\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}\right)$  上にある. また, 線分  $OA$  上の点  $Q(q, 0)$  に対して  $(0 \leq q \leq 1)$

$$k\overrightarrow{OQ} = k(q, 0) = (kq, 0)$$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP'} + k\overrightarrow{OQ}$  より,  $R$  は点  $P'$  を  $x$  軸方向に  $kq$  だけ平行移動した点である. このとき,  $0 \leq kq \leq k$  であるから, 次のように場合分けを行う.

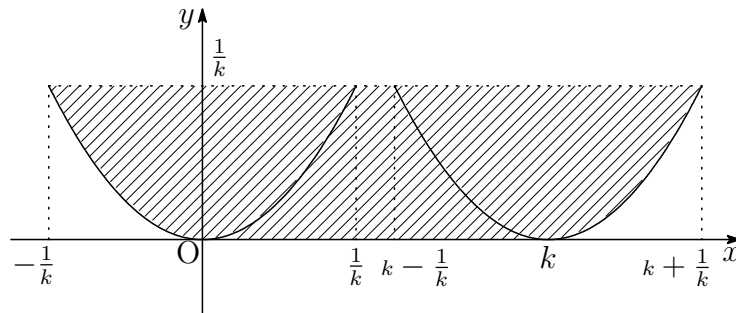
(i)  $k - \frac{1}{k} < \frac{1}{k}$ , すなわち,  $k < \sqrt{2}$  のとき

$$S(k) = 2 \times \frac{1}{k} \cdot k - 2 \int_0^{\frac{k}{2}} kx^2 dx = 2 - 2 \left[ \frac{k}{3}x^3 \right]_0^{\frac{k}{2}} = 2 - \frac{k^4}{12}$$



(ii)  $\frac{1}{k} \leq k - \frac{1}{k}$ , すなわち,  $\sqrt{2} \leq k$  のとき

$$S(k) = \frac{1}{k} \left\{ k + \frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k}\right) \right\} - 2 \int_0^{\frac{1}{k}} kx^2 dx = 1 + \frac{4}{3k^2}$$



(i), (ii) の結果から  $\lim_{k \rightarrow +0} S(k) = 2$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = 1$  ■

4  $f(x) = x^3 - 3a^2x$  より

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$f(x)$  の増減表は

$x$	...	$-a$	...	$a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$2a^3$	↘	$-2a^3$	↗

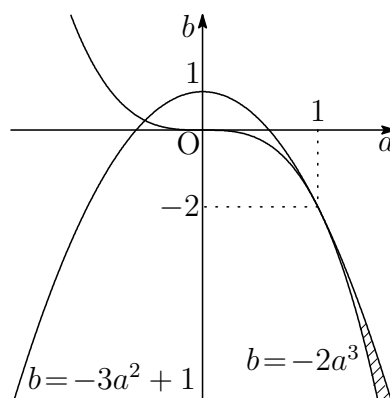
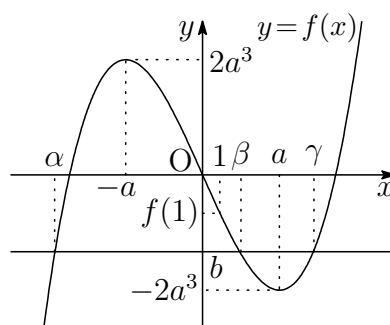
$f(x) = b$  の解  $\alpha < \beta < \gamma$  について,  $\beta > 1$  であるから

$$1 < a, \quad -2a^3 < b < f(1)$$

したがって

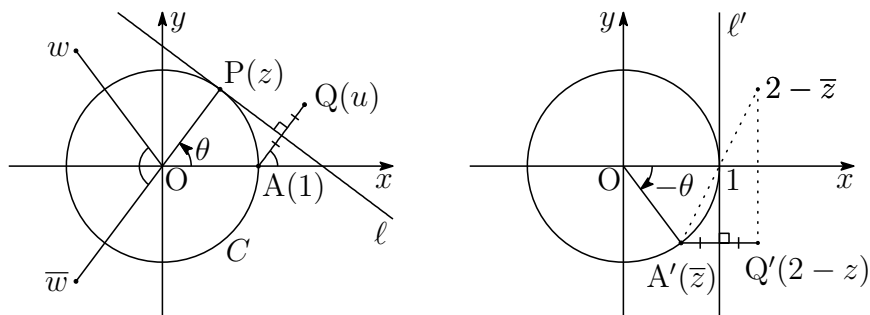
$$-2a^3 < b < -3a^2 + 1 \quad (a > 1)$$

点  $(a, b)$  の満たす領域は, 右の図の斜線部分で, 境界線を含まない.



■

- 5 (1)  $\theta = \arg z$  とし, 2点  $A, Q$  をそれぞれ原点  $O$  を中心に  $-\theta$  だけ回転させた点をそれぞれ  $A', Q'$  とすると,  $A'(\bar{z})$  を点  $1$  に関して対称移動した点が  $2 - \bar{z}$  で, この点を  $x$  軸に関して対称移動した点が  $Q'(2 - z)$  である.



$Q(u)$  は  $Q'(2 - z)$  を原点  $O$  を中心に  $\theta$  だけ回転させたものであるから

$$u = z(2 - z) \quad \text{ゆえに} \quad w = \frac{1}{1 - u} = \frac{1}{1 - z(2 - z)} = \frac{1}{(z - 1)^2}$$

さらに  $\bar{w} = \frac{1}{(\bar{z} - 1)^2} = \frac{z^2}{z^2(\bar{z} - 1)^2} = \frac{z^2}{(1 - z)^2} = z^2 w$  よって  $\frac{\bar{w}}{w} = z^2$

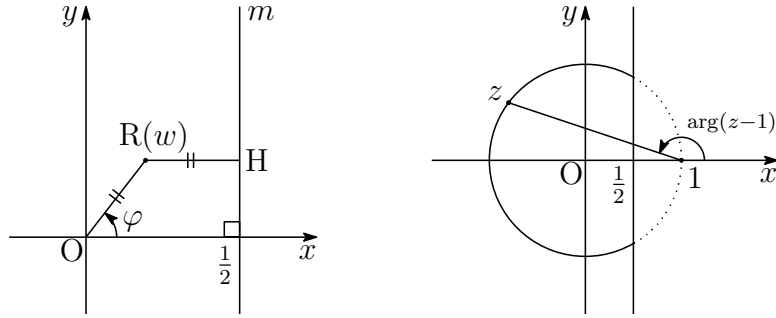
したがって

$$\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|} = \left| 1 + \frac{\bar{w}}{w} - \frac{1}{w} \right| = |1 + z^2 - (z - 1)^2| = 2|z| = 2$$

(2) (1)の結果より  $\arg w = -2\arg(z-1)$ ,  $\left| \frac{w+\bar{w}}{2} - \frac{1}{2} \right| = |w| \dots (*)$

$\frac{2}{3}\pi \leq \arg(z-1) \leq \frac{4}{3}\pi$  であるから  $-\frac{8}{3}\pi \leq -2\arg(z-1) \leq -\frac{4}{3}\pi$

$\varphi = \arg w$  とおくと  $-\frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq \frac{2}{3}\pi$



複素数平面上に  $R(w)$  をとり, 点  $\frac{1}{2}$  を通り,  $x$  軸に垂直な直線  $m$  に  $R$  から垂線  $RH$  を引く.  $r = |w|$  とすると,  $(*)$  より

$$RH = \left| \frac{w+\bar{w}}{2} - \frac{1}{2} \right| = r$$

OR  $\cos \varphi + RH = \frac{1}{2}$  であるから  $r \cos \varphi + r = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$

よって  $r = \frac{1}{2(1+\cos \varphi)} \left( -\frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq \frac{2}{3}\pi \right) \dots (**)$

$w = x + yi$  とおくと,  $x = r \cos \varphi$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$  であるから,  $\textcircled{1}$  より

$$x + r = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad r^2 = \left( \frac{1}{2} - x \right)^2$$

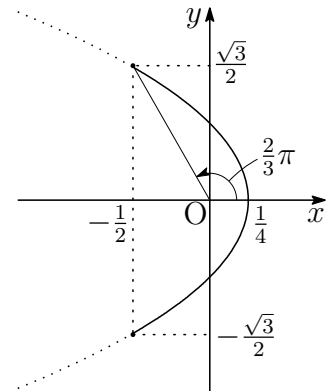
整理すると  $x = \frac{1}{4} - y^2$

$(**)$  より  $\varphi = \pm \frac{2}{3}\pi$  のとき  $r = 1$

$\varphi = -\frac{2}{3}\pi$  のとき  $\left( -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ,  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$  のとき  $\left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

よって, 求める軌跡の方程式は  $x = \frac{1}{4} - y^2 \quad \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$R(w)$  の表す軌跡は, 右上の図のようになる.



補足 (\*\*) および  $\varphi = \arg w$  より,  $w$  は次式で与えられる.

$$w = \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{2(1 + \cos \varphi)} \quad \left( -\frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq \frac{2}{3}\pi \right)$$

別解  $\theta = \arg z$  とすると, 条件から  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$

$$w = \frac{1}{(z-1)^2} \text{ により}$$

$$w = \frac{1}{z^2 - 2z + 1} = \frac{\bar{z}}{z + \bar{z} - 2} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{2 \cos \theta - 2} = \frac{-\cos \theta + i \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}$$

ここで,  $\theta = \pi - \varphi$  とおくと

$$w = \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{2(1 + \cos \varphi)} \quad \left( -\frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq \frac{2}{3}\pi \right)$$

$r = |w|$  とおくと, (\*\*) が得られる (以下の計算は同様). ■

- 6 (1) 点Pが線分OA上を動くとき、点Pから平面 $y = t$ までの距離は  $t$   
 点Pが線分BC上を動くとき、点Pから平面 $y = t$ までの距離は  $1 - t$   
 したがって、平面 $y = t$ が $V_1, V_3$ 双方と共有点をもつような $t$ の範囲は

$$t \leq r \quad \text{かつ} \quad 1 - t \leq r \quad \text{すなわち} \quad 1 - r \leq t \leq r \quad \dots (*)$$

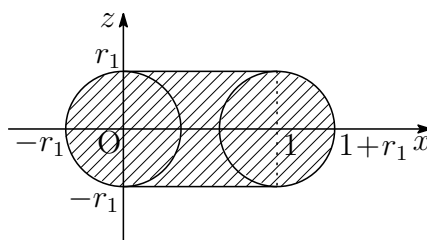
線分OA上の点 $P(c_1, 0, 0)$ を中心とする半径 $r$ の球(内部を含む)は

$$(x - c_1)^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$$

これと平面 $y = t$ の共通部分は

$$(x - c_1)^2 + z^2 \leq r^2 - t^2, \quad y = t$$

上式は、平面 $y = t$ において点 $(c_1, t, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{r^2 - t^2}$ の円の内部である。点Pが線分OA上を動く、すなわち、 $0 \leq c_1 \leq 1$ のとき上式が通過する図形が、平面 $y = t$ と $V_1$ の共通部分である。この図形を平面 $y = t$ 上に描くと右のようになる。境界を含む( $r_1 = \sqrt{r^2 - t^2}$ )。



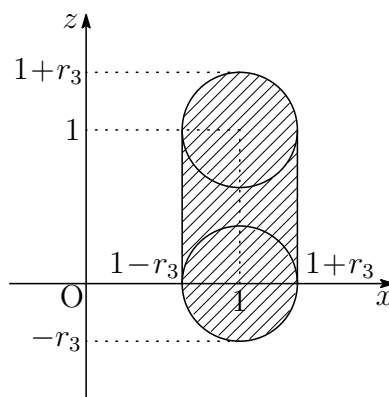
線分BC上の点 $P(1, 1, c_3)$ を中心とする半径 $r$ の球(内部を含む)は

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - c_3)^2 \leq r^2$$

これと平面 $y = t$ の共通部分は

$$(x - 1)^2 + (z - c_3)^2 \leq r^2 - (t - 1)^2, \quad y = t$$

上式は、平面 $y = t$ において点 $(1, t, c_3)$ を中心とする半径 $\sqrt{r^2 - (t - 1)^2}$ の円の内部である。点Pが線分OA上を動く、すなわち、 $0 \leq c_3 \leq 1$ のとき上式が通過する図形が、平面 $y = t$ と $V_3$ の共通部分である。この図形を平面 $y = t$ 上に描くと右の図のようになる。境界を含む( $r_3 = \sqrt{r^2 - (t - 1)^2}$ )。



$r_1 = \sqrt{r^2 - t^2}$ ,  $r_3 = \sqrt{r^2 - (t-1)^2}$  であるから, これらの大小により  $t$  の値の範囲は次のようになる.

(i)  $r_1 \geq r_3$  のとき

$$\sqrt{r^2 - t^2} \geq \sqrt{r^2 - (t-1)^2} \quad \text{これを解いて} \quad t \leq \frac{1}{2}$$

このとき, (\*) に注意して  $1 - r \leq t \leq \frac{1}{2}$

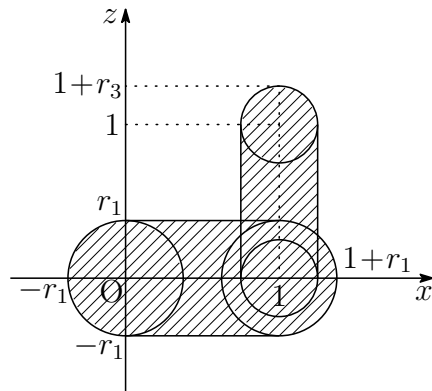
(ii)  $r_1 < r_3$  のとき

$$\sqrt{r^2 - t^2} < \sqrt{r^2 - (t-1)^2} \quad \text{これを解いて} \quad t > \frac{1}{2}$$

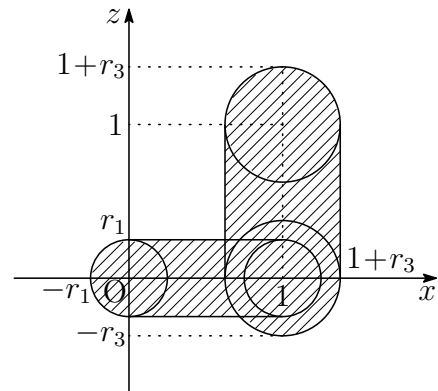
このとき, (\*) に注意して  $\frac{1}{2} < t \leq r$

(i),(ii) の場合について, 平面  $y = t$  と  $V_1$  の共通部分および, 平面  $y = t$  と  $V_3$  の共通部分を同一平面上に図示すると次のようになる.

$r_1 \geq r_3$  ( $1 - r \leq t \leq \frac{1}{2}$ ) のとき

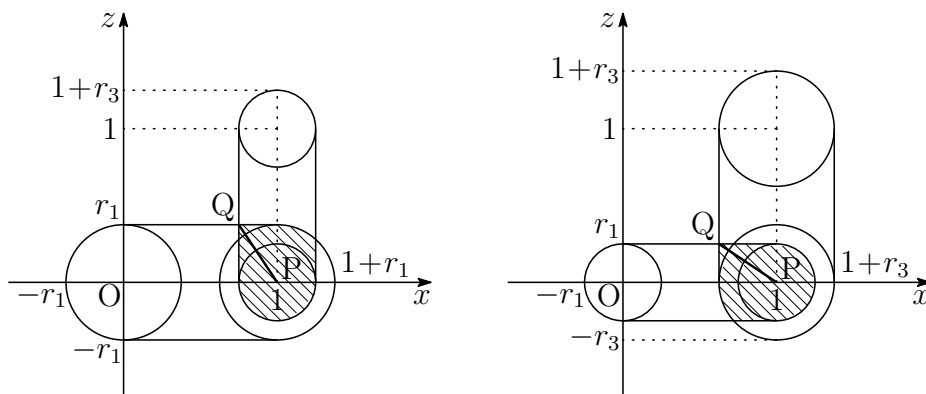


$r_1 < r_3$  ( $\frac{1}{2} < t \leq r$ ) のとき



(2) (1)の結果から,  $V_1$ と $V_3$ の共通部分を平面 $y = t$ 上に図示すると

$r_1 \geq r_3$  ( $1 - r \leq t \leq \frac{1}{2}$ ) のとき       $r_1 < r_3$  ( $\frac{1}{2} < t \leq r$ ) のとき



また,  $P(1, t, 0)$ をとり,  $P$ から領域内の点までの距離が最大となる点を $Q$ とすると

$$\begin{aligned} PQ^2 &= r_1^2 + r_3^2 \\ &= (r^2 - t^2) + \{r^2 - (t - 1)^2\} \\ &= 2r^2 - 2t^2 + 2t - 1 \end{aligned}$$

$V_1$ と $V_3$ の共通部分が $V_2$ に含まれるとき  $PQ \leq r \dots \textcircled{1}$

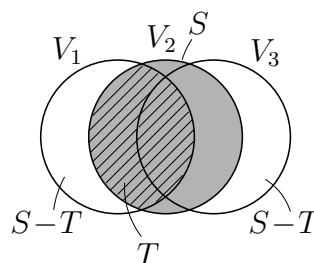
$$\begin{aligned} \text{ゆえに } r^2 - PQ^2 &= 2t^2 - 2t + 1 - r^2 \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - r^2 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < r < 1$ であるから,  $t = \frac{1}{2}$ は(\*)の範囲に含まれる.

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より } \frac{1}{2} - r^2 \geq 0 \text{ これを解いて } r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

与えられた $r$ の値に注意して  $\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3)  $V_1$ の体積 $S$ から $V_1$ と $V_2$ の共通部分の体積を引いた体積, $V_3$ の体積 $S$ から $V_3$ と $V_2$ の共通部分の体積を引いた体積はともに $S - T$ ,  $V_2$ の体積が $S$ であるから,  $V_1, V_2, V_3$ を合わせて得られる立体の体積は



$$2(S - T) + S = 3S - 2T$$



(4)  $S$  は半径  $r$  の半球が 2 つと底面の半径  $r$ 、高さ 1 の円柱の体積の和より

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \cdot 1 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2$$

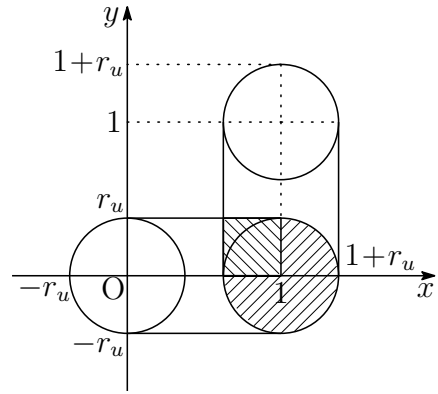
球面  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = r^2$  の平面  $z = u$  による断面は  $(-r \leq u \leq r)$ , 円

$$(x-1)^2 + y^2 = r^2 - u^2$$

であり, この円の半径を  $r_u$  とすると

$$r_u^2 = r^2 - u^2$$

したがって,  $T$  の平面  $z = u$  による断面は, 右の図の斜線部分である.



右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{3}{4}\pi r_u^2 + r_u^2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right) r_u^2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right) (r^2 - u^2)$$

$$\text{よって } T = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right) \int_{-r}^r (r^2 - u^2) du = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right) \cdot \frac{4}{3} r^3 = \left(\pi + \frac{4}{3}\right) r^3$$

(3) の結果により,  $V$  の体積は

$$\begin{aligned} 3S - 2T &= 3 \left(\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2\right) - 2 \left(\pi + \frac{4}{3}\right) r^3 \\ &= \left(2\pi - \frac{8}{3}\right) r^3 + 3\pi r^2 \end{aligned}$$

■

## 1.5 2019年(150分)

1 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^1 \left( x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left( 1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

2 一辺の長さが1の正方形ABCDを考える. 3点P, Q, Rはそれぞれ辺AB, AD, CD上にあり, 3点A, P, Qおよび3点P, Q, Rはどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする.  $\frac{DR}{AQ}$ の最大値, 最小値を求めよ.

3 座標空間内に5点A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), E(0, 0, -2)を考える. 線分ABの中点Mと線分ADの中点Nを通り, 直線AEに平行な平面を $\alpha$ とする. さらに,  $p$ は $2 < p < 4$ をみたす実数とし, 点P( $p$ , 0, 2)を考える.

- (1) 八面体PABCDEの平面 $y = 0$ による切り口および, 平面 $\alpha$ の平面 $y = 0$ による切り口を同一平面上に図示せよ.
- (2) 八面体PABCDEの平面 $\alpha$ による切り口が八角形となる $p$ の範囲を求めよ.
- (3) 実数 $p$ が(2)で定まる範囲にあるとする. 八面体PABCDEの平面 $\alpha$ による切り口のうち $y \geq 0, z \geq 0$ の部分を点 $(x, y, z)$ が動くとき, 座標平面上で点 $(y, z)$ が動く範囲の面積を求めよ.

4  $n$ を1以上の整数とする.

- (1)  $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ の最大公約数 $d_n$ を求めよ.
- (2)  $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の2乗にならないことを示せ.

5 以下の問いに答えよ.

(1)  $n$  を 1 以上の整数とする.  $x$  についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は, ただ一つの実数解  $a_n$  をもつことを示せ.

(2) (1) で定まる  $a_n$  に対し,  $\cos a_n > \cos 1$  を示せ.

(3) (1) で定まる数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  に対し,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ.

6 複素数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  および実数  $a, b$  が, 次の 3 条件をみたしながら動く.

条件 1:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は相異なる.

条件 2:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は 4 次方程式  $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$  の解である.

条件 3: 複素数  $\alpha\beta + \gamma\delta$  の実部は 0 であり, 虚部は 0 でない.

(1)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  のうち, ちょうど 2 つが実数であり, 残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ.

(2)  $b$  を  $a$  で表せ.

(3) 複素数  $\alpha + \beta$  がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ.

解答例

1 被積分関数を展開すると

$$\begin{aligned} & \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x(1+x^2) - x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= x^2 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

求める定積分を  $I$  とすると

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dx + \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \quad \dots (*) \end{aligned}$$

まず

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x^2 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dx &= \left[ \frac{x^3}{3} + 2\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{8}{3} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

次に,  $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$  について,  $x = \tan \theta$  とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 \theta}{(1+\tan^2 \theta)^2} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta\right) d\theta \\ &= \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$(*), \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } I = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{35}{12} \quad \blacksquare$$

2  $\frac{1}{AQ} = x, DR = y$  とおくと

$$\triangle APQ = \frac{1}{2}AP \cdot AQ = \frac{1}{3} \text{ より}$$

$$\frac{1}{2}AP \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \text{ ゆえに } AP = \frac{2x}{3}$$

$$0 < AQ \leq 1, 0 < AP \leq 1 \text{ より}$$

$$0 < \frac{1}{x} \leq 1 \text{ かつ } 0 < \frac{2x}{3} \leq 1$$

$$\text{すなわち } 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle APR + \triangle AQR = \triangle APQ + \triangle PQR \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot y &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \text{ ゆえに } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \quad \dots \textcircled{2} \\ &= -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

① を定義域とすると  $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{2}{3}$  これは、 $y$  の条件をみtas.

$$\textcircled{2} \text{ より } \frac{DR}{AQ} = \frac{1}{AQ} \cdot DR = xy = x \left( -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \right) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2$$

したがって、次の関数の最大値・最小値を求めればよい.

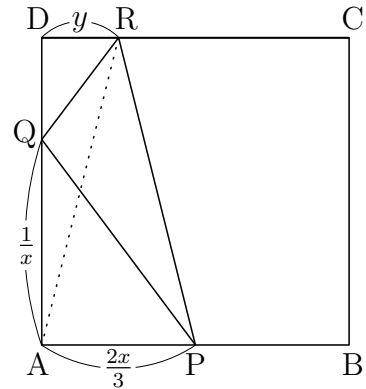
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 \quad \left( 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \right)$$

$f(x)$  を微分すると

$$f'(x) = -2x^2 + \frac{8}{3}x = -2x \left( x - \frac{4}{3} \right)$$

$x$	1	...	$\frac{4}{3}$	...	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{64}{81}$	↘	$\frac{3}{4}$

よって 最大値  $\frac{64}{81}$ , 最小値  $\frac{2}{3}$

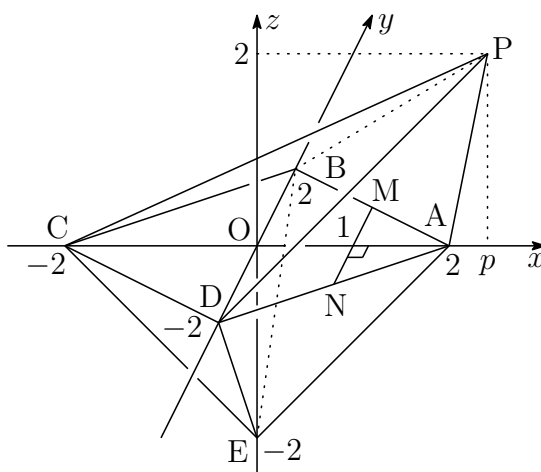


- 3** (1) 八面体 PABCDE の平面  $y = 0$  による切り口は四角形 PCEA である。  
 平面  $\alpha$  の平面  $y = 0$  による切り口は、点  $(1, 0, 0)$  を通り、方向ベクトルが  $(1, 0, 1)$  の直線であるから平面  $y = 0$  におけるその方程式は

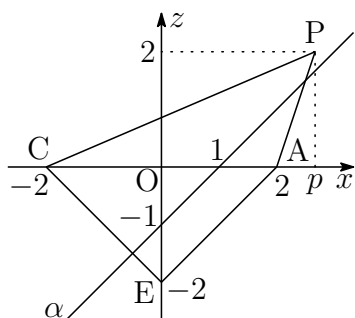
$$z = 1(x - 1)$$

すなわち  $z = x - 1$

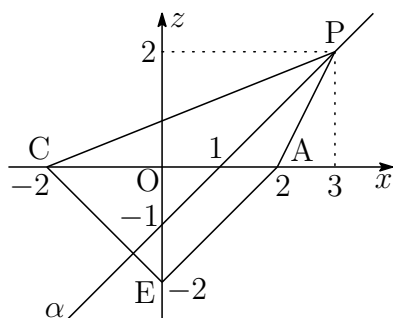
したがって、この直線と P との位置関係により、次の (i)~(iii) の場合に分けられる。



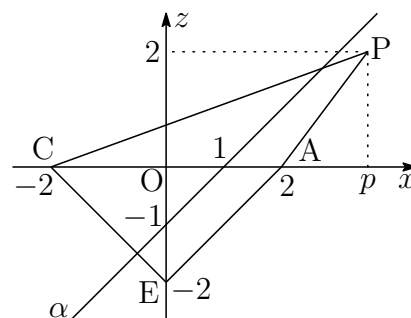
(i)  $2 < p < 3$  のとき



(ii)  $p = 3$  のとき



(iii)  $3 < p < 4$  のとき



- (2) 平面  $\alpha$  は、2点 M, N および点  $(0, 0, -1)$  を通るから、3点 B, C, D は平面  $\alpha$  に関して、点 E と反対側にあり、3辺 BE, CE, DE は平面  $\alpha$  とそれぞれ交点をもつ。また、(1)(iii) のように、点 P が点 C と平面  $\alpha$  に関して反対側にあるとき、点 P は、2点 B, D とともに平面  $\alpha$  と反対側にあり、3辺 BP, CP, DP は平面  $\alpha$  とそれぞれ交点をもつ。以上の6個の交点と2点 M, N を含めた8頂点からなる八角形が、八面体 PABCDE の平面  $\alpha$  による切り口である。よって、求める  $p$  の値の範囲は

$$3 < p < 4$$

補足  $2 < p \leq 3$  のとき、線分 AP と  $\alpha$  との交点を Q とする。3辺 BE, CE, DE と  $\alpha$  との3交点と3点 M, N, Q を頂点とする六角形がその切り口となる。

(3) 平面  $\alpha$  の方程式は  $z = x - 1$

八面体 PABCDE の平面  $\alpha$  による切り口のうち  $y \geq 0, z \geq 0$  の部分となすのは、次の4頂点からなる四角形である。

- ① 点 M(1, 1, 0)
- ② 線分 MN と  $x$  軸との交点 (1, 0, 0)
- ③ 平面  $\alpha : z = x - 1$  と直線 CP :  $z = \frac{2}{p+2}(x+2), y = 0$  の交点

$$\left( \frac{p+6}{p}, 0, \frac{6}{p} \right)$$

- ④ 平面  $\alpha : z = x - 1$  と直線 BP :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  の交点

( $t$  は媒介変数)

$$\left( \frac{p}{p-2}, \frac{2p-6}{p-2}, \frac{2}{p-2} \right)$$

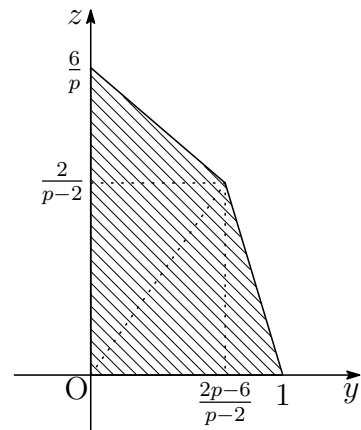
①~④ より、 $(y, z)$  の動く範囲 ( $y \geq 0, z \geq 0$ )

は、 $yz$  平面上の4点 (1, 0), (0, 0),  $\left(0, \frac{6}{p}\right)$ ,

$\left(\frac{2p-6}{p-2}, \frac{2}{p-2}\right)$  を頂点とする四角形であ

る。したがって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{p-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{p} \cdot \frac{2p-6}{p-2} = \frac{7p-18}{p(p-2)}$$



- 4 (1)  $5n^2 + 9$  を  $n^2 + 1$  で割ると  $5n^2 + 9 = 5(n^2 + 1) + 4$   
 ユークリッドの互除法により,  $d_n$  は 4 の約数であり, 法 4 について

$$n \equiv \pm 1 \text{ のとき } n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$n \equiv 0, 2 \text{ のとき } n^2 + 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{よって } d_n = \begin{cases} 2 & (n \text{ が奇数}) \\ 1 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

- (2) まず  $n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2$  であるから,  $n^2 + 1$  は平方数でない.  $\dots$  ①

$$(n^2 + 1)(5n^2 + 9) \text{ は整数の 2 乗である. } \dots (*)$$

(\*) が成立すると仮定し, (1) の結果から, 次の場合分けを行う.

- (i)  $d_n = 1$  のとき,  $n^2 + 1$  および  $5n^2 + 9$  は平方数となる.

これは ① に反するので矛盾.

- (ii)  $d_n = 2$  のとき

$$n^2 + 1 = 2p^2, \quad 5n^2 + 9 = 2q^2 \quad \dots (**)$$

とおき ( $p, q$  は互いに素), 2 式から  $n^2$  を消去して整理すると

$$q^2 = 5p^2 + 2$$

ここで, 法 4 について

$$0^2 \equiv 0, (\pm 1)^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 0 \pmod{4},$$

$$q^2 \equiv 5p^2 + 2 \pmod{4}$$

$p \equiv 0, 2 \pmod{4}$  のとき  $q^2 \equiv 2 \pmod{4}$  となり, 矛盾.

$p \equiv \pm 1 \pmod{4}$  のとき  $q^2 \equiv 3 \pmod{4}$  となり, 矛盾.

- (i), (ii) より, (\*) は成立しない.

別解  $d_n = 2$  のとき, (\*\*) により

$$2(n^2 + 2) = (q + p)(q - p) \quad \dots (A)$$

このとき,  $n$  は奇数であるから

$$2(n^2 + 2) \equiv 2 \pmod{4} \quad \dots \text{①}$$

$q + p = (q - p) + 2p$  より,  $q + p$  と  $q - p$  の偶奇は一致するから

$$(q + p)(q - p) \not\equiv 2 \pmod{4} \quad \dots \text{②}$$

①, ② より, (A) をみたす  $p, q$  は存在しない. ■



5 (1) 方程式  $x^{2n-1} = \cos x \cdots (*)$

(i)  $|x| > 1$  のとき  $|x^{2n-1}| > 1$

したがって、この範囲に方程式 (\*) の解は存在しない。

(ii)  $-1 \leq x < 0$  のとき、 $-\frac{\pi}{2} < -1$  に注意して

$$-1 \leq x^{2n-1} < 0, \quad \cos x > 0$$

したがって、この範囲に方程式 (\*) の解は存在しない。

(iii)  $0 \leq x \leq 1$  のとき、 $f(x) = x^{2n-1} - \cos x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) とおくと

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 - \cos 1 > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

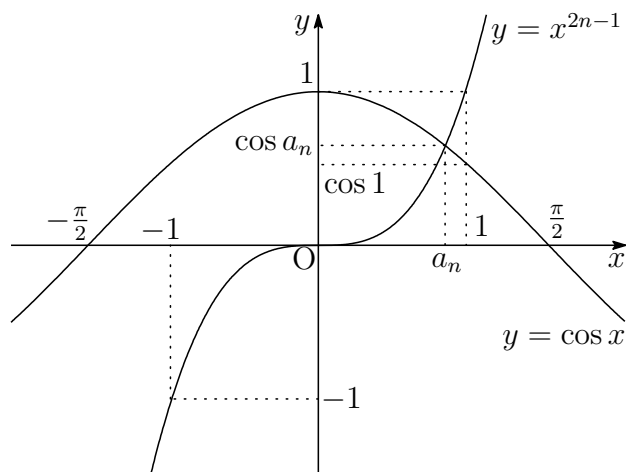
$$0 < x < 1 \text{ において } f'(x) = (2n-1)x^{2n-2} + \sin x > 0$$

$f(x)$  は単調増加であるから

$$f(a_n) = 0 \quad \text{すなわち} \quad a_n^{2n-1} - \cos a_n = 0$$

をみたす  $a_n$  ( $0 < a_n < 1$ ) がただ一つ存在する。

(i)~(iii) より、方程式 (\*) は、ただ1つの解をもつ。



(2) (1) の結果から  $0 < a_n < 1$  よって  $\cos a_n > \cos 1$

(3)  $a_n^{2n-1} = \cos a_n$  および (2) の結果により

$$a_n = (\cos a_n)^{\frac{1}{2n-1}} > (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}$$

また,  $0 < a_n < 1$  であるから

$$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = 1$  であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$a_n^{2n} = a_n \cos a_n$  であるから,  $a_n^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$  より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n \cos a_n} = \sqrt{1 \cdot \cos 1} = \sqrt{\cos 1} \quad \dots \textcircled{3}$$

よって  $\mathbf{a = 1, b = \sqrt{\cos 1}}$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{a_n^n - b}{a_n - a} &= \frac{a_n^{2n} - b^2}{(a_n - a)(a_n^n + b)} = \frac{a_n(\cos a_n - b^2) + b^2(a_n - a)}{(a_n - a)(a_n^n + b)} \\ &= \frac{a_n}{a_n^n + b} \cdot \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} + \frac{b^2}{a_n^n + b} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

② に注意して,  $g(x) = \cos x$  とすると,  $g'(x) = -\sin x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} = g'(1) = -\sin 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

②~⑤ より

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_n^n + b} \cdot \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} + \frac{b^2}{a_n^n + b} \right) \\ &= \frac{1}{b+b}(-\sin 1) + \frac{b^2}{b+b} = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}} \end{aligned}$$

別解  $h(x) = \sqrt{x \cos x}$  とおくと  $h'(x) = \frac{\cos x - x \sin x}{2\sqrt{x \cos x}}$

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n \cdot a_n^{2n-1}} - b}{a_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n \cos a_n} - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(a_n) - h(1)}{a_n - 1} = h'(1) = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}} \end{aligned}$$



- 6 (1)  $w$  が方程式  $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0 \cdots (*)$  の解であるとき

$$w^4 - 2w^3 - 2aw + b = 0$$

$a, b$  は実数であるから

$$\overline{w}^4 - 2\overline{w}^3 - 2a\overline{w} + b = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{w})^4 - 2(\overline{w})^3 - 2a\overline{w} + b = 0$$

$w$  が方程式  $(*)$  の解であるとき,  $\overline{w}$  も  $(*)$  の解である.

したがって, 方程式  $(*)$  の解の種類は

- (A) 実数解が 4 個
- (B) 実数解が 2 個と互いに共役な複素数が 1 組
- (C) 互いに共役な複素数が 2 組

のいずれかである.

(A) は, 明らかに条件 3 に反する.

(C) と仮定し, 解を  $w, \overline{w}, u, \overline{u}$  とすると,  $\alpha\beta + \gamma\delta$  は

$$w\overline{w} + u\overline{u}, \quad wu + \overline{w}\overline{u}, \quad w\overline{u} + \overline{w}u$$

であるから, これらはすべて実数 (虚部が 0) となり, 条件 3 に反する.

よって, 方程式  $(*)$  の解の種類は (B) であり, 題意は成立する.

- (2) (1) の結果から, (B) のとき, その解を  $\alpha, \beta, \gamma, \overline{\alpha}$  とすると  
( $\text{Im}(\alpha) \neq 0, \beta, \gamma$  ( $\beta \neq \gamma$ ) は実数)

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \gamma\delta &= \alpha\beta + \gamma\overline{\alpha} \\ &= (\beta + \gamma)\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} + (\beta - \gamma)\frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} \\ &= (\beta + \gamma)\text{Re}(\alpha) + (\beta - \gamma)\text{Im}(\alpha)i \end{aligned}$$

条件 3 より,  $(\beta + \gamma)\text{Re}(\alpha) = 0$ , すなわち,

$$(**) \quad \gamma = -\beta \neq 0 \quad \text{または} \quad \text{Re}(\alpha) = 0 \quad (\text{Im}(\alpha) \neq 0)$$

のとき, 条件 1~条件 3 をみたとす.

(\*\*)により, 次の場合分けを行う.

(i)  $\gamma = -\beta \neq 0$  のとき ( $\gamma, \beta$  は実数), 方程式 (\*) は

$$\begin{aligned}(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})(z - \beta)(z + \beta) &= 0 \\ (z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2)(z^2 - \beta^2) &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } z^4 - 2\operatorname{Re}(\alpha)z^3 + (|\alpha|^2 - \beta^2)z^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha)\beta^2z - |\alpha|^2\beta^2 = 0$$

これと (\*) の係数を比較すると

$$-2\operatorname{Re}(\alpha) = -2, \quad |\alpha|^2 - \beta^2 = 0, \quad 2\operatorname{Re}(\alpha)\beta^2 = -2a, \quad -|\alpha|^2\beta^2 = b$$

$$\text{したがって } \operatorname{Re}(\alpha) = 1, \quad |\alpha|^2 = \beta^2 = -a > 0, \quad b = -a^2$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入して } (z^2 - 2z - a)(z^2 + a) = 0 \quad (a < 0)$$

方程式  $z^2 + a = 0$  ( $a < 0$ ) は異なる 2 つの実数解をもつ.

方程式  $z^2 - 2z - a = 0$  が虚数解をもつから,  $a < 0$  に注意して

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) < 0 \quad \text{ゆえに } a < -1$$

$$\text{よって } b = -a^2 \quad (a < -1)$$

(ii)  $\operatorname{Re}(\alpha) = 0$  ( $\operatorname{Im}(\alpha) \neq 0$ ) のとき, 方程式 (\*) は

$$\begin{aligned}(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})(z - \beta)(z - \gamma) &= 0 \\ (z^2 + |\alpha|^2)(z^2 - (\beta + \gamma)z + \beta\gamma) &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } z^4 - (\beta + \gamma)z^3 + (|\alpha|^2 + \beta\gamma)z^2 - |\alpha|^2(\beta + \gamma)z + |\alpha|^2\beta\gamma = 0$$

これと (\*) の係数を比較すると

$$-(\beta + \gamma) = -2, \quad |\alpha|^2 + \beta\gamma = 0, \quad -|\alpha|^2(\beta + \gamma) = -2a, \quad |\alpha|^2\beta\gamma = b$$

$$\text{したがって } \beta + \gamma = 2, \quad |\alpha|^2 = a > 0, \quad \beta\gamma = -a, \quad b = -a^2$$

$$\text{これを } \textcircled{2} \text{ に代入して } (z^2 + a)(z^2 - 2z - a) = 0 \quad (a > 0)$$

方程式  $z^2 + a = 0$  ( $a > 0$ ) は異なる 2 つの虚数解をもつ.

方程式  $z^2 - 2z - a = 0$  ( $a > 0$ ) の判別式は

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-a) = 4 + 4a > 0$$

ゆえに, 方程式  $z^2 - 2z - a = 0$  は異なる 2 つの実数解をもつ.

$$\text{よって } b = -a^2 \quad (a > 0)$$

(i), (ii) より  $\mathbf{b = -a^2}$  ( $\mathbf{a < -1, 0 < a}$ )

(3) (2)の結果から, 方程式(\*)は

$$(z^2 - 2z - a)(z^2 + a) = 0 \quad (a < -1, 0 < a)$$

(i) (2)(i)から,  $a < -1$ のとき, 方程式(\*)の解は

$$z = 1 \pm \sqrt{-a-1}i, \pm \sqrt{-a}$$

$$\text{このとき} \quad \alpha + \beta = 1 \pm \sqrt{-a} \pm \sqrt{-a-1}i \quad (a < -1) \quad \dots \textcircled{3}$$

(ii) (2)(ii)から,  $a > 0$ のとき, 方程式(\*)の解は

$$z = 1 \pm \sqrt{a+1}, \pm \sqrt{a}i$$

$$\text{このとき} \quad \alpha + \beta = 1 \pm \sqrt{a+1} \pm \sqrt{a}i \quad (a > 0) \quad \dots \textcircled{4}$$

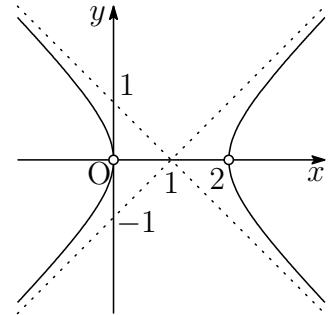
③について,  $a' = -a - 1$ とおくと

$$\alpha + \beta = 1 \pm \sqrt{a'+1} \pm \sqrt{a'}i \quad (a' > 0) \quad \dots \textcircled{3}'$$

$\alpha + \beta = x + yi$ とおくと, ③', ④から

$$x = 1 \pm \sqrt{a+1}, \quad y = \pm \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

上の2式から  $(x-1)^2 - y^2 = 1 \quad (y \neq 0)$   
 よって,  $\alpha + \beta$ がとりうる範囲は右の図のようになる.



## 第 2 章 東京工業大学

### 出題分野 (2010-2019) 180 分

◀	東京工業大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										1
	複素数と方程式										
	図形と方程式	4									
	三角関数										
	指数関数と対数関数			2							
	微分法と積分法			3							
III	式と曲線				5						
	複素数平面								5	1	3
	関数										
	極限				4	5	1				
	微分法とその応用		3		3	2	4	1	3	3	5
	積分法	1	2						2		2
	積分法の応用		4	4-6		4	3	5		4	
A	場合の数と確率	3		1	1			2	4		
	整数の性質				1	1	5	4	1	2	
	図形の性質							3			
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル			1			2				
	数列	2								5	4.5
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		1	5	2	3	数字は問題番号				

## 2.1 2015年(180分)

1 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. また数列  $\{b_n\}$  を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める.

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (2) すべての  $n$  に対して, 不等式  $b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1}$  が成り立つことを示せ.
- (3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ.

2 四面体 OABC において,  $OA = OB = OC = BC = 1$ ,  $AB = AC = x$  とする. 頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし, 平面 ABC との交点を H とする. 頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし, 平面 OBC との交点を H' とする.

- (1)  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とし,  $\vec{OH} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ ,  $\vec{OH'} = s\vec{b} + t\vec{c}$  と表す. このとき,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  および  $s$ ,  $t$  を  $x$  の式で表せ.
- (2) 四面体 OABC の体積  $V$  を  $x$  の式で表せ. また,  $x$  が変化するときの  $V$  の最大値を求めよ.

3  $a > 0$  とする. 曲線  $y = e^{-x^2}$  と  $x$  軸,  $y$  軸, および直線  $x = a$  で囲まれた図形を,  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体を  $A$  とする.

- (1)  $A$  の体積  $V$  を求めよ.
- (2) 点  $(t, 0)$  ( $-a \leq t \leq a$ ) を通り  $x$  軸と垂直な平面による  $A$  の切り口の面積を  $S(t)$  とするとき, 不等式

$$S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds$$

を示せ.

- (3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

を示せ.

- 4  $xy$  平面上を運動する点  $P$  の時刻  $t$  ( $t > 0$ ) における座標  $(x, y)$  が

$$x = t^2 \cos t, \quad y = t^2 \sin t$$

で表されている. 原点を  $O$  とし, 時刻  $t$  における  $P$  の速度ベクトルを  $\vec{v}$  とする.

- (1)  $\overrightarrow{OP}$  と  $\vec{v}$  のなす角を  $\theta(t)$  とするとき, 極限值  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$  を求めよ.
- (2)  $\vec{v}$  が  $y$  軸に平行になるような  $t$  ( $t > 0$ ) のうち, 最も小さいものを  $t_1$ , 次に小さいものを  $t_2$  とする. このとき,  $t_2 - t_1 < \pi$  を示せ.
- 5  $n$  を相異なる素数  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ( $k \geq 1$ ) の積とする.  $a, b$  を  $n$  の約数とするとき,  $a, b$  の最大公約数を  $G$ , 最小公倍数を  $L$  とし,

$$f(a, b) = \frac{L}{G}$$

とする.

- (1)  $f(a, b)$  が  $n$  の約数であることを示せ.
- (2)  $f(a, b) = b$  ならば,  $a = 1$  であることを示せ.
- (3)  $m$  を自然数とすると,  $m$  の約数であるような素数の個数を  $S(m)$  とする.

$$S(f(a, b)) + S(a) + S(b)$$

が偶数であることを示せ.



## 解答例

1 (1) 数列  $\{a_n\}$  の特性方程式は

$$x = \frac{4x-9}{x-2} \quad \text{すなわち} \quad (x-3)^2 = 0$$

この方程式の解が  $x=3$  であるから

$$a_{n+1} - 3 = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} - 3 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_{n+1} - 3} = \frac{1}{a_n - 3} + 1$$

数列  $\left\{ \frac{1}{a_n - 3} \right\}$  は初項  $\frac{1}{a_1 - 3}$ , 公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n - 3} = \frac{1}{a_1 - 3} + (n-1) = \frac{2n-1}{2} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{6n-1}{2n-1}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k a_k = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k(6k-1)}{2k-1} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \left( 3k + 1 + \frac{1}{2k-1} \right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{3}{2}n(n+1) + n + \frac{1}{2k-1} \right\} \\ &= 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{ここで} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n-1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{n}{2n-1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \leq n \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入すると, 次式から明らか.

$$3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(2n-1)} \leq b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1} \quad \dots (*)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(2n-1)} \right\} = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 + \frac{4}{n+1} \right) = 3$$

上の2式から, (\*)にはさみうちの原理を適用すると  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

解説  $p, q, r \neq 0, s$  を定数とする漸化式  $a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \dots (*)$

$ps - qr = 0$  のとき, 右辺は定数となるので,  $ps - qr \neq 0$  とする.

(\*) の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \dots (**)$$

の解を  $\alpha, \beta$  とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \dots (***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i)  $\alpha \neq \beta$  のとき, 上の2式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left( \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$$

これから,  $a_n$  が求まる.

ii)  $\alpha = \beta$  のとき, (\*) の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \dots \textcircled{1}$$

また,  $\alpha$  は(\*\*)の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②により, (\*\*\*)は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると 
$$\frac{1}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{a_n - \alpha} + \frac{2r}{p + s}$$

このとき, 数列  $\left\{ \frac{1}{a_n - \alpha} \right\}$  は初項  $\frac{1}{a_1 - \alpha}$ , 公差  $\frac{2r}{p + s}$  の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n - \alpha} = \frac{1}{a_1 - \alpha} + \frac{2r}{p + s}(n - 1)$$

これから,  $a_n$  が求まる. ■

2 (1) BCの中点をMとし、 $\theta = \angle OMA$ とすると

$$OM = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$MA = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$$

$\triangle OAM$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{OM^2 + MA^2 - OA^2}{2OM \cdot MA} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + (x^2 - \frac{1}{4}) - 1}{2OM \cdot MA} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2OM \cdot MA} \end{aligned}$$

上式より、 $OM \cos \theta = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2MA}$ 、 $MA \cos \theta = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2OM} \dots \textcircled{1}$ であるから

$$\begin{aligned} \vec{OH} &= \vec{OM} + (OM \cos \theta) \cdot \frac{\vec{MA}}{MA} = \vec{OM} + \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2MA^2} \cdot \vec{MA} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2(x^2 - \frac{1}{4})} \left( \vec{a} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2x^2 - 1}{4x^2 - 1} \vec{a} + \frac{x^2}{4x^2 - 1} (\vec{b} + \vec{c}),$$

$$\begin{aligned} \vec{OH}' &= \vec{OM} + (MA \cos \theta) \cdot \frac{\vec{MO}}{MO} = \vec{OM} - \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{2OM^2} \cdot \vec{OM} \\ &= \vec{OM} - \frac{2}{3} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) \vec{OM} = \frac{4 - 2x^2}{3} \cdot \vec{OM} = \frac{2 - x^2}{3} (\vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$

$$\text{よって } \mathbf{p} = \frac{2x^2 - 1}{4x^2 - 1}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{r} = \frac{x^2}{4x^2 - 1}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{t} = \frac{2 - x^2}{3}$$

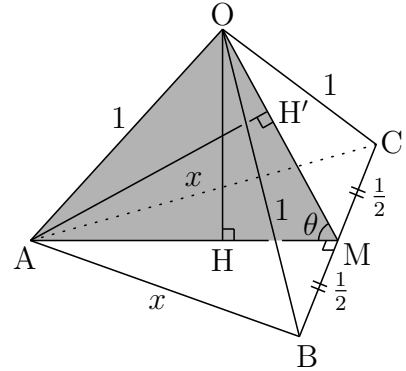
(2) ①より、 $MA \cos \theta = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$ であるから

$$\begin{aligned} MA^2 \sin^2 \theta &= MA^2 - (MA \cos \theta)^2 = \left( x^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{3} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}(x^2 - 2)^2 \end{aligned}$$

$$AH' = MA \sin \theta \text{ であるから, } V = \frac{1}{3} \triangle OBC \cdot AH' = \frac{1}{12} \sqrt{3 - (x^2 - 2)^2}$$

よって、 $x = \sqrt{2}$ のとき、 $V$ は最大値  $\frac{\sqrt{3}}{12}$ をとる。

$$\text{補足 } \triangle OAM = \frac{1}{2} OM \cdot MA \sin \theta \text{ より, } V = \frac{1}{3} \triangle OAM \cdot BC = \frac{1}{12} \sqrt{3 - (x^2 - 2)^2}$$



別解  $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $|\vec{b} - \vec{a}| = |\vec{c} - \vec{a}| = x$  より  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 - \frac{x^2}{2}$

$\vec{OH}$  は平面 ABC に垂直なので,  $\vec{OH} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{OH} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$  より

$$(p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0, \quad (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

これらを整理すると

$$-x^2p + x^2q + (x^2 - 1)r = 0, \quad -q + r = 0$$

上の2式および  $p + q + r = 1$  により  $p = \frac{2x^2 - 1}{4x^2 - 1}$ ,  $q = r = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$

また,  $\vec{AH}'$  は平面 OBC に垂直なので,  $\vec{AH}' \cdot \vec{b} = \vec{OH}' \cdot \vec{c} = 0$  より

$$(s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0, \quad (s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0$$

これらを整理すると

$$2s + t + x^2 - 2 = 0, \quad s + 2t + x^2 - 2 = 0$$

よって  $s = t = \frac{2 - x^2}{3}$

$\vec{OH}' = s(\vec{b} + \vec{c})$  より

$$OH'^2 = |\vec{OH}'|^2 = s^2(|\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2) = \frac{(2 - x^2)^2}{3}$$

したがって  $AH' = \sqrt{OA^2 - OH'^2} = \sqrt{1 - \frac{(2 - x^2)^2}{3}}$

よって  $V = \frac{1}{3} \triangle OBC \cdot AH' = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 60^\circ \right) AH' = \frac{1}{12} \sqrt{3 - (2 - x^2)^2}$

また,  $V$  が最大となるのは, A から平面 OBC に下ろした垂線  $AH'$  の長さが最大となる, すなわち,  $H'$  が O と一致するときであるから

$$\vec{OH}' = \frac{2 - x^2}{3}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \quad \text{よって} \quad x = \sqrt{2}$$

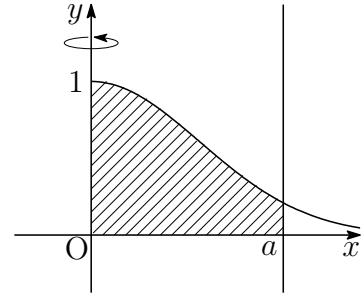
このとき,  $AH' = AO = 1$  より,  $V$  の最大値は

$$\frac{1}{3} \triangle OBC \cdot AH' = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 60^\circ \right) \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$



3 (1) 求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a x e^{-x^2} dx \\ &= \pi \left[ -e^{-x^2} \right]_0^a = \pi(1 - e^{-a^2}) \end{aligned}$$



(2) 回転体  $A$  の領域は,  $y$  軸からの距離が  $r$  であるとき ( $0 \leq r \leq a$ )

$$0 \leq y \leq e^{-r^2}$$

$xy$  平面に垂直で原点  $O$  を通る座標軸を  $z$  軸とすると  $r^2 = z^2 + x^2$

このとき, 平面  $x = t$  による  $A$  の断面の表す領域は ( $-a \leq t \leq a$ )

$$x = t, \quad -\sqrt{a^2 - t^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - t^2}, \quad 0 \leq y \leq e^{-(z^2 + t^2)}$$

したがって, この断面積  $S(t)$  について

$$S(t) = \int_{-\sqrt{a^2 - t^2}}^{\sqrt{a^2 - t^2}} e^{-(z^2 + t^2)} dz \leq \int_{-a}^a e^{-(z^2 + t^2)} dz$$

よって 
$$S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2 + t^2)} ds$$

(3) (2) の結果から 
$$S(t) \leq e^{-t^2} \int_{-a}^a e^{-s^2} ds$$

したがって 
$$V = \int_{-a}^a S(t) dt \leq \int_{-a}^a e^{-t^2} dt \int_{-a}^a e^{-s^2} ds$$

上式および (1) の結果から

$$\pi(1 - e^{-a^2}) \leq \left( \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2 \quad \text{よって} \quad \sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

4 (1)  $\vec{OP} = (x, y) = t^2(\cos t, \sin t)$  より ( $t > 0$ )

$$\frac{dx}{dt} = 2t \cos t - t^2 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t \sin t + t^2 \cos t$$

ゆえに 
$$\vec{v} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = t(2 \cos t - t \sin t, 2 \sin t + t \cos t)$$

$\theta(t)$  は、2つのベクトル

$$\frac{1}{t^2}\vec{OP} = (\cos t, \sin t), \quad \frac{1}{t}\vec{v} = (2\cos t - t\sin t, 2\sin t + t\cos t)$$

のなす角であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta(t) &= \frac{\cos t(2\cos t - t\sin t) + \sin t(2\sin t + t\cos t)}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\sqrt{(2\cos t - t\sin t)^2 + (2\sin t + t\cos t)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4+t^2}}\end{aligned}$$

$$\text{したがって } \lim_{t \rightarrow \infty} \cos\theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4+t^2}} = 0 \quad \text{よって } \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \frac{\pi}{2}$$

(2)  $\vec{v}$  が  $y$  軸に平行になる  $t$  ( $t > 0$ ) は、 $\frac{dx}{dt} = 0$  のときであるから

$$2\cos t - t\sin t = 0 \quad \text{すなわち} \quad \tan t - \frac{2}{t} = 0$$

$$f(t) = \tan t - \frac{2}{t} \text{ とおくと } f'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{t^2} > 0$$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(t) = \infty$  であり、区間  $(0, \frac{\pi}{2})$  で  $f(t)$  は単調増加であるから、中間値の定理により

$$f(t_1) = 0 \quad \left(0 < t_1 < \frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす  $t_1$  が唯一存在する.

$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(t) = -\infty$ ,  $f(\pi) = -\frac{2}{\pi}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}\pi^-} f(t) = \infty$  であり、区間  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$  において  $f(t)$  は単調増加であるから、中間値の定理により

$$f(t_2) = 0 \quad \left(\pi < t_2 < \frac{3}{2}\pi\right)$$

を満たす  $t_2$  が唯一存在する. したがって

$$\tan t_1 = \frac{2}{t_1} > \frac{2}{t_2} = \tan t_2 = \tan(t_2 - \pi)$$

$t_1, t_2 - \pi \in (0, \frac{\pi}{2})$  であるから

$$t_1 > t_2 - \pi \quad \text{よって} \quad t_2 - t_1 < \pi$$



- 5 (1)  $a = Ga'$ ,  $b = Gb'$  ( $a'$ ,  $b'$ は互いに素)とおくと,  $L = Ga'b'$  より

$$f(a, b) = \frac{L}{G} = a'b' \quad \dots (*)$$

$a = Ga'$ ,  $b = Gb'$  は  $n$  の約数であるから,  $a'$ ,  $b'$  は  $n$  の約数である.  
 このとき,  $a'$ ,  $b'$  は互いに素であるから,  $a'b'$  は  $n$  の約数である.  
 よって,  $f(a, b)$  は  $n$  の約数である.

- (2)  $f(a, b) = b$  のとき, (\*) および  $b = Gb'$  より

$$a'b' = Gb' \quad \text{ゆえに} \quad a' = G \quad \text{すなわち} \quad a = G^2$$

$a$  は相異なる素数の積であるから,  $a$  が 1 以外の平方数になることはない.  
 よって,  $a = 1$

- (3)  $x$ ,  $y$  が相異なる素数の積であるとき,  $S(xy) = S(x) + S(y)$  であるから

$$\begin{aligned} & S(f(a, b)) + S(a) + S(b) \\ &= S(a'b') + S(Ga') + S(Gb') \\ &= \{S(a') + S(b')\} + \{S(G) + S(a')\} + \{S(G) + S(b')\} \\ &= 2\{S(G) + S(a') + S(b')\} \end{aligned}$$

よって,  $S(f(a, b)) + S(a) + S(b)$  は偶数である. ■

## 2.2 2016年(180分)

**1**  $a$  を正の定数とし、放物線  $y = \frac{x^2}{4}$  を  $C_1$  とする.

(1) 点  $P$  が  $C_1$  上を動くとき、 $P$  と点  $Q\left(2a, \frac{a^2}{4} - 2\right)$  の距離の最小値を求めよ.

(2)  $Q$  を中心とする円  $(x - 2a)^2 + \left(y - \frac{a^2}{4} + 2\right)^2 = 2a^2$  を  $C_2$  とする.  $P$  が  $C_1$  上を動き、点  $R$  が  $C_2$  上を動くとき、 $P$  と  $R$  の距離の最小値を求めよ.

**2**  $\triangle ABC$  を一辺の長さ  $6$  の正三角形とする. サイコロを  $3$  回振り、出た目を順に  $X, Y, Z$  とする. 出た目に応じて、点  $P, Q, R$  をそれぞれ線分  $BC, CA, AB$  上に

$$\overrightarrow{BP} = \frac{X}{6}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{Y}{6}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{AR} = \frac{Z}{6}\overrightarrow{AB}$$

をみたすように取る.

(1)  $\triangle PQR$  が正三角形になる確率を求めよ.

(2) 点  $B, P, R$  を互いに線分で結んでできる図形を  $T_1$ , 点  $C, Q, P$  を互いに線分で結んでできる図形を  $T_2$ , 点  $A, R, Q$  を互いに線分で結んでできる図形を  $T_3$  とする.  $T_1, T_2, T_3$  のうち、ちょうど  $2$  つが正三角形になる確率を求めよ.

(3)  $\triangle PQR$  の面積を  $S$  とし、 $S$  のとりうる値の最小値を  $m$  とする.  $m$  の値および  $S = m$  となる確率を求めよ.

**3** 水平な平面  $\alpha$  の上に半径  $r_1$  の球  $S_1$  と半径  $r_2$  の球  $S_2$  が乗っており、 $S_1$  と  $S_2$  は外接している.

(1)  $S_1, S_2$  が  $\alpha$  と接する点をそれぞれ  $P_1, P_2$  とする. 線分  $P_1P_2$  の長さを求めよ.

(2)  $\alpha$  の上に乗っており、 $S_1$  と  $S_2$  の両方に外接している球すべてを考える. それらの球と  $\alpha$  の接点は、 $1$  つの円の上または  $1$  つの直線の上にあることを示せ.

**4**  $n$  を  $2$  以上の自然数とする.

(1)  $n$  が素数または  $4$  のとき、 $(n-1)!$  は  $n$  で割り切れないことを示せ.

(2)  $n$  が素数でなくかつ  $4$  でもないとき、 $(n-1)!$  は  $n$  で割り切れることを示せ.



5 次のように媒介変数表示された  $xy$  平面上の曲線を  $C$  とする：

$$\begin{cases} x = 3 \cos t - \cos 3t \\ y = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  である。

- (1)  $\frac{dx}{dt}$  および  $\frac{dy}{dt}$  を計算し、 $C$  の概形を図示せよ。
- (2)  $C$  と  $x$  軸と  $y$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

- 1 (1)  $C_1$  上の点  $P$  を  $\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$ ,  $f(t) = PQ^2$  とする.  $a > 0$  より,  $Q\left(2a, \frac{a^2}{4} - 2\right)$  の  $x$  座標は正であり,  $C_1$  は  $y$  軸に関して対称であるから,  $PQ$  の距離が最小となるのは,  $t \geq 0$  のときについて調べればよい.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (t - 2a)^2 + \left(\frac{t^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 2\right)^2 \\
 f'(t) &= 2(t - 2a) + 2\left(\frac{t^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 2\right) \cdot \frac{t}{2} \\
 &= \frac{t^3}{4} - \frac{a^2}{4}t + 4t - 4a \\
 &= \frac{1}{4}(t - a)(t^2 + at + 16)
 \end{aligned}$$

このとき,  $t^2 + at + 16 > 0$  であることに注意して

$t$	(0)	...	$a$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	極小 $a^2 + 4$	$\nearrow$

よって, 求める最小値は  $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2 + 4}$

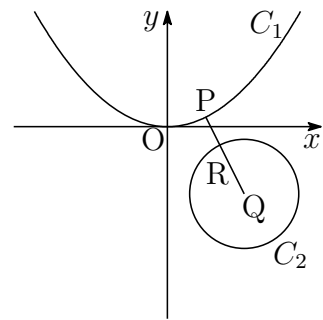
- (2)  $C_2 : (x - 2a)^2 + \left(y - \frac{a^2}{4} + 2\right)^2 = 2a^2$  の半径が  $\sqrt{2}a$  であるから (1) の結果に注意して  $\sqrt{2}a \geq \sqrt{a^2 + 4}$ , すなわち,  $a \geq 2$  のとき

PR の最小値 0

$\sqrt{2}a < \sqrt{a^2 + 4}$ , すなわち,  $0 < a < 2$  のとき

PR の最小値  $\sqrt{a^2 + 4} - \sqrt{2}a$

よって, PR の最小値は  $\begin{cases} a \geq 2 & \text{のとき } 0 \\ 0 < a < 2 & \text{のとき } \sqrt{a^2 + 4} - \sqrt{2}a \end{cases}$



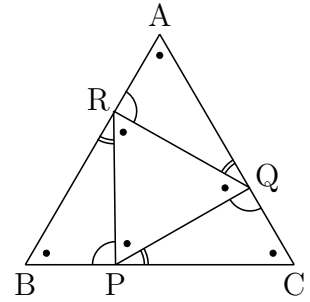
2 (1)  $\triangle PQR$  が正三角形のとき

$$\triangle BPR \equiv \triangle CQP \equiv \triangle ARQ$$

であるから,  $BP = CQ = AR$

したがって  $X = Y = Z$

よって, 求める確率は  $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$



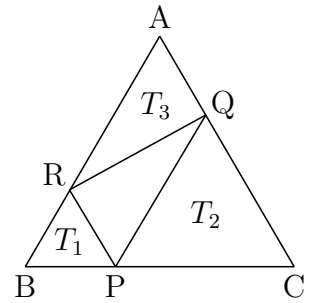
(2)  $T_1$  と  $T_2$  だけが正三角形であるとき

$$RB = BP, PC = CQ, QA \neq AR$$

ゆえに  $6 - Z = X, 6 - X = Y, 6 - Y \neq Z$

すなわち  $Y = Z = 6 - X \quad (X = 1, 2, 4, 5)$

$T_1$  と  $T_2$  だけが正三角形となる確率は  $\frac{4}{6^3}$



$T_2$  と  $T_3$  だけ,  $T_3$  と  $T_1$  だけが正三角形となる確率もこれと等しい。

よって, 求める確率は  $\frac{4 \cdot 3}{6^3} = \frac{1}{18}$

(3)  $\frac{\triangle BPR}{\triangle ABC} = \frac{(6-Z)X}{36}, \frac{\triangle CQP}{\triangle ABC} = \frac{(6-X)Y}{36}, \frac{\triangle ARQ}{\triangle ABC} = \frac{(6-Y)Z}{36}$  より

$$\begin{aligned} \frac{36S}{\triangle ABC} &= \frac{36}{\triangle ABC} (\triangle ABC - \triangle BPR - \triangle CQP - \triangle ARQ) \\ &= 36 - (6-Z)X - (6-X)Y - (6-Y)Z \\ &= 36 - 6(X+Y+Z) + XY + YZ + ZX \\ &= (6-X)(6-Y) + Z(X+Y-6) \end{aligned}$$

(i)  $X+Y-6 < 0$  のとき,  $Z=6$  で  $S$  は最小となり

$$\frac{36S}{\triangle ABC} = XY \geq 1 \quad (\text{等号は } X=Y=1 \text{ のとき})$$

(ii)  $X+Y-6 = 0$  のとき,  $X \neq 6$  に注意して

$$\frac{36S}{\triangle ABC} = (6-X)(6-Y) = (6-X)X = 9 - (X-3)^2 \geq 5$$

(iii)  $X+Y-6 > 0$  のとき,  $Z=1$  で  $S$  は最小となり

$$\frac{36S}{\triangle ABC} = 5 + (5-X)(5-Y) \geq 1 \quad (\text{等号は } (X, Y) = (1, 6), (6, 1) \text{ のとき})$$

(i)~(iii) から  $\frac{36m}{\Delta ABC} = 1$  であるから

$$m = \frac{1}{36}\Delta ABC = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

これを満たすのは,  $(X, Y, Z) = (1, 1, 6), (1, 6, 1), (6, 1, 1)$  の3組.

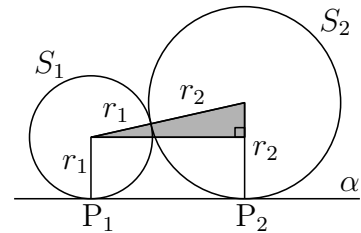
よって, 求める確率は  $\frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$  ■

**3** (1) 右の図の直角三角形について

$$P_1P_2^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

$$P_1P_2^2 = 4r_1r_2$$

よって  $P_1P_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$



(2)  $\alpha$  上の半径  $r$  の球  $S$  が,  $S_1$  および  $S_2$  に外接するとき,  $S$  と  $\alpha$  の接点を  $P$  とすると

$$P_1P = 2\sqrt{r_1r}, \quad P_2P = 2\sqrt{r_2r}$$

(i)  $r_1 \neq r_2$  のとき  $P_1P : P_2P = \sqrt{r_1} : \sqrt{r_2}$

2点  $P_1, P_2$  を  $\sqrt{r_1} : \sqrt{r_2}$  に内分, 外分する点を  $A, B$  とすると,  $P$  は線分  $AB$  を直径とする円周上にある.

(ii)  $r_1 = r_2$  のとき  $P_1P = P_2P$

$P$  は線分  $P_1P_2$  の垂直二等分線上にある. ■

- 4 (1)  $n$  が素数のとき,  $n-1$  以下の正の整数は  $n$  を因数に持たないので

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

は  $n$  で割り切れない.

また,  $n=4$  のとき,  $(n-1)! = 6$  は,  $n$  で割り切れない.

- (2)  $n$  が素数でなくかつ 4 でもないとき,  $n = pq$ ,  $2 \leq p \leq q$  とおくと

$$n-1-q = pq-1-q = (p-1)(q-1) + (p-2) > 0$$

ゆえに  $2 \leq p \leq q < n-1$

(i)  $p \neq q$  のとき  $(n-1)! = (n-1)\cdots q\cdots p\cdots 1$

したがって,  $(n-1)!$  は  $n = pq$  で割り切れる.

(ii)  $p = q$  のとき,  $n \neq 4$  であるから,  $2 < p$ ,  $2p < p^2 = n$  より,  $2p \leq n-1$

$(n-1)!$  は  $p$  と  $2p$  を因数にもつので,  $(n-1)!$  は  $n = p^2$  で割り切れる.

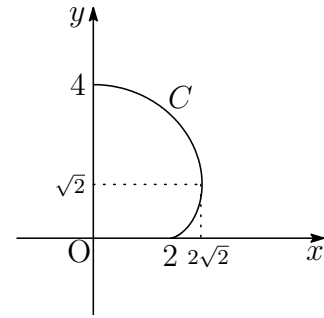
(i), (ii) より,  $n$  が素数でも 4 でもないとき,  $(n-1)!$  は  $n$  で割り切れる. ■

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \begin{cases} x = 3 \cos t - \cos 3t \\ y = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

上式を  $t$  について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3 \sin t + 3 \sin 3t = 6 \cos 2t \sin t \\ \frac{dy}{dt} &= 3 \cos t - 3 \cos 3t = 6 \sin 2t \sin t \end{aligned}$$

$t$	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+	0	-	
$x$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		+	+	+	
$y$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4



$C$  の概形は右の図のようになる.

(2) 求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 x \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{dy}{dt} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos t - \cos 3t)(3 \cos t - 3 \cos 3t) \, dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos^2 t - 4 \cos 3t \cos t + \cos^2 3t) \, dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - 2(\cos 4t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(1 + \cos 6t) \right\} \, dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 2 - \frac{1}{2} \cos 2t - 2 \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 6t \right) \, dt \\ &= 3 \left[ 2t - \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{1}{12} \sin 6t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

■

## 2.3 2017年(180分)

1 次の条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数  $N$  をすべて求めよ.

(i)  $N$  の正の約数の個数は 12 個

(ii)  $N$  の正の約数を小さい方から順に並べたとき, 7 番目の数は 12.

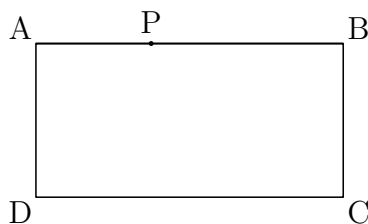
ただし,  $N$  の約数には 1 と  $N$  も含める.

2 実数  $x$  の関数  $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1 + \sin^2 t} dt$  の最大値と最小値を求めよ.

3  $a$  を 1 以上の実数とする. 図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている. ただし  $AD = 1$ ,  $AB = a$  である.  $P$  を辺 AB 上の点とし,  $AP = x$  とする. 頂点 D を持ち上げて  $P$  と一致するように折り紙を一回折ったとき, もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を  $S$  とする.

(1)  $S$  を  $a$  と  $x$  で表せ.

(2)  $a = 1$  とする.  $P$  が A から B まで動くとき,  $S$  を最大にするような  $x$  の値を求めよ.



なお配布された白紙を自由に使ってよい. (白紙は回収しない.)

4  $n$  は正の整数とし, 文字  $a, b, c$  を重複を許して  $n$  個並べてできる文字列すべての集合を  $A_n$  とする.  $A_n$  の要素に対し次の条件 (\*) を考える.

(\*) 文字  $c$  が 2 つ以上連続して現れない.

以下  $A_n$  から要素を一つ選ぶとき, どの要素も同じ確率で選ばれるとする.

(1)  $A_n$  から要素を一つ選ぶとき, それが条件 (\*) を満たす確率  $P(n)$  を求めよ.

(2)  $n \geq 12$  とする.  $A_n$  から要素を一つ選んだところ, これは条件 (\*) を満たし, その 7 番目の文字は  $c$  であった. このとき, この要素の 10 番目の文字が  $c$  である確率を  $Q(n)$  とする. 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n)$  を求めよ.

5 実数  $a, b, c$  に対して  $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ ,  $f(x) = x^2 + cx + 1$  とおく. また, 複素数平面内の単位円周から 2 点  $1, -1$  を除いたものを  $T$  とする.

- (1)  $f(x) = 0$  の解がすべて  $T$  上にあるための必要十分条件を  $c$  を用いて表せ.
- (2)  $F(x) = 0$  の解がすべて  $T$  上にあるならば,

$$F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$$

を満たす実数  $c_1, c_2$  が存在することを示せ.

- (3)  $F(x) = 0$  の解がすべて  $T$  上にあるための必要十分条件を  $a, b$  を用いて表し, それを満たす点  $(a, b)$  の範囲を座標平面上に図示せよ.



## 解答例

1  $N$  の約数が 12 個あり,  $N$  が  $2^2 \cdot 3$  を約数をもつことから,  $N$  は次の積で表される ( $p$  は 5 以上の素数).

$$(a) N = 2^5 \cdot 3 \quad (b) N = 2^3 \cdot 3^2 \quad (c) N = 2^2 \cdot 3^3 \quad (d) N = 2^2 \cdot 3p$$

(a)  $N = 2^5 \cdot 3 = 96$  の 12 以下の正の約数は

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$$

(b)  $N = 2^3 \cdot 3^2 = 72$  の 12 以下の正の約数は

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12$$

(c)  $N = 2^2 \cdot 3^3 = 108$  の 12 以下の正の約数は

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12$$

(d) 条件 (ii) を満たす  $p$  は 5, 7, 11 のいずれかである.

$p = 5$  のとき,  $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$  の 12 以下の正の約数は

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12$$

$p = 7$  のとき,  $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$  の 12 以下の正の約数は

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 12$$

$p = 11$  のとき,  $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$  の 12 以下の正の約数は

$$1, 2, 3, 4, 6, 11, 12$$

(a)~(d) から, 条件 (ii) を満たす正の整数  $N$  は **84, 96, 108, 132** ■

$$2 \quad f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1 + \sin^2 t} dt \quad \text{より} \quad f(x + \pi) = \int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi} \frac{|\sin t|}{1 + \sin^2 t} dt$$

$$\text{第 2 式について, } t = u + \pi \text{ とおくと } \frac{dt}{du} = 1 \quad \begin{array}{c|c} t & x + \pi \longrightarrow x + \frac{3}{2}\pi \\ \hline u & x \longrightarrow x + \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\text{ゆえに } f(x + \pi) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u + \pi)|}{1 + \sin^2(u + \pi)} du = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{1 + \sin^2 u} du = f(x)$$

$f(x)$  は, 周期  $\pi$  の周期関数であるから,  $0 \leq x \leq \pi$  において求めればよい.

$$(i) \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t} dt \quad \dots (*)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin(x + \frac{\pi}{2})}{1 + \sin^2(x + \frac{\pi}{2})} - \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} = \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} - \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(1 - \sin x \cos x)}{(1 + \sin^2 x)(1 + \cos^2 x)} = -\frac{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})(1 - \frac{1}{2} \sin 2x)}{(1 + \sin^2 x)(1 + \cos^2 x)} \end{aligned}$$

$$(ii) \ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ のとき } f(x) = \int_x^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t} dt - \int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t} dt \quad \dots (**)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} - \frac{\sin(x + \frac{\pi}{2})}{1 + \sin^2(x + \frac{\pi}{2})} = -\frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} - \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \\ &= -\frac{(\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{(1 + \sin^2 x)(1 + \cos^2 x)} = -\frac{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})(1 + \frac{1}{2} \sin 2x)}{(1 + \sin^2 x)(1 + \cos^2 x)} \end{aligned}$$

(i), (ii) より,  $f(x)$  の増減表は

$x$	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	$\pi$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$		↗	極大	↘		↘	極小	↗	

$$\begin{aligned} \text{ここで } \int \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t} dt &= \int \frac{\sin t}{2 - \cos^2 t} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left( \frac{\sin t}{\sqrt{2} - \cos t} + \frac{\sin t}{\sqrt{2} + \cos t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left( \frac{\sqrt{2} - \cos x}{\sqrt{2} + \cos x} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left( \frac{\sqrt{2} - \cos x}{\sqrt{2} + \cos x} \right) \text{ とおくと, } (*), (**) \text{ より}$$

$$\text{最大値 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\pi\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \log 3$$

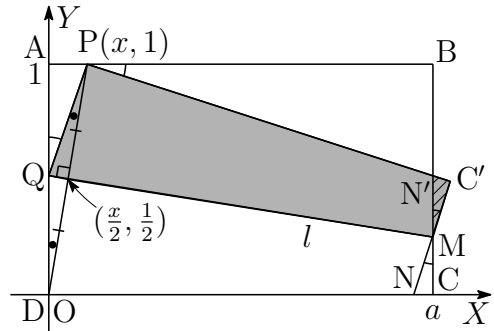
$$\text{最小値 } f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2F(\pi) - F\left(\frac{3}{4}\pi\right) - F\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{2 \log(\sqrt{2} + 1) - \log 3\}$$

■

- 3 (1) 右の図のように四角形 ABCD を XY 座標平面上に定め、原点 O と点 P(x, 1) を結ぶ線分 OP の垂直二等分線を l とすると、その方程式は

$$Y - \frac{1}{2} = -x \left( X - \frac{x}{2} \right)$$

$$l: 2xX + 2Y - x^2 - 1 = 0$$



l と X 軸との交点の X 座標は  $X = \frac{x^2 + 1}{2x}$

- (i)  $a \leq \frac{x^2 + 1}{2x}$ ,  $0 \leq x \leq a$  すなわち  $0 \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - 1}$  のとき

l と直線  $X = a$  の交点の Y 座標は  $Y = \frac{x^2 - 2ax + 1}{2}$

$\theta = \angle AOP$  とおくと、 $\angle AQP = 2\theta$  より

$$\tan \theta = x \quad \text{ゆえに} \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2x}{1 - x^2}$$

上図で、 $\triangle MNC \equiv \triangle MN'C'$ ,  $\angle NMC = 2\theta$ ,  $NC = MC \tan 2\theta$  より

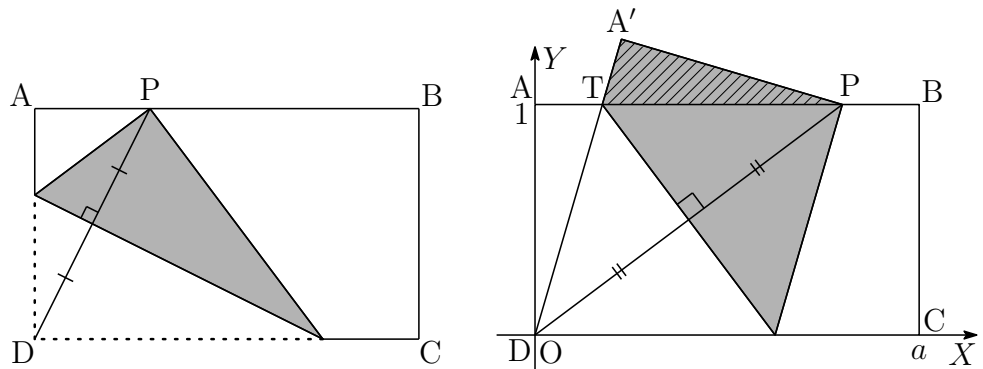
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} MC \cdot NC = \frac{1}{2} MC^2 \tan 2\theta \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 - 2ax + 1}{2} \right)^2 \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{x(x^2 - 2ax + 1)^2}{4(1 - x^2)} \end{aligned}$$

- (ii)  $\frac{x^2 + 1}{2x} \leq a$ ,  $0 \leq x \leq 1$  すなわち  $a - \sqrt{a^2 - 1} \leq x \leq 1$  のとき

$$S = 0$$

- (iii)  $1 \leq a$  のとき、l と直線  $Y = 1$  の交点の X 座標は  $X = \frac{x^2 - 1}{2x}$

$$S = \triangle A'TP = \triangle ATO = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AT = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{4x}$$



(2) (1)の結果から,  $a = 1$  のとき

$$S = \frac{x(x^2 - 2x + 1)^2}{4(1 - x^2)} = \frac{x(1 - x)^3}{4(1 + x)} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$0 < x < 1$  のとき, 両辺の自然対数をとると

$$\log S = \log x + 3 \log(1 - x) - \log(1 + x) - \log 4$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} \frac{S'}{S} &= \frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{(1-x)(1+x) - 3x(1+x) - x(1-x)}{x(1+x)(1-x)} \\ &= -\frac{3x^2 + 4x - 1}{x(1+x)(1-x)} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } S' = -\frac{3x^2 + 4x - 1}{x(1+x)(1-x)} \cdot \frac{x(1-x)^3}{4(1+x)} = -\frac{(3x^2 + 4x - 1)(1-x)^2}{4(1+x)^2}$$

$$0 < x < 1 \text{ に注意して, } S' = 0 \text{ を解くと } x = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$$

したがって,  $S$  の増減表は

$x$	0	...	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	...	1
$S'$		+	0	-	
$S$	0	↗	極大	↘	0

$$\text{よって, } S \text{ を最大にする } x \text{ は } x = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$$



- 4 (1) 集合  $A_n$  のうち  $n$  番目の文字が  $a$  または  $b$  である文字列の個数を  $x_n$ ,  $n$  番目の文字が  $c$  である文字列の個数を  $y_n$  とすると, 次の漸化式が成立する.

$$x_1 = 2, y_1 = 1 \quad (*) \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

漸化式から  $x_{n+1} - \lambda y_{n+1} = (2 - \lambda)x_n + 2y_n \quad \dots (**)$

ここで,  $1 : -\lambda = 2 - \lambda : 2$  とすると

$$-\lambda(2 - \lambda) = 1 \cdot 2 \quad \text{ゆえに} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

この2次方程式の解を  $\alpha, \beta$  とすると ( $\alpha > \beta$ )

$$\alpha = 1 + \sqrt{3}, \quad \beta = 1 - \sqrt{3}$$

とすると,  $2 - \alpha = \beta, 2 - \beta = \alpha$  であるから,  $(**)$  より

$$x_{n+1} - \alpha y_{n+1} = \beta(x_n - \alpha y_n)$$

$$x_{n+1} - \beta y_{n+1} = \alpha(x_n - \beta y_n)$$

したがって  $x_n - \alpha y_n = \beta^{n-1}(x_1 - \alpha y_1) = \beta^n$

$$x_n - \beta y_n = \alpha^{n-1}(x_1 - \beta y_1) = \alpha^n$$

上の2式から  $x_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

$$x_n + y_n = \frac{(\alpha + 1)\alpha^n - (\beta + 1)\beta^n}{\alpha - \beta}$$

ここで,  $\alpha + 1 = \frac{\alpha^2}{2}, \beta + 1 = \frac{\beta^2}{2}$  であるから

$$x_n + y_n = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha - \beta)} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad P(n) &= \frac{x_n + y_n}{3^n} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha - \beta)3^n} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3})^{n+2} - (1 - \sqrt{3})^{n+2}}{4\sqrt{3} \cdot 3^n} \end{aligned}$$

(2) ①より,  $A_n$ の個数を  $a_n$ とすると  $a_n = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha - \beta)}$

(\*)より, 7番目の文字が  $c$ であるとき

$k$	1	...	7	8	9	...	$n$
$x_k$	2	...	0	$2y_7$	$4y_7$	...	$2y_7x_{n-8}$
$y_k$	1	...	$y_7$	0	$2y_7$	...	$2y_7y_{n-8}$

$x_9 = 2y_7x_1, y_9 = 2y_7y_1$ であるから, このときの場合の数は  $2y_7a_{n-8}$

同様に, 7番目と10番目の文字が  $c$ であるとき

$k$	1	...	7	8	9	10	11	12	...	$n$
$x_k$	2	...	0	$2y_7$	$4y_7$	0	$8y_7$	$16y_7$	...	$8y_7x_{n-11}$
$y_k$	1	...	$y_7$	0	$2y_7$	$4y_7$	0	$8y_7$	...	$8y_7y_{n-11}$

$x_{12} = 8y_7x_1, y_{12} = 8y_7y_1$ であるから, このときの場合の数は  $8y_7a_{n-11}$

したがって  $Q(n) = \frac{8y_7a_{n-11}}{2y_7a_{n-8}} = \frac{4(\alpha^{n-9} - \beta^{n-9})}{\alpha^{n-6} - \beta^{n-6}}$

$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$ であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \left\{ 1 - \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-9} \right\}}{\alpha^3 - \beta^3 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-9}} = \frac{4}{\alpha^3}$

$\alpha\beta = -2$ に注意して  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \frac{4\beta^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{4(1 - \sqrt{3})^3}{(-2)^3} = 3\sqrt{3} - 5$

発展 行列を用いると, (\*)は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7番目が  $c$ であるとき, 9番目に注目して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-9} \begin{pmatrix} 4y_7 \\ 2y_7 \end{pmatrix} = 2y_7 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2y_7 \begin{pmatrix} x_{n-8} \\ y_{n-8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このときの場合の数は  $2y_7(x_{n-8} + y_{n-8}) = 2y_7a_{n-8}$  ■

- 5 (1) (必要性)  $f(x) = 0$  が虚数解をもつことが必要であるから、係数について

$$c^2 - 4 < 0 \quad \text{すなわち} \quad -2 < c < 2$$

実係を係数とする方程式  $f(x) = 0$  が虚数解をもつとき、それらは互いに共役であるから、その2解を  $z, \bar{z}$  とおくと、解と係数の関係により

$$z\bar{z} = 1 \quad \text{すなわち} \quad |z| = 1$$

したがって、 $z$  と  $\bar{z}$  は  $T$  上にある。

(十分性)  $T$  上にある2数  $z, \bar{z}$  を解とする2次方程式は

$$x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2\operatorname{Re}(z)x + 1 = 0$$

$-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$  であるから、 $c = -2\operatorname{Re}(z)$  とおくと  $-2 < c < 2$

よって、求める必要十分条件は  $-2 < c < 2$

- (2) 次数を係数とする方程式  $F(x) = 0$  の解が  $T$  上にあるとき、(1) の結果から、これらの解を  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$  とおける ( $|\alpha| = |\beta| = 1$ )。

$x^4$  の係数が1であることに注意して、因数定理を用いると

$$\begin{aligned} F(x) &= (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - \beta)(x - \bar{\beta}) \\ &= \{x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + |\alpha|^2\} \{x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + |\beta|^2\} \\ &= \{x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + 1\} \{x^2 - 2\operatorname{Re}(\beta)x + 1\} \end{aligned}$$

$c_1 = -2\operatorname{Re}(\alpha)$ ,  $c_2 = -2\operatorname{Re}(\beta)$  とすると  $-2 < c_1 < 2$ ,  $-2 < c_2 < 2$

よって  $F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$  ( $-2 < c_1 < 2$ ,  $-2 < c_2 < 2$ )

$$(3) \quad F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$$

$$= x^4 + (c_1 + c_2)x^3 + (c_1c_2 + 2)x^2 + (c_1 + c_2)x + 1$$

これと  $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$  の同じ次数の項の係数を比較すると

$$c_1 + c_2 = a, \quad c_1c_2 = b - 2 \quad \dots (*)$$

$c_1, c_2$  を解とする 2 次方程式は  $x^2 - ax + b - 2 = 0$

この方程式は、実数解をもつから

$$(-a)^2 - 4 \cdot 1(b - 2) \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad b \leq \frac{a^2}{4} + 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-2 < c_1 < 2, \quad -2 < c_2 < 2 \text{ より}$$

$$-4 < c_1 + c_2 < 4, \quad (c_1 + 2)(c_2 + 2) > 0, \quad (c_1 - 2)(c_2 - 2) > 0$$

第 1 式に (\*) を適用すると  $-4 < a < 4 \quad \dots \textcircled{2}$

第 2 式を展開すると  $c_1c_2 + 2(c_1 + c_2) + 4 > 0$

これに (\*) を適用すると

$$b - 2 + 2a + 4 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad b > -2a - 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

第 3 式を展開すると  $c_1c_2 - 2(c_1 + c_2) + 4 > 0$

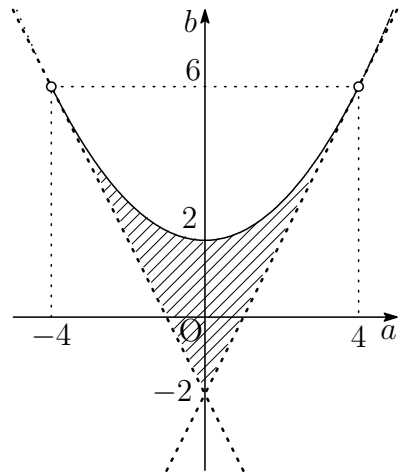
これに (\*) を適用すると

$$b - 2 - 2a + 4 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad b > 2a - 2 \quad \dots \textcircled{4}$$

①~④ より、点  $(a, b)$  の満たす領域は

$$\begin{cases} -4 < a < 4 \\ b \leq \frac{a^2}{4} + 2 \\ b > -2a - 2 \\ b > 2a - 2 \end{cases}$$

ただし、境界は実線部のみ。





## 2.4 2018年(180分)

1  $a, b, c$  を実数とし, 3つの2次方程式

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 + bx + 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x^2 + cx + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

の解を複素数平面上で考察する.

- (1) 2つの方程式①, ②がいずれも実数解を持たないとき, それらの解はすべて同一円周上にあるか, またはすべて同一直線上にあることを示せ. また, それらの解がすべて同一円周上にあるとき, その円の中心と半径を  $a, b$  を用いて表せ.
- (2) 3つの方程式①, ②, ③がいずれも実数解を持たず, かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を  $a, b, c$  を用いて表せ.

2 次の問に答えよ.

- (1)  $35x + 91y + 65z = 3$  を満たす整数の組  $(x, y, z)$  を一組求めよ.
- (2)  $35x + 91y + 65z = 3$  を満たす整数の組  $(x, y, z)$  の中で  $x^2 + y^2$  の値が最小となるもの, およびその最小値を求めよ.

3 方程式

$$e^x(1 - \sin x) = 1$$

について, 次の問に答えよ.

- (1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ. また, 正の実数解を無限個持つことを示せ.
- (2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて  $a_1, a_2, a_3, \dots$  とし,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ とおく. このとき極限值 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} \text{ を求めよ.}$$

4  $xyz$  空間内において、連立不等式

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad |z| \leq 6$$

により定まる領域を  $V$  とし、2点  $(2, 0, 2)$ ,  $(-2, 0, -2)$  を通る直線を  $l$  とする.

- (1)  $|t| \leq 2\sqrt{2}$  を満たす実数  $t$  に対し、点  $P_t \left( \frac{t}{\sqrt{2}}, 0, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$  を通り  $l$  に垂直な平面を  $H_t$  とする. また、実数  $\theta$  に対し、点  $(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$  を通り  $z$  軸に平行な直線を  $L_\theta$  とする.  $L_\theta$  と  $H_t$  との交点の  $z$  座標を  $t$  と  $\theta$  を用いて表せ.
- (2)  $l$  を回転軸に持つ回転体で  $V$  に含まれるものを考える. このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ.

5  $xyz$  空間内の一辺の長さが1の立方体

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

を  $Q$  とする. 点  $X$  は頂点  $A(0, 0, 0)$  から出発して  $Q$  の辺上を1秒ごとに長さ1だけ進んで隣の頂点に移動する.  $X$  が  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸に平行に進む確率はそれぞれ  $p, q, r$  である. ただし

$$p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad r \geq 0, \quad p + q + r = 1$$

である.  $X$  が  $n$  秒後に頂点  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(1, 0, 1)$ ,  $D(0, 1, 1)$  にある確率をそれぞれ  $a_n, b_n, c_n, d_n$  とする.

- (1)  $a_{n+2}$  を  $a_n, b_n, c_n, d_n$  と  $p, q, r$  を用いて表せ.
- (2)  $a_n - b_n + c_n - d_n$  を  $p, q, r, n$  を用いて表せ.
- (3)  $a_n$  を  $p, q, r, n$  を用いて表せ.

## 解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x^2 + ax + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 + bx + 2 = 0 \cdots \textcircled{2}, \quad x^2 + cx + 3 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$a, b$  は実数で,  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  は実数解を持たないから,  $\textcircled{1}$  の2解を  $\alpha, \bar{\alpha}$  とし,  $\textcircled{2}$  の2解を  $\beta, \bar{\beta}$  とすると, 解と係数の関係により

$$\alpha + \bar{\alpha} = -a, \quad \alpha\bar{\alpha} = 1, \quad \beta + \bar{\beta} = -b, \quad \beta\bar{\beta} = 2 \quad \cdots (*)$$

$$\text{したがって} \quad \operatorname{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = -\frac{a}{2}, \quad \operatorname{Re}(\beta) = \frac{\beta + \bar{\beta}}{2} = -\frac{b}{2}$$

(i)  $a = b$  のとき,  $\operatorname{Re}(\alpha) = \operatorname{Re}(\beta)$  であるから, このとき, 4点  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$  は点  $-\frac{a}{2}$  を通り虚軸に平行な直線上にある.

(ii)  $a \neq b$  のとき, 2点  $\alpha, \bar{\alpha}$  を通る円の中心は実軸上にあり, 2点  $\beta, \bar{\beta}$  を通る円の中心も実軸上にある. この円の中心を  $k$  とすると ( $k$  は実数), 次式を満たすとき, 4点  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$  を通る円が存在する.

$$|\alpha - k| = |\beta - k| \quad \text{ゆえに} \quad \alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha})k = \beta\bar{\beta} - (\beta + \bar{\beta})k$$

$$(*) \text{ により} \quad 1 + ak = 2 + bk \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{1}{a - b}$$

また, この円の半径を  $r$  とすると

$$\begin{aligned} r^2 &= |\alpha - k|^2 = \alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha})k + k^2 \\ &= 1 + ak + k^2 = 1 + \frac{a}{a - b} + \frac{1}{(a - b)^2} = \frac{2a^2 - 3ab + b^2 + 1}{(a - b)^2} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad r = \frac{\sqrt{2a^2 - 3ab + b^2 + 1}}{|a - b|}$$

$$(2) \quad \textcircled{3} \text{ の2解を } \gamma, \bar{\gamma} \text{ とすると} \quad \gamma + \bar{\gamma} = -c, \quad \gamma\bar{\gamma} = 3 \quad \cdots (**)$$

$b = c$  のとき, (i) と同様にして,  $\operatorname{Re}(\beta) = \operatorname{Re}(\gamma)$  となる. このとき, 4点  $\beta, \bar{\beta}, \gamma, \bar{\gamma}$  は同一直線上にあり, 不適.

したがって,  $b \neq c$  のとき, (ii) の結果および次式を満たせばよい.

$$|\beta - k| = |\gamma - k| \quad \text{ゆえに} \quad \beta\bar{\beta} - (\beta + \bar{\beta})k = \gamma\bar{\gamma} - (\gamma + \bar{\gamma})k$$

$$(*), (**) \text{ により} \quad 2 + bk = 3 + ck \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{1}{b - c}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$  が実数解を持たないことと上式および (ii) から

$$a^2 - 4 < 0, \quad b^2 - 8 < 0, \quad c^2 - 12 < 0, \quad a - b = b - c \neq 0$$

注意 解答を  $a^2 < 4, b^2 < 8, c^2 < 12, a \neq b, a + c = 2b$  としてもよい.

別解  $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c$  とおく.

$$x^2 + \lambda_1 x + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 + \lambda_2 x + 2 = 0 \cdots \textcircled{2}, \quad x^2 + \lambda_3 x + 3 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

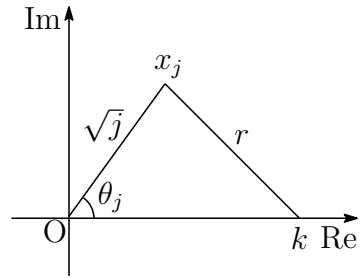
$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$  は実数解を持たないから

$$\lambda_j = -2\sqrt{j} \cos \theta_j \quad (0 < \theta_j < \pi)$$

$$x_j = \sqrt{j}(\cos \theta_j + i \sin \theta_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

とおくと,  $x_1, \bar{x}_1$  は  $\textcircled{1}$  の解,  $x_2, \bar{x}_2$  は  $\textcircled{2}$  の解,  $x_3, \bar{x}_3$  は  $\textcircled{3}$  の解である.

6点  $x_j, \bar{x}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) の実軸に関する対称性により, この6点を通る円の中心を  $k$  ( $k$  は実数), 半径を  $r$  とする. 右の図の三角形に余弦定理を適用すると



$$r^2 = j + k^2 - 2|k|\sqrt{j} \cos \theta_j$$

$$r^2 - k^2 = j + |k|\lambda_j$$

これに  $j = 1, 2, 3$  を代入すると

$$r^2 - k^2 = 1 + |k|a = 2 + |k|b = 3 + |k|c$$

したがって  $|k|(a - b) = |k|(b - c) = 1$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$  が実数解を持たないことと上式から

$$a^2 - 4 < 0, \quad b^2 - 8 < 0, \quad c^2 - 12 < 0, \quad a - b = b - c \neq 0 \quad \blacksquare$$

**2** (1)  $35x + 91y + 65z = 3$  は,  $5 \cdot 7x + 7 \cdot 13y + 5 \cdot 13z = 3 \cdots (*)$

$$35x \equiv 3 \pmod{13}, \quad 91y \equiv 3 \pmod{5}, \quad 65z \equiv 3 \pmod{7}$$

$$\text{ゆえに} \quad x \equiv 9 \pmod{13}, \quad y \equiv 3 \pmod{5}, \quad z \equiv 5 \pmod{7}$$

整数  $a, b, c$  を用いて

$$x = 9 + 13a, \quad y = 3 + 5b, \quad z = 5 + 7c \quad \cdots (**)$$

(\*\*) を (\*) に代入すると  $5 \cdot 7(9 + 13a) + 7 \cdot 13(3 + 5b) + 5 \cdot 13(5 + 7c) = 3$

整理すると  $a + b + c = -2$

$$a = b = -1, \quad c = 0 \text{ とすると } (x, y, z) = (-4, -2, 5)$$

(2)  $|x| \geq 4$  (等号は  $x = -4$  のとき),  $|y| \geq 2$  (等号は  $y = -2$  のとき) であるから,  $(x, y, z) = (-4, -2, 5)$  のとき,  $x^2 + y^2$  の最小値は **20**  $\blacksquare$

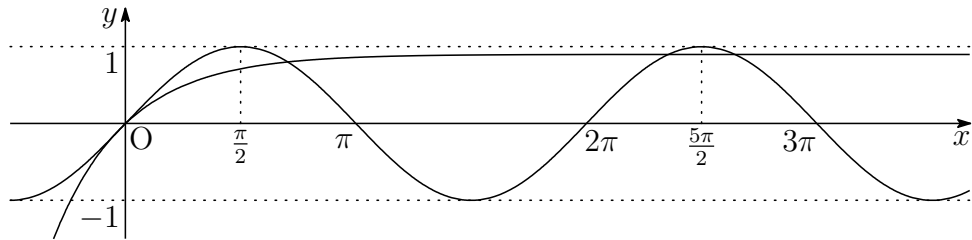
**3** (1) 方程式  $e^x(1 - \sin x) = 1$  を変形すると  $1 - e^{-x} = \sin x \cdots (*)$

(\*) より,  $f(x) = 1 - e^{-x} - \sin x$  とおくと  $f'(x) = e^{-x} - \cos x$

$$f(0) = 0, x < 0 \text{ のとき } f'(x) > 0$$

$x < 0$  において  $f(x) < 0$  であるから,  $x < 0$  において (\*) の解はない.

$x > 0$  において,  $0 < 1 - e^{-x} < 1$ . 基本周期  $2\pi$  の周期関数  $\sin x$  の値域は  $-1 \leq \sin x \leq 1$  であるから, (\*) の正の解は無数個ある.



(2)  $f(\frac{\pi}{2}) < 0, f(\pi) > 0$  より  $\frac{\pi}{2} < a_1 < \pi$

$k$  を自然数とすると

$$f(2k\pi) > 0, f((2k + \frac{1}{2})\pi) < 0, f((2k + 1)\pi) > 0$$

ゆえに  $2k\pi < a_{2k} < (2k + \frac{1}{2})\pi < a_{2k+1} < (2k + 1)\pi$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_{2k-1} &< \sum_{k=1}^m (2k-1)\pi = m^2\pi \\ \sum_{k=1}^m a_{2k} &> \sum_{k=1}^m 2k\pi = m(m+1)\pi \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^m a_{2k-1} < \sum_{k=1}^m a_{2k} \text{ であるから } 2m^2\pi < \sum_{k=1}^{2m} a_k < 2m(m+1)\pi$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{1}{(2m)^2} \sum_{k=1}^{2m} a_k < \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(2m)^2} \sum_{k=1}^{2m} a_k = \frac{\pi}{2} \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{\pi}{2}$$

■

- 4 (1) 点  $(2 \cos \theta, \sin \theta, 0)$  を  $Q$  とし,  $Q$  を通り  $z$  軸に平行な直線  $L_\theta$  と平面  $H_t$  の交点を  $R(2 \cos \theta, \sin \theta, z_R)$  とすると,  $P_t \left( \frac{t}{\sqrt{2}}, 0, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$  より

$$\overrightarrow{P_t R} = \left( 2 \cos \theta - \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \theta, z_R - \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

直線  $\ell$  の方向ベクトルを  $\vec{v} = (1, 0, 1)$  とすると,  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_t R} = 0$  であるから

$$1 \left( 2 \cos \theta - \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + 1 \left( z_R - \frac{t}{\sqrt{2}} \right) = 0 \quad \text{よって} \quad z_R = \sqrt{2}t - 2 \cos \theta$$

- (2) (1) の結果から  $\overrightarrow{P_t R} = \left( 2 \cos \theta - \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \theta, \frac{t}{\sqrt{2}} - 2 \cos \theta \right)$

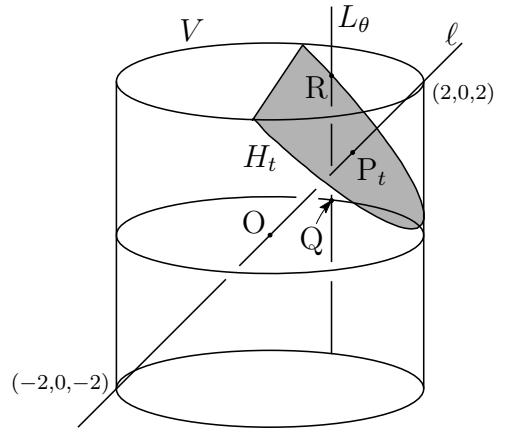
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{P_t R}|^2 &= \left( 2 \cos \theta - \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sin^2 \theta + \left( \frac{t}{\sqrt{2}} - 2 \cos \theta \right)^2 \\ &= 7 \cos^2 \theta - 4\sqrt{2}t \cos \theta + t^2 + 1 \\ &= 7 \left( \cos \theta - \frac{2\sqrt{2}t}{7} \right)^2 + 1 - \frac{t^2}{7} \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{P_t R}|^2$  の最小値を  $r^2$  とすると

$$r^2 = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{7} & \left( |t| \leq \frac{7}{2\sqrt{2}} \right) \\ (|t| - 2\sqrt{2})^2 & \left( \frac{7}{2\sqrt{2}} \leq |t| \leq 1 \right) \end{cases}$$

よって, 求める回転体の体積は,  $r^2$  が  $t$  に関する偶関数であるから

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}} \left( 1 - \frac{t^2}{7} \right) dt + 2\pi \int_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}} (t - 2\sqrt{2})^2 dt \\ &= 2\pi \left[ t - \frac{t^3}{21} \right]_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}} + \frac{2\pi}{3} \left[ (t - 2\sqrt{2})^3 \right]_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \pi \end{aligned}$$



- 5 (1) Xが $n$ 秒後にA, B, C, Dにある確率がそれぞれ $a_n, b_n, c_n, d_n$ より

$$n \text{ が偶数のとき } a_n + b_n + c_n + d_n = 1$$

$$n \text{ が奇数のとき } a_n = b_n = c_n = d_n = 0$$

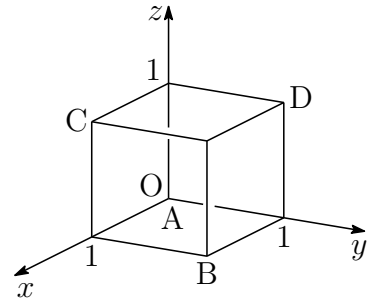
Xが $n+2$ 秒後にAにあるとき, Xは $n$ 秒後に4点A, B, C, Dのいずれかある. このとき, これらの4点からAに移動する確率は

(i) Xが $n$ 秒後にAにあるとき  $p^2 + q^2 + r^2$

(ii) Xが $n$ 秒後にBにあるとき  $2pq$

(iii) Xが $n$ 秒後にCにあるとき  $2rp$

(iv) Xが $n$ 秒後にDにあるとき  $2qr$



よって, 次の確率漸化式が成立する.

$$a_{n+2} = (p^2 + q^2 + r^2)a_n + 2pqb_n + 2rpc_n + 2qrd_n$$

- (2) (1)と同様にして,  $c_{n+2}$ を $a_n, b_n, c_n, d_n$ を用いて表すと

$$c_{n+2} = 2rpa_n + 2qrb_n + (p^2 + q^2 + r^2)c_n + 2pqd_n$$

上式および(1)の辺々を加えると

$$\begin{aligned} a_{n+2} + c_{n+2} &= (p^2 + q^2 + r^2 + 2rp)(a_n + c_n) + (2pq + 2qr)(b_n + d_n) \\ &= (p^2 + q^2 + r^2 + 2rp)(a_n + c_n) + (2pq + 2qr)(1 - a_n - c_n) \\ &= (p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2qr + 2rp)(a_n + c_n) + 2q(p + r) \\ &= (p - q + r)^2(a_n + c_n) + 2q(1 - q) \\ &= (1 - 2q)^2(a_n + c_n) + 2q(1 - q) \end{aligned}$$

したがって  $a_{n+2} + c_{n+2} - \frac{1}{2} = (1 - 2q)^2 \left( a_n + c_n - \frac{1}{2} \right)$

$n$ が偶数のとき,  $a_0 = 1, c_0 = 0$ より

$$a_n + c_n - \frac{1}{2} = (1 - 2q)^n \cdot \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a_n + c_n = \frac{1}{2} \{ 1 + (1 - 2q)^n \}$$

$a_n - b_n + c_n - d_n = a_n + c_n - (b_n + d_n) = 2(a_n + c_n) - 1$ より

$$a_n - b_n + c_n - d_n = \begin{cases} (1 - 2q)^n & (n \text{ が偶数}) \\ 0 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

(3)  $b_{n+2}, c_{n+2}$  を  $a_n, b_n, c_n, d_n$  を用いて表すと

$$b_{n+2} = 2pqa_n + (p^2 + q^2 + r^2)b_n + 2qrc_n + 2rpd_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$d_{n+2} = 2qra_n + 2rpb_n + 2pqc_n + (p^2 + q^2 + r^2)d_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

これらは (1),(2) で求めた確率漸化式

$$a_{n+2} = (p^2 + q^2 + r^2)a_n + 2pqb_n + 2rpc_n + 2qrd_n$$

$$c_{n+2} = 2rpa_n + 2qrb_n + (p^2 + q^2 + r^2)c_n + 2pqd_n$$

に対して, ① は  $b_n (b_{n+2})$  と  $c_n (c_{n+2})$ ,  $q$  と  $r$  を交換したものであり, ② は  $d_n (d_{n+2})$  と  $c_n (c_{n+2})$ ,  $q$  と  $p$  を交換したものである.  $b_0 = 0, d_0 = 0$  であるから, (2) と同様にして

$$a_n + b_n = \frac{1}{2}\{1 + (1 - 2r)^n\}$$

$$a_n + d_n = \frac{1}{2}\{1 + (1 - 2p)^n\}$$

上の2式と  $a_n + c_n = \frac{1}{2}\{1 + (1 - 2q)^n\}$  の辺々を加えると

$$2a_n + (a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{2}\{3 + (1 - 2p)^n + (1 - 2q)^n + (1 - 2r)^n\}$$

$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$  であるから

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{4}\{1 + (1 - 2p)^n + (1 - 2q)^n + (1 - 2r)^n\} & (n \text{ が偶数}) \\ 0 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

補足  $a_n$  を求めたことにより,  $a_n + b_n, a_n + c_n, a_n + d_n$  の結果により,  $n$  が偶数のとき

$$b_n = \frac{1}{4}\{1 - (1 - 2p)^n - (1 - 2q)^n + (1 - 2r)^n\}$$

$$c_n = \frac{1}{4}\{1 - (1 - 2p)^n + (1 - 2q)^n - (1 - 2r)^n\}$$

$$d_n = \frac{1}{4}\{1 + (1 - 2p)^n - (1 - 2q)^n - (1 - 2r)^n\}$$





## 2.5 2019年(180分)

- 1 (1)  $h > 0$  とする. 座標平面上の点  $O(0, 0)$ , 点  $P(h, s)$ , 点  $Q(h, t)$  に対して, 三角形  $OPQ$  の面積を  $S$  とする. ただし,  $s < t$  とする. 三角形  $OPQ$  の辺  $OP$ ,  $OQ$ ,  $PQ$  の長さをそれぞれ  $p$ ,  $q$ ,  $r$  とするとき, 不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成立するときの  $s$ ,  $t$  の値を求めよ.

- (2) 四面体  $ABCD$  の表面積を  $T$ , 辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  の長さをそれぞれ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  とし, 辺  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  の長さをそれぞれ  $l$ ,  $m$ ,  $n$  とする. このとき, 不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成立するのは四面体  $ABCD$  がどのような四面体のときか答えよ.

- 2 次の等式が  $1 \leq x \leq 2$  で成り立つような関数  $f(x)$  と定数  $A$ ,  $B$  を求めよ.

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy) dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし,  $f(x)$  は  $1 \leq x \leq 2$  に対して定義される連続関数とする.

- 3  $i$  を虚数単位とする. 実部と虚部が共に整数であるような複素数  $z$  により  $\frac{z}{3+2i}$  と表される複素数全体の集合を  $M$  とする.

- (1) 原点を中心とする半径  $r$  の円上またはその内部に含まれる  $M$  の要素の個数を  $N(r)$  とする. このとき, 集合  $\{r \mid 10 \leq N(r) < 25\}$  を求めよ.
- (2) 複素数平面の相異なる 2 点  $z$ ,  $w$  を結ぶ線分を  $L(z, w)$  で表すとき, 6 つの線分  $L(0, 1)$ ,  $L\left(1, 1 + \frac{i}{2}\right)$ ,  $L\left(1 + \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\right)$ ,  $L\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1}{2} + i\right)$ ,  $L\left(\frac{1}{2} + i, i\right)$ ,  $L(i, 0)$  で囲まれる領域の内部または境界に含まれる  $M$  の要素の個数を求めよ.

4  $H_1, \dots, H_n$  を空間内の相異なる  $n$  枚の平面とする.  $H_1, \dots, H_n$  によって空間が  $T(H_1, \dots, H_n)$  個の空間領域に分割されるとする. 例えば, 空間の座標を  $(x, y, z)$  とするとき,

- 平面  $x = 0$  を  $H_1$ , 平面  $y = 0$  を  $H_2$ , 平面  $z = 0$  を  $H_3$  とすると  
 $T(H_1, H_2, H_3) = 8$ ,
- 平面  $x = 0$  を  $H_1$ , 平面  $y = 0$  を  $H_2$ , 平面  $x + y = 1$  を  $H_3$  とすると  
 $T(H_1, H_2, H_3) = 7$ ,
- 平面  $x = 0$  を  $H_1$ , 平面  $x = 1$  を  $H_2$ , 平面  $y = 0$  を  $H_3$  とすると  
 $T(H_1, H_2, H_3) = 6$ ,
- 平面  $x = 0$  を  $H_1$ , 平面  $y = 0$  を  $H_2$ , 平面  $z = 0$  を  $H_3$ , 平面  $x + y + z = 1$  を  $H_4$  とすると  $T(H_1, H_2, H_3, H_4) = 15$ ,

である.

- (1) 各  $n$  に対して  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ.
- (2) 各  $n$  に対して  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ. ただし  $n \geq 2$  とする.
- (3) 各  $n$  に対して  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ. ただし  $n \geq 3$  とする.

5  $a = \frac{2^8}{3^4}$  として, 数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える.

- (1) 関数  $f(x) = (x+1) \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$  は  $x > 0$  で減少することを示せ.
- (2) 数列  $\{b_k\}$  の項の最大値  $M$  を既約分数で表し,  $b_k = M$  となる  $k$  をすべて求めよ.

## 解答例

1 (1)  $O(0, 0)$ ,  $P(h, s)$ ,  $Q(h, t)$  より ( $s < t$ )

$$p^2 = OP^2 = h^2 + s^2, \quad q^2 = OQ^2 = h^2 + t^2, \quad r^2 = PQ^2 = (t - s)^2$$

$S = \triangle OPQ = \frac{1}{2}h(t - s)$  であるから

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 - 4\sqrt{3}S &= (h^2 + s^2) + (h^2 + t^2) + (t - s)^2 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}h(t - s) \\ &= 2h^2 - 2\sqrt{3}(t - s)h + 2(s^2 - st + t^2) \\ &= 2 \left\{ h - \frac{\sqrt{3}}{2}(t - s) \right\}^2 + \frac{1}{2}(s + t)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

したがって  $p^2 + q^2 + r^2 \geq 4\sqrt{3}S$

上式において等号が成立するとき

$$h - \frac{\sqrt{3}}{2}(t - s) = s + t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = -\frac{h}{\sqrt{3}}, \quad t = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

このとき,  $OP = OQ = PQ = \frac{2}{\sqrt{3}}h$  であるから,  $\triangle OPQ$  は正三角形

別解  $OP$ ,  $OQ$  の偏角をそれぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  とする.

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p^2 = h^2(1 + \tan^2 \alpha)$$

$$q^2 = h^2(1 + \tan^2 \beta)$$

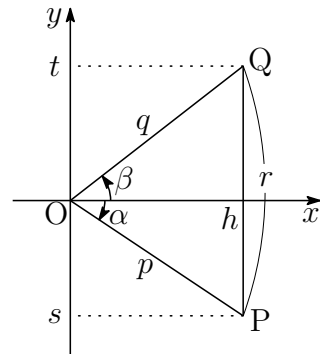
$$r^2 = h^2(\tan \beta - \tan \alpha)^2$$

$$S = \frac{1}{2}h^2(\tan \beta - \tan \alpha)$$

したがって

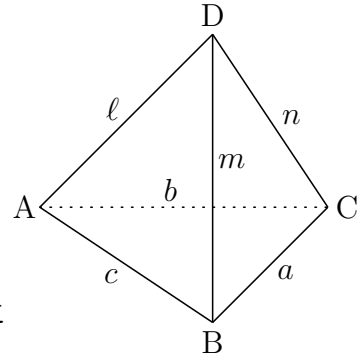
$$\begin{aligned} \frac{p^2 + q^2 + r^2 - 4\sqrt{3}S}{h^2} &= (1 + \tan^2 \alpha) + (1 + \tan^2 \beta) \\ &\quad + (\tan \beta - \tan \alpha)^2 - 2\sqrt{3}(\tan \beta - \tan \alpha) \\ &= \left(\tan \beta - \tan \alpha - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &\quad + \left(\tan \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\tan \beta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

等号が成立するとき  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{6}$  すなわち  $\triangle OPQ$  は正三角形



(2) (1)の結果を利用すると

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq 4\sqrt{3}\Delta ABC \\ c^2 + \ell^2 + m^2 &\geq 4\sqrt{3}\Delta DAB \\ a^2 + m^2 + n^2 &\geq 4\sqrt{3}\Delta DBC \\ b^2 + n^2 + \ell^2 &\geq 4\sqrt{3}\Delta DCA \end{aligned}$$



$T = \Delta ABC + \Delta DAB + \Delta DBC + \Delta DCA$  に注意して上の4式の辺々を加えると

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + \ell^2 + m^2 + n^2) \geq 4\sqrt{3}T$$

したがって  $a^2 + b^2 + c^2 + \ell^2 + m^2 + n^2 \geq 2\sqrt{3}T$

また、(1)の結論から、上式において等号が成立するとき、四面体 ABCD は正四面体である。

解説  $2s = p + q + r$  とし、3正数  $s - p, s - q, s - r$  の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(s - p) + (s - q) + (s - r)}{3} \geq \sqrt[3]{(s - p)(s - q)(s - r)} \quad \dots \textcircled{1}$$

①における等号成立条件は  $s - p = s - q = s - r$  すなわち  $p = q = r$

$$\begin{aligned} \frac{s^4}{27} &\geq s(s - p)(s - q)(s - r) \\ (2s)^2 &\geq 12\sqrt{3}\sqrt{s(s - p)(s - q)(s - r)} \\ (p + q + r)^2 &\geq 12\sqrt{3}S \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\vec{u} = (1, 1, 1), \vec{v} = (p, q, r)$  を  $|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$  に適用すると

$$\begin{aligned} (1^2 + 1^2 + 1^2)(p^2 + q^2 + r^2) &\geq (1 \cdot p + 1 \cdot q + 1 \cdot r)^2 \quad (\text{シュワルツの不等式}) \\ 3(p^2 + q^2 + r^2) &\geq (p + q + r)^2 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

③において等号が成立するとき  $\vec{u} // \vec{v}$  すなわち  $p = q = r$

②, ③より  $p^2 + q^2 + r^2 \geq 4\sqrt{3}S$  (等号が成立とき  $p = q = r$ )

この幾何不等式を **Weitzenbock** の不等式という。 ■

$$\boxed{2} \quad (*) \quad \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy) dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x} \quad (1 \leq x \leq 2)$$

(\*) の左辺について,  $t = xy$  とおくと

$y$	$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{2}{x}$	$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}$
$t$	$1 \rightarrow 2$	

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy) dy &= \int_1^2 \left| \log \frac{t}{x} \right| f(t) \frac{1}{x} dt \\ &= -\frac{1}{x} \int_1^x f(t) \log \frac{t}{x} dt + \frac{1}{x} \int_x^2 f(t) \log \frac{t}{x} dt \\ &= -\frac{1}{x} \int_1^x f(t) (\log t - \log x) dt - \frac{1}{x} \int_2^x f(t) (\log t - \log x) dt \\ &= -\frac{1}{x} \int_1^x f(t) \log t dt + \frac{\log x}{x} \int_1^x f(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{x} \int_2^x f(t) \log t dt + \frac{\log x}{x} \int_2^x f(t) dt \end{aligned}$$

上式により, (\*) の両辺に  $x$  を掛けると

$$\begin{aligned} -\int_1^x f(t) \log t dt - \int_2^x f(t) \log t dt + (\log x) \left( \int_1^x f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \right) \\ = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B \quad \dots (**)$$

(\*\*) の両辺を  $x$  について微分すると

$$\begin{aligned} -2f(x) \log x + \frac{1}{x} \left( \int_1^x f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \right) + (\log x) \cdot 2f(x) \\ = 6x(\log x - 1) + 3x + A \end{aligned}$$

上式の両辺を整理して, 両辺に  $x$  を掛けると

$$\int_1^x f(t) dt + \int_2^x f(t) dt = 6x^2 \log x - 3x^2 + Ax \quad \dots (***)$$

(\*\*\*) に  $x = 1, 2$  を代入すると

$$\int_2^1 f(t) dt = A - 3, \quad \int_1^2 f(t) dt = 2A + 24 \log 2 - 12$$

これを解いて  $A = 5 - 8 \log 2, \quad \int_1^2 f(t) dt = -2 + 8 \log 2 \quad \dots \textcircled{1}$

(\*\*) に  $x = 1, 2$  を代入すると

$$\begin{aligned} - \int_2^1 f(t) \log t \, dt &= A + B - 3 \\ - \int_1^2 f(t) \log t \, dt + (\log 2) \int_1^2 f(t) \, dt &= 2A + B + 12(\log 2 - 1) \end{aligned}$$

上の2式に ① を代入すると

$$\begin{aligned} - \int_2^1 f(t) \log t \, dt &= (5 - 8 \log 2) + B - 3, \\ - \int_1^2 f(t) \log t \, dt + (\log 2)(-2 + 8 \log 2) &= 2(5 - 8 \log 2) + B + 12(\log 2 - 1) \end{aligned}$$

これらをそれぞれ整理すると

$$\begin{aligned} - \int_2^1 f(t) \log t \, dt &= B + 2 - 8 \log 2, \\ - \int_1^2 f(t) \log t \, dt &= B - 2 - 2 \log 2 - 8(\log 2)^2 \end{aligned}$$

上の2式から  $B = 5 \log + 4(\log 2)^2$

(\*\*\*) を微分すると  $2f(x) = 12x \log x + A$

よって  $f(x) = 6x \log x + \frac{5}{2} - 4 \log 2$  ■

3 (1)  $z = a + bi$  とおくと ( $a, b$  は整数)

$$r = \left| \frac{z}{3 + 2i} \right| = \frac{|a + bi|}{|3 + 2i|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{13}}$$

$r$  を小さい順に調べると

$(a, b) = (0, 0)$ のとき	$r = 0$	(1 個)
$(a, b) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ のとき	$r = \frac{1}{\sqrt{13}}$	(4 個)
$(a, b) = (\pm 1, \pm 1)$ のとき	$r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$	(4 個)
$(a, b) = (\pm 2, 0), (0, \pm 2)$ のとき	$r = \frac{2}{\sqrt{13}}$	(4 個)
$(a, b) = (\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)$ のとき	$r = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	(8 個)
$(a, b) = (\pm 2, \pm 2)$ のとき	$r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$	(4 個)

$r$	0	$\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$
$N(r)$	1	5	9	13	21	25

よって  $\{r \mid 10 \leq N(r) < 25\}$  は  $\frac{2}{\sqrt{13}} \leq r < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$

(2) 2つの領域  $D, E$  を次のように定める.

$$D = \{x + yi \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$E = \{x + yi \mid \frac{1}{2} < x \leq 1, \frac{1}{2} < y \leq 1\}$$

6つの線分で囲まれる領域は  $D - E$  で、右の図の斜線部分である.  $z = a + bi$  とおくと

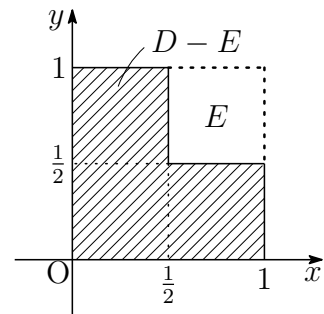
$$\frac{z}{3 + 2i} = \frac{3a + 2b}{13} + \frac{-2a + 3b}{13}i$$

これが、領域  $D$  に含まれるとき

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{3a+2b}{13} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{-2a+3b}{13} \leq 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} 0 \leq 3a + 2b \leq 13 \\ 0 \leq -2a + 3b \leq 13 \end{cases}$$

また、領域  $E$  に含まれるとき、 $a, b$  が整数であることに注意して

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{3a+2b}{13} \leq 1 \\ \frac{1}{2} < \frac{-2a+3b}{13} \leq 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (**) \quad \begin{cases} 7 \leq 3a + 2b \leq 13 \\ 7 \leq -2a + 3b \leq 13 \end{cases}$$



(\*) の2式から  $a$  を消去すると (第1式  $\times 2$  + 第2式  $\times 3$ )

$$0 \leq 2(3a + 2b) + 3(-2a + 3b) \leq 13 \times 5 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq b \leq 5$$

これらを順次, (\*) の2式に代入することにより

$b = 0$ のとき	$a = 0$	(1個)
$b = 1$ のとき	$a = 0, 1$	(2個)
$b = 2$ のとき	$a = -1, 0, 1, 2, 3$	(5個)
$b = 3$ のとき	$a = -2, -1, 0, 1, 2$	(5個)
$b = 4$ のとき	$a = 0, 1$	(2個)
$b = 5$ のとき	$a = 1$	(1個)

したがって, (\*) を満たす  $(a, b)$  の個数は

$$1 + 2 + 5 + 5 + 2 + 1 = 16 \text{ (個)}$$

(\*\*) の2式から  $a$  を消去すると (第1式  $\times 2$  + 第2式  $\times 3$ )

$$7 \times 5 \leq 2(3a + 2b) + 3(-2a + 3b) \leq 13 \times 5 \quad \text{ゆえに} \quad b = 3, 4, 5$$

これらを順次, (\*\*) の2式に代入することにより

$b = 3$ のとき	$a = 1$	(1個)
$b = 4$ のとき	$a = 0, 1$	(2個)
$b = 5$ のとき	$a = 1$	(1個)

したがって, (\*\*) を満たす  $(a, b)$  の個数は

$$1 + 2 + 1 = 4 \text{ (個)}$$

求める個数は, (\*) を満たす  $(a, b)$  の個数から (\*\*) を満たす  $(a, b)$  の個数を引けばよいから

$$16 - 4 = \mathbf{12} \text{ (個)}$$





- 4 (1) 平面の  $n$  本の直線による最大分割数を  $s_n$  とすると ( $n = 1, 2, \dots$ ), 次の漸化式が成立する.

$$s_1 = 2, \quad s_n = s_{n-1} + n \quad (n \geq 2)$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } \sum_{k=2}^n (s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=2}^n k \quad \text{ゆえに} \quad s_n - s_1 = \frac{1}{2}n(n+1) - 1$$

上の第2式は,  $n = 1$  のときも成立するから

$$s_n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$$

平面  $H_1, \dots, H_n$  による空間分割が最大分割であるとき, その最大分割数を  $r_n$  とする ( $n = 1, 2, \dots$ ).  $H_1, \dots, H_{n-1}$  と  $H_n$  との交線による平面  $H_n$  の分割数は  $s_{n-1}$  に等しく, 空間  $H_1, \dots, H_{n-1}$  による最大分割数  $r_{n-1}$  は, 平面  $H_n$  の分割により  $s_{n-1}$  だけ増加するから, 次の漸化式が成立する.

$$r_1 = 2, \quad r_n = r_{n-1} + s_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n (r_k - r_{k-1}) &= \sum_{k=2}^n s_{k-1} = \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{2}k(k-1) + 1 \right\} \\ r_n - r_1 &= \frac{1}{6} \sum_{k=2}^n \{ (k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k \} \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \{ k - (k-1) \} \end{aligned}$$

$$r_n - 2 = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + n - 1$$

上式は,  $n = 1$  のときも成立することから

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + n + 1 \\ &= \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1 \end{aligned}$$

よって,  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとり得る値のうち最も大きいものは

$$\frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$$

(2) (i)  $n = 2$  のとき

$$T(H_1, H_2) = \begin{cases} 4 & (H_1 \text{ と } H_2 \text{ が平行でない}) \\ 3 & (H_1 \text{ と } H_2 \text{ が平行}) \end{cases}$$

よって,  $T(H_1, H_2)$  のとり得る値で, 2 番目に大きいものは 3

(ii)  $n = 3$  のとき, (1) の結果および問題文にある具体例 1, 2 から,  $T(H_1, H_2, H_3)$  のとり得る最大値および 2 番目に大きい値は, それぞれ 8, 7 である.

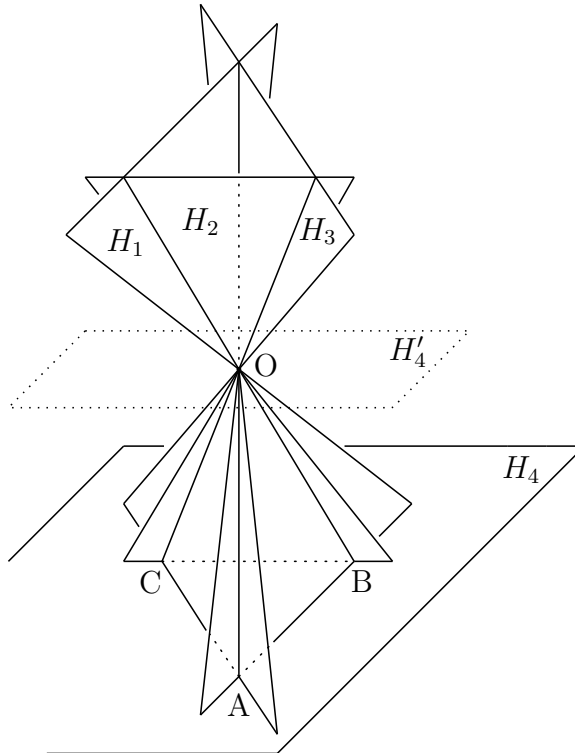
よって,  $T(H_1, H_2, H_3)$  のとり得る値で, 2 番目に大きいものは 7

(iii) 問題文にある具体例 4 では, 閉領域

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$$

が存在し,  $H_4 : x + y + z = 1$  を平行移動した平面  $H'_4 : x + y + z = 0$  に移動することで, この閉領域は退化するから

$$T(H_1, H_2, H_3, H'_4) = T(H_1, H_2, H_3, H_4) - 1 = 15 - 1 = 14$$



$n \geq 4$  のとき, 境界をもつ閉領域が存在し, 閉領域 (四面体 OABC) の頂点の 1 つを O とし, O の対面に相当する平面 (平面 ABC) を O を通る平面に移動することで, この閉領域は退化する.

(i)~(iii) から, 求める値は  $r_n - 1 = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n$

(3) 平面  $H_1, H_2, \dots, H_n$  は, 空間の最大分割を与えるものとする.

i)  $n \geq 5$  のとき, 閉領域は複数あるため, (2) で行った閉領域の頂点への平面の移動により, その閉領域を退化させることができる. その平面の移動を2回行うことで,  $T(H_1, H_2, \dots, H_n)$  のとり得る値で3番目に大きいものは

$$r_n - 2 = \frac{1}{6}n^3 - \frac{5}{6}n - 1$$

ii)  $n = 3$  のとき, (1) の結果および問題文にある具体例 1, 2, 3 から,  $T(H_1, H_2, H_3)$  のとり得る最大値, 2番目および3番目に大きい値は, それぞれ 8, 7, 6 である.

iii)  $n = 4$  のとき, 問題文の具体例 4 および (2)(iii) で示した閉領域をもつとき, 空間分割数はその最大値 15 をとる.  $T(H_1, H_2, H_3, H_4)$  が最大値以外の値をとるとき, この閉領域が退化する A), B) の場合がある.

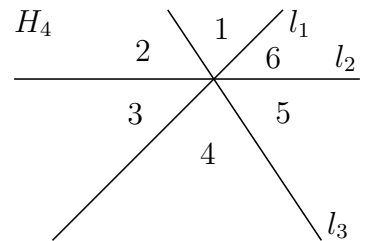
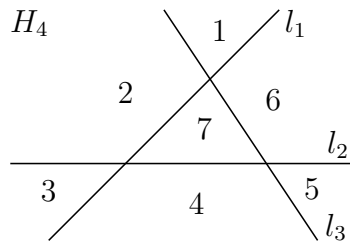
A) (2) で示したように閉領域が1つ退化して, 4平面の共有点  $O$  が, 各平面の中心となるときの, その分割数は 14 で, さらに領域を退化させるとき,  $O$  に関する対称性により, 領域は偶数個ずつ減少するから, 空間分割数が 13 になることはない (分割数は偶数).

B) (2) で示した図で3平面  $H_1, H_2, H_3$  の共有点  $O$  を解消する (領域が1つ減る), すなわち,  $H_1, H_2$  の交線と  $H_2, H_3$  の交線を平行にとるとき ( $H_1, H_3$  の交線もこれと平行), その空間分割数は,  $H_4$  に関して同数 (分割数は偶数個) であることに注意して (左下の図)

$$15 - 1 = 7 \times 2 = 14$$

$H_1, H_2, H_3$  の  $H_4$  との交線を, それぞれ,  $l_1, l_2, l_3$  とする. 特に,  $l_1, l_2, l_3$  が1点で交わるとき, その空間分割数は (右下の図)

$$6 \times 2 = 12$$



i)~iii) から, 求める値は 
$$\begin{cases} \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n - 1 & (n \neq 4) \\ 12 & (n = 4) \end{cases}$$

## 空間の最大分割数

非負の整数  $p, q$  について,  $\binom{p}{q} = \begin{cases} 0 & (p < q) \\ {}_p C_q & (p \geq q) \end{cases}$  とすると

$$\binom{p}{q} = \binom{p+1}{q+1} - \binom{p}{q+1}$$

(1) で求めた平面の直線による最大分割数  $s_n$  は

$$s_n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

空間の平面による最大分割数  $r_n$  は,  $r_1 = 2, r_n = r_{n-1} + s_{n-1} (n \geq 2)$  より

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n (r_k - r_{k-1}) &= \sum_{k=2}^n s_{k-1} \\ r_n - 2 &= \sum_{k=2}^n \left\{ 1 + \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} \right\} \\ r_n &= 1 + n + \sum_{k=2}^n \binom{k-1}{1} + \sum_{k=2}^n \binom{k-1}{2} \\ &= 1 + n + \sum_{k=2}^n \left\{ \binom{k}{2} - \binom{k-1}{2} \right\} \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \left\{ \binom{k}{3} - \binom{k-1}{3} \right\} \\ r_n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \end{aligned}$$

$m$  次元空間における  $n$  個の余次元  $1(m-1$  次元) の超平面による最大分割数は

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{m}$$

である (帰納法により示すことができる).

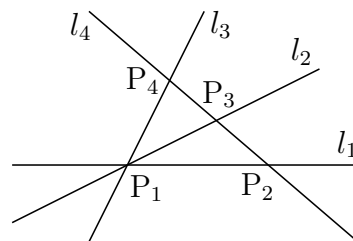
## 平面の直線による分割

平面の  $n$  本の直線による分割について ( $n \geq 2$ ), オイラーの多面体定理<sup>1</sup>を用いた証明を与える. 交点の総数を  $p$ , 直線が交点で分断される線分の総数を  $S'$ , 半直線の総数を  $S''$  とし,  $S = S' + S''$  とする. 境界がすべて線分である領域を閉領域, 半直線を境界に持つ領域を開領域という. 閉領域, 開領域の総数を, それぞれ  $R'$ ,  $R''$  とし,  $R = R' + R''$  とおく.

交点の重複度を与える関数を  $\lambda$  とする. 例えば, 右の図における  $P_k$  の重複度は次のようになる.

$$\lambda(P_1) = 3, \quad \lambda(P_2) = \lambda(P_3) = \lambda(P_4) = 2$$

$l_1$  上には交点が2個, 線分が1個あり,  $l_4$  上には交点が3個, 線分が2個ある (交点の数=線分の数+1).



一般に,  $n$  本の直線について, 交点の個数および線分の本数の総和を求めると

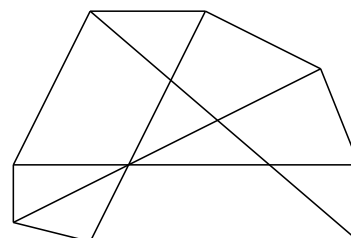
$$\sum_{k=1}^p \lambda(P_k) = S' + n$$

また, 半直線の本数および開領域の個数は, 半直線が放射状に伸びた部分から

$$S'' = 2n, \quad R'' = 2n$$

$$S = S' + S'' \text{ より } S = \sum_{k=1}^p \lambda(P_k) + n$$

右の図のように,  $n$  本の半直線上に点を取り, それらを結んでできる図形を考え, その周囲の辺を底面とする立体を考える. その立体の頂点, 辺, 領域の数は, それぞれ  $p + 2n$ ,  $S + 2n$ ,  $R + 1$  となる. これをオイラーの多面体定理に適用すると



$$(p + 2n) - (S + 2n) + (R + 1) = 2$$

$$\text{よって } R = 1 - p + S = 1 - p + \sum_{k=1}^p \lambda(P_k) + n$$

$$= 1 + n + p + \sum_{k=1}^p \{\lambda(P_k) - 2\},$$

$$R' = 1 - n + p + \sum_{k=1}^p \{\lambda(P_k) - 2\}$$

重複度が3以上の交点について, その重複を1つ解消する  $(-1)$  ごとに  $p$  が2増えるから, すべての交点の重複度が2のとき,  $R$  は最大となり, このとき  $p = {}_n C_2$ . ■

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2016\\_10\\_19.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2016_10_19.pdf) を参照.

5 (1)  $f(x) = (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  より ( $x > 0$ )

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x+1) \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x} \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \int_x^{x+1} \frac{dt}{x} = \int_x^{x+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right) dt < 0 \end{aligned}$$

よって、関数  $f(x)$  は  $x > 0$  で単調減少.

(2)  $a = \frac{2^8}{3^4}$ . 数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$b_k > 0$  に注意して、両辺の自然対数をとると

$$\log b_k = (k+1) \log(k+1) - k \log a - \log k!$$

$$\text{ゆえに} \quad \log b_{k+1} = (k+2) \log(k+2) - (k+1) \log a - \log(k+1)!$$

上の2式から

$$\begin{aligned} \log b_{k+1} - \log b_k &= (k+2) \log(k+2) - (k+2) \log(k+1) - \log a \\ &= (k+2) \log\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) - \log a \\ &= f(k+1) - \log a \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$2^2 > \frac{2^8}{3^4} > e$ ,  $f(1) = 2 \log 2$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k+1) = 1$  および (1) の結論により

$$f(k+1) - \log a = 0$$

を満たす  $k$  はただ一つ存在し、実際、 $k+1 = 3$  のとき

$$\log\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2} - \log\left(\frac{4}{3}\right)^4 = 0$$

(\*) より  $b_1 < b_2 = b_3 > b_4 > b_5 > \dots$

よって  $b_k = M$  となる  $k$  は  $\mathbf{k = 2, 3}$

$$M = b_2 = \frac{3^3}{a^2 2!} = \frac{3^3}{2} \left(\frac{3^4}{2^8}\right)^2 = \frac{\mathbf{3^{11}}}{\mathbf{2^{17}}} \quad \left( = \frac{177147}{131072} \right)$$

補足  $g(x) = x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$  とすると ( $x > 0$ )

$$\begin{aligned} g'(x) &= \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1} \\ &= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \int_x^{x+1} \frac{dt}{x+1} = \int_x^{x+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x+1}\right) dt > 0 \end{aligned}$$

よって,  $g(x)$  は  $x > 0$  で単調増加. また

$$f(x) - g(x) = (x+1) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

ゆえに  $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - g(x)\} = 0$  すなわち  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \quad \cdots (A)$

$$f'(x) < 0 \text{ より } \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0 \quad \text{ゆえに } \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 1$$

$$g'(x) > 0 \text{ より } \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0 \quad \text{ゆえに } 1 < \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\text{上の2式から } \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 1 < \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$G(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad F(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad \text{とおくと}$$

$$G(x) < e < F(x)$$

(A) より,  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$  であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = e$$

さらに,  $G(x) = F(-x-1)$  であるから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(-x-1) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x-1) = e$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = e, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = e$  であるから<sup>2</sup>

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

■

<sup>2</sup>数列の証明は, [http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_tech.2017\\_kouki.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2017_kouki.pdf) の p.9 を参照.

## 第 3 章 名古屋大学

### 出題分野 (2010-2019) 150 分

◀	名古屋大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2次関数							1			
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式						2				
	図形と方程式		3								
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法			1							
III	式と曲線										
	複素数平面								4		
	関数										
	極限					3					
	微分法とその応用					2	1	2		2	
	積分法				2					1	
	積分法の応用	2	1		4	1	3		1		1・4
A	場合の数と確率			3							4
	整数の性質	4	4	4	3			4		3	3
	図形の性質										
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル	1							3		2
	数列	3			1	4	4	3	2	4	
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		2	2							

数字は問題番号



## 3.1 2015年(150分)

1 次の問に答えよ.

- (1) 関数  $f(x) = x^{-2} 2^x$  ( $x \neq 0$ ) について,  $f'(x) > 0$  となるための  $x$  に関する条件を求めよ.
- (2) 方程式  $2^x = x^2$  は相異なる3個の実数解をもつことを示せ.
- (3) 方程式  $2^x = x^2$  の解で有理数であるものをすべて求めよ.

2 次の問に答えよ.

- (1)  $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$  とするとき, 整数係数の4次多項式  $f(x)$  で  $f(\alpha) = 0$  となるもののうち,  $x^4$  の係数が1であるものを求めよ.
- (2) 8つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

(ただし, 複号  $\pm$  はすべての可能性にわたる)の中で, (1) で求めた  $f(x)$  に対して方程式  $f(x) = 0$  の解となるものをすべて求め, それ以外のものが解でないことを示せ.

- (3) (2) で求めた  $f(x) = 0$  の解の大小関係を調べ, それらを大きい順に並べよ.

3  $e$  を自然対数の底とし,  $t$  を  $t > e$  となる実数とする. このとき, 曲線  $C: y = e^x$  と直線  $y = tx$  は相異なる2点で交わるので, 交点のうち  $x$  座標が小さいものを  $P$ , 大きいものを  $Q$  とし,  $P, Q$  の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とする. また,  $P$  における  $C$  の接線と  $Q$  における  $C$  の接線との交点を  $R$  とし,

曲線  $C$ ,  $x$  軸および2つの直線  $x = \alpha, x = \beta$  で囲まれる部分の面積を  $S_1$ ,

曲線  $C$  および2つの直線  $PR, QR$  で囲まれる部分の面積を  $S_2$

とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $\frac{S_2}{S_1}$  を  $\alpha$  と  $\beta$  を用いて表せ.
- (2)  $\alpha < \frac{e}{t}$ ,  $\beta < 2 \log t$  となることを示し,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$  を求めよ. 必要ならば,  $x > 0$  のとき  $e^x > x^2$  であることを証明なしに用いてよい.

- 4 数直線上にある1, 2, 3, 4, 5の5つの点と1つの石を考える. 石がいずれかの点にあるとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{石が点1にあるならば, 確率1で点2に移動する} \\ \text{石が点 } k \ (k=2,3,4) \text{ にあるならば,} \\ \quad \text{確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点5にあるならば, 確率1で4に移動する} \end{array} \right.$$

という試行を行う. 石が点1にある状態から始め, この試行を繰り返す. また, 石が移動した先の点に印をつけていく (点1には初めから印がついているものとする). このとき, 次の間に答えよ.

- (1) 試行を6回繰り返した後に, 石が点 $k$  ( $k=1,2,3,4,5$ )にある確率をそれぞれ求めよ.
- (2) 試行を6回繰り返した後に, 5つの点すべてに印がついている確率を求めよ.
- (3) 試行を $n$ 回 ( $n \geq 1$ )繰り返した後に, ちょうど3つの点に印がついている確率を求めよ.

## 解答例

1 (1)  $f(x) = x^{-2} 2^x$  を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x^{-3} 2^x + x^{-2} 2^x \log 2 = x^{-3} 2^x (-2 + x \log 2) \\ &= \frac{2^x}{x^2} \cdot \frac{x \log 2 - 2}{x} \end{aligned}$$

$\frac{2^x}{x^2} > 0$  であるから,  $f'(x) > 0$  となるのは

$$\frac{x \log 2 - 2}{x} > 0 \quad \text{すなわち} \quad x < 0, \quad \frac{2}{\log 2} < x$$

(2)  $f(x) = 1$  が異なる 3 つの実数解をもつことを示せばよい.

(1) の結果により,  $f(x)$  の増減表は次のようになる.

$x$	...	(0)	...	$\frac{2}{\log 2}$	...
$f'(x)$	+		-	0	+
$f(x)$	↗		↘	極小	↗

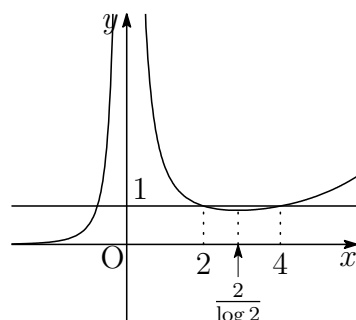
$2 < e < 4$  より,  $\log 2 < 1 < 2 \log 2$  であるから

$$2 < \frac{2}{\log 2} < 4$$

$f(2) = f(4) = 1$  であるから  $f\left(\frac{2}{\log 2}\right) < 1$

また  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



補足 直接  $f\left(\frac{2}{\log 2}\right) < 1$  を示すこともできる.

$$f\left(\frac{2}{\log 2}\right) = \left(\frac{2}{\log 2}\right)^{-2} 2^{\frac{2}{\log 2}} = \left(\frac{\log 2}{2}\right)^2 e^2 = \left(\frac{e \log 2}{2}\right)^2$$

ここで,  $g(x) = \frac{\log x}{x}$  とおくと  $g'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$

$2 < x < e$  において  $g'(x) > 0$  であるから,  $g(2) < g(e)$  より

$$\frac{\log 2}{2} < \frac{\log e}{e} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \frac{e \log 2}{2} < 1 \quad \text{よって} \quad f\left(\frac{2}{\log 2}\right) < 1$$

- (3) (2)の結果から,  $2^x = x^2$  が負の有理数  $-\frac{p}{q}$  ( $p, q$  は正の整数で互いに素) をもつと仮定すると

$$2^{-\frac{p}{q}} = \left(-\frac{p}{q}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

さらに両辺を  $q$  乗すると  $2^p = \left(\frac{q}{p}\right)^{2q}$

上式の右辺は整数であるから  $p = 1$  ゆえに  $2 = q^{2q}$

これを満たす正の整数  $q$  は存在しない.

よって, (2)の結果から, 求める有理数の解は **2, 4** ■

- 2** (1)  $p = \sqrt{9 + 2\sqrt{17}}$ ,  $q = \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$  とおくと

$$p^2 + q^2 = 18, \quad pq = \sqrt{13}$$

であるから,  $\alpha = pq + p + q$  より

$$(\alpha - pq)^2 = (p + q)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 - 2pq\alpha + (pq)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

したがって  $\alpha^2 - 2\sqrt{13}\alpha + 13 = 18 + 2\sqrt{13}$

$$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{13}(\alpha + 1)$$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2 - 5)^2 = 52(\alpha + 1)^2 \quad \text{すなわち} \quad \alpha^4 - 62\alpha^2 - 104\alpha - 27 = 0$$

よって  $f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27$

- (2) (1)の式変形に注意すると,  $f(x) = 0$  は  $(x^2 - 5)^2 = 52(x + 1)^2$

(i)  $x^2 - 5 = 2\sqrt{13}(x + 1)$  のとき

$$x^2 - 2\sqrt{13}x + 13 = 18 + 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x - pq)^2 = (p + q)^2$$

したがって  $x - pq = \pm(p + q)$  すなわち  $x = pq + p + q, pq - p - q$

(ii)  $x^2 - 5 = -2\sqrt{13}(x + 1)$  のとき

$$x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = 18 - 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x + pq)^2 = (p - q)^2$$

したがって  $x + pq = \pm(p - q)$  すなわち  $x = -pq + p - q, -pq - p + q$

(i), (ii) から,  $f(x) = 0$  の解は

$$\begin{aligned} & \sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ & \sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ & -\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ & -\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}} \end{aligned}$$

(3) (2) で求めた解を

$$\begin{aligned} \alpha &= pq + p + q, & \beta &= -pq + p - q, \\ \gamma &= pq - p - q, & \delta &= -pq - p + q \end{aligned}$$

とおく. ここで  $p = \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} > \sqrt{9 + 2\sqrt{16}} = \sqrt{17}$ ,  
 $q = \sqrt{9 - 2\sqrt{17}} < \sqrt{9 - 2\sqrt{16}} = 1$

したがって  $\alpha - \beta = 2pq + 2q = 2q(p + 1) > 0$   
 $\beta - \gamma = 2p - 2pq = 2p(1 - q) > 0$   
 $\gamma - \delta = 2pq - 2q = 2q(p - 1) > 0$

上の3式から,  $\alpha > \beta > \gamma > \delta$  となる. よって, 大きい順に

$$\begin{aligned} & \sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ & -\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ & \sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ & -\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}} \end{aligned}$$

解説 4次方程式  $x^4 - 62x^2 - 104x - 27 = 0 \dots (*)$  が

$$(x^2 - 5)^2 = 52(x + 1)^2$$

と変形できることを利用して(フェラーリの方法), 解を求めている.  
 本題(1)はこの変形につながる設問となっている.

手がかりになしに, 方程式(\*)を解くとすると

$$x^4 - 62x^2 - 104x - 27 = (x^2 + k)^2 - (px + q)^2$$

とおき( $k, p, q$ は定数), 上式の右辺を展開して整理すると

$$x^4 - 62x^2 - 104x - 27 = x^4 + (2k - p^2)x^2 - 2pqx + k^2 - q^2$$

同じ次数の項の係数を比較すると  $p^2 = 2k + 62$ ,  $pq = 52$ ,  $q^2 = k^2 + 27$

これらの3式から,  $p, q$ を消去すると  $(2k + 62)(k^2 + 27) = 52^2$

整理すると  $k^3 + 31k^2 + 27k - 515 = 0 \dots (**)$

因数定理により  $(k + 5)(k^2 + 26k - 103) = 0$

$k = -5$ とすると,  $p = q = \pm 2\sqrt{13}$ となり,  $(*)$ の解が求まる.

余談だが, 3次方程式 $(**)$ を一般的な方法(カルダノの方法)で解いてみる.

$k = t - \frac{31}{3} \dots \textcircled{1}$ とおいて,  $(**)$ に代入すると

$$\left(t - \frac{31}{3}\right)^3 + 31\left(t - \frac{31}{3}\right)^2 + 27\left(t - \frac{31}{3}\right) - 515 = 0$$

整理すると  $t^3 - \frac{880}{3}t + \frac{38144}{27} = 0$

$t = u + v$ とおいて, これに代入すると

$$\begin{aligned} (u + v)^3 - \frac{880}{3}(u + v) + \frac{38144}{27} &= 0 \\ 3(u + v)\left(uv - \frac{880}{9}\right) + u^3 + v^3 + \frac{38144}{27} &= 0 \end{aligned}$$

$uv = \frac{880}{9}$ ,  $u^3 + v^3 = -\frac{38144}{27}$ とし,  $u^3, v^3$ を解とする2次方程式

$$X^2 + \frac{38144}{27}X + \left(\frac{880}{9}\right)^3 = 0$$

これを解くと  $X = \frac{64}{27}(-298 \pm 39\sqrt{51}i) = \left\{\frac{4}{3}(2 \mp \sqrt{51}i)\right\}^3$  (複号同順)

$z = \frac{4}{3}(2 + \sqrt{51}i)$ ,  $w = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ とおくと,  $uv$ は実数であるから

$$\begin{aligned} t &= z + \bar{z}, \quad zw + \bar{z}\bar{w}, \quad z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= \frac{16}{3}, \quad -\frac{8}{3} - 4\sqrt{17}, \quad -\frac{8}{3} + 4\sqrt{17} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ より  $k = -5, -13 - 4\sqrt{17}, -13 + 4\sqrt{17}$

一般に, 4次方程式  $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ は,  $x = y - \frac{a_3}{4}$ おくことにより,  $y^4 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$ と変形でき, フェラーリの方法が適用できる. フェラーリの方法の中で, 3次方程式を解く必要があり, 3次方程式の一般的な解法がカルダノの方法である. さらにカルダノの方法の中で2次方程式の解の公式を用いている. ■

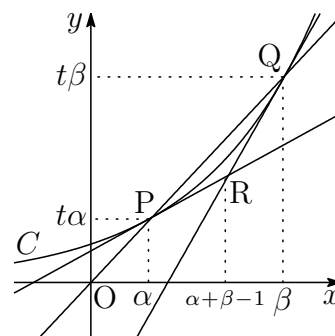
**3** (1)  $y = e^x$  を微分すると  $y' = e^x$

$C$  上の点  $P(\alpha, e^\alpha)$  および  $Q(\beta, e^\beta)$  における接線の方程式は, それぞれ

$$\begin{cases} y - e^\alpha = e^\alpha(x - \alpha) \\ y - e^\beta = e^\beta(x - \beta) \end{cases}$$

$e^\alpha = t\alpha$ ,  $e^\beta = t\beta$  であるから, 上の2式は

$$\begin{cases} y = t\alpha(x + 1 - \alpha) \\ y = t\beta(x + 1 - \beta) \end{cases} \quad \text{これを解いて } R(\alpha + \beta - 1, t\alpha\beta)$$



3点  $P(\alpha, t\alpha)$ ,  $R(\alpha + \beta - 1, t\alpha\beta)$ ,  $Q(\beta, t\beta)$  から  $x$  軸にそれぞれ垂線  $PP'$ ,  $RR'$ ,  $QQ'$  を引くと,  $P'R' = \beta - 1$ ,  $R'Q' = 1 - \alpha$  より

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 - (\text{台形 } PP'R'R \text{ の面積}) - (\text{台形 } RR'Q'Q \text{ の面積}) \\ &= t(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}(\beta - 1)(t\alpha + t\alpha\beta) - \frac{1}{2}(1 - \alpha)(t\alpha\beta + t\beta) \\ &= t(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}t\alpha(\beta - 1)(\beta + 1) - \frac{1}{2}t\beta(1 - \alpha)(1 + \alpha) \\ &= t(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}t\alpha(\beta^2 - 1) - \frac{1}{2}t\beta(1 - \alpha^2) \\ &= t(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}t(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}t\alpha\beta(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}t(\beta - \alpha)(1 - \alpha\beta) \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}(1 - \alpha\beta)$$

(2)  $C$  上の点  $P$  における接線の傾きは  $e^\alpha$

これと直線  $PQ$  の傾き  $t$  との大小関係により  $e^\alpha < t$

このとき,  $e^\alpha = t\alpha$  であるから  $t\alpha < t$

$t > 0$  であるから  $\alpha < 1$  ゆえに  $t\alpha = e^\alpha < e$  よって  $\alpha < \frac{e}{t}$

また,  $e^\beta > \beta^2$  ( $\beta > 0$ ) であるから  $t\beta = e^\beta > \beta^2$  より  $t > \beta$

ゆえに  $t^2 > t\beta = e^\beta$  したがって  $\log t^2 > \beta$  よって  $\beta < 2\log t$

$0 < \alpha < \frac{e}{t}$ ,  $0 < \beta < 2\log t$  より  $0 < \alpha\beta < 2e \cdot \frac{\log t}{t}$  ... ①

ここで,  $t = e^u$  とおくと  $0 < \frac{\log t}{t} = \frac{u}{e^u} < \frac{u}{u^2} = \frac{1}{u}$

$t \rightarrow \infty$  のとき,  $u \rightarrow \infty$  であるから

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\log t} = 0$$

① より  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha\beta = 0$  よって  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - \alpha\beta) = \frac{1}{2}$

補足  $C: y = e^x$  上の点  $(1, e)$  における接線の方程式は  $y = ex$

$$e^x > x^2 \quad \dots (*)$$

(i)  $0 < x < 1$  のとき,  $e^x > 1 > x^2$  よって, (\*) は成立する.

(ii)  $x = 1$  のとき, 明らかに (\*) は成立する.

(iii)  $x > 1$  のとき,  $e^x - ex > 0$  であるから ( $y = e^x$  と  $y = ex$  のグラフ)

$$\begin{aligned} \int_1^x (e^t - et) dt &= \left[ e^t - \frac{e}{2}t^2 \right]_1^x = e^x - e - \frac{e}{2}(x^2 - 1) \\ &= e^x - \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{2} > 0 \end{aligned}$$

したがって  $e^x > \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{2} > x^2$  よって, (\*) は成立する.

(i)~(iii) から,  $x > 0$  のとき, (\*) は成立する. ■



4 (1)  $n$  回繰り返した後に、石が点  $k$  にある確率を  $P_n(k)$  とする ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

$n$  が奇数のとき  $P_n(1) = P_n(3) = P_n(5) = 0$

$n$  が偶数のとき  $P_n(2) = P_n(4) = 0$

$n$  が奇数のとき、石は点 2 または 4 にある. このとき

$$P_{2j+1}(2) = P_{2j-1}(2) \times \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

したがって、 $j$  を自然数とすると、次の確率漸化式が成立する.

$$P_1(2) = 1, P_1(4) = 0$$

$$(*) \begin{cases} P_{2j+1}(2) = \frac{3}{4}P_{2j-1}(2) + \frac{1}{4}P_{2j-1}(4) \\ P_{2j+1}(4) = \frac{1}{4}P_{2j-1}(2) + \frac{3}{4}P_{2j-1}(4) \end{cases}$$

(\*) に  $j = 1$  を代入すると

$$P_3(2) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4}, \quad P_3(4) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4}$$

さらに、(\*) に  $j = 2$  を代入すると

$$P_5(2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}, \quad P_5(4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

したがって

$$P_6(1) = P_5(2) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

$$P_6(3) = P_5(2) \times \frac{1}{2} + P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_6(5) = P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$P_6(2) = P_6(4) = 0$$

別解 (\*) より, 自然数  $j$  について

$$\begin{aligned} P_{2j+1}(2) + P_{2j+1}(4) &= P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4) \\ &= 1 + 0 = 1, \\ P_{2j+1}(2) - P_{2j+1}(4) &= \frac{1}{2}(P_{2j-1}(2) - P_{2j-1}(4)) \\ &= \frac{1}{2^j}(P_1(2) - P_1(4)) = \frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

$P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4) = 1$  および  $P_{2j-1}(2) - P_{2j-1}(4) = \frac{1}{2^{j-1}}$  から

$$P_{2j-1}(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^j}, \quad P_{2j-1}(4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^j}$$

したがって  $P_{2j}(1) = \frac{1}{2}P_{2j-1}(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{j+1}}$ ,

$$P_{2j}(3) = \frac{1}{2}P_{2j-1}(2) + \frac{1}{2}P_{2j-1}(4) = \frac{1}{2},$$

$$P_{2j}(5) = \frac{1}{2}P_{2j-1}(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{j+1}}$$

上式に,  $j = 3$  を代入すると  $P_6(1) = \frac{5}{16}$ ,  $P_6(3) = \frac{1}{2}$ ,  $P_6(5) = \frac{3}{16}$

また  $P_6(2) = P_6(4) = 0$

補足  $n$  が奇数のとき,  $P_n(1) = P_n(3) = P_n(5) = 0$

$$P_n(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}, \quad P_n(4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

$n$  が偶数のとき,  $P_n(2) = P_n(4) = 0$

$$P_n(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}, \quad P_n(3) = \frac{1}{2}, \quad P_n(5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}$$

(2) 4回繰り返した後に, 点5, 点3にある確率は

$$P_4(5) = P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P_4(3) = P_3(2) \times \frac{1}{2} + P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって, 6回繰り返した後に, 5つの点すべてに印がつく確率は

$$P_4(5) + P_4(3) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- (3) 試行により、石が点1, 点2, 点3のいずれかを移動するとき、奇数回目の試行の後に石は、点2にある.  $2j-1$ 回目の試行の後に石が点2にある確率を  $x_{2j-1}$  とすると

$$x_{2j+1} = x_{2j-1} \times \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

したがって、次の確率漸化式が成立する.

$$x_1 = 1, \quad x_{2j+1} = \frac{3}{4}x_{2j-1}$$

これを解いて 
$$x_{2j-1} = \left( \frac{3}{4} \right)^{j-1} \quad (j \geq 1)$$

このとき、 $2j$ 回目の試行の後に石が点1または点3にある確率は  $\left( \frac{3}{4} \right)^{j-1}$

試行により、石が点1, 点2のいずれかを移動するとき、奇数回目の試行の後に石は、点2にある.  $2j-1$ 回目の試行の後に石が点2にある確率を  $y_{2j-1}$  とすると

$$y_{2j+1} = y_{2j-1} \times \frac{1}{2} \cdot 1$$

したがって、次の確率漸化式が成立する.

$$y_1 = 1, \quad y_{2j+1} = \frac{1}{2}y_{2j-1}$$

これを解いて 
$$y_{2j-1} = \left( \frac{1}{2} \right)^{j-1} \quad (j \geq 1)$$

このとき、 $2j$ 回目の試行の後に石が点1にある確率は  $y_{2j-1} \times \frac{1}{2} = \left( \frac{1}{2} \right)^j$

以上の結果から

(i)  $n = 2j - 1$  のとき、求める確率は  $\left( \frac{3}{4} \right)^{j-1} - \left( \frac{1}{2} \right)^{j-1}$

(ii)  $n = 2j$  のとき、求める確率は  $\left( \frac{3}{4} \right)^{j-1} - \left( \frac{1}{2} \right)^j$

(i), (ii) から  $n$  が奇数のとき  $\left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{n-1}{2}} - \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}}$

$n$  が偶数のとき  $\left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{n-2}{2}} - \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}}$



### 3.2 2016年(150分)

- 1 曲線  $y = x^2$  上に2点  $A(-2, 4)$ ,  $B(b, b^2)$  をとる. ただし  $b > -2$  とする. このとき, 次の条件を満たす  $b$  の範囲を求めよ.

条件:  $y = x^2$  上の点  $T(t, t^2)$  ( $-2 < t < b$ ) で,  $\angle ATB$  が直角になるものが存在する.

- 2 2つの円  $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$  と  $D: (x+2)^2 + y^2 = 7^2$  を考える. また原点を  $O(0, 0)$  とする. このとき, 次の間に答えよ.

- (1) 円  $C$  上に,  $y$  座標が正であるような点  $P$  をとり,  $x$  軸の正の部分と線分  $OP$  のなす角を  $\theta$  とする. このとき, 点  $P$  の座標と線分  $OP$  の長さを  $\theta$  を用いて表せ.
- (2) (1) でとった点  $P$  を固定したまま, 点  $Q$  が円  $D$  上を動くとき,  $\triangle OPQ$  の面積が最大となるときの  $Q$  の座標を  $\theta$  を用いて表せ.
- (3) 点  $P$  が円  $C$  上を動き, 点  $Q$  が円  $D$  上を動くとき,  $\triangle OPQ$  の面積の最大値を求めよ. ただし (2), (3) においては, 3点  $O, P, Q$  が同一直線上にあるときは,  $\triangle OPQ$  の面積は  $0$  であるとする.

- 3 玉が2個ずつ入った2つの袋  $A, B$  があるとき, 袋  $B$  から玉を1個取り出して袋  $A$  に入れ, 次に袋  $A$  から玉を1個取り出して袋  $B$  に入れる, という操作を1回の操作と数えることにする.  $A$  に赤玉が2個,  $B$  に白玉が2個入った状態から始め, この操作を  $n$  回繰り返した後に袋  $B$  に入っている赤玉の個数が  $k$  個である確率を  $P_n(k)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とする. このとき, 次の間に答えよ.

- (1)  $k = 0, 1, 2$  に対する  $P_1(k)$  を求めよ.
- (2)  $k = 0, 1, 2$  に対する  $P_n(k)$  を求めよ.

4 次の問に答えよ。ただし2次方程式の重解は2つと数える。

(1) 次の条件(\*)を満たす整数  $a, b, c, d, e, f$  の組をすべて求めよ。

$$(*) \begin{cases} 2 \text{次方程式 } x^2 + ax + b = 0 \text{ の2つの解が } c, d \text{ である。} \\ 2 \text{次方程式 } x^2 + cx + d = 0 \text{ の2つの解が } e, f \text{ である。} \\ 2 \text{次方程式 } x^2 + ex + f = 0 \text{ の2つの解が } a, b \text{ である。} \end{cases}$$

(2) 2つの数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は、次の条件(\*\*)を満たすとする。

(\*\*) すべての正の整数  $n$  について、 $a_n, b_n$  は整数であり、2次方程式

$$x^2 + a_n x + b_n = 0$$

の2つの解が  $a_{n+1}, b_{n+1}$  である。

このとき

- (i) 正の整数  $m$  で、 $|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \dots$  となるものが存在することを示せ。
- (ii) 条件(\*\*)を満たす数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  の組をすべて求めよ。

解答例

1 直線 AT の傾きは  $\frac{t^2-4}{t+2} = t-2$ , 直線 BT の傾きは  $\frac{t^2-b^2}{t-b} = t+b$

∠ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b) = -1 \quad \text{整理すると} \quad t^2 + (b-2)t - 2b + 1 = 0 \quad \dots (*)$$

方程式 (\*) が,  $-2 < t < b$  に解をもつ条件を求めればよい. ここで

$$f(t) = t^2 + (b-2)t - 2b + 1 = \left(t + \frac{b-2}{2}\right)^2 - \frac{b^2+4b}{4} \quad (-2 \leq t \leq b)$$

の最大値を  $M$ , 最小値を  $m$  とすると

$$M = \begin{cases} f(-2) & (-2 < b < 2) \\ f(b) & (2 \leq b) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} f(b) & (-2 < b < \frac{2}{3}) \\ f(\frac{2-b}{2}) & (\frac{2}{3} \leq b \leq 6) \\ f(-2) & (6 < b) \end{cases}$$

$$f(-2) = -4b + 9, \quad f(b) = 2b^2 - 4b + 1, \quad f\left(\frac{2-b}{2}\right) = -\frac{b^2+4b}{4}$$

方程式 (\*) が  $-2 < t < b$  に解をもつことから

$$(i) \quad -2 < b < \frac{2}{3} \text{ のとき} \quad \begin{cases} -4b + 9 > 0 \\ 2b^2 - 4b + 1 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2-\sqrt{2}}{2} < b < \frac{2}{3}$$

$$(ii) \quad \frac{2}{3} \leq b < 2 \text{ のとき} \quad \begin{cases} -4b + 9 > 0 \\ -\frac{b^2+4b}{4} \leq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{3} \leq b < 2$$

$$(iii) \quad 2 \leq b \leq 6 \text{ のとき} \quad \begin{cases} 2b^2 - 4b + 1 > 0 \\ -\frac{b^2+4b}{4} \leq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad 2 \leq b \leq 6$$

$$(iv) \quad 6 < b \text{ のとき} \quad \begin{cases} 2b^2 - 4b + 1 > 0 \\ -4b + 9 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad 6 < b$$

$$(i) \sim (iv) \text{ より} \quad b > \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

別解1 直線 AT の傾きは  $\frac{t^2 - 4}{t + 2} = t - 2$ , 直線 BT の傾きは  $\frac{t^2 - b^2}{t - b} = t + b$

$\angle ATB$  が直角であるから

$$(t - 2)(t + b) = -1 \quad \text{整理すると} \quad t^2 + (b - 2)t - 2b + 1 = 0 \quad \dots (*)$$

方程式 (\*) は, 実数解をもつから

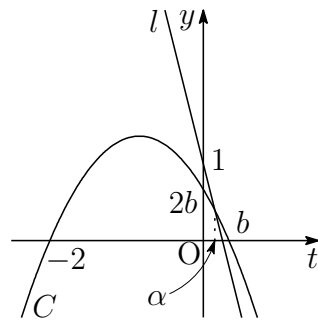
$$(b - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2b + 1) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b(b + 4) \geq 0$$

$b > -2$  に注意すると,  $b \geq 0$  の範囲について調べればよい.

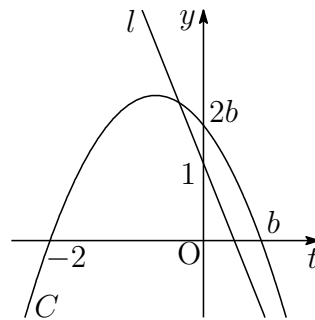
(\*) を変形すると  $2(b - 2)t + 1 = -(t + 2)(t - b)$

直線  $l: y = 2(b - 2)t + 1$  と放物線  $C: y = -(t + 2)(t - b)$  が  $-2 < t < b$  で共有点をもつ  $b$  の値の範囲を求めればよい.

$0 \leq b < \frac{1}{2}$  のとき



$\frac{1}{2} \leq b$  のとき



(i)  $0 \leq b < \frac{1}{2}$  のとき, (\*) を解いて  $t = \frac{2 - b \pm \sqrt{b^2 + 4b}}{2}$   
 $\alpha = \frac{2 - b - \sqrt{b^2 + 4b}}{2}$  とおく.  $l$  の傾きは負であるから,  $0 < \alpha < b$  より

$$\frac{2 - b - \sqrt{b^2 + 4b}}{2} < b \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{b^2 + 4b} > 2 - 3b$$

$2 - 3b > 0$  であるから, 両辺を平方して整理すると  $2b^2 - 4b + 1 < 0$

$0 \leq b < \frac{1}{2}$  に注意して, これを解くと  $\frac{2 - \sqrt{2}}{2} < b < \frac{1}{2}$

(ii)  $\frac{1}{2} \leq b$  のとき,  $C$  および  $l$  が  $y$  軸とそれぞれ  $2b, 1$  で交わるので, このとき,  $C$  と  $l$  は常に  $-2 < t < b$  に共有点をもつ.

(i), (ii) より  $b \geq \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

別解 2 直線 AT の傾きは  $\frac{t^2 - 4}{t + 2} = t - 2$ , 直線 BT の傾きは  $\frac{t^2 - b^2}{t - b} = t + b$

∠ATB が直角であるから

$$(t - 2)(t + b) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -t - \frac{1}{t - 2} \quad \dots (*)$$

$$-2 < t < b \text{ より } t < -t - \frac{1}{t - 2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2t^2 - 4t + 1}{t - 2} < 0$$

$$t \text{ の範囲に注意して } -2 < t < \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2} < t < 2 \quad \dots (**)$$

$$f(t) = -t - \frac{1}{t - 2} \text{ とおくと}$$

$$f'(t) = -1 + \frac{1}{(t - 2)^2} = -\frac{(t - 1)(t - 3)}{(t - 2)^2}$$

$f(t)$  は  $-2 < t < \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$  で単調減少,  $\frac{2 + \sqrt{2}}{2} < t < 2$  で単調増加.

$$f\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \quad f\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow 2-0} f(t) = \infty$$

したがって, (\*\*)において, (\*)を満たす  $b$  の値の範囲は  $b > \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$  ■

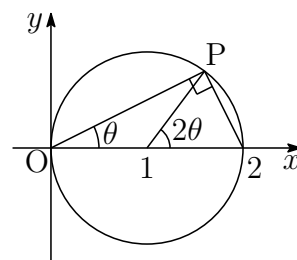


2 (1)  $OP = 2 \cos \theta$ .  $P(x, y)$  とすると

$$x = OP \cos \theta = 2 \cos \theta \cdot \cos \theta = 2 \cos^2 \theta$$

$$y = OP \sin \theta = 2 \cos \theta \cdot \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

よって  $P(2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta)$

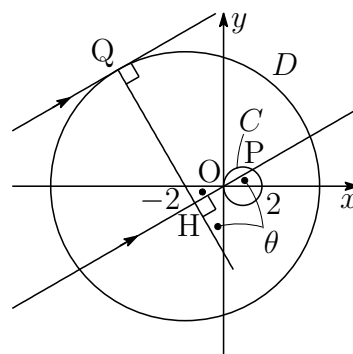


別解  $\vec{OP} = (1, 0) + (\cos 2\theta, \sin 2\theta) = (1 + \cos 2\theta, \sin 2\theta)$

(2) 右の図から

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= (-2, 0) + 7 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right), \sin \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \right) \\ &= (-2, 0) + 7(-\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (-2 - 7 \sin \theta, 7 \cos \theta) \end{aligned}$$

よって  $Q(-2 - 7 \sin \theta, 7 \cos \theta)$



(3) Q から直線 OP に垂線 QH を引くと  $QH = 7 + 2 \sin \theta$

$\triangle OPQ$  の面積を  $f(\theta)$  とすると

$$f(\theta) = \frac{1}{2} OP \cdot QH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta (7 + 2 \sin \theta)$$

$$= \cos \theta (7 + 2 \sin \theta) = 7 \cos \theta + \sin 2\theta,$$

$$f'(\theta) = -7 \sin \theta + 2 \cos 2\theta = -7 \sin \theta + 2(1 - 2 \sin^2 \theta)$$

$$= -(4 \sin^2 \theta + 7 \sin \theta - 2) = -(\sin \theta + 2)(4 \sin \theta - 1)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{4} \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \text{ とおくと, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\theta$	0	...	$\alpha$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

よって, 求める最大値は

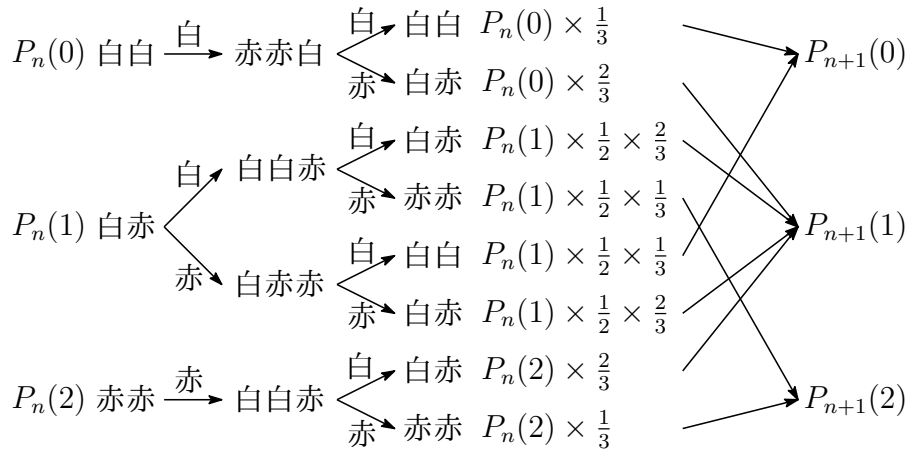
$$f(\alpha) = \cos \alpha (7 + 2 \sin \alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4} \left( 7 + 2 \times \frac{1}{4} \right) = \frac{15\sqrt{15}}{8}$$



3 (1) 定められた操作により, 次の確率漸化式(\*)を得る.

$$(*) \begin{cases} P_{n+1}(0) = \frac{1}{3}P_n(0) + \frac{1}{6}P_n(1) & \dots \textcircled{1} \\ P_{n+1}(1) = \frac{2}{3}P_n(0) + \frac{2}{3}P_n(1) + \frac{2}{3}P_n(2) & \dots \textcircled{2} \\ P_{n+1}(2) = \frac{1}{6}P_n(1) + \frac{1}{3}P_n(2) & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

B → A → B



$P_0(0) = 1, P_0(1) = 0, P_0(2) = 0$ として, (\*)に  $n = 0$ を代入すると

$$P_1(0) = \frac{1}{3}, \quad P_1(1) = \frac{2}{3}, \quad P_1(2) = 0$$

(2) ①, ③より  $P_{n+1}(0) + P_{n+1}(2) = \frac{1}{3}\{P_n(0) + P_n(1) + P_n(2)\}$   
 $P_{n+1}(0) - P_{n+1}(2) = \frac{1}{3}\{P_n(0) - P_n(2)\}$

したがって  $P_n(0) + P_n(2) = \frac{1}{3} \quad (n \geq 1)$   
 $P_n(0) - P_n(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (n \geq 1)$

上の2式から  $P_n(0) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}, P_n(2) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$

②より  $P_{n+1}(1) = \frac{2}{3}\{P_n(0) + P_n(1) + P_n(2)\}$  よって  $P_n(1) = \frac{2}{3}$

補足  $P_{n+1}(0), P_{n+1}(1), P_{n+1}(2)$ が  $P_n(0), P_n(1), P_n(2)$ によって定まる確率過程(1つ前の時点だけで決定する)をマルコフ連鎖(Markov chain)という.



4 (1) 条件(\*)に解と係数の関係を適用すると

$$(A) \begin{cases} c+d=-a \\ e+f=-c \\ a+b=-e \end{cases} \quad (B) \begin{cases} cd=b \\ ef=d \\ ab=f \end{cases}$$

(B)の3式の辺々を掛けると

$$cd \cdot ef \cdot ab = b \cdot d \cdot f \quad \text{ゆえに} \quad bdf(ace - 1) = 0$$

i)  $b=0$ のとき (B)の第3式から  $f=0$  第2式から  $d=0$   
このとき(A)は

$$(A) \begin{cases} c=-a \\ e=-c \\ a=-e \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad a=c=e=0$$

$a=b=c=d=e=f=0$ は(B)を満たす.

ii)  $d=0$ または $f=0$ のとき (i)と同様にして

$$a=b=c=d=e=f=0$$

iii)  $a=c=e=1$ のとき, (A), (B)は

$$(A) \begin{cases} 1+d=-1 \\ 1+f=-1 \\ 1+b=-1 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} d=b \\ f=d \\ b=f \end{cases}$$

上の(A)を解いて  $b=d=f=-2$  これは(B)を満たす.

iv)  $(a, c, e) = (1, -1, -1)$ のとき, (A), (B)は

$$(A) \begin{cases} -1+d=-1 \\ -1+f=1 \\ 1+b=1 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} -d=b \\ -f=d \\ b=f \end{cases}$$

上の(A)を解いて  $b=d=0, f=2$  これは(B)を満たさない.

v)  $(a, c, e) = (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$ のとき, (iv)と同様に(A)から得られる $b, d, f$ は(B)を満たさない.

i)~v)から  $(a, b, c, d, e, f) = (0, 0, 0, 0, 0, 0),$   
 $(1, -2, 1, -2, 1, -2)$

- (2) (i) 2次方程式  $x^2 + a_n x + b_n = 0$  の2つの解が  $a_{n+1}, b_{n+1}$  であるから、解と係数の関係により、次の漸化式が成立する。

$$\textcircled{1} \begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = -a_n \\ a_{n+1} b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

- (a)  $a_k = 0$  となる自然数  $k$  が存在するとき

$$(C) \begin{cases} a_{k+1} + b_{k+1} = -a_k = 0 \\ a_{k+2} + b_{k+2} = -a_{k+1} \\ a_{k+2} b_{k+2} = b_{k+1} \end{cases}$$

(C) から  $a_{k+1}, b_{k+1}$  を消去すると  $(a_{k+2} - 1)(b_{k+2} - 1) = 1$

これを解いて  $(a_{k+2}, b_{k+2}) = (0, 0), (2, 2)$

2次方程式  $x^2 + a_{k+2}x + b_{k+2} = 0$  は実数解をもつから

$$a_{k+2}^2 - 4b_{k+2} \geq 0$$

上式を満たすのは  $(a_{k+2}, b_{k+2}) = (0, 0)$

これを (C) の第2式, 第3式に代入すると  $a_{k+1} = b_{k+1} = 0$

さらに,  $a_{k+1} b_{k+1} = b_k$  より  $b_k = 0$

$a_k = b_k = 0$  のとき,  $a_{k+1} = b_{k+1} = 0$  であるから

$$a_n = b_n = 0 \quad (n \geq k)$$

また, 漸化式  $\textcircled{1}$  から,  $a_k = b_k = 0$  のとき

$$a_n = b_n = 0 \quad (1 \leq n \leq k)$$

したがって, すべての自然数  $n$  について  $a_n = b_n = 0$

よって  $|b_1| = |b_2| = |b_3| = \dots = 0$

- (b) すべての自然数について,  $a_n \neq 0$  のとき, 漸化式により

$$|a_{n+1} b_{n+1}| = |b_n| \quad \text{ゆえに} \quad |b_{n+1}| \leq |b_n|$$

数列  $\{|b_n|\}$  は正の整数からなる下に有界な単調減少列であるから,

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \dots$$

となる正の整数  $m$  が存在する.

- (a), (b) より, 題意は示された.

(ii) (i) の結果から

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \cdots = N$$

とおく ( $N$  は正の整数).

(a)  $N = 0$  のとき

$$b_m = b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$$

漸化式 ① の第 2 式より,  $b_{n+1} = 0$  のとき  $b_n = 0$  である.  $b_m = 0$  であるから

$$b_n = 0 \quad (1 \leq n < m)$$

したがって, すべての自然数  $n$  について  $b_n = 0$

$b_{n+1} = 0$  を漸化式 ① の第 1 式に代入すると  $a_{n+1} = -a_n$

数列  $\{a_n\}$  は公比  $-1$  の等比数列であるから, 初項を  $a$  とすると

$$a_n = a(-1)^{n-1}$$

(b)  $N \geq 1$  のとき

$|b_n| = N$  ( $n \geq m$ ) であるから,  $|a_{n+1}||b_{n+1}| = |b_n|$  より

$$|a_{n+1}|N = N \quad \text{すなわち} \quad |a_{n+1}| = 1$$

2 次方程式  $x^2 + a_n x + b_n = 0$  は実数解をもつから

$$a_n^2 - 4b_{n+1} = 1 - 4b_n \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b_n \leq \frac{1}{4}$$

$|b_n| = N \geq 1$  であるから, 上式より  $b_n = -N$  ( $n \geq m$ )

$a_{n+1}b_{n+1} = b_n$  により

$$a_{n+1}(-N) = -N \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = 1 \quad (n \geq m)$$

$a_{n+2} + b_{n+2} = -a_{n+1}$  により

$$1 + b_{n+2} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+2} = -2$$

したがって  $a_n = 1, b_n = -2$  ( $n \geq m+2$ )

$a_{m+2} = 1, b_{m+2} = -2$  であるから, 漸化式 ① より

$$a_n = 1, b_n = -2 \quad (n \leq m+2)$$

よって, すべての自然数  $n$  について  $a_n = 1, b_n = -2$

(a), (b) より  $(a_n, b_n) = (a(-1)^{n-1}, 0), (1, -2)$  ( $a$  は整数) ■

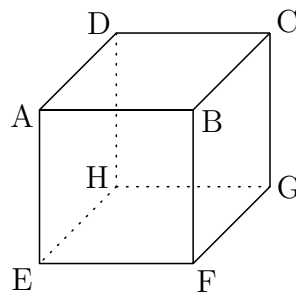
### 3.3 2017年(150分)

1 不等式  $0 < a < 1$  を満たす定数  $a$  に対して, 曲線  $C: y = a - 1 - \log x$  ( $x > 0$ ) を考える.  $s$  を正の実数とし, 曲線  $C$  上の点  $P(s, a - 1 - \log s)$  における接線が  $x$  軸,  $y$  軸と交わる点をそれぞれ  $(u(s), 0)$ ,  $(0, v(s))$  とする. このとき, 次の間に答えよ. 必要があれば,  $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$  を証明なしで使ってよい.

- (1) 関数  $u(s)$ ,  $v(s)$  を  $s$  の式で表せ.
- (2) 関数  $t = u(s)$ ,  $t = v(s)$  の2つのグラフを, 増減・凹凸および交点の座標に注意して, 同じ  $st$  平面上に図示せよ.
- (3) 関数  $t = u(s)$ ,  $t = v(s)$  の2つのグラフで囲まれた図形を  $t$  軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ.

2 下図のような立方体を考える. この立方体の8つの頂点の上を点  $P$  が次の規則で移動する. 時刻0では点  $P$  は頂点  $A$  にいる. 時刻が1増えるごとに点  $P$  は, 今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する. 例えば時刻  $n$  で点  $P$  が頂点  $H$  にいるとすると, 時刻  $n+1$  では, それぞれ  $\frac{1}{3}$  の確率で頂点  $D$ ,  $E$ ,  $G$  のいずれかにいる. 自然数  $n \geq 1$  に対して, (i) 点  $P$  が時刻  $n$  までの間一度も頂点  $A$  に戻らず, かつ時刻  $n$  で頂点  $B$ ,  $D$ ,  $E$  のいずれかにいる確率を  $p_n$ , (ii) 点  $P$  が時刻  $n$  までの間一度も頂点  $A$  に戻らず, かつ時刻  $n$  で頂点  $C$ ,  $F$ ,  $H$  のいずれかにいる確率を  $q_n$ , (iii) 点  $P$  が時刻  $n$  までの間一度も頂点  $A$  に戻らず, かつ時刻  $n$  で頂点  $G$  にいる確率を  $r_n$ , とする. このとき, 次の間に答えよ.

- (1)  $p_2$ ,  $q_2$ ,  $r_2$  と  $p_3$ ,  $q_3$ ,  $r_3$  を求めよ.
- (2)  $n \geq 2$  のとき,  $p_n$ ,  $q_n$ ,  $r_n$  を求めよ.
- (3) 自然数  $m \geq 1$  に対して, 点  $P$  が時刻  $2m$  で頂点  $A$  に初めて戻る確率  $s_m$  を求めよ.
- (4) 自然数  $m \geq 2$  に対して, 点  $P$  が時刻  $2m$  で頂点  $A$  に戻るのがちょうど2回目となる確率  $t_m$  とする. このとき,  $t_m < s_m$  となる  $m$  をすべて求めよ.



3  $xyz$ 空間の2点  $A(0, 0, 2)$ ,  $P(a, b, 0)$ を通る直線を  $l$ とする. また, 点  $(2, 0, 0)$ を中心とし, 半径が  $\sqrt{2}$ である球面を  $S$ で表し,  $S$ のうち  $z$ 座標が  $z > 0$ を満たす部分を  $T$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $l$ 上に点  $Q$ がある. 実数  $t$ を  $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ で定めるとき, 点  $Q$ の座標を  $a, b, t$ を使って表せ.
- (2)  $l$ が  $S$ と相異なる2点で交わるような実数  $a, b$ に関する条件を求め,  $ab$ 平面上に図示せよ.
- (3)  $l$ が  $T$ と相異なる2点で交わるような実数  $a, b$ に関する条件を求め,  $ab$ 平面上に図示せよ.

4  $n$ を自然数とする.  $0$ でない複素数からなる集合  $M$ が次の条件 (I), (II), (III)を満たしている.

- (I) 集合  $M$ は  $n$ 個の要素からなる.
- (II) 集合  $M$ の要素  $z$ に対して,  $\frac{1}{z}$ と  $-z$ はともに集合  $M$ の要素である.
- (III) 集合  $M$ の要素  $z, w$ に対して, その積  $zw$ は集合  $M$ の要素である. ただし,  $z = w$ の場合も含める.

このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $1$ および  $-1$ は集合  $M$ の要素であることを示せ.
- (2)  $n$ は偶数であることを示せ.
- (3)  $n = 4$ のとき, 集合  $M$ は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ.
- (4)  $n = 6$ のとき, 集合  $M$ は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ.

解答例

1 (1)  $y = a - 1 - \log x$  を微分すると  $y' = -\frac{1}{x}$

$C$  上の点  $P(s, a - 1 - \log s)$  における接線の方程式は

$$y - (a - 1 - \log s) = -\frac{1}{s}(x - s) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{x}{s} + a - \log s$$

$y = 0$  を代入すると  $x = s(a - \log s)$  ゆえに  $u(s) = s(a - \log s)$

$x = 0$  を代入すると  $y = a - \log s$  ゆえに  $v(s) = a - \log s$

(2)  $u(s) = s(a - \log s)$  より  $u'(s) = a - 1 - \log s, u''(s) = -\frac{1}{s}$

$s$	(0)	...	$e^{a-1}$	...
$u'(s)$		+	0	-
$u''(s)$		-	-	-
$u(s)$		↗	極大 $e^{a-1}$	↘

$$\lim_{s \rightarrow +0} u(s) = \lim_{s \rightarrow +0} (sa - s \log s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(a - \log s) = -\infty$$

$v(s) = a - \log s$  より  $v'(s) = -\frac{1}{s}, v''(s) = \frac{1}{s^2} > 0$

したがって、 $v(s)$  は下に凸で単調減少.

$t = u(s), t = v(s)$  から  $t$  を消去すると

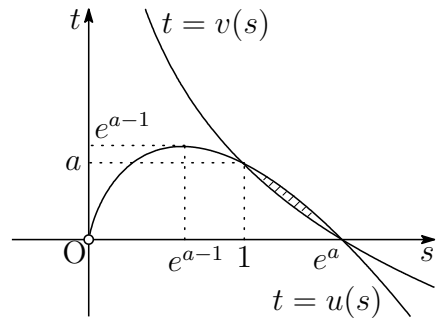
$$s(a - \log s) = a - \log s$$

ゆえに  $(s - 1)(a - \log s) = 0$

これを解いて  $s = 1, e^a$

2曲線  $t = u(s), t = v(s)$  の交点の座標は

$$(1, a), (e^a, 0)$$



$0 < a < 1$  より、 $t = u(s), t = v(s)$  のグラフは、右の図のようになる.



(3) 求める立体の体積を  $V$  とすると, (2) のグラフから

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_1^{e^a} s\{u(s) - v(s)\} ds = \int_1^{e^a} s(s-1)(a - \log s) ds \\ &= \int_1^{e^a} \left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{s}\right)' (a - \log s) ds \\ &= \left[\left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right)(a - \log s)\right]_1^{e^a} - \int_1^{e^a} \left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right) \left(-\frac{1}{s}\right) ds \\ &= \frac{a}{6} + \left[\frac{s^3}{9} - \frac{s^2}{4}\right]_1^{e^a} = \frac{1}{9}e^{3a} - \frac{1}{4}e^{2a} + \frac{5}{36} + \frac{a}{6} \end{aligned}$$

$$\text{よって } V = \frac{\pi}{18}(4e^{3a} - 9e^{2a} + 6a + 5)$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$  の範囲で  $f(x) \geq 0$  のとき,  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸および 2 直線  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた部分を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積  $V$  は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

補足 まず,  $0 < x \leq 1$  のとき,  $-\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x$  を示す.

$$g(x) = \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (0 < x \leq 1) \text{ とおくと}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$  は単調減少で,  $g(1) = 2$  であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\text{すなわち} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$$

$$\text{したがって} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -2\sqrt{x} < x \log x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (-2\sqrt{x}) = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理により} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$



2 (1) 与えられた規則により, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_1 = 1, q_1 = 0, r_1 = 0$$

$$(*) \begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n \\ q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(\*) に  $n = 1$  を代入すると

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = 0, \quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \frac{2}{3}, \quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = 0$$

(\*) に  $n = 2$  を代入すると, 上の結果により

$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \frac{4}{9}, \quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = 0, \quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \frac{2}{9}$$

(2) (\*) の第2式から  $q_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + r_{n+1}$

これに (\*) の第1式, 第3式を代入すると

$$q_{n+2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}q_n + \frac{1}{3}q_n \quad \text{すなわち} \quad q_{n+2} = \frac{7}{9}q_n$$

(i)  $n$  が奇数のとき ( $n \geq 1$ )  $q_n = q_1 \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 0$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = 0, \quad r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = 0$$

(ii)  $n$  が偶数のとき ( $n \geq 2$ )  $q_n = q_2 \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(i), (ii) の結果から

$n$  が偶数のとき  $p_n = 0, q_n = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}, r_n = 0$

$n$  が奇数のとき  $p_n = \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}, q_n = 0, r_n = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} \quad (n \neq 1)$

(3)  $s_m = \frac{1}{3}p_{2m-1}$  であるから

$$s_1 = \frac{1}{3}p_1 = \frac{1}{3},$$

$$s_m = \frac{1}{3}p_{2m-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{(2m-1)-3}{2}} = \frac{4}{27} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-2} \quad (m \geq 2)$$

(4) 点 P が時刻  $2k$  ( $1 \leq k \leq m-1$ ) および  $2m$  のときに限り点 A に戻る確率であるから,  $a = \frac{4}{27}$ ,  $b = \frac{7}{9}$  とおくと,  $s_m = ab^{m-2}$  より

$$\begin{aligned} t_m &= \sum_{k=1}^{m-1} s_k s_{m-k} = 2s_1 s_{m-1} + \sum_{k=2}^{m-2} s_k s_{m-k} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot ab^{m-3} + \sum_{k=2}^{m-2} ab^{k-2} ab^{m-k-2} \\ &= \frac{2}{3} ab^{m-3} + \sum_{k=2}^{m-2} a^2 b^{m-4} = \frac{2}{3} ab^{m-3} + (m-3)a^2 b^{m-4} \end{aligned}$$

$$t_m < s_m \text{ より } \frac{2}{3} ab^{m-3} + (m-3)a^2 b^{m-4} < ab^{m-2}$$

$$\frac{2}{3} + (m-3)\frac{a}{b} < b \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{21}(m-3) < \frac{7}{9}$$

整理すると  $m < 3 + \frac{7}{12}$  条件  $m \geq 2$  に注意して  $m = 2, 3$  ■

**3** (1)  $\vec{OQ} = \vec{OA} + t\vec{AP} = (0, 0, 2) + t(a, b, -2) = (at, bt, 2-2t)$   
よって  $Q(at, bt, 2-2t)$

(2)  $S$  の方程式は  $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$

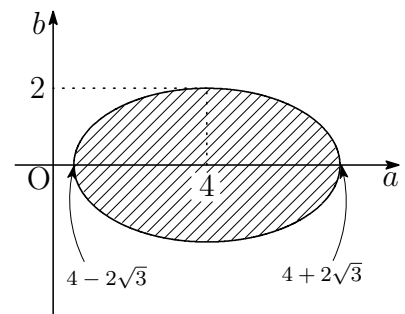
$$\begin{aligned} Q \text{ が } S \text{ 上にあるとき } & (at-2)^2 + (bt)^2 + (2-2t)^2 = 2 \\ & (a^2 + b^2 + 4)t^2 - 2(2a+4)t + 6 = 0 \end{aligned}$$

この  $t$  に関する 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつので, 係数について

$$\begin{aligned} (2a+4)^2 - 6(a^2 + b^2 + 4) &> 0 \\ a^2 - 8a + 3b^2 + 4 &< 0 \\ (a-4)^2 + 3b^2 &< 12 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{(a-4)^2}{12} + \frac{b^2}{4} < 1$$

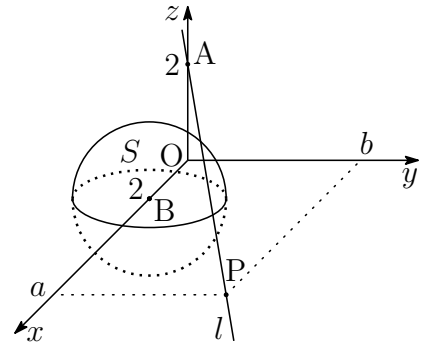
不等式の表す領域は, 右の楕円の内部で境界線を含まない.



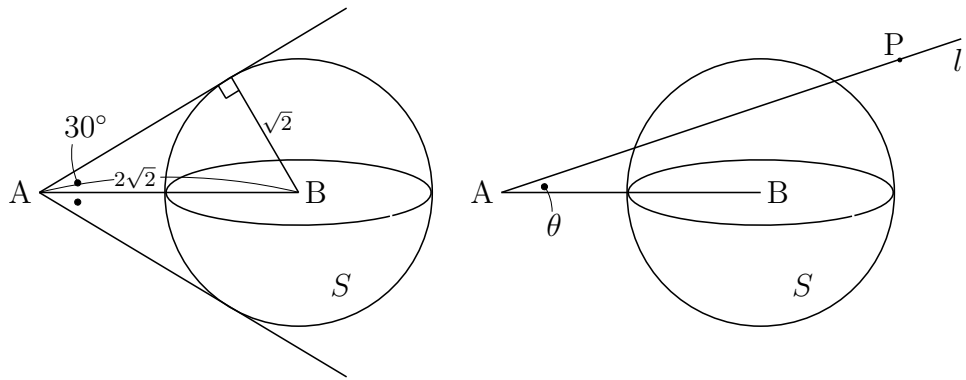
別解  $S$  の中心を  $B(2, 0, 0)$  とおくと

$$AB = 2\sqrt{2}$$

$S$  の半径は  $\sqrt{2}$  であるから、 $l$  と  $S$  が接するとき、直線  $AB$  と  $l$  のなす角は  $30^\circ$ 。  
 $l$  と  $S$  が異なる 2 点で交わるとき、 $l$  と  $AB$  のなす角を  $\theta$  とすると



$$|\cos \theta| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots (*)$$



$\vec{AB} = (2, 0, -2)$  と  $\vec{AP} = (a, b, -2)$  のなす角が  $\theta$  であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AP}}{|\vec{AB}| |\vec{AP}|} = \frac{2a + 4}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4}} = \frac{a + 2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4}}$$

(\*) より  $\frac{|a + 2|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  ゆえに  $\sqrt{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 4} \geq \sqrt{2}|a + 2|$

この両辺を平方して整理すると

$$a^2 - 8a + 3b^2 + 4 < 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{(a - 4)^2}{12} + \frac{b^2}{4} < 1$$

補足  $A$  を頂点、軸(中心軸)を  $AB$  とし、母線と軸のなす角が  $30^\circ$  である円錐面の内部を  $R(x, y, z)$  とすると

$$\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AR}}{|\vec{AB}| |\vec{AR}|} > \cos 30^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2x - 2(z - 2)}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

平方して整理すると  $x^2 + 3y^2 + z^2 + 4zx - 8x - 4z + 4 < 0$

上式が円錐面の内部を表す領域である。

とくに、平面  $z = 0$  上における領域が  $x^2 + 3y^2 - 8x + 4 < 0$

(3) Q の  $z$  座標が正であるとき  $2 - 2t > 0$  すなわち  $t < 1$

2次方程式  $(a^2 + b^2 + 4)t^2 - 2(2a + 4)t + 6 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とすると、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{2(2a + 4)}{a^2 + b^2 + 4}, \quad \alpha\beta = \frac{6}{a^2 + b^2 + 4}$$

$\alpha < 1, \beta < 1$  であるから、 $\alpha - 1 < 0, \beta - 1 < 0$  より

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) < 0, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$$

したがって  $\alpha + \beta - 2 < 0, \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 > 0$

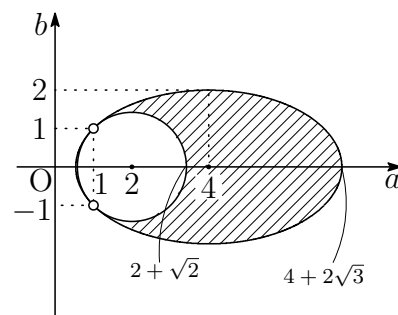
$$\frac{2(2a + 4)}{a^2 + b^2 + 4} - 2 < 0, \quad \frac{6}{a^2 + b^2 + 4} - \frac{2(2a + 4)}{a^2 + b^2 + 4} + 1 > 0$$

すなわち  $(a - 1)^2 + b^2 > 1, (a - 2)^2 + b^2 > 2$

これと、(1)の結果により

$$\begin{cases} \frac{(a - 4)^2}{12} + \frac{b^2}{4} < 1 \\ (a - 1)^2 + b^2 > 1 \\ (a - 2)^2 + b^2 > 2 \end{cases}$$

不等式の表す領域は、右の図斜線部分で境界線を含まない。



別解  $l$  と  $T$  が相異なる 2 点で交わるとき,  $xy$  平面上の点  $P(a, b, 0)$  は楕円  $x^2 + 3y^2 - 8x + 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$  の内部で, 円  $(x - 2)^2 + y^2 = 2 \cdots \textcircled{2}$  の外部にあるから

$$a^2 + 3b^2 - 8a + 4 < 0, \quad (a - 2)^2 + b^2 > 2$$

①, ② から  $y$  を消去すると

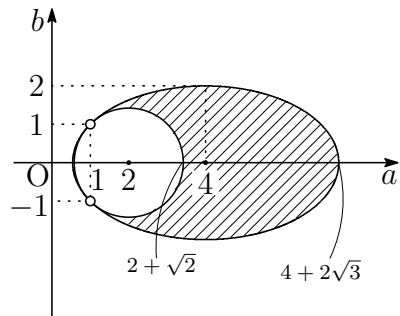
$$x^2 + 3\{2 - (x - 2)^2\} - 8x + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x - 1)^2 = 0$$

$x = 1$  のとき  $y = \pm 1$

①, ② は, 点  $(1, \pm 1, 0)$  で接する.

ゆえに, 点  $P$  の  $x$  座標について  $a > 1$

$$\text{よって} \quad \begin{cases} a > 1 \\ (a - 4)^2 + 3b^2 < 12 \\ (a - 2)^2 + b^2 > 2 \end{cases}$$

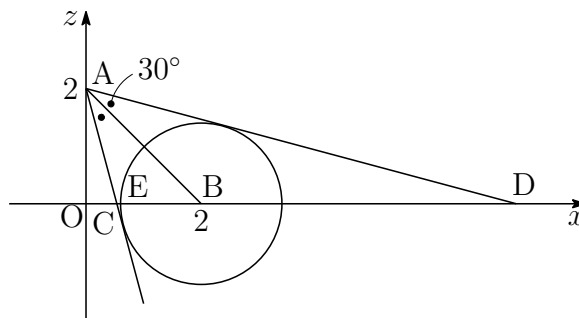


不等式の表す領域は, 右の図斜線部分で境界線を含まない.

注意 楕円  $x^2 + 3y^2 - 8x + 4 = 0$  の長軸上の頂点を  $C, D$  とすると,  $\angle OAC = 15^\circ$ ,  $\angle OAD = 75^\circ$  であるから

$$OC = OA \tan 15^\circ = 2(2 - \sqrt{3})$$

$$OD = OA \tan 75^\circ = 2(2 + \sqrt{3})$$



$x$  軸上の 2 点  $C, E$  の  $x$  座標は, それぞれ  $4 - 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{2}$  であり, 直線  $AC$  と直線  $AE$  の間を  $l$  が通過するとき (不適), 第 2 式, 第 3 式を満たすので,  $a > 1$  が必要となる. ■

4 (1)  $z \in M$  のとき,  $\frac{1}{z} \in M$  であるから, この積は  $z \cdot \frac{1}{z} = 1 \in M$   
さらに,  $1 \in M$  に対して  $-1 \in M$

(2)  $M = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  とすると  $M = \{-z_1, -z_2, \dots, -z_n\}$   
それぞれの要素の積は

$$z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n$$

$z_k \neq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) であるから  $(-1)^n = 1$  よって  $n$  は偶数

(3) (1) の結果から,  $1 \in M, -1 \in M$

$z \neq \pm 1$  について  $z \in M$  とすると,  $\frac{1}{z} \in M, -z \in$

$\frac{1}{z} \in M$  に対して  $-\frac{1}{z} \in M$

したがって  $M = \left\{1, -1, z, -z, \frac{1}{z}, -\frac{1}{z}\right\}$

$z \neq 0, \pm 1$  であるから,  $z \neq -z, z \neq \frac{1}{z}$  に注意すると

$n = 4$  のとき  $z = -\frac{1}{z}, -z = \frac{1}{z}$

これを解いて  $z = \pm i$  よって  $M = \{1, -1, i, -i\}$

(4) (3) と同様に,  $M = \left\{1, -1, z, -z, \frac{1}{z}, -\frac{1}{z}\right\} \cdots (*)$  とおくと

これらの要素に  $z$  を掛けて  $\{z, -z, z^2, -z^2, 1, -1\}$

(i)  $z^2 = \frac{1}{z}$  ( $-z^2 = -\frac{1}{z}$ ) のとき

$$z^3 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (z-1)(z^2+z+1) = 0$$

$z \neq 1$  であるから  $z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(\*) より  $M = \left\{1, -1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right\}$

(ii)  $z^2 = -\frac{1}{z}$  ( $-z^2 = \frac{1}{z}$ ) のとき

$$z^3 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (z+1)(z^2-z+1) = 0$$

$z \neq -1$  であるから  $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(\*) より  $M = \left\{1, -1, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right\}$

(i), (ii) より

$$M = \left\{ 1, -1, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right\}$$

解説  $M = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ ,  $w \in M$  とすると  $M = \{wz_1, wz_2, \dots, wz_n\}$   
それぞれの要素の積は

$$z_1 z_2 \cdots z_n = w^n z_1 z_2 \cdots z_n$$

$z_k \neq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) であるから  $w^n = 1$

$M$  のそれぞれの要素は異なるから,  $z_k \in M$  を次のようにとればよい.

$$z_k = \cos \frac{2k}{n} \pi + i \sin \frac{2k}{n} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

これに  $n = 4, 6$  をそれぞれ代入すると, (3), (4) の結果を得る. ■



## 3.4 2018年(150分)

**1** 自然数  $n$  に対し, 定積分  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$  を考える. このとき, 次の間に答えよ.

(1)  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$  を示せ.

(2)  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  を示せ.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$  を求めよ.

(4)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$  とする. このとき (1), (2) を用いて  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ.

**2**  $a$  を 1 より大きい実数とする. このとき, 次の間に答えよ.

(1) 関数  $y = a^x$  と  $y = \log_a x$  のグラフの共有点は, 存在すれば直線  $y = x$  上にあることを示せ.

(2) 関数  $y = a^x$  と  $y = \log_a x$  のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ.

(3) 関数  $y = a^x$  と  $y = \log_a x$  のグラフの共有点は 1 個であるとする. このときの共有点の座標と  $a$  の値を求めよ.

**3**  $p$  を素数,  $a, b$  を整数とする. このとき, 次の間に答えよ.

(1)  $(a+b)^p - a^p - b^p$  は  $p$  で割り切れることを示せ.

(2)  $(a+2)^p - a^p$  は偶数であることを示せ.

(3)  $(a+2)^p - a^p$  を  $2p$  で割ったときの余りを求めよ.

4 図1のように2つの正方形ABCDとCDEFを並べた図形を考える. 2点P, Qが6個の頂点A, B, C, D, E, Fを以下の規則(a), (b)に従って移動する.

- (a) 時刻0では図2のように点Pは頂点Aに, 点Qは頂点Cにいる.
- (b) 点P, Qは時刻が1増えるごとに独立に, 今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する.

時刻  $n$  まで2点P, Qが同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を  $p_n$  と表す. また時刻  $n$  まで2点P, Qが同時に同じに頂点にいることが一度もなく, かつ時刻  $n$  に2点P, Qがともに同じ正方形上にいる確率を  $a_n$  と表し,  $b_n = p_n - a_n$  と定める. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 時刻1での点P, Qの可能な配置を, 図2にならってすべて図示せよ.
- (2)  $a_1, b_1, a_2, b_2$  を求めよ.
- (3)  $a_{n+1}, b_{n+1}$  を  $a_n, b_n$  で表せ.
- (4)  $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$  を示せ.

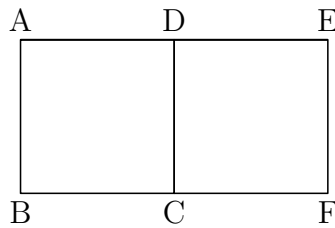


図1

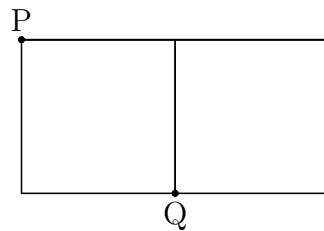


図2

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx \text{ より}$$

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ において, } 0 \leq \frac{x^{n+1}}{x^2+1} \leq \frac{x^n}{x^2+1} \leq x^n \text{ より}$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$(3) \quad I_{n+2} \leq I_n \text{ であるから, (1) の結果から } 2I_{n+2} \leq I_n + I_{n+2} \leq 2I_n$$

$$2I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2I_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2} \text{ であるから, はさみうちの原理により}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad (1) \text{ の結果から, 自然数 } k \text{ に対して, } I_{2k-1} + I_{2k+1} = \frac{1}{2k} \text{ であるから}$$

$$(-1)^{k-1} I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$$

$$\text{ゆえに} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \sum_{k=1}^n \{(-1)^{k-1} I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1}\} = I_1 - I_{2n-1}$$

$$(2) \text{ の結果より, } \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n-1} = 0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[ \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

■

- 2 (1) 関数  $y = a^x$  と  $y = \log_a x$  のグラフの共有点を  $(p, q)$  とすると

$$\begin{cases} q = a^p \\ q = \log_a p \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} q = a^p \\ p = a^q \end{cases}$$

上の第2式から  $q - p = a^p - a^q = a^q(a^{p-q} - 1) \dots (*)$

$p - q > 0$  と仮定すると,  $a > 1$  より  $a^{p-q} - 1 > 0$  であるから,  
 (\*) より,  $q - p > 0$  となり, 矛盾.

また,  $p - q < 0$  と仮定すると,  $a > 1$  より  $a^{p-q} - 1 < 0$  であるから,  
 (\*) より,  $q - p < 0$  となり, 矛盾.

したがって,  $p - q = 0$ . よって, 共有点は直線  $y = x$  上にある.

- (2)  $y = e^x$  とすると  $y' = e^x$

曲線  $y = e^x$  上の点  $(t, e^t)$  における接線の方程式は

$$y - e^t = e^t(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = e^t x + (1 - t)e^t$$

この接線が原点を通るとき

$$(1 - t)e^t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1 \quad \text{接点は} (1, e)$$

したがって, 原点を通る直線で曲線  $y = e^x$  に接する直線は  $y = ex$

曲線  $y = e^x$  を  $y$  軸を元に  $x$  軸方向に  $e$  倍だけ拡大した曲線  $y = e^{\frac{x}{e}}$  は, 直線  $y = x$  と点  $(e, e)$  で接する. このことから, 曲線  $y = a^x$  は

- $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$  のとき, 直線  $y = x$  と2点で交わる.
- $a = e^{\frac{1}{e}}$  のとき, 直線  $y = x$  と点  $(e, e)$  で接する.
- $e^{\frac{1}{e}} < a$  のとき, 直線  $y = x$  と共有点を持たない.

(1) の結論から, 2曲線  $y = a^x$  と  $y = \log_a x$  の共有点は直線  $y = x$  上にあるから, この2曲線の共有点は2個以下である.

- (3) (2) の結果から, 共有点は  $(e, e)$ ,  $a = e^{\frac{1}{e}}$  ■

$$\boxed{3} \quad (1) \text{ 二項定理により} \quad (a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p C_k a^{p-k} b^k$$

$$1 \leq k \leq p-1 \text{ のとき} \quad {}_p C_k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$$

素数  $p$  は  $1, 2, \dots, p-1$  で割り切れないから,  ${}_p C_k$  は  $p$  で割り切れる.

$$\text{よって} \quad (a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p C_k a^{p-k} b^k \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(2) \quad (a+2)^p - a^p = 2 \sum_{k=1}^p (a+2)^{p-k} a^{k-1} \quad \text{よって} \quad (a+2)^p - a^p \equiv 0 \pmod{2}$$

(3) (1) の結果に  $b=2$  を代入することにより

$$(a+2)^p - a^p \equiv 2^p \pmod{p}$$

(1) の結果に  $a=b=1$  を代入することにより

$$2^p \equiv 2 \pmod{p}$$

上の2式から  $(a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{p}$

したがって  $(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod{p} \quad \dots \textcircled{1}$

(2) の結果から  $(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod{2} \quad \dots \textcircled{2}$

(i)  $p \neq 2$  のとき,  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  より

$$(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{2p}$$

(ii)  $p=2$  のとき,  $2p=4$  であるから

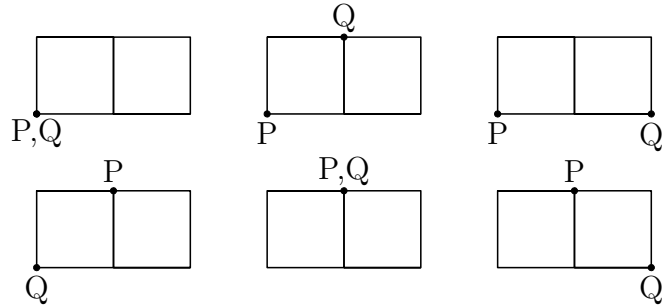
$$(a+2)^p - a^p = (a+2)^2 - a^2 = 4(a+1) \equiv 0 \pmod{2p}$$

(i), (ii) より, 求める余りは

$$p \neq 2 \text{ のとき } 2, \quad p = 2 \text{ のとき } 0$$



- 4 (1) 時刻1で動点P, Qの可能な配置は, 次の6通り



- (2) (1)の6通りの配置は同様に確からしい.

$a_1$ は時刻1で動点P, Qが同じ正方形上の対角にある, すなわち,

$$(P, Q) = (B, D), (D, B), (D, F)$$

にある確率であるから  $a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$b_1$ は時刻1で動点P, Qが同じ正方形上にない, すなわち,  $(P, Q) = (B, F)$

にある確率であるから  $b_1 = \frac{1}{6}$

動点P, Qが頂点B, D, F上にあるのは偶数時刻で, 頂点A, C, E上にあるのは奇数時刻である. 動点P, Qが時刻 $n$ まで同じ頂点にないという条件を満たしながら時刻 $n$ において, 動点P, Qが同じ正方形上の対角にある確率 $a_n$ , 動点P, QがAとEまたはBとFにある確率 $b_n$ について次の確率漸化式が成立する.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \quad \dots (*)$$

したがって  $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$b_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

(3) (\*)より  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n$

- (4)  $a_0 = 1, b_0 = 0,$  (\*)より,  $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ であるから

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leq \frac{3}{4}(a_n + b_n)$$

ゆえに  $p_0 = 1, p_{n+1} \leq \frac{3}{4}p_n$  よって  $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n p_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n$  ■

## 3.5 2019年(150分)

1 正の整数  $n$  に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$$

とする.

(1)  $I_1$  を求めよ. 必要ならば  $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right)$  を使ってよい.

(2)  $n \geq 3$  のとき,  $I_n$  を  $I_{n-2}$  と  $n$  で表せ.

(3)  $xyz$  空間において  $xy$  平面内の原点を中心とする半径1の円板を  $D$  とする.  $D$  を底面とし, 点  $(0, 0, 1)$  を頂点とする円錐を  $C$  とする.  $C$  を平面  $x = \frac{1}{2}$  で2つの部分に切断したとき, 小さい方を  $S$  とする.  $z$  軸に垂直な平面による切り口を考えて  $S$  の体積を求めよ.

2 空間内に  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$  の直角二等辺三角形  $ABC$  と平面  $P$  がある. 点  $A$  は  $P$  上にあり, 点  $B$  と点  $C$  は  $P$  上にはなく,  $P$  に関して同じ側に位置している. 点  $B, C$  から  $P$  に下ろした垂線と  $P$  との交点をそれぞれ  $B', C'$  とする.

(1)  $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$  を示せ.

(2)  $\angle B'AC' > \frac{\pi}{2}$  を示せ.

(3)  $P$  上の三角形  $AB'C'$  の辺の長さは短いものから  $4, \sqrt{21}, 7$  であった. このとき, 辺  $AB$  の長さを求めよ.

3 正の整数  $n$  の正の平方根  $\sqrt{n}$  は整数ではなく, それを10進数で表すと, 小数第1位は0であり, 第2位は0以外の数であるとする.

(1) このような  $n$  の中で最小のものを求めよ.

(2) このような  $n$  を小さいものから順に並べたときに10番目にくるものを求めよ.

4 正の整数  $n$  に対して  $1, 2, \dots, n$  を一列に並べた順列を考える. そのような順列は  $n!$  個ある. このうち1つを等確率で選んだものを  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  とする. この  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  に対し, 各添字  $i = 1, 2, \dots, n$  について,  $a_i$  の値が  $j$  であるとき, その  $j$  を添字にもつ  $a_j$  の値が  $k$  であることを  $a_i = j \rightarrow a_j = k$  と書くことにする. ここで  $a_i = j \rightarrow a_j = k \rightarrow a_k = l \rightarrow \dots$  のようにたどり, それを続けていく. 例えば  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 5, 6, 1, 4, 3, 7)$  のとき,

$$(i) a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 5 \rightarrow a_5 = 4 \rightarrow a_4 = 1 \rightarrow a_1 = 2$$

$$(ii) a_3 = 6 \rightarrow a_6 = 3 \rightarrow a_3 = 6$$

$$(iii) a_7 = 7 \rightarrow a_7 = 7$$

となり, どの  $i$  から始めても列は必ず一巡する. この一巡するそれぞれの列をサイクル, 列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ. 上の (i), (ii), (iii) は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている.

- (1)  $n = 3$  とする. 選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ.
- (2)  $n = 4$  とする. 長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ.
- (3)  $n$  以下の正の整数  $k$  に対して

$$\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ.

- (4)  $n$  を奇数とする. 選んだ順列が長さ  $\frac{n+1}{2}$  以上のサイクルを含む確率  $p$  は  $p > \log 2$  をみたすことを示せ.



解答例

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (1) \quad I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \log \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \log(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

(2)  $n \geq 3$  のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan \theta)' (\cos \theta)^{-n+2} d\theta \\ &= \left[ \tan \theta (\cos \theta)^{-n+2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan \theta \cdot (-n+2) (\cos \theta)^{-n+1} (-\sin \theta) d\theta \\ &= 2^{n-2} \sqrt{3} - (n-2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^{n-1} \theta} d\theta \\ &= 2^{n-2} \sqrt{3} - (n-2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^n \theta} d\theta = 2^{n-2} \sqrt{3} - (n-2)(I_n - I_{n-2}) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad (n-1)I_n = (n-2)I_{n-2} + 2^{n-2} \sqrt{3}$$

$$\text{よって} \quad I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + \frac{2^{n-2} \sqrt{3}}{n-1}$$

補足  $m \geq 3$  に対して,  $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^m \theta d\theta$  とすると

$$\begin{aligned} J_m &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin \theta)' \cos^{m-1} \theta d\theta \\ &= \left[ \sin \theta \cos^{m-1} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta (m-1) \cos^{m-2} \theta (-\sin \theta) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2^m} - (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 \theta - 1) \cos^{m-2} \theta d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2^m} - (m-1)(J_m - J_{m-2}) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad mJ_m = (m-1)J_{m-2} + \frac{\sqrt{3}}{2^m} \quad \cdots (*)$$

(\*) は負の整数  $m$  についても成立する.実際,  $m = -n + 2$  ( $n \geq 3$ ) とすると,  $J_{-n} = I_n$  に注意して

$$(-n+2)I_{n-2} = (-n+1)I_n + 2^{n-2} \sqrt{3} \quad \text{よって} \quad I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + \frac{2^{n-2} \sqrt{3}}{n-1}$$

(3) 円錐  $C : x^2 + y^2 = (z - 1)^2$  と  $S$  の  $z$  軸に垂直な平面  $z = t$  による断面は、右の図の線分  $PQ$  および  $\widehat{PQ}$  で囲まれた斜線部分で、 $\angle POQ = 2\theta$  とすると、 $OP = 1 - t$  より

$$(1 - t) \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1 - t = \frac{1}{2 \cos \theta}$$

その面積を  $S(t)$  とすると

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}(1 - t)^2(2\theta - \sin 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2 \cos \theta} \right)^2 (2\theta - 2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= \frac{\theta}{4 \cos^2 \theta} - \frac{\sin \theta}{4 \cos \theta} \end{aligned}$$

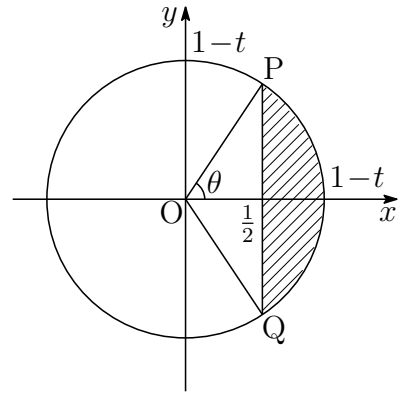
$$0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad 1 - t = \frac{1}{2 \cos \theta} \quad \text{より} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline t & 0 \longrightarrow \frac{1}{2} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{3} \longrightarrow 0 \\ \hline \end{array} \quad \frac{dt}{d\theta} = -\frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta}$$

よって、求める体積を  $V$  とすると、(1), (2) の結果に注意して

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{2}} S(t) dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \left( \frac{\theta}{4 \cos^2 \theta} - \frac{\sin \theta}{4 \cos \theta} \right) \left( -\frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{\theta \sin \theta}{8 \cos^4 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{8 \cos^3 \theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \frac{\theta}{24} \left( \frac{1}{\cos^3 \theta} \right)' - \frac{1}{8 \cos^3 \theta} + \frac{1}{8 \cos \theta} \right\} d\theta \\ &= \left[ \frac{\theta}{24 \cos^3 \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{24} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{24} I_3 - \frac{1}{8} I_3 + \frac{1}{8} I_1 = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6} I_3 + \frac{1}{8} I_1 \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} I_1 + \sqrt{3} \right) + \frac{1}{8} I_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{24} I_1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\pi}{9} + \frac{1}{24} \log(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

補足  $C : x^2 + y^2 = (z - 1)^2$  の  $z$  軸に垂直な平面による断面は円であるから、積分は、楕円型関数、すなわち、三角関数を用いる。円錐  $C$  の  $x$  軸に垂直な平面を考えると、その断面は双曲線となり、双曲線関数

$$\frac{a}{2}(e^t + e^{-t}) \quad \text{または} \quad \frac{a}{2}(e^t - e^{-t})$$



を用いる。特に母線と平行な断面は放物線となる<sup>1</sup>。Cの方程式から

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

x軸に垂直な平面による断面積を $S(x)$ とすると( $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ )

$$S(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} z \, dy = 2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} z \, dy$$

$$y = \frac{x}{2}(e^t - e^{-t}) \text{ とおくと } \begin{array}{c|c} y & 0 \longrightarrow \sqrt{1-x^2} \\ \hline t & 0 \longrightarrow \log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \end{array} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$\begin{aligned} S(x) &= 2 \int_0^{\log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \left\{ 1 - \frac{x}{2}(e^t + e^{-t}) \right\} \cdot \frac{x}{2}(e^t + e^{-t}) \, dt \\ &= x \int_0^{\log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \left\{ e^t + e^{-t} - \frac{x}{2}(e^{2t} + e^{-2t}) - x \right\} \, dt \\ &= x \left[ e^t - e^{-t} - \frac{x}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) - xt \right]_0^{\log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \\ &= \sqrt{1-x^2} - x^2 \log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \end{aligned}$$

よって、求める体積 $V$ は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{2}}^1 S(x) \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \sqrt{1-x^2} - x^2 \log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \, dx \\ &= \left[ \frac{2}{3}x\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{3} \log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\pi}{9} + \frac{1}{24} \log(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

なお、 $\int \sqrt{A+y^2} \, dy = \frac{y}{2}\sqrt{A+y^2} + \frac{A}{2} \log(y + \sqrt{A+y^2}) + C$ を用いると

$$\begin{aligned} S(x) &= 2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dy \\ &= 2 \left[ y - \frac{y}{2}\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{2} \log(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \sqrt{1-x^2} - x^2 \log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai\\_ri\\_2018.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2018.pdf) [5] 参照

2 (1)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$  に注意して

$$\begin{aligned} \vec{AB}' \cdot \vec{AC}' + \vec{B}'\vec{B} \cdot \vec{C}'\vec{C} &= \vec{AB}' \cdot \vec{AC}' + (\vec{AB} - \vec{AB}') \cdot (\vec{AC} - \vec{AC}') \\ &= \vec{AB}' \cdot \vec{AC}' + \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AB} \cdot \vec{AC}' - \vec{AB}' \cdot \vec{AC} + \vec{AB}' \cdot \vec{AC}' \\ &= 2\vec{AB}' \cdot \vec{AC}' - \vec{AB} \cdot \vec{AC}' - \vec{AB}' \cdot \vec{AC} \\ &= (\vec{AB}' - \vec{AB}) \cdot \vec{AC}' + \vec{AB}' \cdot (\vec{AC}' - \vec{AC}) \\ &= \vec{BB}' \cdot \vec{AC}' + \vec{AB}' \cdot \vec{CC}' \end{aligned}$$

$\vec{AB}'$ ,  $\vec{AC}'$  は  $P$  上のベクトル,  $\vec{BB}'$ ,  $\vec{CC}'$  は  $P$  に垂直なベクトルであるから

$$\vec{BB}' \cdot \vec{AC}' = 0, \quad \vec{AB}' \cdot \vec{CC}' = 0$$

よって  $\vec{AB}' \cdot \vec{AC}' + \vec{B}'\vec{B} \cdot \vec{C}'\vec{C} = 0$

(2)  $P$  の法線ベクトルを  $\vec{n}$  とし

$$\vec{AB} = \vec{AB}' + \beta\vec{n}, \quad \vec{AC} = \vec{AC}' + \gamma\vec{n}$$

とおく. 点  $B$  と点  $C$  は  $P$  に関して同じ側にあるから,  $\beta\gamma > 0$  より

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB}' \cdot \vec{AC}' + \beta\gamma|\vec{n}|^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{AB}' \cdot \vec{AC}' = -\beta\gamma|\vec{n}|^2 < 0$$

よって  $\angle B'AC' > \frac{\pi}{2}$

(3)  $AB = AC = x$  とし,  $AB' = \sqrt{21}$ ,  $AC' = 4$  とすると

$$BC = \sqrt{2}x, \quad BB' = \sqrt{x^2 - 21}, \quad CC' = \sqrt{x^2 - 16}$$

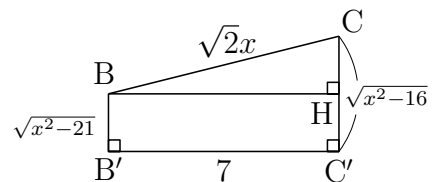
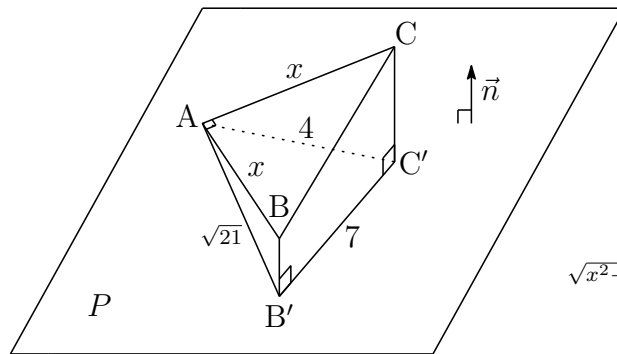
点  $B$  から線分  $CC'$  に垂線  $BH$  を引き,  $\triangle BCH$  に三平方の定理を適用すると

$$(\sqrt{x^2 - 16} - \sqrt{x^2 - 21})^2 + 7^2 = (\sqrt{2}x)^2$$

整理すると  $\sqrt{x^2 - 16}\sqrt{x^2 - 21} = 6$  ゆえに  $x^4 - 37x^2 + 300 = 0$

したがって  $(x^2 - 12)(x^2 - 25) = 0$

$x > \sqrt{21}$  に注意してこれを解くと  $x = 5$  よって  $AB = 5$



- 3** (1)  $\sqrt{n}$  の整数部分を  $A$ , 小数部分を  $h$  とすると

$$\sqrt{n} = A + h \quad \text{ゆえに} \quad n - A^2 = 2Ah + h^2$$

上の第2式の両辺は整数であるから, これを  $m$  とすると ( $m$  は整数)

$$m = 2Ah + h^2 \quad \text{ゆえに} \quad A^2 + m = (A + h)^2$$

$$h \text{ について解くと } h = \sqrt{A^2 + m} - A = \frac{m}{\sqrt{A^2 + m} + A}$$

条件により,  $\frac{1}{100} \leq h < \frac{1}{10}$  であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{100} &\leq \frac{m}{\sqrt{A^2 + m} + A} < \frac{1}{10} \\ 10 &< \frac{\sqrt{A^2 + m} + A}{m} \leq 100 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$n = A^2 + m$  であるから, これを満たす最小の  $n$  は  $m = 1$  のとき

$$10 < \sqrt{A^2 + 1} + A \leq 100$$

$n$  を最小にする整数  $A, m$  は  $A = 5, m = 1$  よって  $n = 26$

- (2) (i)  $m = 1$  のとき, (\*) より

$$10 < \sqrt{A^2 + 1} + A \leq 100 \quad \text{ゆえに} \quad 5 \leq A < 50$$

- (ii)  $m = 2$  のとき, (\*) より

$$20 < \sqrt{A^2 + 2} + A \leq 200 \quad \text{ゆえに} \quad 10 \leq A < 100$$

(i), (ii) の結果により,  $n = A^2 + m$  を小さい順に 10 個並べると

$$\begin{aligned} &5^2 + 1, 6^2 + 1, 7^2 + 1, 8^2 + 1, 9^2 + 1, \\ &10^2 + 1, 10^2 + 2, 11^2 + 1, 11^2 + 2, 12^2 + 1 \end{aligned}$$

よって, 求める 10 番目の数  $n$  は  $12^2 + 1 = 145$  ■

- 4 (1)  $a_k = k$  となる  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) が存在する次の4通りである.

$$(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)$$

よって、求める確率は  $\frac{4}{3!} = \frac{2}{3}$

- (2) 4個の数字1, 2, 3, 4を円形(サイクル)に並べる円順列の総数は次の3!通りある。(1を起点とすると)

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4, \\ 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$$

よって、 $n = 4$  のとき長さ4のサイクルは、次の6通りある.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 2, 1), \\ (3, 1, 4, 2), (4, 3, 1, 2), (4, 1, 2, 3)$$

- (3)  $j$  を正の整数とすると  $\frac{1}{j} > \int_j^{j+1} \frac{dx}{x}$

よって、 $n$  以下の正の整数  $k$  に対して

$$\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} > \sum_{j=k}^n \int_j^{j+1} \frac{dx}{x} = \int_k^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) - \log k$$

- (4) 1から  $n$  までの  $n$  個 ( $n$  は奇数) の順列に長さ  $\frac{n+1}{2}$  以上のサイクルがあれば、他のサイクルは  $\frac{n-1}{2}$  以下である。 $n$  個から選んだ順列の長さ  $j$  のサイクルは、 $n$  個から  $j$  個取り出して並べた円順列であり、その総数は  $\frac{nP_j}{j}$  通りで、残りの  $(n-j)$  個の並べ方は  $(n-j)!$  通りである。  
したがって、 $\frac{n+1}{2}$  以上のサイクルを含む確率  $p$  は

$$p = \frac{1}{n!} \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^n \frac{nP_j}{j} \cdot (n-j)! = \frac{1}{n!} \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^n \frac{n!}{j} = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^n \frac{1}{j}$$

よって、(3)の結果により

$$p = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^n \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log \frac{n+1}{2} = \log 2$$





## 第 4 章 京都大学

### 出題分野 (2010-2019) 150 分

◀	京都大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2次関数										
	図形と計量	4		2							
	データの分析										
II	式と証明						5				5
	複素数と方程式							6			6
	図形と方程式									1	
	三角関数	2					2		3・4	3	1
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法		3	3							
III	式と曲線										
	複素数平面								1		
	関数										
	極限			1		4					
	微分法とその応用				4	3	3・4	1			
	積分法		1	1							1
	積分法の応用	3・6			5	6	1	4	5	5	3
A	場合の数と確率		1		6		6				4
	整数の性質	5		4	3	5		2		2	2
	図形の性質			5				3		6	
B	平面上のベクトル				1						
	空間のベクトル	1	5・6			1			2		
	数列		4	6	2	2		5	6	4	
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		2								

数字は問題番号



## 4.1 2015年(150分)

- 1 2つの関数  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$  と  $y = \sin 2x$  のグラフの  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の部分で囲まれる領域を、 $x$  軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。  
ただし、 $x = 0$  と  $x = \frac{\pi}{2}$  は領域を含む線とは考えない。
- 2 次の2つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。  
(a) 少なくとも2つの内角は  $90^\circ$  である。  
(b) 半径1の円が内接する。ただし、円が四角形に内接するとは、円が四角形の4つの辺すべてに接することをいう。
- 3 (1)  $a$  を実数とすると、 $(a, 0)$  を通り、 $y = e^x + 1$  に接する直線がただ1つ存在することを示せ。  
(2)  $a_1 = 1$  として、 $n = 1, 2, \dots$  について、 $(a_n, 0)$  を通り、 $y = e^x + 1$  に接する直線の接点の  $x$  座標を  $a_{n+1}$  とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$  を求めよ。
- 4 一辺の長さが1の正四面体  $ABCD$  において、 $P$  を辺  $AB$  の中点とし、点  $Q$  が辺  $AC$  上を動くとする。このとき、 $\cos \angle PDQ$  の最大値を求めよ。
- 5  $a, b, c, d, e$  を正の実数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$g(x) = dx + e$$

を考える。すべての正の整数  $n$  に対して  $\frac{f(n)}{g(n)}$  は整数であるとする。このとき、 $f(x)$  は  $g(x)$  で割り切れることを示せ。

- 6 2つの関数を

$$f_0(x) = \frac{x}{2}, \quad f_1(x) = \frac{x+1}{2}$$

とおく。 $x_0 = \frac{1}{2}$  から始め、各  $n = 1, 2, \dots$  について、それぞれ確率  $\frac{1}{2}$  で  $x_n = f_0(x_{n-1})$  または  $x_n = f_1(x_{n-1})$  と定める。このとき、 $x_n < \frac{2}{3}$  となる確率  $P_n$  を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad \sin 2x - \sin \left( x + \frac{\pi}{8} \right) = 2 \cos \frac{24x + \pi}{16} \sin \frac{8x - \pi}{16}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \quad \frac{\pi}{16} < \frac{24x + \pi}{16} < \frac{13\pi}{16}$$

$$-\frac{\pi}{16} < \frac{8x - \pi}{16} < \frac{3\pi}{16}$$

$y = \sin 2x$  と  $y = \sin \left( x + \frac{\pi}{8} \right)$  の交点の  $x$  座標は

$$\frac{24x + \pi}{16} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{8x - \pi}{16} = 0$$

$$\text{すなわち} \quad x = \frac{7}{24}\pi, \quad \frac{\pi}{8}$$

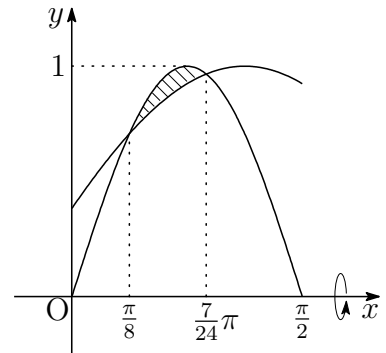
$$\frac{\pi}{8} < x < \frac{7}{24}\pi \text{ において} \quad \cos \frac{24x + \pi}{16} > 0, \quad \sin \frac{8x - \pi}{16} > 0$$

$$\text{したがって} \quad \sin 2x > \sin \left( x + \frac{\pi}{8} \right) > 0$$

求める立体の体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} \left\{ \sin^2 2x - \sin^2 \left( x + \frac{\pi}{8} \right) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \right\} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

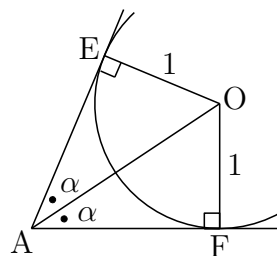
$$\text{よって} \quad V = \frac{\pi}{16}$$



2 右の図の四角形 OEOF について

$$AE = AF = \frac{1}{\tan \alpha}$$

四角形 OEOF の面積は  $\frac{1}{\tan \alpha}$



条件 (a), (b) を満たす四角形の 4 つの角の大きさを  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$  とし, その面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} + \frac{1}{\tan \delta} \quad \cdots (*)$$

一般性を失うことなく  $2\gamma = 2\delta = 90^\circ, 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

上の 2 式から  $\beta = 90^\circ - \alpha, \gamma = \delta = 45^\circ$

これらを (\*) に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} + \frac{1}{\tan 45^\circ} + \frac{1}{\tan 45^\circ} \\ &= \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} + 2 = \frac{(\tan \alpha - 1)^2}{\tan \alpha} + 4 \geq 4 \end{aligned}$$

よって,  $S$  は  $\alpha = 45^\circ$ , すなわち, 四角形 ABCD が正方形のとき, 最小値 4



3 (1)  $y = e^x + 1$  を微分すると  $y' = e^x$

曲線  $y = e^x + 1$  の上の点  $(t, e^t + 1)$  における接線の方程式は

$$y - (e^t + 1) = e^t(x - t)$$

これが点  $(a, 0)$  を通るから

$$-(e^t + 1) = e^t(a - t) \quad \text{ゆえに} \quad a = t - e^{-t} - 1 \quad \dots (*)$$

$$f(t) = t - e^{-t} - 1 \quad \text{とおくと} \quad f'(t) = 1 + e^{-t} > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$$

したがって、 $f(t) = a$  を満たす  $t$  はただ1つ存在する。

よって、 $(a, 0)$  を通り、 $y = e^x + 1$  に接する直線はただ1つ存在する。

(2)  $a = a_n, t = a_{n+1}$  を (\*) に代入すると

$$a_n = a_{n+1} - e^{-a_{n+1}} - 1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - a_n = 1 + e^{-a_{n+1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

上式より、 $a_{n+1} - a_n > 1$  であるから

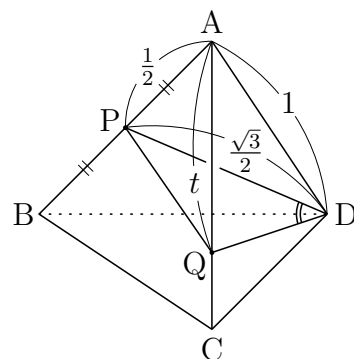
$$n > 1 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) > \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$\text{ゆえに} \quad a_n > n \quad \text{したがって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\text{上式に注意すると、} \textcircled{1} \text{ から} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 1 \quad \blacksquare$$

- 4 AQ = t において、△APQ および △AQD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t \cos 60^\circ \\ &= t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}, \\ QD^2 &= t^2 + 1^2 - 2 \cdot t \cdot 1 \cos 60^\circ \\ &= t^2 - t + 1 \end{aligned}$$



△PQD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \cos \angle PDQ &= \frac{PD^2 + QD^2 - PQ^2}{2PD \cdot QD} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + (t^2 - t + 1) - (t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{4})}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{t^2 - t + 1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3 - t}{\sqrt{t^2 - t + 1}} \end{aligned}$$

ここで、 $f(t) = \frac{3 - t}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1 \cdot \sqrt{t^2 - t + 1} - (3 - t) \cdot \frac{2t - 1}{2\sqrt{t^2 - t + 1}}}{t^2 - t + 1} \\ &= \frac{-2(t^2 - t + 1) + (t - 3)(2t - 1)}{(t^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - 5t}{(t^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

t	0	...	$\frac{1}{5}$	...	1
f'(t)		+	0	-	
f(t)		↗	$\frac{2\sqrt{21}}{3}$	↘	

よって、求める最大値は  $\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{21}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$  ■

5  $f(x)$  を  $g(x)$  で割ったときの商を  $px + q$ , 余りを  $r \neq 0$  とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px + q + \frac{r}{g(x)}, \quad p = \frac{a}{d} > 0$$

2以上の自然数  $n$  に対して

$$\frac{f(n-1)}{g(n-1)} = p(n-1) + q + \frac{r}{g(n)-d}$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = pn + q + \frac{r}{g(n)}$$

$$\frac{f(n+1)}{g(n+1)} = p(n+1) + q + \frac{r}{g(n)+d}$$

上の3式から

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(n-1)}{g(n-1)} + \frac{f(n+1)}{g(n+1)} - 2 \cdot \frac{f(n)}{g(n)} \right| &= \left| \frac{r}{g(n)-d} + \frac{r}{g(n)+d} - \frac{2r}{g(n)} \right| \\ &= \left| \frac{2rd^2}{g(n)\{g(n)+d\}\{g(n)-d\}} \right| \cdots (*) \end{aligned}$$

$d > 0$  より  $g(n) = dn + e$  は, いくらでも大きくなるので, このとき

$$0 < \left| \frac{2rd^2}{g(n)\{g(n)+d\}\{g(n)-d\}} \right| < 1$$

となり, (\*) の左辺が整数であることに反する.

よって,  $r = 0$  となり,  $f(x)$  は  $g(x)$  で割り切れる. ■

$$\begin{aligned}
 \boxed{6} \text{ 条件により} \quad & x_0 = \frac{1}{2}, \\
 & x_1 = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \\
 & x_2 = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

$$\text{これから} \quad x_n = \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+1}}, \dots, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$$

と推測し、それぞれの確率は  $\frac{1}{2^n}$  であることを示す.

実際,  $x_n = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$  のとき ( $k = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ),  $\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}$  の確率で

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} = \frac{2k-1}{2^{n+2}} \quad \dots \textcircled{1}$$

また,  $x_n = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$  のとき ( $k = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ),  $\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}$  の確率で

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{2k-1}{2^{n+1}} + 1 \right) = \frac{2^{n+1} + 2k - 1}{2^{n+2}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}}, \frac{3}{2^{n+2}}, \dots, \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}$$

であり、それぞれの確率は  $\frac{1}{2^{n+1}}$  である.

$n = 0$  のときは、自明であるから、数学的帰納法により示された.

したがって,  $x_n$  の要素は  $2^n$  個あり,  $\frac{2N-1}{2^{n+1}} < \frac{2}{3} < \frac{2N+1}{2^{n+1}}$  とすると

$$\text{これを満たす自然数 } N \text{ は} \quad \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{1}{2} < N < \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{1}{2}$$

$$[x] \text{ を } x \text{ を超えない最大の整数とすると} \quad N = \left[ \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{1}{2} \right]$$

ここで,  $2 \equiv -1 \pmod{3}$  であるから,  $2^{n+1} + (-1)^n \equiv 0 \pmod{3}$  より

$$N = \left[ \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{3} \right] = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

$$\text{よって} \quad P_n = \frac{N}{2^n} = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3 \cdot 2^n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^n$$

別解  $f_0(x) = \frac{x}{2}$ ,  $f_1(x) = \frac{1+x}{2}$  より

$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{1}{3} \text{ のとき, } & 0 < f_0(x) < \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2} < f_1(x) < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \text{ のとき, } & \frac{1}{6} \leq f_0(x) < \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq f_1(x) < \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \leq x < 1 \text{ のとき, } & \frac{1}{3} \leq f_0(x) < \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{6} \leq f_1(x) < 1 \end{aligned}$$

$0 < x_n < \frac{1}{3}$  である確率を  $a_n$ ,  $\frac{1}{3} \leq x_n < \frac{2}{3}$  である確率を  $b_n$ ,  $\frac{2}{3} \leq x_n < 1$  である確率を  $c_n$  とすると

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 1, \quad c_0 = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ より } \quad a_n + b_n + c_n = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

これを  $\textcircled{2}$  に代入して

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left( b_n - \frac{1}{3} \right)$$

数列  $\left\{ b_n - \frac{1}{3} \right\}$  は初項  $b_0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ , 公比  $-\frac{1}{2}$  の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{ より } \quad a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_n = c_n \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{6} \text{ から } \quad a_n = c_n = \frac{1 - b_n}{2}$$

よって, 求める確率  $P_n$  は

$$\begin{aligned} P_n &= a_n + b_n = \frac{1 - b_n}{2} + b_n \\ &= \frac{1 + b_n}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \end{aligned}$$





## 4.2 2016年(150分)

- 1 (1)  $n$  を2以上の自然数とするとき、関数

$$f_n(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin^{n-1} \theta$$

の  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  における最大値  $M_n$  を求めよ.

- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^n$  を求めよ.

- 2 素数  $p, q$  を用いて  $p^q + q^p$  と表される素数をすべて求めよ.

- 3 四面体 OABC が次の条件を満たすならば、それは正四面体であることを示せ.

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る.

ただし、四面体のある頂点の対面とは、その頂点を除く他の3つの頂点がなす三角形のことをいう.

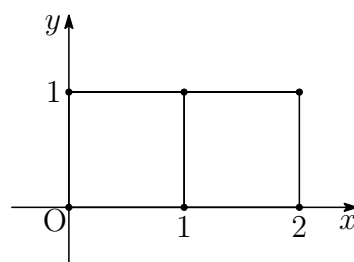
- 4  $xyz$  空間において、平面  $y = z$  の中で

$$|x| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leq y \leq \log a$$

で与えられる図形  $D$  を考える. ただし  $a$  は1より大きい定数とする. この図形  $D$  を  $y$  軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ.

- 5  $xy$  平面上の6個の点  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)$  が図のように長さ1の線分で結ばれている. 動点 X は、これらの点の上を次の規則に従って1秒ごとに移動する.

規則：動点 X は、そのときに位置する点から出る長さ1の線分によって結ばれる図の点のいずれかに、等しい確率で移動する.



例えば、X が  $(2, 0)$  にいるときは、 $(1, 0), (2, 1)$  のいずれかに  $\frac{1}{2}$  の確率で移動する. また X が  $(1, 1)$  にいるときは、 $(0, 1), (1, 0), (2, 1)$  のいずれかに  $\frac{1}{3}$  の確率で移動する. 時刻0で動点 X が  $O = (0, 0)$  から出発するとき、 $n$  秒後に X の  $x$  座標が0である確率を求めよ. ただし  $n$  は0以上の整数とする.

6 複素数を係数とする2次式  $f(x) = x^2 + ax + b$  に対し、次の条件を考える。

(イ)  $f(x^3)$  は  $f(x)$  で割り切れる。

(ロ)  $f(x)$  の係数  $a, b$  の少なくとも一方は虚数である。

この2つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす2次式をすべて求めよ。

解答例

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (1) \quad f_n(\theta) &= (1 + \cos \theta) \sin^{n-1} \theta = (1 + \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} \\ &= (1 + \cos \theta)^{\frac{n+1}{2}} (1 - \cos \theta)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

$x = \cos \theta$ ,  $g_n(x) = f_n(\theta)$  とおくと,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  より

$$g_n(x) = (1+x)^{\frac{n+1}{2}} (1-x)^{\frac{n-1}{2}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

両辺の自然対数をとって微分すると

$$\begin{aligned} \frac{g'_n(x)}{g_n(x)} &= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{(n+1)(1-x) - (n-1)(1+x)}{2(1+x)(1-x)} = \frac{1-nx}{(1+x)(1-x)} \end{aligned}$$

$x$	0	...	$\frac{1}{n}$	...	1
$g'_n(x)$		+	0	-	
$g_n(x)$	0	↗	極大	↘	0

$$\text{よって} \quad M_n = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} M_n &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ (M_n)^n &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

2 素数  $p, q$  の偶奇が一致するならば,  $p^q + q^p$  は 2 でない偶数となるから,  $p^q + q^p$  が素数であるとき,  $p$  と  $q$  の偶奇は異なる. すなわち,  $p^q + q^p$  が素数であるとき, 素数  $p, q$  の一方は 2 であるから

$$p^2 + 2^p \text{ が素数 } (p \text{ は奇素数}) \dots (*)$$

を求めればよい.

(i)  $p = 3$  のとき,  $3^2 + 2^3 = 17$  は, (\*) を満たす

(ii)  $p \geq 5, p \equiv \pm 1 \pmod{3}$  のとき

$$p^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1, \quad 2^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod{3}$$

したがって  $p^2 + 2^p \equiv 1 + (-1) \equiv 0 \pmod{3}$

このとき, (\*) を満たす素数  $p$  は存在しない.

(i), (ii) より, 求める素数は 17

3  $\triangle OBC$  の外心を  $H$  とすると

$$HO = HB = HC$$

$A$  から  $\triangle OBC$  に下ろした垂線が  $H$  を通るから

$$AH^2 + HO^2 = AH^2 + HB^2 = AH^2 + HC^2$$

ゆえに  $AO^2 = AB^2 = AC^2$

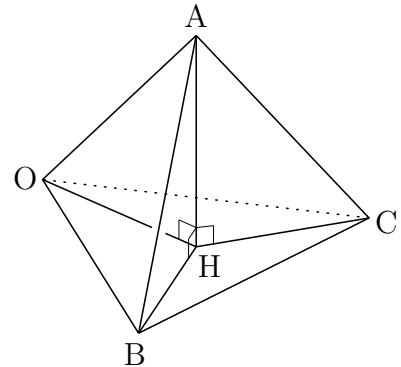
同様に,  $B, C$  から対面に下ろした垂線により

$$BO^2 = BC^2 = BA^2,$$

$$CO^2 = CA^2 = CB^2$$

すなわち  $OA = OB = OC = AB = BC = CA$

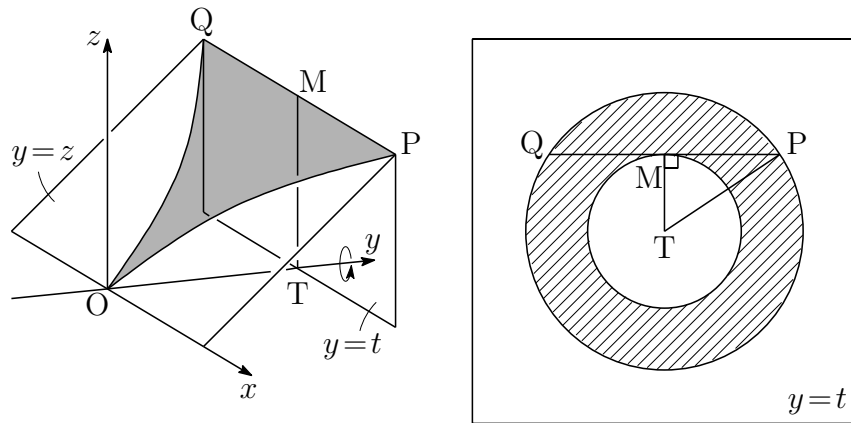
よって, 四面体  $OABC$  は正四面体である.



4 図形  $D$  は

$$y = z, \quad -\frac{e^y + e^{-y}}{2} + 1 \leq x \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leq y \leq \log a$$

図形  $D$  と平面  $y = t$  ( $0 \leq t \leq \log a$ ) との共有部分は、2点  $P\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1, t, t\right)$ ,  $Q\left(-\frac{e^t + e^{-t}}{2} + 1, t, t\right)$  を結ぶ線分  $PQ$  で、線分  $PQ$  の中点を  $M$  とする.



$PQ$  を点  $T(0, t, 0)$  を中心に  $y$  軸の周りに回転させた図形の面積を  $S(t)$  とすると

$$S(t) = \pi(TP^2 - TM^2) = \pi MP^2 = \pi \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \right)^2$$

よって、求める体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\log a} S(t) dt = \pi \int_0^{\log a} \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \right)^2 dt \\ &= \pi \int_0^{\log a} \left( \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} - e^t - e^{-t} + \frac{3}{2} \right) dt \\ &= \pi \left[ \frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t} - e^t + e^{-t} + \frac{3}{2}t \right]_0^{\log a} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{8} \left( a^2 - \frac{1}{a^2} \right) - a + \frac{1}{a} + \frac{3}{2} \log a \right\} \end{aligned}$$

■

5  $n$ 秒後に  $X$  の  $x$  座標が  $0, 1, 2$  である確率を, それぞれ  $a_n, b_n, c_n$  とすると,  
 $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n & \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n & \cdots \textcircled{2} \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

①～③の辺々を加えると  $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$

ゆえに  $a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$

②, ④から  $c_n$  を消去すると

$$b_{n+1} = -\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(b_n - \frac{3}{7}\right)$$

数列  $\left\{b_n - \frac{3}{7}\right\}$  は初項が  $b_0 - \frac{3}{7}$ , 公比が  $-\frac{1}{6}$  の等比数列であるから

$$b_n - \frac{3}{7} = \left(b_0 - \frac{3}{7}\right) \left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{3}{7} \left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\} \quad \cdots \textcircled{5}$$

① - ③ より  $a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$

数列  $\{a_n - c_n\}$  は初項が  $a_0 - b_0$ , 公比が  $\frac{1}{2}$  の等比数列であるから

$$a_n - c_n = (a_0 - c_0) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots \textcircled{6}$$

④ - ⑤ + ⑥ より  $2a_n = 1 - \frac{3}{7} \left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

よって  $a_n = \frac{2}{7} + \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

補足 同様の計算により

$$b_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad c_n = \frac{2}{7} + \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$



6 2次方程式  $f(x) = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  とすると, 解と係数の関係により

$$a = -(\alpha + \beta), \quad b = \alpha\beta \quad \cdots (*)$$

したがって  $f(x) = x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$

$$g(x) = f(x^3) \text{ とおくと } g(x) = (x^3 - \alpha)(x^3 - \beta)$$

$g(x)$  が  $f(x)$  で割り切れるとき,  $g(x)$  は  $x - \alpha$  および  $x - \beta$  で割り切れるから,  $g(\alpha) = 0, g(\beta) = 0$  より

$$(\alpha^3 - \alpha)(\alpha^3 - \beta) = 0 \quad \text{かつ} \quad (\beta^3 - \alpha)(\beta^3 - \beta) = 0$$

上の2式の  $\alpha, \beta$  の対称性により, 次の場合分けを行う.

(i)  $\alpha^3 - \alpha = 0, \beta^3 - \beta = 0$  の場合

$\alpha, \beta$  は実数であるから, (\*) より,  $a, b$  はともに実数となり, 不適.

(ii)  $\alpha^3 - \alpha = 0, \beta^3 - \alpha = 0$  の場合

$\alpha = \beta = 0$  のとき, (\*) により,  $a, b$  がともに実数となり, 不適

$\alpha = \beta^3 = \pm 1$  のとき,  $\beta$  が実数のとき, (\*) により,  $a, b$  がともに実数となるから,  $\beta$  は虚数であることに注意して

$$(\alpha, \beta) = \left(1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right), \left(-1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$\text{ゆえに } (a, b) = \left(\frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right), \left(\frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2}\right) \quad (\text{複号同順})$$

(iii)  $\alpha^3 - \beta = 0, \beta^3 - \alpha = 0$  の場合

$$\beta \text{ を消去すると } \alpha(\alpha + 1)(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1)(\alpha^4 + 1) = 0$$

$\alpha$  が実数とき,  $\beta$  は実数となるから,  $a, b$  はともに実数となり, 不適.

$\alpha = \pm i$  のとき,  $\beta = \alpha^3 = \mp i$  より (複号同順),  $a = 0, b = 1$  となり, 不適.

$\alpha = \frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}}$  のとき,  $\beta = \frac{\mp 1 + i}{\sqrt{2}}$  となり (複号同順),  $a = -\sqrt{2}i, b = -1$

$\alpha = \frac{\mp 1 - i}{\sqrt{2}}$  のとき,  $\beta = \frac{\pm 1 - i}{\sqrt{2}}$  となり (複号同順),  $a = \sqrt{2}i, b = -1$

$$(i) \sim (iii) \text{ より } f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2}x + \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \\ x^2 + \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2}x + \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} \\ x^2 \pm \sqrt{2}ix - 1 \end{cases} \quad (\text{複号同順})$$



## 4.3 2017年(150分)

1  $w$  を 0 でない複素数,  $x, y$  を  $w + \frac{1}{w} = x + yi$  を満たす実数とする.

- (1) 実数  $R$  は  $R > 1$  を満たす定数とする.  $w$  が絶対値  $R$  の複素数全体を動くとき,  $xy$  平面上の点  $(x, y)$  の軌跡を求めよ.
- (2) 実数  $\alpha$  は  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  を満たす定数とする.  $w$  が偏角  $\alpha$  の複素数全体を動くとき,  $xy$  平面上の点  $(x, y)$  の軌跡を求めよ.

2 四面体  $OABC$  を考える. 点  $D, E, F, G, H, I$  は, それぞれ辺  $OA, AB, BC, CO, OB, AC$  上にあり, 頂点ではないとする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $\overrightarrow{DG}$  と  $\overrightarrow{EF}$  が平行ならば  $AE : EB = CF : FB$  であることを示せ.
- (2)  $D, E, F, G, H, I$  が正八面体の頂点となっているとき, これらの点は  $OABC$  の各辺の中点であり,  $OABC$  は正四面体であることを示せ.

3  $p, q$  を自然数,  $\alpha, \beta$  を

$$\tan \alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan \beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする. このとき

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす  $p, q$  の組  $(p, q)$  をすべて求めよ.

4  $\triangle ABC$  は鋭角三角形であり,  $\angle A = \frac{\pi}{3}$  であるとする. また  $\triangle ABC$  の外接円の半径は 1 であるとする.

- (1)  $\triangle ABC$  の内心を  $P$  とするとき,  $\angle BPC$  を求めよ.
- (2)  $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$  の取りうる値の範囲を求めよ.

5  $a \geq 0$  とする.  $0 \leq x \leq \sqrt{2}$  の範囲で曲線  $y = xe^{-x}$ , 直線  $y = ax$ , 直線  $x = \sqrt{2}$  によって囲まれた部分の面積を  $S(a)$  とする. このとき,  $S(a)$  の最小値を求めよ.

(ここで「囲まれた部分」とは, 上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする.)

6  $n$  を自然数とする.  $n$  個の箱すべてに,  $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}$  の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている. 各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し, 取り出した順に左から並べて  $n$  桁の数  $X$  を作る. このとき,  $X$  が 3 で割り切れる確率を求めよ.



解答例

1 (1)  $\theta = \arg w$  とすると,  $R = |w|$  より

$$w = R(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{R}(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$x + yi = w + \frac{1}{w} \text{ より}$$

$$x = \left(R + \frac{1}{R}\right) \cos \theta, \quad y = \left(R - \frac{1}{R}\right) \sin \theta \quad \cdots (*)$$

$R > 1$  より,  $R + \frac{1}{R} \neq 0$ ,  $R - \frac{1}{R} \neq 0$  であるから

$$\frac{x}{R + \frac{1}{R}} = \cos \theta, \quad \frac{y}{R - \frac{1}{R}} = \sin \theta$$

上の2式から,  $\theta$  を消去することにより, 求める軌跡は, 次の楕円である.

$$\frac{x^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$$

(2)  $r = |w|$  とすると,  $\alpha = \arg w$  より, (\*) と同様に

$$x = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \alpha, \quad y = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \alpha$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  であるから,  $\cos \alpha \neq 0$ ,  $\sin \alpha \neq 0$  より

$$\frac{x}{\cos \alpha} = r + \frac{1}{r}, \quad \frac{y}{\sin \alpha} = r - \frac{1}{r} \quad \cdots (**)$$

(\*\*) の第1式から

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 + 2 \geq 2$$

(\*\*) の2式から,  $r$  を消去すると

$$\left(\frac{x}{\cos \alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin \alpha}\right)^2 = \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 4$$

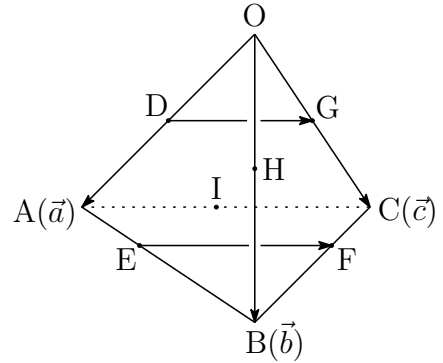
したがって, 求める軌跡は, 次の双曲線の一部である.

$$\left(\frac{x}{2 \cos \alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{2 \sin \alpha}\right)^2 = 1 \quad (x \geq 2 \cos \alpha)$$

■

2 (1)  $0 < d, e, f, g < 1$  とし

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= d\vec{a}, & \vec{OG} &= g\vec{c}, \\ \vec{OE} &= e\vec{a} + (1-e)\vec{b}, \\ \vec{OF} &= f\vec{c} + (1-f)\vec{b}\end{aligned}$$



とおくと

$$\begin{aligned}\vec{DG} &= -d\vec{a} + g\vec{c}, \\ \vec{EF} &= -e\vec{a} + (e-f)\vec{b} + f\vec{c}\end{aligned}$$

$\vec{DG}$  と  $\vec{EF}$  が平行であるとき、 $\vec{EF} = k\vec{DG}$  であるから ( $k$  は 0 でない定数)

$$-e\vec{a} + (e-f)\vec{b} + f\vec{c} = k(-d\vec{a} + g\vec{c})$$

整理すると  $(kd - e)\vec{a} + (e - f)\vec{b} + (f - kg)\vec{c} = \vec{0} \quad \dots (*)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  は 1 次独立であるから

$$kd - e = 0, \quad e - f = 0, \quad f - kg = 0 \quad \text{すなわち} \quad d = g, \quad e = f$$

$AE : EB = 1 - e : e, \quad CF : FB = 1 - f : f$  であるから、 $e = f$  より

$$AE : EB = CF : FB$$

(2) 条件を満たすとき、(\*) に  $k = 1$  を代入して (辺 AC に注目)

$$d = e = f = g$$

したがって  $AE : EB = CF : FB = AD : DO = CG : GO \quad \dots \textcircled{1}$

また、同様に、 $\vec{DH} = \vec{IF}$  より (辺 AB に注目)

$$AD : DO = BH : HO = AI : IC = BF : FC \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$  より  $CF : FB = AD : DO$ ,  $\textcircled{2}$  より  $AD : DO = BF : FC$

上の 2 式より、 $BF : FC = 1 : 1$  である。

したがって、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  より、 $D, E, F, G, H, I$  は各辺の midpoint である。

中点連結定理により  $OA = 2HE, \quad OB = 2DE, \quad OC = 2HF,$

$$AB = 2DH, \quad BC = 2HG, \quad CA = 2GD$$

このとき、これらの辺の長さは等しいので、 $OABC$  は正四面体である。■

3  $\tan \beta = \frac{1}{q}$  より,  $q = 1$  のとき,  $\beta = \frac{\pi}{4} + n\pi$  ( $n$  は整数) であるから

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -p \quad (\neq 2)$$

したがって  $q \neq 1$

$$\tan \beta = \frac{1}{q} \quad (q \neq 1) \text{ より} \quad \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{q^2}} = \frac{2q}{q^2 - 1}$$

正接の加法定理により

$$\tan \alpha = \tan\{(\alpha + 2\beta) - 2\beta\} = \frac{\tan(\alpha + 2\beta) - \tan 2\beta}{1 + \tan(\alpha + 2\beta) \tan 2\beta}$$

$$\text{条件により} \quad \frac{1}{p} = \frac{2 - \frac{2q}{q^2 - 1}}{1 + 2 \cdot \frac{2q}{q^2 - 1}} = \frac{2(q^2 - q - 1)}{q^2 + 4q - 1} \quad \text{ゆえに} \quad 2p - 1 = \frac{5q}{q^2 - q - 1}$$

$2p - 1$  は正の奇数,  $q^2 - q - 1 = q(q - 2) + q - 1 > 0$  より ( $q \geq 2$ )

$$\frac{5q}{q^2 - q - 1} \geq 1 \quad \text{ゆえに} \quad q^2 - 6q - 1 \leq 0$$

したがって  $|q - 3| \leq \sqrt{10}$

これを満たす自然数  $q$  は  $q = 2, 3, 4, 5, 6$

ここで,  $f(q) = \frac{5q}{q^2 - q - 1}$  とすると

$$f(2) = 10, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = \frac{20}{11}, \quad f(5) = \frac{25}{19}, \quad f(6) = \frac{30}{29}$$

よって, 条件を満たすのは,  $q = 3$  のとき

$$2p - 1 = 3 \quad \text{これを解いて} \quad p = 2$$

よって, 求める組は  $(p, q) = (2, 3)$  ■

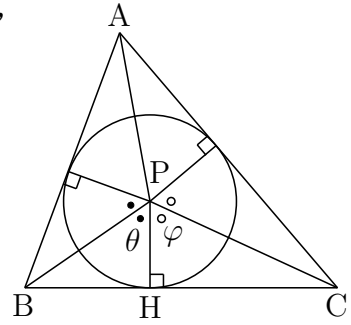
- 4 (1) 内心Pから辺BCに垂線PHを引き、 $\angle BPH = \theta$ ,  
 $\angle CPH = \varphi$  とすると

$$\angle B = \pi - 2\theta, \quad \angle C = \pi - 2\varphi \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\angle A = \frac{\pi}{3} \text{ であるから, } \angle A + \angle B + \angle C = \pi \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{3} + (\pi - 2\theta) + (\pi - 2\varphi) = \pi$$

$$\text{したがって } \theta + \varphi = \frac{2}{3}\pi \text{ よって } \angle BPC = \theta + \varphi = \frac{2}{3}\pi$$



- (2)  $\triangle ABC$  に正弦定理  $\frac{BC}{\sin A} = 2R$  を適用すると

$$\frac{BC}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \cdot 1 \quad \text{ゆえに} \quad BC = \sqrt{3}$$

$r = PH$  であるから,  $BH = r \tan \theta$ ,  $HC = r \tan \varphi$ ,  $BH + HC = BC$  より

$$r \tan \theta + r \tan \varphi = \sqrt{3}$$

$$r(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) = \sqrt{3} \cos \theta \cos \varphi$$

$$r \sin(\theta + \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \{ \cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi) \}$$

これに (1) の結果を代入すると

$$\frac{\sqrt{3}}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ -\frac{1}{2} + \cos(\theta - \varphi) \right\} \quad \text{ゆえに} \quad r = \cos(\theta - \varphi) - \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi - \theta \text{ であるから } r = \cos \left( 2\theta - \frac{2}{3}\pi \right) - \frac{1}{2} \quad \dots (*)$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \angle C = \pi - 2\varphi = \pi - 2 \left( \frac{2}{3}\pi - \theta \right) = 2\theta - \frac{\pi}{3}$$

$\triangle ABC$  は, 鋭角三角形であるから,  $\angle B$ ,  $\angle C$  について

$$0 < \pi - 2\theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 < 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$$

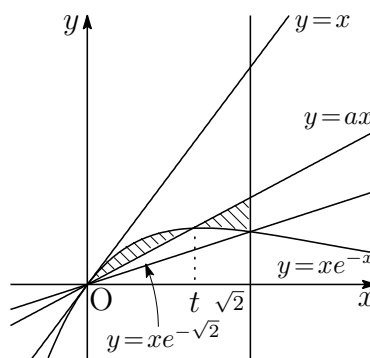
$$\text{すなわち } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5}{12}\pi \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{\pi}{6} < 2\theta - \frac{2}{3}\pi < \frac{\pi}{6} \quad \dots (**)$$

$$(*), (**) \text{ より } \frac{\sqrt{3}-1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$$



5  $y = xe^{-x}$  より,  $y' = (1-x)e^{-x}$ ,  $y'' = (x-2)e^{-x}$

$x$	0	...	1	...	$\sqrt{2}$
$y'$		+	0	-	
$y''$		-	-	-	
$y$	0	↗	極大	↘	$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$



$y = xe^{-x}$  のグラフは, 右の図のようになる.  
 $x = 0$  のとき,  $y' = 1$  であるから, 曲線  $y = xe^{-x}$  上の原点 O における接線の傾きは 1

曲線  $y = xe^{-x}$  と直線  $x = \sqrt{2}$  の交点は  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$  であるから, 原点とこの交点を通る直線の傾きは  $e^{-\sqrt{2}}$

上の図から,  $0 \leq a < e^{-\sqrt{2}}$  のとき,  $S(a)$  は単調減少である.  $1 < a$  のとき,  $S(a)$  は単調増加である. したがって, これらの区間においては,  $S(a)$  は最小値をもたないので,  $e^{-\sqrt{2}} \leq a \leq 1$  において,  $S(a)$  の最小値を求めればよい.

曲線  $y = xe^{-x}$  と直線  $y = ax$  の交点の  $x$  座標を  $t$  とすると ( $0 < t < \sqrt{2}$ )

$$te^{-t} = at \quad \text{すなわち} \quad a = e^{-t} \quad (t = -\log a)$$

関数  $f(x) = xe^{-x} - ax$  の原始関数の 1 つを  $F(x) = -(x+1)e^{-x} - \frac{a}{2}x^2$  とすると

$$S(a) = \int_0^t f(x) dx - \int_t^{\sqrt{2}} f(x) dx = 2F(t) - F(0) - F(\sqrt{2})$$

このとき  $F(t) = -(t+1)e^{-t} - \frac{a}{2}t^2 = -\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)e^{-t}$ ,  $F(0) = -1$ ,  
 $F(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} - a = -e^{-t} - (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$

したがって  $S(a) = -(t+1)^2e^{-t} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$

$S(a) = g(t)$  とすると  $g'(t) = (t+1)(t-1)e^{-t}$

$t$	0	...	1	...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$		↘	極小	↗	

よって,  $t = 1$ , すなわち,  $a = e^{-1}$  のとき,  $S(a)$  は最小となる.

$$\text{最小値 } S(e^{-1}) = g(1) = -4e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$$



- 6  $n$ 桁の数  $X$  が、3で割り切れる確率を  $a_n$ 、3で割って1余る確率を  $b_n$ 、3で割って2余る確率を  $c_n$  とすると、次の確率漸化式が成り立つ。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n, \\ b_{n+1} &= \frac{2}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n, \\ c_{n+1} &= \frac{2}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n, \\ a_1 &= \frac{1}{5}, \quad b_1 = \frac{2}{5}, \quad c_1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

第1式から第3式の辺々を加えると  $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$

ゆえに  $a_n + b_n + c_n = a_1 + b_1 + c_1 = 1$

$b_n + c_n = 1 - a_n$  であるから、第1式は

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(b_n + c_n) = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(1 - a_n) = -\frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}$$

したがって  $a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$

数列  $\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$  は、初項  $a_1 - \frac{1}{3}$ 、公比  $-\frac{1}{5}$  の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(a_1 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

よって、求める確率は  $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$

補足 第2式および第3式から

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}(a_n + c_n) = \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}(1 - b_n) = -\frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}, \\ c_{n+1} &= \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}(a_n + b_n) = \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}(1 - c_n) = -\frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

同様にして  $b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$  ■

## 4.4 2018年(150分)

1 0でない実数  $a, b, c$  は次の条件 (i) と (ii) を満たしながら動くものとする.

(i)  $1 + c^2 \leq 2a$ .

(ii) 2つの放物線  $C_1: y = ax^2$  と  $C_2: y = b(x-1)^2 + c$  は接している.

ただし, 2つの曲線が接するとは, ある共有点において共通の接線をもつことであり, その共有点を接点という.

(1)  $C_1$  と  $C_2$  の接点の座標を  $a$  と  $c$  を用いて表せ.

(2)  $C_1$  と  $C_2$  の接点が動く範囲を求め, その範囲を図示せよ.

2  $n^3 - 7n + 9$  が素数となるような整数  $n$  をすべて求めよ.

3  $\alpha$  は  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  を満たす定数とし, 四角形 ABCD に関する次の2つの条件を考える.

(i) 四角形 ABCD は半径1の円に内接する.

(ii)  $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$ .

条件 (i) と (ii) を満たす四角形のなかで, 4辺の長さの積

$$k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$$

が最大となるものについて,  $k$  の値を求めよ.

4 コインを  $n$  回投げて複素数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  を次のように定める.

(i) 1回目に表が出れば  $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  とし, 裏が出れば  $z_1 = 1$  とする.

(ii)  $k = 2, 3, \dots, n$  のとき,  $k$  回目に表が出れば  $z_k = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$  とし, 裏が出れば  $z_k = \overline{z_{k-1}}$  とする. ただし,  $\overline{z_{k-1}}$  は  $z_{k-1}$  の共役複素数である.

このとき,  $z_n = 1$  となる確率を求めよ.

5 曲線  $y = \log x$  上の点  $A(t, \log t)$  における法線上に、点  $B$  を  $AB = 1$  となるようにとる。ただし  $B$  の  $x$  座標は  $t$  より大きいとする。

(1) 点  $B$  の座標  $(u(t), v(t))$  を求めよ。また  $\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)$  を求めよ。

(2) 実数  $r$  は  $0 < r < 1$  を満たすとし、 $t$  が  $r$  から  $1$  まで動くときに点  $A$  と点  $B$  が描く曲線の長さをそれぞれ  $L_1(r)$ ,  $L_2(r)$  とする。このとき、極限  $\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r))$  を求めよ。

6 四面体  $ABCD$  は  $AC = BD$ ,  $AD = BC$  を満たすとし、辺  $AB$  の中点を  $P$ , 辺  $CD$  の中点を  $Q$  とする。

(1) 辺  $AB$  と線分  $PQ$  は垂直であることを示せ。

(2) 線分  $PQ$  を含む平面  $\alpha$  で四面体  $ABCD$  を切って2つの部分に分ける。このとき、2つの部分の体積は等しいことを示せ。



解答例

1 (1)  $f(x) = ax^2$ ,  $g(x) = b(x-1)^2 + c$  とおくと

$$f'(x) = 2ax, \quad g'(x) = 2b(x-1)$$

$C_1, C_2$  の共有点の  $x$  座標を  $t$  とすると,  $f(t) = g(t)$ ,  $f'(t) = g'(t)$  より

$$(*) \begin{cases} at^2 = b(t-1)^2 + c \\ 2at = 2b(t-1) \end{cases}$$

(\*) の第2式から  $at = b(t-1) \dots \textcircled{1}$

$a \neq 0, b \neq 0$  であるから,  $\textcircled{1}$  より  $t \neq 0, 1$

$\textcircled{1}$  と (\*) の第1式から  $b$  を消去すると

$$at^2 = at(t-1) + c \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{c}{a}$$

したがって  $f\left(\frac{c}{a}\right) = a\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a}$  よって, 接点は  $\left(\frac{c}{a}, \frac{c^2}{a}\right)$

(2) (1) の結果から, 接点の座標を  $(x, y)$  とおくと

$$x = \frac{c}{a}, \quad y = \frac{c^2}{a} \quad (x \neq 0, 1)$$

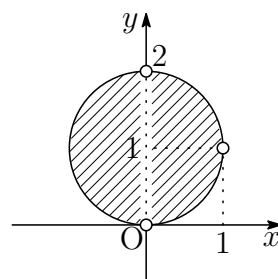
上の2式から  $a = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \frac{c^2}{a} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 y = \frac{y}{x^2}$ ,  $c = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{a}{c} = y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x}$

これらを  $1 + c^2 \leq 2a$  に代入すると

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \leq 2 \cdot \frac{y}{x^2}$$

よって  $x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad (x \neq 0, 1)$

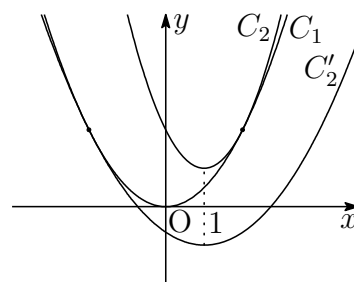
この不等式の表す領域は, 右の図の斜線部分で,  $y$  軸および点  $(1, 1)$  は含まない.



補足 右の図から,  $C_1$  と  $C_2$  の接点の  $x$  座標は

$$x \neq 0, 1$$

であることがわかる.



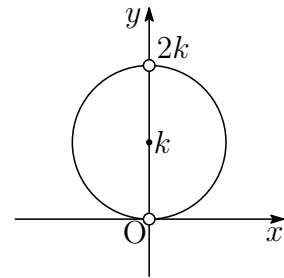
別解  $1 + c^2 \leq 2a$  より,  $a > 0$  であるから,  $k = \frac{1 + c^2}{2a}$  とおくと  $0 < k \leq 1$   
 接点の座標を  $(x, y)$  とおくと, (1) の結果から

$$x = \frac{c}{a} = \frac{2kc}{1 + c^2}, \quad y = \frac{c^2}{a} = \frac{2kc^2}{1 + c^2}$$

$c \neq 0$  であるから,  $c = \tan \theta$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とおくと

$$x = k \sin 2\theta, \quad y = k(1 - \cos 2\theta)$$

これは, 右の図のように,  $y$  軸上の点を除く,  
 中心  $(0, k)$ , 半径  $k$  の円である. 接点の  $x$  座標  
 は,  $x \neq 0, 1$  であるから,  $k$  が  $0 < k \leq 1$  の範  
 囲を動くとき, (2) で求めた図形が得られる.



**2** 与えられた整式を変形すると

$$n^3 - 7n + 9 = (n - 1)n(n + 1) - 3(2n - 3) \quad \dots (*)$$

連続する3整数の積  $(n - 1)n(n + 1)$  は3の倍数であるから, (\*) は3の倍数である. これが素数であるとき, その値は3であるから

$$n^3 - 7n + 9 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad (n - 1)(n - 2)(n + 3) = 0$$

よって, 求める整数  $n$  は  $n = 1, 2, -3$

**3**  $\theta = \angle ABD$  とおくと

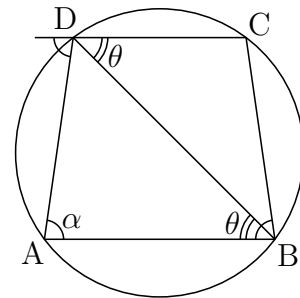
$$\angle DBC = \alpha - \theta, \quad \angle ADB = \pi - \alpha - \theta$$

外接円の半径が1であるから, 正弦定理により

$$AB = 2 \sin(\pi - \alpha - \theta) = 2 \sin(\alpha + \theta),$$

$$BC = DA = 2 \sin \theta,$$

$$CD = 2 \sin(\alpha - \theta)$$



$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad k &= AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = 16 \sin^2 \theta \sin(\alpha + \theta) \sin(\alpha - \theta) \\ &= 8 \sin^2 \theta (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) = 16 \sin^2 \theta (-\sin^2 \theta + \sin^2 \alpha) \\ &= -16 \left( \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right)^2 + 4 \sin^4 \alpha \end{aligned}$$

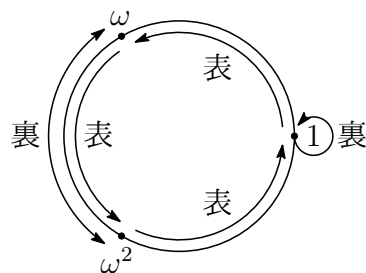
よって,  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha$  のとき,  $k$  は最大値  $4 \sin^4 \alpha$  をとる.

4  $n$  を自然数,  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  とすると  $z_n \in \{1, \omega, \omega^2\}$

$z_n = 1, z_n = \omega, z_n = \omega^2$  となる確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n$  とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_1 = \frac{1}{2}, q_1 = \frac{1}{2}, r_1 = 0$$

$$(*) \begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}r_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = q_n \end{cases}$$



(\*) の第 1 式と第 2 式から

$$p_{n+1} - q_{n+1} = 0, \quad p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + r_n$$

このとき,  $p_n = q_n$  であるから,  $p_n + q_n + r_n = 1$  により  $r_n = 1 - 2p_n$

これを (\*) の第 1 式に代入すると

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}(1 - 2p_n) \quad \text{ゆえに} \quad p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left( p_n - \frac{1}{3} \right)$$

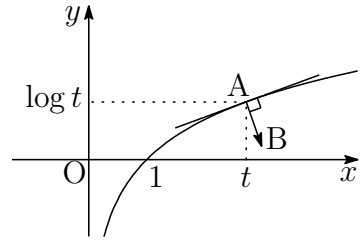
数列  $\left\{ p_n - \frac{1}{3} \right\}$  は, 初項が  $p_1 - \frac{1}{3}$ , 公比が  $-\frac{1}{2}$  の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{3} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad p_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

よって, 求める確率は  $\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\}$  ■

5 (1)  $y = \log x$  より  $y' = \frac{1}{x}$

曲線  $y = \log x$  上の点  $A(t, \log t)$  における接線の傾きが  $\frac{1}{t}$  であるから、この曲線の点  $A$  における法線の傾きは  $-t$  であるから、 $\vec{AB}$  はベクトル  $(1, -t)$  に平行である。



$AB = 1$  で、 $B$  の  $x$  座標は  $A$  の  $x$  座標  $t$  より大きいから

$$\vec{AB} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, -t)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } (u(t), v(t)) &= \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \\ &= (t, \log t) + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, -t) \\ &= \left( t + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \log t - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{上式から } \left( \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) = \left( 1 - \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

(2)  $A(t, \log t)$  より、 $\frac{d}{dt} \log t = \frac{1}{t}$  であるから

$$L_1(r) = \int_r^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} dt = \int_r^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} dt$$

$$(1) \text{ の結果から } \left( \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) = \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) (t, 1)$$

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \sqrt{t^2 + 1} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$L_2(r) = \int_r^1 \left( \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

$$\text{したがって } L_1(r) - L_2(r) = \int_r^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$t = \tan \varphi$  とおくと、 $t \rightarrow +0$  のとき、 $\varphi \rightarrow +0$  に注意して

$$\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r)) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\pi}{4}$$

補足 不定積分  $\int \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt$  について,  $t = \frac{1}{u}$  とおくと

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt &= \int \sqrt{1 + u^2} \left(\frac{1}{u}\right)' du \\ &= \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u} - \int \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \cdot \frac{1}{u} du \\ &= \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u} - \log(u + \sqrt{1 + u^2}) + C \end{aligned}$$

よって 
$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \sqrt{1 + t^2} - \log\left(\frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\right) + C$$

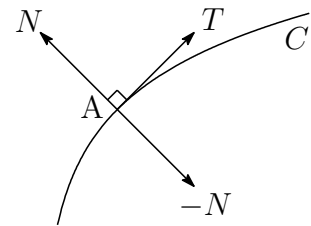
これから,  $L_1(r)$  および  $L_2(r)$  を求めることもできるが, 本題では不要.

発展 本題では曲線の曲率  $\kappa$  が<sup>1</sup>,  $|\kappa| < 1$  となる曲線  $C: y = f(x)$  を設定している.

$C$  の弧長

$$s = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt$$

を変数とし,  $C$  上の点  $X$  を  $X(s) = (x(s), y(s))$  で定めると  $X'(s) = (x'(s), y'(s))$



$$s - s_0 = \int_{s_0}^s |X'(s)| ds \quad \left(|X'(s)| = \sqrt{\{x'(s)\}^2 + \{y'(s)\}^2}\right)$$

これを  $s$  で微分することにより  $|X'(s)| = 1$

$T = X'(s)$  とおくと,  $T$  は  $A(x(s), y(s))$  における  $C$  の単位接ベクトルである.

また,  $T$  を反時計回りに  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転されたベクトル

$$N = (-y'(s), x'(s)) \quad (4.1)$$

を単位法ベクトルという.

$$|X'(s)|^2 = 1 \text{ より } \{x'(s)\}^2 + \{y'(s)\}^2 = 1 \quad \dots (*)$$

これを  $s$  で微分すると

$$2x'(s)x''(s) + 2y'(s)y''(s) = 0 \quad \text{ゆえに } (x''(s), y''(s)) \perp T$$

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri.2009.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri.2009.pdf) [3] を参照

したがって、実数  $\kappa$  を用いて

$$(x''(s), y''(s)) = \kappa N = \kappa(-y'(s), x'(s)) \quad (4.2)$$

これと (\*) から  $\kappa = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$

$T$  の  $x$  軸の正の向きとなす角を  $\theta$  とすると  $\tan \theta = \frac{y'(s)}{x'(s)}$

これを  $s$  で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{\{x'(s)\}^2}$$

ここで  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left\{ \frac{y'(s)}{x'(s)} \right\}^2 = \frac{1}{\{x'(s)\}^2}$

よって  $\kappa = \frac{d\theta}{ds} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$

また、(4.1) を  $s$  で微分すると、(4.2) に注意して

$$N' = (-y''(s), x''(s)) = (-\kappa x'(s), -\kappa y'(s)) = -\kappa T$$

本題において、点 A が  $X(s)$  であるとき、点 B は  $X(s) - N$  である。

$$\frac{d}{ds}(X(s) - N) = X'(s) - N' = T + \kappa T = (1 + \kappa)T$$

曲線  $y = \log x$  の曲率  $\kappa$  は

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$1 + \kappa > 0$  であるから  $|(1 + \kappa)T| = 1 + \kappa$

$r \rightarrow +0$  のとき  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ ,  $x = 1$  のとき  $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r)) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \{1 - (1 + \kappa)\} ds \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (-\kappa) ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

■

6 (1)  $\triangle ACD$  と  $\triangle BDC$  について

$AC = BD, AD = BC, CD$  は共通

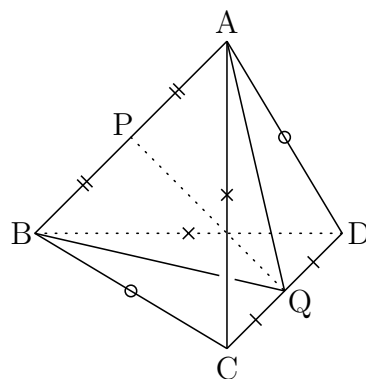
3 辺相等により  $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$

したがって  $\angle ACQ = \angle BDQ$

$\triangle ACQ$  と  $\triangle BDQ$  について, 2 辺夾角相等により  $\triangle ACQ \equiv \triangle BDQ$

したがって  $AQ = BQ$

よって,  $PQ$  は二等辺三角形  $ABQ$  の中線であるから  $AB \perp PQ$



別解 
$$\vec{PQ} = \vec{PA} + \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$$

$$\vec{PQ} = \vec{PB} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BD})$$

$\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0}$  に注意して, 上の 2 式の辺々を加えて 2 倍すると

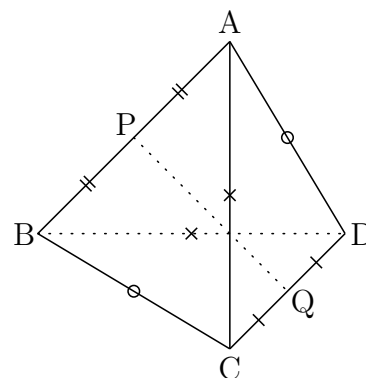
$$4\vec{PQ} = \vec{AC} + \vec{BC} + \vec{AD} + \vec{BD}$$

したがって

$$\begin{aligned} 4\vec{PQ} \cdot \vec{AB} &= (\vec{AC} + \vec{BC} + \vec{AD} + \vec{BD}) \cdot \vec{AB} \\ &= (\vec{AC} + \vec{BC}) \cdot \vec{AB} + (\vec{AD} + \vec{BD}) \cdot \vec{AB} \\ &= (\vec{AC} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AC} - \vec{BC}) + (\vec{AD} + \vec{BD}) \cdot (\vec{AD} - \vec{BD}) \\ &= |\vec{AC}|^2 - |\vec{BC}|^2 + |\vec{AD}|^2 - |\vec{BD}|^2 \end{aligned}$$

$|\vec{AC}| = |\vec{BD}|, |\vec{AD}| = |\vec{BC}|$  であるから

$$\vec{PQ} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{よって} \quad AB \perp PQ$$



補足 同様にして

$$\begin{aligned} 4\vec{PQ} \cdot \vec{CD} &= (\vec{AD} + \vec{AC} + \vec{BD} + \vec{BC}) \cdot \vec{CD} \\ &= (\vec{AD} + \vec{AC}) \cdot \vec{CD} + (\vec{BD} + \vec{BC}) \cdot \vec{CD} \\ &= (\vec{AD} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) + (\vec{BD} + \vec{BC}) \cdot (\vec{BD} - \vec{BC}) \\ &= |\vec{AD}|^2 - |\vec{AC}|^2 + |\vec{BD}|^2 - |\vec{BC}|^2 \end{aligned}$$

$|\vec{AC}| = |\vec{BD}|, |\vec{AD}| = |\vec{BC}|$  であるから

$$\vec{PQ} \cdot \vec{CD} = 0 \quad \text{よって} \quad CD \perp PQ$$

(2)  $\triangle ABC$  と  $\triangle ABD$  について

$AC = BD, BC = AD, AB$  は共通

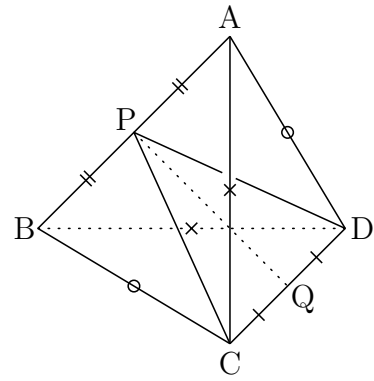
3辺相等により  $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$

したがって  $\angle CAP = \angle DBP$

$\triangle CAP$  と  $\triangle DBP$  について, 2辺夾角相等により  $\triangle CAP \equiv \triangle DBP$

したがって  $CP = DP$

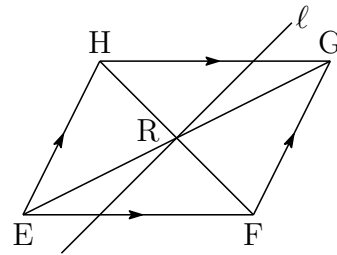
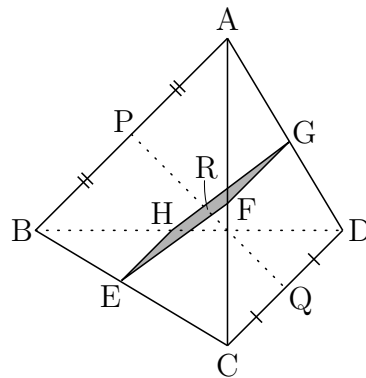
よって,  $PQ$  は二等辺三角形  $CDP$  の中線であるから  $CD \perp PQ$



線分  $PQ$  上に点  $R$  とり,  $R$  を通り線分  $PQ$  に垂直な平面と辺  $BC, AC, AD, BD$  との交点を, それぞれ,  $E, F, G, H$  とすると

$$BA \parallel EF, BA \parallel HG, CD \parallel EH, CD \parallel FG$$

ゆえに  $EF \parallel HG, EH \parallel FG$  すなわち 四角形  $EFGH$  は平行四辺形



$PQ$  を含む平面  $\alpha$  と平行四辺形  $EFGH$  との交線を  $l$  とすると,  $l$  によって平行四辺形  $EFGH$  の面積は二等分される.

よって,  $\alpha$  によって, 四面体  $ABCD$  の体積は二等分される. ■



## 4.5 2019年(150分)

1 次の各問に答えよ.

(1)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする.  $\cos \theta$  は有理数ではないが,  $\cos 2\theta$  と  $\cos 3\theta$  がともに有理数となるような  $\theta$  の値を求めよ. ただし,  $p$  が素数のとき,  $\sqrt{p}$  が有理数でないことは証明なしに用いてよい.

(2) 次の定積分の値を求めよ.

(i) 
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

(ii) 
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$$

2  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$  とする.  $|f(n)|$  と  $|f(n+1)|$  がともに素数となる整数  $n$  をすべて求めよ.

3 鋭角三角形 ABC を考え, その面積を  $S$  とする.  $0 < t < 1$  をみたす実数  $t$  に対し, 線分 AC を  $t:1-t$  に内分する点を Q, 線分 BQ を  $t:1-t$  に内分する点を P とする. 実数  $t$  がこの範囲を動くときに点 P の描く曲線と, 線分 BC によって囲まれる部分の面積を,  $S$  を用いて表せ.

4 1つのさいころを  $n$  回続けて投げ, 出た目を順に  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする. このとき次の条件をみたす確率を  $n$  を用いて表せ. ただし  $X_0 = 0$  としておく.

条件:  $1 \leq k \leq n$  をみたす  $k$  のうち,  $X_{k-1} \leq 4$  かつ  $X_k \geq 5$  が成立するような  $k$  の値はただ1つである.

5 半径1の球面上の5点 A, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub>, B<sub>4</sub> は, 正方形 B<sub>1</sub>B<sub>2</sub>B<sub>3</sub>B<sub>4</sub> を底面とする四角錐をなしている. この5点が球面上を動くとき, 四角錐 AB<sub>1</sub>B<sub>2</sub>B<sub>3</sub>B<sub>4</sub> の体積の最大値を求めよ.

6  $i$  は虚数単位とする.  $(1+i)^n + (1-i)^n > 10^{10}$  をみたす最小の正の整数  $n$  を求めよ.

常用対数表は次ページにある.

常用対数表(1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第5位を四捨五入し、小数第4位まで掲載している。

## 常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第5位を四捨五入し、小数第4位まで掲載している。

## 解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = \cos \theta(4 \cos^2 \theta - 3) = \cos \theta(2 \cos 2\theta - 1)$$

$2 \cos 2\theta - 1 \neq 0$  とすると, 上式より

$$\cos \theta = \frac{\cos 3\theta}{2 \cos 2\theta - 1}$$

$\cos 2\theta, \cos 3\theta$  が有理数であるから, 右辺は有理数で, 左辺が無理数であることに反する. したがって

$$2 \cos 2\theta - 1 = 0$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ に注意して, これを解くと } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{実際 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 2\theta = \frac{1}{2}, \cos 3\theta = 0 \quad \text{よって } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \quad (i) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)' dx = \left[ x \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[ \log \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$$

$$(ii) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \log(\sqrt{2} + 1)$$

$\boxed{2}$   $n$  と  $n+1$  の一方は, 偶数であるから, それを  $2k$  とすると ( $k$  は整数)

$$f(2k) = (2k)^3 + 2(2k)^2 + 2 = 2(4k^3 + 4k^2 + 1)$$

$$|f(2k)| \text{ が素数であるとき } 4k^3 + 4k^2 + 1 = \pm 1$$

$$\text{ゆえに } k^2(k+1) = 0 \text{ または } 2k^2(k+1) + 1 = 0 \quad \text{すなわち } k = -1, 0$$

したがって,  $k \leq -2, 1 \leq k$  の場合は  $|f(2k)|$  は合成数である.

これより, 次を調べればよい.

$n$	-3	-2	-1	0	1
$ f(n) $	7	2	3	2	5

$$\text{よって } n = -3, -2, -1, 0$$

- 3 (1) 座標平面上に3点  $A(0, a)$ ,  $B(b, 0)$ ,  $C(c, 0)$  をとる ( $a > 0, b < 0 < c$ ). 線分  $AC$  を  $t : 1 - t$  に内分する点  $Q$  の位置ベクトルは

$$\vec{OQ} = (1 - t)\vec{OA} + t\vec{OC}$$

したがって、線分  $BQ$  を  $t : 1 - t$  に内分する点  $P$  の位置ベクトルは

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (1 - t)\vec{OB} + t\vec{OQ} = (1 - t)\vec{OB} + t\{(1 - t)\vec{OA} + t\vec{OC}\} \\ &= t(1 - t)\vec{OA} + (1 - t)\vec{OB} + t^2\vec{OC} \end{aligned}$$

$P(x, y)$  とすると、 $\vec{OA} = (0, a)$ ,  $\vec{OB} = (b, 0)$ ,  $\vec{OC} = (c, 0)$  より

$$x = b(1 - t) + ct^2, \quad y = at(1 - t)$$

このとき  $\frac{t}{x} \left| \begin{array}{c|c} 0 & \rightarrow 1 \\ b & \rightarrow c \end{array} \right. \quad y \geq 0, \quad \frac{dx}{dt} = -b + 2ct$

$S = \frac{1}{2}(c - b)a$  に注意すると、点  $P$  と線分  $BC$  で囲まれる部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_b^c y dx &= \int_0^1 y \frac{dx}{dt} dt = \int_0^1 at(1 - t)(-b + 2ct) dt \\ &= -ab \int_0^1 t(1 - t) dt + 2ac \int_0^1 t^2(1 - t) dt \\ &= -ab \cdot \frac{1}{6} + 2ac \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}(c - b)a \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(c - b)a = \frac{1}{3}S \end{aligned}$$

- 4 連続して  $i$  回 4 以下の事象を  $A_i$ , 連続して  $j$  回 5 以上の事象を  $B_j$  とすると,  $A_i B_j A_k$  の順に起きる確率であるから ( $i, k \geq 0, j \geq 1, i + j + k = n$ )

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i, k \geq 0, j \geq 1, \\ i + j + k = n}} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{\substack{i \geq 0, k \geq 0, \\ i + k \leq n - 1}} \frac{2^{i+k}}{3^n} = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \sum_{i=0}^{n-k-1} 2^i \\ &= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k (2^{n-k} - 1) = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) \\ &= \frac{1}{3^n} \{n \cdot 2^n - (2^n - 1)\} = \frac{(n - 1) \cdot 2^n + 1}{3^n} \end{aligned}$$

- 5 原点Oを中心とする球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上に4点  $(\pm a, \pm a, b)$  および点  $(0, 0, 1)$  の5点を頂点する四角錐の体積  $V$  とすると ( $a > 0$ )

$$2a^2 + b^2 = 1, \quad V = \frac{1}{3}(2a)^2(1-b) = \frac{4}{3}a^2(1-b)$$

$$a \text{ を消去すると } V = \frac{2}{3}(1-b^2)(1-b) = \frac{2}{3}(1+b)(1-b)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$-1 < b < 1$  であるから、3正数  $2(1+b)$ ,  $1-b$ ,  $1-b$  の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2(1+b) + (1-b) + (1-b)}{3} \geq \sqrt[3]{2(1+b)(1-b)^2}$$

$$\text{したがって } (1+b)(1-b)^2 \leq \frac{32}{27} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ で等号が成立するとき } 2(1+b) = 1-b \quad \text{すなわち } b = -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } V \leq \frac{64}{81} \quad \text{よって, 最大値は } \frac{64}{81} \quad \blacksquare$$

- 6  $1 \pm i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  より (復号同順)

$$\begin{aligned} (1+i)^n + (1-i)^n &= (\sqrt{2})^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + (\sqrt{2})^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\ &= 2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} > 10^{10} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$\cos \frac{n\pi}{4} > 0$  を満たす  $n$  は  $n \equiv 0, \pm 1 \pmod{8}$

$$(i) \ n = 8k \text{ のとき, } (*) \text{ は } 2(\sqrt{2})^{8k} > 10^{10} \quad \text{ゆえに } 2^{4k+1} > 10^{10}$$

$$4k+1 > \frac{10}{\log_{10} 2} \quad \text{ゆえに } k > \frac{5}{\log_{10} 4} - 0.25$$

$$(ii) \ n = 8k \pm 1 \text{ のとき, } (*) \text{ は } 2(\sqrt{2})^{8k \pm 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > 10^{10} \quad \text{ゆえに } 2^{\frac{8k+1 \pm 1}{2}} > 10^{10}$$

$$\frac{8k+1 \pm 1}{2} > \frac{10}{\log_{10} 2} \quad \text{ゆえに } k > \frac{5}{\log_{10} 4} - \frac{1 \pm 1}{8}$$

常用対数表により、 $0.60205 \leq \log_{10} 4 < 0.60215$  であるから、(i), (ii) において

$$\frac{5}{\log_{10} 4} > \frac{5}{0.60215} > 8.3, \quad 0 \geq -\frac{1 \pm 1}{8} \geq -0.25 \quad \text{ゆえに } k \geq 9$$

したがって、 $n \geq 8 \cdot 9 - 1 = 71$  よって、求める最小の整数  $n$  は 71 ■



## 第 5 章 大阪大学

### 出題分野 (2010-2019) 150 分

◀	大阪大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明			4			2	2			
	複素数と方程式		4							2	
	図形と方程式				2						
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法		3						4		
III	式と曲線	2									
	複素数平面								2		2
	関数										
	極限	5	5	1				5			
	微分法とその応用				1	2				1	
	積分法	1				3	1				1
	積分法の応用	4	2	3	4	4	4	3	5	3	3
A	場合の数と確率			5	5		5				2
	整数の性質	3		2	3		3	4	3		4
	図形の性質										
B	平面上のベクトル								1		
	空間のベクトル									4	5
	数列					5		1		5	
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		1			1					

数字は問題番号



## 5.1 2015年(150分)

1 自然数  $n$  に対して関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geq 0)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)  $\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$  を示せ。

(2) 数列  $\{I_n\}$  を

$$I_n = \int_0^n f_n(x) dx$$

で定める。  $0 \leq x \leq 1$  のとき  $\log(1+x) \leq \log 2$  であることを用いて数列  $\{I_n\}$  が収束することを示し、その極限值を求めよ。ただし、  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  であることは用いてよい。

2 実数  $x, y$  が  $|x| \leq 1$  と  $|y| \leq 1$  を満たすとき、不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ。

3 以下の問いに答えよ。

(1)  $\sqrt{2}$  と  $\sqrt[3]{3}$  が無理数であることを示せ。

(2)  $p, q, \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$  がすべて有理数であるとする。そのとき、  $p = q = 0$  であることを示せ。

4 座標空間の  $x$  軸上に動点  $P, Q$  がある。  $P, Q$  は時刻 0 において、原点を出発する。  $P$  は  $x$  軸の正の方向に、  $Q$  は  $x$  軸の負の方向に、ともに速さ 1 で動く。その後、ともに時刻 1 で停止する。点  $P, Q$  を中心とする半径 1 の球をそれぞれ  $A, B$  とし、空間で  $x \geq -1$  の部分を  $C$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 時刻  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) における立体  $(A \cup B) \cap C$  の体積  $V(t)$  を求めよ。

(2)  $V(t)$  の最大値を求めよ。

5  $n$  を 2 以上の整数とする. 正方形の形に並んだ  $n \times n$  のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる. マスは上から第 1 行, 第 2 行,  $\dots$ , 左から第 1 列, 第 2 列,  $\dots$ , と数える. 数字の入れ方についての次の条件  $p$  を考える.

条件  $p$ : 1 から  $n - 1$  までの整数  $i, j$  についても, 第  $i$  行, 第  $i + 1$  行と第  $j$  列, 第  $j + 1$  列とが作る  $2 \times 2$  の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る.

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	
第 1 行	0	1	0	0	
第 2 行	1	0	1	1	→ 第 2 行
第 3 行	0	1	0	0	
第 4 行	1	0	1	1	→ 第 3 列

↓  
2 × 2 の 4 個のマス

( $n = 4$  の場合の入れ方の例)

- (1) 条件  $p$  を満たすとき, 第  $n$  行と第  $n$  列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ.
- (2) 条件  $p$  を満たすような数字の入れ方の総数  $a_n$  を求めよ.

解答例

1 (1)  $\int_0^n \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) dx$  において,  $\frac{x}{n} = t$  とおくと

$$\frac{dx}{dt} = n \quad \begin{array}{|l} x \\ \hline t \end{array} \quad \begin{array}{|l} 0 \rightarrow n \\ \hline 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \int_0^n f_n(x) dx &= \int_0^n \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{nt}{n(1+nt)} \log(1+t) \cdot n dt \\ &= \int_0^1 \frac{nx}{1+nx} \log(1+x) dx \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$  のとき,  $0 \leq \frac{nx}{1+nx} < 1$ ,  $\log(1+x) \geq 0$  であるから

$$\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1+x) dx - I_n &= \int_0^1 \log(1+x) dx - \int_0^1 \frac{nx}{1+nx} \log(1+x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+nx} \log(1+x) dx \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$  のとき,  $\frac{1}{1+nx} > 0$ ,  $0 \leq \log(1+x) \leq \log 2$  であるから

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+nx} \log(1+x) dx \leq (\log 2) \int_0^1 \frac{dx}{1+nx} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+nx} &= \left[ \frac{\log(1+nx)}{n} \right]_0^1 \\ &= \frac{\log(1+n)}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\log(n+1)}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\log(n+1)}{n+1} = 0$$

はさみうちの原理により, ② から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+nx} \log(1+x) dx = 0$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ より} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n &= \int_0^1 \log(1+x) dx \\ &= \left[ (1+x) \log(1+x) - x \right]_0^1 = \mathbf{2 \log 2 - 1} \end{aligned}$$

補足 まず,  $0 < x \leq 1$  のとき,  $-\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x$  を示す.

$$g(x) = \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (0 < x \leq 1) \text{ とおくと}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$  は単調減少で,  $g(1) = 2$  であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\text{すなわち} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$$

$$\text{したがって} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -2\sqrt{x} < x \log x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (-2\sqrt{x}) = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理により} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} x \log \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x \log x) = 0 \quad \blacksquare$$

**2** 実数  $x, y$  が  $|x| \leq 1$  と  $|y| \leq 1$  を満たすとき

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2x\sqrt{1-y^2} \cdot y\sqrt{1-x^2} \\ &= \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \\ &= x^2y^2 + (1-x^2)(1-y^2) - 2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \\ &= \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

別解  $x = \cos \alpha, y = \cos \beta$  とおくと ( $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ )

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \\ &= (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha)^2 = \sin^2(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

このとき,  $0 \leq \sin^2(\alpha + \beta) \leq 1$  であるから

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1 \quad \blacksquare$$

**3** (1)  $\sqrt{2}$  が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき, この両辺を平方すると

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{ゆえに} \quad m^2 = 2n^2$$

$m^2$  は偶数であるから,  $m$  も偶数で, ある自然数  $m'$  を用いて  $m = 2m'$  とおける. これを上式に代入して

$$(2m')^2 = 2n^2 \quad \text{ゆえに} \quad n^2 = 2m'^2$$

したがって,  $n^2$  は偶数となり,  $n$  も偶数である. このとき,  $m$  と  $n$  がともに偶数となり,  $m, n$  が互いに素であることと矛盾する.

よって,  $\sqrt{2}$  は有理数ではなく, すなわち, 無理数である.

次に,  $\sqrt[3]{3}$  が有理数であると仮定すると

$$\sqrt[3]{3} = \frac{k}{l} \quad (k, l \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき, この両辺を3乗すると

$$3 = \frac{k^3}{l^3} \quad \text{ゆえに} \quad k^3 = 3l^3$$

$k^3$  は3の倍数であるから,  $k$  も3の倍数で, ある自然数  $k'$  を用いて  $k = 3k'$  とおける. これを上式に代入して

$$(3k')^3 = 3l^3 \quad \text{ゆえに} \quad l^3 = 3 \cdot 3k'^3$$

したがって,  $l^3$  は3の倍数となり,  $l$  も3の倍数である. このとき,  $k$  と  $l$  がともに3の倍数となり,  $k, l$  が互いに素であることと矛盾する.

よって,  $\sqrt[3]{3}$  は有理数ではなく, すなわち, 無理数である.

(2)  $\sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q = r$  ( $r$  は有理数)  $\cdots (*)$  とおく.

(\*) より,  $\sqrt[3]{3}q = r - \sqrt{2}p$  の両辺を 3 乗すると

$$3q^3 = r^3 - 3r^2p\sqrt{2} + 6rp^2 - 2\sqrt{2}p^3$$

したがって  $\sqrt{2}p(2p^2 + 3r^2) = 6p^2r - 3q^3 + r^3$

$p \neq 0$  であると仮定すると,  $p(2p^2 + 3r^2) \neq 0$  であるから

$$\sqrt{2} = \frac{6p^2r - 3q^3 + r^3}{p(2p^2 + 3r^2)}$$

$p, q, r$  は, 有理数であるから, 上式の右辺は有理数であり,  $\sqrt{2}$  が無理数であることと矛盾する. したがって  $p = 0$

これを (\*) に代入すると  $\sqrt[3]{3}q = r$

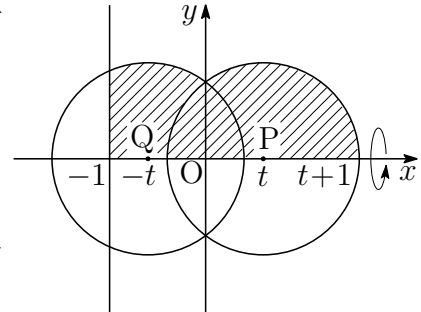
$q \neq 0$  であると仮定すると  $\sqrt[3]{3} = \frac{r}{q}$

$q, r$  は有理数であるから, 上式の右辺は有理数であり,  $\sqrt[3]{3}$  が無理数であることと矛盾する. したがって  $q = 0$

よって  $p = q = 0$  ■

- 4 (1) 点 P, Q を中心とする半径 1 の球面が  $xy$  平面によって切り取られる円の方程式は, それぞれ次のようになる.

$$(x - t)^2 + y^2 = 1, \quad (x + t)^2 + y^2 = 1$$



$V(t)$  は右の図の斜線部分を  $x$  軸の周りに一回転させた立体の体積であるから

$$\begin{aligned} \frac{V(t)}{\pi} &= \int_{-1}^0 \{1 - (x + t)^2\} dx + \int_0^{t+1} \{1 - (x - t)^2\} dx \\ &= \left[ x - \frac{(x + t)^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[ x - \frac{(x - t)^3}{3} \right]_0^{t+1} \\ &= -\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

よって  $V(t) = \pi \left( -\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t + \frac{4}{3} \right)$

(2) (1)の結果から  $V'(t) = \pi(-t^2 + 2t + 2)$

$0 \leq t \leq 1$ に注意して,  $V(t) = 0$ を解くと  $t = -1 + \sqrt{3}$

$t$	0	...	$-1 + \sqrt{3}$	...	1
$V'(t)$		+	0	-	
$V(t)$		↗	極大	↘	

$V(t) = \pi \left\{ (-t^2 - 2t + 2) \left( \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \right) + 2t + \frac{2}{3} \right\}$  であること利用すると,  
 $V(t)$ の最大値は

$$V(-1 + \sqrt{3}) = \pi \left\{ 2(-1 + \sqrt{3}) + \frac{2}{3} \right\} = \pi \left( -\frac{4}{3} + 2\sqrt{3} \right) \quad \blacksquare$$

- 5** (1) 第  $n$  列の第  $i$  行, 第  $i+1$  行に 0 または 1 がともに現われるとき, 第  $i$  行, 第  $i+1$  行において, 各列ごとに交互に 0 と 1 が現われる. このとき, 第  $i$  行, 第  $i+1$  行と第  $j$  列, 第  $j+1$  列とが作る  $2 \times 2$  の 4 個のマスには, 次ようになる.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \dots \textcircled{1}$$

また, 第  $n$  行の第  $j$  列, 第  $j+1$  列に 0 または 1 がともに現われるとき, 第  $j$  列, 第  $j+1$  列において, 各行ごとに交互に 0 と 1 が現われる. このとき, 第  $i$  行, 第  $i+1$  行と第  $j$  列, 第  $j+1$  列とが作る  $2 \times 2$  の 4 個のマスには, 次ようになる.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \dots \textcircled{2}$$

① と ② は一致しないので, 第  $n$  行と第  $n$  列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現われる.

- (2) 第  $n$  行および第  $n$  列の  $2n-1$  個の数字の入れ方が決まれば, 残りの  $(n-1)^2$  個の数字の入れ方は決定する (例えば, 第  $n$  行に 0 と 1 が交互に現れると, 下の行から一意的に決定する). (1) の結果から, 次の場合分けができる.
- (i) 第  $n$  行に 0 と 1 が交互に現われるとき, 第  $n$  列の第 1 行から第  $n-1$  行の数字の入れ方は  $2 \times 2^{n-1} = 2^n$  (通り)
  - (ii) 第  $n$  列に 0 と 1 が交互に現われるとき, 第  $n$  行の第 1 列から第  $n-1$  列の数字の入れ方は  $2 \times 2^{n-1} = 2^n$  (通り)
  - (iii) 第  $n$  行および第  $n$  列に 0 と 1 が交互に現われるとき, その数字の入れ方は 2 (通り)
- (i)~(iii) から  $a_n = 2^n + 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2 \quad \blacksquare$

## 5.2 2016年(150分)

- 1** 1以上6以下の2つの整数  $a, b$  に対し、関数  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める.

$$(ア) \quad f_1(x) = \sin(\pi x)$$

$$(イ) \quad f_{2n}(x) = f_{2n-1} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(ウ) \quad f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ.

- (1)  $a = 2, b = 3$  のとき,  $f_5(0)$  を求めよ.

- (2)  $a = 1, b = 6$  のとき,  $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k f_{2k}(0)$  を求めよ.

- (3) 1個のさいころを2回投げて, 1回目に出る目を  $a$ , 2回目に出る目を  $b$  とするとき,  $f_6(0) = 0$  となる確率を求めよ.

- 2** 次の問いに答えよ.

- (1)  $c$  を正の定数とする. 正の実数  $x, y$  が  $x + y = c$  をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

の最小値を  $c$  を用いて表せ.

- (2) 正の実数  $x, y, z$  が  $x + y + z = 1$  をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ.

- 3** 座標平面において, 原点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円と放物線  $y = \sqrt{2}(x-1)^2$  は, ただ1つの共有点  $(a, b)$  をもつとする.

- (1)  $a, b, r$  の値をそれぞれ求めよ.  
 (2) 連立不等式

$$a \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2 + y^2 \geq r^2$$

の表す領域を,  $x$  軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ.



4 正の整数  $n$  に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

とおき、1以上  $n$  以下のすべての奇数の積を  $A_n$  とする。

- (1)  $\log_2 n$  以下の最大の整数を  $N$  とするとき、 $2^N A_n S_n$  は奇数の整数であることを示せ。
- (2)  $S_n = 2 + \frac{m}{20}$  となる正の整数の組  $(n, m)$  をすべて求めよ。
- (3) 整数  $a$  と  $0 \leq b < 1$  をみたす実数  $b$  を用いて、

$$A_{20} S_{20} = a + b$$

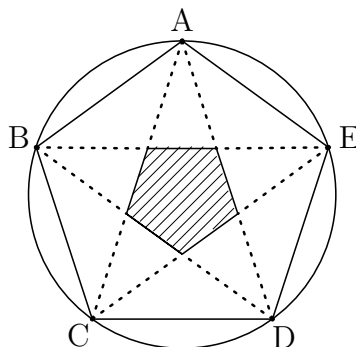
と表すとき、 $b$  の値を求めよ。

5 円上の5点  $A, B, C, D, E$  は反時計回りにこの順に並び、円周を5等分している。5点  $A, B, C, D, E$  を頂点とする正五角形を  $R_1$  とする。  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$  とおき、 $\vec{a}$  の大きさを  $x$  とする。

- (1)  $\overrightarrow{AC}$  の大きさを  $y$  とするとき、 $x^2 = y(y - x)$  がなりたつことを示せ。
- (2)  $\overrightarrow{BC}$  を  $\vec{a}, \vec{c}$  を用いて表せ。
- (3)  $R_1$  の対角線の交点として得られる  $R_1$  の内部の5つの点を頂点とする正五角形を  $R_2$  とする。  $R_2$  の一辺の長さを  $x$  を用いて表せ。
- (4)  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $R_n$  の対角線の交点として得られる  $R_n$  の内部の5つの点を頂点とする正五角形を  $R_{n+1}$  とし、 $R_n$  の面積を  $S_n$  とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ。



斜線部分が  $R_2$

## 解答例

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (1) \quad & (\text{ア}) \quad f_1(x) = \sin(\pi x) \\ & (\text{イ}) \quad f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ & (\text{ウ}) \quad f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad f_{2n+1}(x) &= f_{2n}(-x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - (-x)\right) \\ &= f_{2n-1}\left(x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \dots(*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad f_5(x) &= f_1\left(x + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) \\ \text{よって, } a=2, b=3 \text{ のとき, } x=0 \text{ とすると} \end{aligned}$$

$$f_5(0) = f_1\left(\frac{5}{3}\right) = \sin \frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \quad (*) \text{ より } f_{2k-1}(x) = f_1\left(x + (k-1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad f_{2k}(x) &= f_{2k-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right) \\ &= f_1\left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right) + (k-1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) \\ &= f_1\left(k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - x\right) \quad \dots(**) \end{aligned}$$

$a=1, b=6$  のとき,  $x=0$  とすると

$$f_{2k}(0) = f_1\left(\frac{7}{6}k\right) = \sin \frac{7}{6}k\pi = \sin\left(k\pi + \frac{k}{6}\pi\right) = (-1)^k \sin \frac{k}{6}\pi$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} (-1)^k f_{2k}(0) &= \sum_{k=1}^{100} (-1)^k \cdot (-1)^k \sin \frac{k}{6}\pi = \sum_{k=1}^{100} \sin \frac{k}{6}\pi \\ &= \sum_{k=1}^{95} \sin \frac{k}{6}\pi + \sum_{k=96}^{100} \frac{k}{6}\pi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{95} \left(\sin \frac{k}{6}\pi + \sin \frac{96-k}{6}\pi\right) + \sum_{k=96}^{100} \frac{k}{6}\pi \\ &= \sum_{k=96}^{100} \frac{k}{6}\pi = 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$(3) (**) \text{より } f_6(x) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - x\right)$$

これに  $x = 0$  を代入すると, (ア) により

$$f_6(0) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) = \sin 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0) = 0$  となるのは,  $3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$  が整数になるときで, 次の8組.

$$(a, b) = (1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 3), (6, 6)$$

よって, 求める確率は  $\frac{8}{6^2} = \frac{2}{9}$  ■

**2** (1)  $x + y = c$  より

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{x+y+1}{xy} = 1 + \frac{c+1}{xy} \quad \dots \textcircled{1}$$

$x > 0, y > 0$  であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{c}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{c^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する (等号が成立するのは,  $x = y = \frac{c}{2}$  のとき).

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 1 + (c+1) \cdot \frac{4}{c^2} = \left(1 + \frac{2}{c}\right)^2$$

よって,  $x = y = \frac{c}{2}$  のとき, 最小値  $\left(1 + \frac{2}{c}\right)^2$  をとる.

解説  $n$  個の正数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の相加平均  $A$ , 相乗平均  $G$ , 調和平均  $H$  は

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

$A \geq G$  が成り立つから<sup>1</sup>,  $n$  個の整数  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$  の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq \sqrt{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$$

したがって  $A \geq G \geq H$

なお, 等号が成立するのは,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  のときに限る.

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri.2002.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri.2002.pdf) **3** を参照

補足  $\frac{1}{x}$  と  $\frac{1}{y}$  の相乗平均・調和平均の大小関係により

$$\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \geq \frac{2}{x+y} = \frac{2}{c} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{c^2} \quad \left( \text{等号は } x=y=\frac{c}{2} \text{ のとき} \right)$$

(2)  $x, y, z$  は正の実数,  $x+y+z=1$  であるから,  $0 < z < 1$  より

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) > 0, \quad \left(1 - \frac{4}{3z}\right) < 0$$

したがって

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{4}{3z}\right) \quad \dots (*)$$

これが最大となるのは,  $z$  を固定したとき

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

が最小となるときである.  $x+y=1-z$  であるから, (1) の結果により,  $x=y=\frac{1-z}{2}$  を (\*) に代入して

$$f(z) = \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{3z}\right) \quad (0 < z < 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2 \left(1 + \frac{2}{1-z}\right) \frac{2}{(1-z)^2} \cdot \left(1 - \frac{4}{3z}\right) + \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2 \cdot \frac{4}{3z^2} \\ &= 2 \cdot \frac{3-z}{1-z} \cdot \frac{2}{(1-z)^2} \cdot \frac{3z-4}{3z} + \left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2 \cdot \frac{4}{3z^2} \\ &= \frac{4(3-z)(3z-4)}{3z(1-z)^3} + \frac{4(3-z)^2}{3z^2(1-z)^2} \\ &= \frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2} \left(\frac{3z-4}{1-z} + \frac{3-z}{z}\right) = \frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2} \cdot \frac{(2z-1)(2z-3)}{z(1-z)} \end{aligned}$$

$z$	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	(1)
$f'(z)$		+	0	-	
$f(z)$		↗	$-\frac{125}{3}$	↘	

$z = \frac{1}{2}$ ,  $x = y = \frac{1}{4}$  のとき, 最大値  $-\frac{125}{3}$  をとる. ■

**3** (1) 放物線上の点  $P(t, \sqrt{2}(t-1)^2)$  について,  $f(t) = OP^2$  とおくと

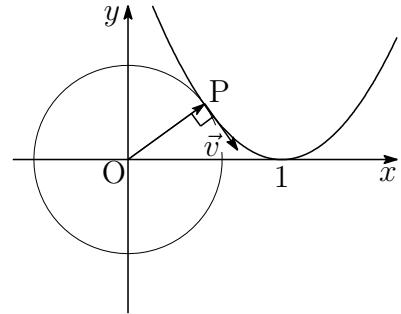
$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 + 2(t-1)^4, \\ f'(t) &= 2t + 8(t-1)^3 = 8t^3 - 24t^2 + 26t - 8 \\ &= 2(2t-1)(2t^2 - 5t + 4) = 2(2t-1) \left\{ 2 \left( t - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{7}{8} \right\} \end{aligned}$$

$t$	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$

よって  $\mathbf{a} = \frac{1}{2}, \mathbf{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}, r = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

補足 放物線  $y = \sqrt{2}(x-1)^2$  上の動点  $P(x, y)$  を

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = \sqrt{2}(t-1)^2, \\ \vec{v} &= \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \quad \vec{a} = \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) \end{aligned}$$



とおき,  $f(t) = OP^2 = x^2 + y^2$  を微分すると

$$f'(t) = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2\vec{OP} \cdot \vec{v}$$

$f'(t) = 0$  のとき,  $\vec{OP} \cdot \vec{v} = 0$  より,  $\vec{OP} \perp \vec{v}$

$$f''(t) = 2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 2x \frac{d^2x}{dt^2} + 2y \frac{d^2y}{dt^2} = 2|\vec{v}|^2 + 2\vec{OP} \cdot \vec{a}$$

このとき,  $\vec{OP} = (t, \sqrt{2}(t-1)^2), \vec{v} = (1, 2\sqrt{2}(t-1)), \vec{a} = (0, 2\sqrt{2})$  より

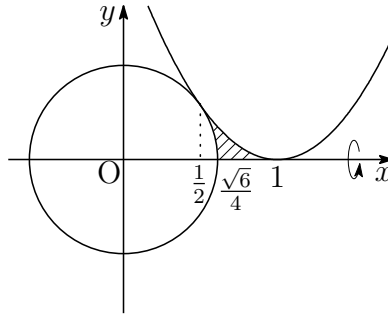
$$|\vec{v}|^2 > 0, \quad \vec{OP} \cdot \vec{a} = 4(t-1)^2 \geq 0$$

$f''(t) > 0$  であるから,  $f'(t) = 0$  をみたす点において,  $OP$  は極小となる.

(2) (1)の結果から, 連立不等式

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2 + y^2 \geq 1$$

の表す領域は, 下の図の斜線部分.



この領域を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \left(\frac{3}{8} - x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{2}{5}(x-1)^5\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \left[\frac{3}{8}x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \\ &= \frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16} \end{aligned}$$

よって  $V = \left(\frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16}\right) \pi$  ■

4 (1)  $N$  は  $\log_2 n$  以下の最大の整数であるから

$$N \leq \log_2 n < N + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^N \leq n < 2^{N+1}$$

自然数  $k$  に対して, 自然数  $a_k$  と奇数  $b_k$  を用いて

$$k = 2^{a_k} \cdot b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

とおくと

$$2^N A_n S_n = 2^N A_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{a_k} \cdot b_k} = \sum_{k=1}^n \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k}$$

$\frac{A_n}{b_k}$  は奇数,  $k = 2^N$  のとき  $a_k = N$ ,  $k \neq 2^N$  のとき  $a_k < N$  であるから

$$k = 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{ は奇数, } k \neq 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{ は偶数}$$

$2^N A_n S_n$  は 1 個の奇数と  $n - 1$  個の偶数の和であるから,  $2^N A_n S_n$  は奇数.

$$(2) S_n = 2 + \frac{m}{20} = \frac{40+m}{2^2 \cdot 5} \text{ より}$$

$$2^N A_n S_n = \frac{(40+m)A_n}{5} \cdot 2^{N-2}$$

上式は、奇数であるから、 $N \leq 2$  より、 $\log_2 n < N+1$  に注意して

$$\log_2 n < 3 \quad \text{ゆえに} \quad n < 8$$

$$\text{したがって} \quad S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{5}{6}, \quad S_4 = 2 + \frac{1}{12},$$

$$S_5 = 2 + \frac{17}{120}, \quad S_6 = 2 + \frac{9}{20}, \quad S_7 = 2 + \frac{83}{140}$$

$$S_n = 2 + \frac{m}{20} \text{ となるのは} \quad (n, m) = (6, 9)$$

$$(3) \quad A_{20} S_{20} = A_{20} \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} \\ = \left( A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19} \right) \\ + \frac{1}{2} \left( A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9} \right) \\ + \frac{1}{4} \left( A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} \right) + \frac{A_{20}}{8} + \frac{A_{20}}{16} \quad \cdots (*)$$

$n$  が 20 以下の奇数のとき、 $\frac{A_{20}}{n}$  は奇数の整数であるから

$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19} \text{ は整数} \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、 $A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9}$  は 5 つの奇数の和であるから

$$\frac{1}{2} \left( A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9} \right) \text{ の小数部分は } \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

ここで  $A_{20} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$

$$\equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (-7) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3$$

$$\equiv 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 3 \equiv 9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3 \equiv 81 \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{16}$$

したがって、 $p = 4, 8, 16$  のとき  $A_{20} \equiv 3 \pmod{p}$

$3^2 \equiv 1, 5^2 \equiv 1 \pmod{4}$  であるから

$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} \equiv A_{20} + 3A_{20} + 5A_{20} \equiv 9A_{20} \equiv A_{20} \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\frac{1}{4} \left( A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} \right) \text{ の小数部分は } \frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

また,  $\frac{A_{20}}{8}$  の小数部分は  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{A_{20}}{16}$  の小数部分は  $\frac{3}{16}$  であるから, これと(\*), ①~③により

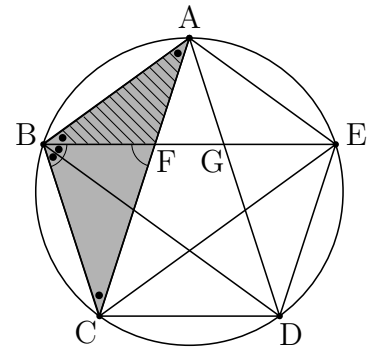
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{29}{16} = 1 + \frac{13}{16} \quad \text{よって } b = \frac{13}{16} \quad \blacksquare$$

- 5 (1) AC と BE の交点を F とすると,  $\triangle BCF$  は二等辺三角形であるから

$$\begin{aligned} AB &= BC = CF = x \\ AF &= AC - CF = y - x \end{aligned}$$

$\triangle ABC \equiv \triangle AFB$  であるから

$$x : y = y - x : x \quad \text{ゆえに } x^2 = y(y - x)$$



- (2)  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ ,  $\vec{AD} = \frac{y}{x}\vec{BC}$  であるから

$$\vec{a} + \vec{BC} + \vec{c} = \frac{y}{x}\vec{BC} \quad \text{ゆえに } \vec{BC} = \frac{x}{y-x}(\vec{a} + \vec{c})$$

- (1) の結果から  $y^2 - xy - x^2 = 0$  ゆえに  $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 1 = 0$

$$\frac{y}{x} > 0 \text{ に注意して } \frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{よって } \vec{BC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

- (3) AD と BE の交点を G とすると,  $BF = AF = y - x$  より

$$\begin{aligned} FG &= AE - 2BF \\ &= y - 2(y - x) = 2x - y = \left(2 - \frac{y}{x}\right)x \\ &= \left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x \end{aligned}$$

よって,  $R_2$  の一辺の長さは  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}x$



(4) (3)の結果から,  $r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  とおくと

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad S_n = S_1 \cdot (r^2)^{n-1} = S_1 \cdot r^{2n-2}$$

$|-r^2| < 1$  であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_1 \cdot r^{2k-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-r^2)^{k-1} \\ &= \frac{1}{1 - (-r^2)} = \frac{1}{1 + r^2} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$



### 5.3 2017年(150分)

**1** 双曲線  $H: x^2 - y^2 = 1$  上の3点  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(s, t)$  ( $t \neq 0$ ) を考える.

- (1) 点  $A$  における  $H$  の接線と直線  $BC$  の交点を  $P$  とするとき,  $P$  の座標を  $s$  と  $t$  を用いてあらわせ.
- (2) 点  $C$  における  $H$  の接線と直線  $AB$  の交点を  $Q$  とするとき,  $Q$  の座標を  $s$  と  $t$  を用いてあらわせ.
- (3) 点  $B$  における  $H$  の接線と直線  $AC$  の交点を  $R$  とするとき, 3点  $P, Q, R$  は一直線上にあることを証明せよ.

**2** 複素数  $z$  は  $z^5 = 1$  を満たし, 実部と虚部がともに正であるものとする. 硬貨を投げて表が出れば1, 裏が出れば0とし, 5回投げて出た順に  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  とおく. 複素数  $w$  を  $w = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$  と定める.

- (1) 5回とも表が出たとする.  $w$  の値を求めよ.
- (2)  $a_0 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = a_4 = 1$  のとき,  $|w| < 1$  であることを示せ.
- (3)  $|w| < 1$  である確率を求めよ.

**3**  $a, b$  を自然数とし, 不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \quad (5.1)$$

を考える. 次の問いに答えよ. ただし,  $2.645 < \sqrt{7} < 2.646$  であること,  $\sqrt{7}$  が無理数であることを用いてよい.

- (1) 不等式 (A) を満たし  $b \geq 2$  である自然数  $a, b$  に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ.

- (2) 不等式 (A) を満たす自然数  $a, b$  の組のうち,  $b \geq 2$  であるものをすべて求めよ.

4  $b, c$  を実数とする. 2次関数  $f(x) = -x^2 + bx + c$  が

$$0 \leq f(1) \leq 2, \quad 5 \leq f(3) \leq 6$$

を満たすとする.

- (1)  $f(4)$  のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) 放物線  $y = f(x)$  の頂点の  $y$  座標  $q$  のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) 放物線  $y = f(x)$  の頂点の  $y$  座標が  $6$  のとき, 放物線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ.

5  $xy$  平面上で放物線  $y = x^2$  と直線  $y = 2$  で囲まれた図形を,  $y$  軸のまわりに1回転してできる回転体を  $L$  とおく. 回転体  $L$  に含まれる点のうち,  $xy$  平面上の直線  $x = 1$  からの距離が1以下のもの全体がつくる立体を  $M$  とおく.

- (1)  $t$  を  $0 \leq t \leq 2$  を満たす実数とする.  $xy$  平面上の点  $(0, t)$  を通り,  $y$  軸に直交する平面による  $M$  の切り口の面積を  $S(t)$  とする.  $t = (2 \cos \theta)^2$   $\left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  のとき,  $S(t)$  を  $\theta$  を用いてあらわせ.
- (2)  $M$  の体積  $V$  を求めよ.

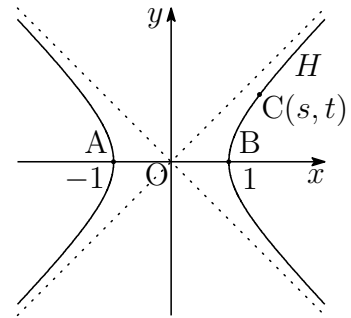
解答例

- 1 (1)  $H$  上の点  $A(-1, 0)$  における接線の方程式は

$$x = -1$$

$H$  上の点  $C(s, t)$  は,  $t \neq 0$  より  $s \neq \pm 1$   
 2点  $B(1, 0)$ ,  $C(s, t)$  を通る直線の方程式は

$$y = \frac{t}{s-1}(x-1)$$



上の2式を解いて  $P\left(-1, \frac{-2t}{s-1}\right)$

- (2)  $H$  上の点  $C(s, t)$  における接線の方程式は  $sx - ty = 1$

直線  $AB$  の方程式は  $y = 0$

この2式を解いて  $Q\left(\frac{1}{s}, 0\right)$

- (3)  $H$  上の点  $B$  における接線の方程式は  $x = 1$

2点  $A(-1, 0)$ ,  $C(s, t)$  を通る直線の方程式は  $y = \frac{t}{s+1}(x+1)$

この2式を解いて  $R\left(1, \frac{2t}{s+1}\right)$

$s^2 - t^2 = 1$  に注意すると

$$\vec{QP} = \left(-\frac{s+1}{s}, -\frac{2t}{s-1}\right) = \frac{1}{1-s} \left(\frac{s^2-1}{s}, 2t\right) = \frac{t}{1-s} \left(\frac{t}{s}, 2\right),$$

$$\vec{QR} = \left(\frac{s-1}{s}, \frac{2t}{s+1}\right) = \frac{1}{1+s} \left(\frac{s^2-1}{s}, 2t\right) = \frac{t}{1+s} \left(\frac{t}{s}, 2\right)$$

$\vec{QP} // \vec{QR}$  であるから, 3点  $P, Q, R$  は同一直線上にある.

別解  $(s-1)\vec{OP} = (1-s, -2t)$ ,  $(s+1)\vec{OR} = (1+s, 2t)$  より

$$(s-1)\vec{OP} + (s+1)\vec{OR} = (2, 0) = 2s\vec{OQ}$$

したがって  $\vec{OQ} = \frac{s-1}{2s}\vec{OP} + \frac{s+1}{2s}\vec{OR}$

このとき,  $\frac{s-1}{2s} + \frac{s+1}{2s} = 1$  より, 直線  $PR$  上に点  $Q$  がある.

よって, 3点  $P, Q, R$  は同一直線上にある. ■

2 (1)  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$  であるから,  $z^5 = 1$  ( $z \neq 1$ ) より

$$w = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = 0$$

(2)  $a_0 = a_2 = a_3 = 0$ ,  $a_1 = a_4 = 1$  のとき

$$w = z + z^4 = z + \frac{z^5}{z} = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z + \bar{z}$$

$\theta = \frac{2\pi}{5}$  とおくと,  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$  であるから

$$w = z + \bar{z} = 2 \cos \theta < 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1 \quad \text{よって} \quad |w| < 1$$

(3) 表が出た枚数を  $n$  とする.

(i)  $n = 0$  のとき,  $w = 0$  より  $|w| = 0$

(ii)  $n = 1$  のとき,  $|w| = 1$

(iii)  $n = 2$  のとき

$$\begin{aligned} |z + z^2| &= |z||1 + z|, & |z^2 + z^3| &= |z^2||1 + z|, \\ |z^3 + z^4| &= |z^3||1 + z|, & |z^4 + 1| &= |z^4||1 + z| \end{aligned}$$

$1 + z$  の実部について  $1 + \cos \theta > 0$  であるから

$$|1 + z| = |z + z^2| = |z^2 + z^3| = |z^3 + z^4| = |z^4 + 1| > 1$$

$$\begin{aligned} 1 + z^2 \text{ について } 1 + z^2 &= 1 + (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= (1 + \cos 2\theta) + i \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } |1 + z^2|^2 &= (1 + \cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2 \\ &= 2 + 2 \cos 2\theta = (2 \cos \theta)^2 < 1 \end{aligned}$$

$$|1 + z^2| = |z + z^3| = |z^2 + z^4| = |z^3 + 1| = |z^4 + z| < 1$$

このとき,  $|w| < 1$  となるは, 5通り

(iv)  $n = 3$  のとき  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$  より, 例えば,  $|1 + z + z^2| = |z^3 + z^4|$  であるから,  $|w| < 1$  を満たす場合の数は,  $n = 2$  の場合と等しい.

(v)  $n = 4$  のとき, 例えば,  $|1 + z + z^2 + z^3| = |z^4| = 1$  であるから,  $|w| < 1$  とならない.

(vi)  $n = 5$  のとき,  $w = 0$  であるから,  $|w| = 0$

(i)~(v) から,  $|w| < 1$  となる確率は  $\frac{1 + 0 + 5 + 5 + 0 + 1}{2^5} = \frac{3}{8}$  ■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \text{ より } \quad 2\sqrt{7} - \frac{2}{b^4} < \frac{a}{b} + \sqrt{7} < 2\sqrt{7} + \frac{2}{b^4}$$

$$b \geq 2 \text{ のとき } \quad 2\sqrt{7} - \frac{2}{b^4} \geq 2\sqrt{7} - \frac{1}{8} > 2 \times 2.645 - 0.125 > 5.165$$

$$2\sqrt{7} + \frac{2}{b^4} \leq 2\sqrt{7} + \frac{1}{8} < 2 \times 2.646 + 0.125 = 5.417 < 6$$

$$\text{したがって } 5.165 < \frac{a}{b} + \sqrt{7} < 6 \text{ よって } \left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

$$(2) \quad \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4}, \quad \left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6 \text{ より}$$

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{12}{b^4} \quad \text{ゆえに} \quad b^2|a^2 - 7b^2| < 12 \quad \dots (*)$$

$\sqrt{7}$ は無理数であるから、自然数  $a, b$  に対して  $\frac{a}{b} \neq \sqrt{7}$  より  $a^2 - 7b^2 \neq 0$   
 $a^2 - 7b^2$  は整数であるから、(\*) を満たす  $b$  ( $b \geq 2$ ) は、 $b = 2, 3$  について調べればよい。

$$(i) \quad b = 2 \text{ のとき } \quad 2^2|a^2 - 28| < 12 \quad \text{ゆえに} \quad |a^2 - 28| < 3$$

これを満たす自然数  $a$  は存在しない。

$$(ii) \quad b = 3 \text{ のとき } \quad 3^2|a^2 - 63| < 12 \quad \text{ゆえに} \quad |a^2 - 63| < \frac{4}{3}$$

これを満たす自然数  $a$  は  $a = 8$

(i),(ii) より、求める  $a, b$  の組は  $(a, b) = (8, 3)$  ■

- 4 (1)  $m = f(1)$ ,  $M = f(3)$  とおくと,  $f(x) = -x^2 + bx + c$  より

$$-1 + b + c = m, \quad -9 + 3b + c = M$$

ゆえに  $b = \frac{M - m}{2} + 4$ ,  $c = \frac{3m - M}{2} - 3$

したがって  $f(x) = -x^2 + \left(\frac{M - m}{2} + 4\right)x + \frac{3m - M}{2} - 3$

$$f(4) = \frac{3M - m}{2} - 3$$

$f(4)$  は,  $M = 5$ ,  $m = 2$  のとき最小値  $\frac{7}{2}$  をとり,  $M = 6$ ,  $m = 0$  のとき

最大値 6 をとる. よって  $\frac{7}{2} \leq f(4) \leq 6$

- (2)  $k = \frac{M - m}{2}$  とおくと  $b = k + 4$ ,  $c = -3k + M - 3$

$D = b^2 + 4c$ ,  $q = \frac{D}{4}$  であるから

$$q = \frac{1}{4}\{(k + 4)^2 + 4(-3k + M - 3)\} = \frac{1}{4}(k - 2)^2 + M$$

$0 \leq m \leq 2$ ,  $5 \leq M \leq 6$ ,  $\frac{3}{2} \leq k \leq 3$  であるから,  $q$  は,

$M = 6$ ,  $k = 3$  のとき ( $m = 0$ ), 最大値  $\frac{25}{4}$  をとり,

$M = 5$ ,  $k = 2$  のとき ( $m = 1$ ), 最小値 5 をとる.

よって  $5 \leq q \leq \frac{25}{4}$

- (3) 放物線  $y = f(x)$  と  $x$  軸との共有点の  $x$  座標を  $\alpha$ ,  $\beta$  とすると ( $\alpha < \beta$ ),  
 $\alpha + \beta = b$ ,  $\alpha\beta = -c$  より,  $D = b^2 + 4c$ ,  $q = \frac{D}{4}$  に注意して

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 + 4c = D = 4q = 4 \cdot 6 = 24$$

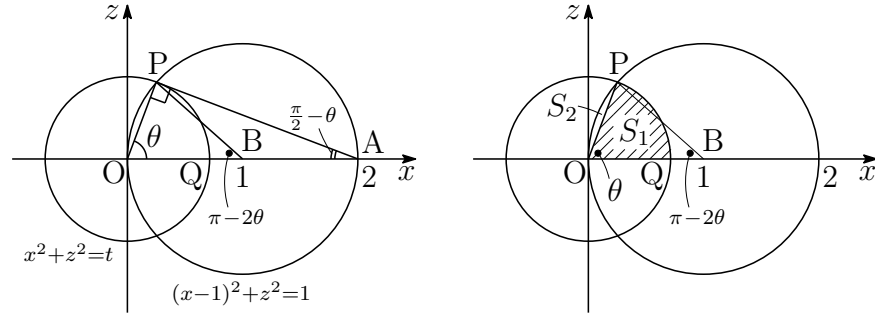
$\beta - \alpha = \sqrt{24}$  であるから  $S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{24})^3 = 8\sqrt{6}$  ■

5 (1)  $xy$  平面に垂直で  $O$  を通る座標軸を  $z$  とすると、立体  $M$  の表す領域は

$$0 \leq y \leq 2, \quad y \geq x^2 + z^2, \quad (x-1)^2 + z^2 \leq 1$$

平面  $y = t$  上に 2 円  $x^2 + z^2 = t$ ,  $(x-1)^2 + z^2 = 1$  の交点の 1 つを  $P$  とし、 $OP$  と  $x$  軸方向の正の向きとなす角を  $\theta$  とすると、左下の図から

$$OP = OA \cos \theta = 2 \cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad t = OP^2 = (2 \cos \theta)^2$$



右上の図において、扇形  $OPQ$  の面積を  $S_1$ 、弧  $OP$  と線分  $OP$  で囲まれた部分の面積を  $S_2$  とすると ( $\triangle OPB$  は  $BO = BP = 1$  の二等辺三角形)

$$S_1 = \frac{1}{2}(2 \cos \theta)^2 \theta = 2\theta \cos^2 \theta,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 (\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin(\pi - 2\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$S(t) = 2(S_1 + S_2)$  であるから

$$\begin{aligned} S(t) &= 2 \left( 2\theta \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ &= 2\theta(2 \cos^2 \theta - 1) - \sin 2\theta + \pi = \mathbf{2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi} \end{aligned}$$

(2)  $t = (2 \cos \theta)^2$  より  $\frac{dt}{d\theta} = -8 \cos \theta \sin \theta = -4 \sin 2\theta$

$t$	$0 \rightarrow 2$
$\theta$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi) \frac{dt}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)(-4 \sin 2\theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4\theta \sin 4\theta + 2 \cos 4\theta - 2 + 4\pi \sin 2\theta) d\theta \\ &= \left[ -\theta \cos 4\theta + \frac{3}{4} \sin 4\theta - 2\pi \cos 2\theta - 2\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{3}{4}\pi} \end{aligned}$$





## 5.4 2018年(150分)

1 次の問いに答えよ.

(1)  $x > 0$  の範囲で不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ.

(2)  $x$  が  $x > 0$  の範囲を動くとき,

$$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ.

2  $a, b$  を正の実数とし,  $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$  とする.

(1)  $c$  を実数とし,  $f(x)$  が  $x - c$  で割り切れるとする. このとき,  $c > 0$  であり,  $f(x)$  は  $(x - c) \left( x - \frac{1}{c} \right)$  で割り切れることを示せ.

(2)  $f(x)$  がある実数  $s, t, u, v$  を用いて

$$f(x) = (x - s)(x - t)(x - u)(x - v)$$

と因数分解できるとき,  $a \geq 4$  が成り立つことを示せ.

(3)  $a = 5$  とする.  $f(x)$  がある実数  $s, t, u, v$  を用いて

$$f(x) = (x - s)(x - t)(x - u)(x - v)$$

と因数分解できるような自然数  $b$  の値をすべて求めよ.

**3** 2つの関数

$$f(t) = 2 \sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2 \cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える.

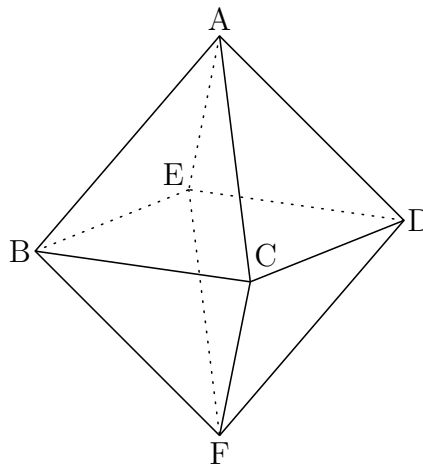
- (1)  $t$ が  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき,  $f(t)$  および  $g(t)$  の最大値を求めよ.
- (2)  $t_1, t_2$  を  $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$  かつ  $f(t_1) = f(t_2)$  を満たす実数とする. このとき  $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$  が成り立つことを示せ.
- (3)  $C$  と直線  $x = 1$  が囲む領域の面積  $S$  を求めよ.

**4** 座標空間に6点

$$A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(-1, 0, 0), E(0, -1, 0), F(0, 0, -1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある.  $s, t$  を  $0 < s < 1, 0 < t < 1$  を満たす実数とする. 線分 AB, AC をそれぞれ  $1-s:s$  に内分する点を P, Q とし, 線分 FD, FE をそれぞれ  $1-t:t$  に内分する点を R, S とする.

- (1) 4点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ.
- (2) 線分 PQ の中点を L とし, 線分 RS の中点を M とする.  $s, t$  が  $0 < s < 1, 0 < t < 1$  の範囲を動くとき, 線分 LM の長さの最小値  $m$  を求めよ.
- (3) 正八面体 ABCDEF の4点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を  $X$  とする. 線分 LM の長さが (2) の値  $m$  をとるとき,  $X$  を最大とするような  $s, t$  の値と, そのときの  $X$  の値を求めよ.



5  $p, q$  を  $0 < p < 1, 0 < q < 1$  を満たす実数とし,  $n$  を 2 以上の整数とする. 2 つのチーム A, B が野球の試合を  $n$  回行う. 1 試合目に A が勝つ確率は  $p$  であるとする. また, A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は  $p$  であり, B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は  $q$  であるとする. なお, 試合結果に引き分けはなく, 勝敗が決まるとする.

(1)  $n$  試合目に A が勝つ確率  $a_n$  を求めよ.

(2)  $n \geq 3$  とする. B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率  $b_n$  を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right), \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x) \text{ とおくと}$$

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0$$

$$x > 0 \text{ において } f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

$$g(x) = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x) \text{ より, } x > 0 \text{ において}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{(1+x) - 2\sqrt{1+x} + 1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\sqrt{1+x} - 1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } x > 0 \text{ において } f(x) > 0, \quad g(x) > 0$$

$$\text{よって, } x > 0 \text{ の範囲で } x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \text{ より } y' = -\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2} + \frac{1}{x^2}$$

(1)の結果から,  $x > 0$ において

$$\{\log(1+x)\}^2 < \frac{x^2}{1+x} \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2} + \frac{1}{x^2} < 0$$

したがって,  $x > 0$ において,  $y$ は単調減少である.

$$x - \frac{x^2}{2} = \frac{x(2-x)}{2} \text{ であるから, } 0 < x < 2 \text{ のとき, (1)の結果から}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x} < \frac{1}{\log(1+x)} < \frac{2}{x(2-x)}$$

$$\text{したがって } \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x} < \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{2}{x(2-x)} - \frac{1}{x}$$

$$\text{ここで } \lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{2}{x(2-x)} - \frac{1}{x} \right\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, はさみうちの原理により } \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right\} = 0 \quad \text{よって } 0 < y < \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

2 (1)  $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$  が  $x - c$  で割り切れるから,  $f(c) = 0$  より

$$c^4 - ac^3 + bc^2 - ac + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad ac(c^2 + 1) = c^4 + bc^2 + 1$$

$a, b$  は正の実数であるから, 上の第2式より  $c > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left( x^2 - ax + b - \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 - a \left( x + \frac{1}{x} \right) + b - 2 \right\} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$$f(c) = 0 \text{ であるから } \left( c + \frac{1}{c} \right)^2 - a \left( c + \frac{1}{c} \right) + b - 2 = 0$$

$$\text{したがって } f\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^2} \left\{ \left( \frac{1}{c} + c \right)^2 - a \left( \frac{1}{c} + c \right) + b - 2 \right\} = 0$$

(i)  $c \neq 1$  のとき,  $f(c) = f\left(\frac{1}{c}\right) = 0$  より,  $f(x)$  は  $(x - c) \left( x - \frac{1}{c} \right)$  で割り切れる.

(ii)  $c = 1$  のとき,  $f(1) = 0$  であるから, (\*) より

$$-2a + b + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

① を (\*) に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left\{ \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 - a \left( x + \frac{1}{x} \right) + 2a - 4 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 - a \left( x + \frac{1}{x} - 2 \right) \right\} \\ &= (x^2 - 1)^2 - ax(x - 1)^2 \\ &= (x - 1)^2 \{ (x + 1)^2 - ax \} \end{aligned}$$

(i), (ii) より,  $f(x)$  は  $(x - c) \left( x - \frac{1}{c} \right)$  で割り切れる.

- (2)  $f(x)$  が  $x - s$ ,  $x - t$  で割り切れる, すなわち, これらを因数にもつとき,  
 (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - s)(x - t) \left(x - \frac{1}{s}\right) \left(x - \frac{1}{t}\right) \\ &= \left\{x^2 - \left(s + \frac{1}{s}\right)x + 1\right\} \left\{x^2 - \left(t + \frac{1}{t}\right)x + 1\right\} \\ &= x^4 - \left(s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t}\right)x^3 + \left\{\left(s + \frac{1}{s}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) + 2\right\}x^2 \\ &\quad - \left(s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t}\right)x + 1 \end{aligned}$$

係数を比較して

$$a = s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t}, \quad b = \left(s + \frac{1}{s}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) + 2 \quad \dots (**)$$

(1) の結果から  $s > 0, t > 0$

したがって, 相加・相乗平均の大小関係により, (\*) の第1式は

$$s + \frac{1}{s} \geq 2\sqrt{s \cdot \frac{1}{s}} = 2, \quad t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2 \quad \text{よって} \quad a \geq 4$$

- (3)  $\alpha = s + \frac{1}{s}, \beta = t + \frac{1}{t}$  とおくと, (2) の結果から  $\alpha \geq 2, \beta \geq 2$

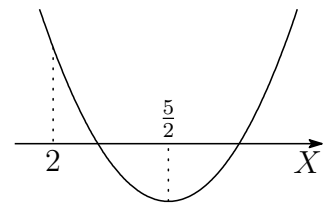
$$a = 5 \text{ のとき, } (**) \text{ より} \quad \alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = b - 2$$

$$\alpha, \beta \text{ を解とする 2 次方程式は} \quad X^2 - 5X + b - 2 = 0$$

$$g(X) = X^2 - 5X + b - 2 \text{ とおくと} \quad g(X) = \left(X - \frac{5}{2}\right)^2 + b - \frac{33}{4}$$

$g(X) = 0$  の 2 解が  $X \geq 2$  の範囲に実数解をもつことから

$$g(2) = b - 8 \geq 0, \quad b - \frac{33}{4} \leq 0$$



$$\text{ゆえに} \quad 8 \leq b \leq \frac{33}{4}$$

$b$  は自然数であるから  $b = 8$



- 3** (1)  $f(t) = 2 \sin t + \cos 2t$ ,  $g(t) = 2 \cos t + \sin 2t$  より ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ )

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \cos t - 2 \sin 2t = 2 \cos t - 4 \sin t \cos t \\ &= 2 \cos t(1 - 2 \sin t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= -2 \sin t + 2 \cos 2t = -2 \sin t + 2(1 - 2 \sin^2 t) \\ &= -2(\sin t + 1)(2 \sin t - 1) \end{aligned}$$

$f(t)$ ,  $g(t)$  の増減表は次のようになる.

$t$	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$	$t$	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	-		$g'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	$g(t)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

よって  $f(t)$  の最大値  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ ,  $g(t)$  の最大値  $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

- (2)  $f(t) = 2 \sin t + \cos 2t = -2 \sin^2 t + 2 \sin t + 1$  より

$$\begin{aligned} f(t_1) - f(t_2) &= -2(\sin^2 t_1 - \sin^2 t_2) + 2(\sin t_1 - \sin t_2) \\ &= -2(\sin t_1 - \sin t_2)(\sin t_1 + \sin t_2 - 1) \end{aligned}$$

$0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $f(t_1) = f(t_2)$  より,  $\sin t_1 - \sin t_2 \neq 0$  に注意して

$$\sin t_1 + \sin t_2 - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$g(t) = 2 \cos t + \sin 2t = 2 \cos t + 2 \sin t \cos t = 2 \cos t(1 + \sin t)$  より

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}g(t)^2 &= \cos^2 t(1 + \sin t)^2 = (1 - \sin t)(1 + \sin t)^3 \\ &= 2(1 + \sin t)^3 - (1 + \sin t)^4 \end{aligned}$$

$u = 1 + \sin t_1$ ,  $v = 1 + \sin t_2$  とおくと,  $\textcircled{1}$  より  $u + v = 3$  であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\{g(t_1)^2 - g(t_2)^2\} &= 2(u^3 - v^3) - u^4 + v^4 \\ &= 2(u - v)(u^2 + uv + v^2) - (u - v)(u + v)(u^2 + v^2) \\ &= 2(u - v)(u^2 + uv + v^2) - 3(u - v)(u^2 + v^2) \\ &= 2(u - v)(-u^2 + 2uv - v^2) = (v - u)^3 \\ &= (\sin t_2 - \sin t_1)^3 \end{aligned}$$

$0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$  より,  $\sin t_2 - \sin t_1 > 0$  であるから, 上式より

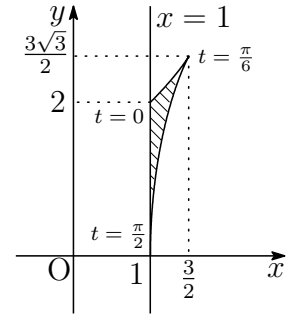
$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 \geq 0$$

(3) (1)の結果から,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  において

$$f(t) \geq 1, \quad g(t) \geq 0$$

(2)の結果から,  $0 \leq t_1 < \frac{\pi}{6} < t_2$  において,  
 $f(t_1) = f(t_2)$  を満たす  $t_1, t_2$  に対して

$$g(t_1) > g(t_2)$$



したがって, 右の図の斜線部分の面積が  $S$  であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} y \frac{dx}{dt} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} y \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t + \sin 2t) \cdot (2 \sin t + \cos 2t)' dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t + \sin 2t)(2 \cos t - 2 \sin 2t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos^2 t - 2 \sin 2t \cos t - 2 \sin^2 2t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos 2t - \sin 3t - \sin t + \cos 4t + 1) dt \\ &= \left[ \sin 2t + \frac{1}{3} \cos 3t + \cos t + \frac{1}{4} \sin 4t + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \end{aligned}$$



- 4** (1)  $\vec{a} = (0, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{c} = (0, 1, 0)$  とすると,  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$ ,  $D(-\vec{b})$ ,  $E(-\vec{c})$ ,  $F(-\vec{a})$  であるから

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, & \vec{OQ} &= s\vec{a} + (1-s)\vec{c}, \\ \vec{OR} &= t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{b}, \\ \vec{OS} &= t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{c} \end{aligned}$$

したがって  $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (1-s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1-s)\vec{BC}$

$$\vec{SR} = \vec{OR} - \vec{OS} = (t-1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1-t)\vec{BC}$$

$\vec{PQ} // \vec{SR}$  であるから, 4点 P, Q, R, S は同一平面上にある。



(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\vec{OL} &= \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{OM} &= \frac{\vec{OR} + \vec{OS}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{LM} &= \vec{OM} - \vec{OL} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \vec{LM} = \left( \frac{s+t-2}{2}, \frac{s+t-2}{2}, -(s+t) \right)$$

ここで,  $s+t=2u$  とおくと ( $0 < u < 1$ )  $\vec{LM} = (u-1, u-1, -2u)$

$$\begin{aligned}m^2 &= |\vec{LM}|^2 = (u-1)^2 + (u-1)^2 + (-2u)^2 \\ &= 6u^2 - 4u + 2 = 6\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって,  $u = \frac{1}{3}$ , すなわち,  $s+t = \frac{2}{3}$  のとき,  $m$  は最小値  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) 直線 LM と  $xy$  平面との交点を H とすると,  $\vec{a}$  の係数に注意して

$$\vec{OH} = \frac{t\vec{OL} + s\vec{OM}}{s+t} = \frac{t(1-s) + s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c})$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{HL} &= \vec{OL} - \vec{OH} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{HM} &= -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

$s+t = \frac{2}{3}$  を上の 2 式に代入すると

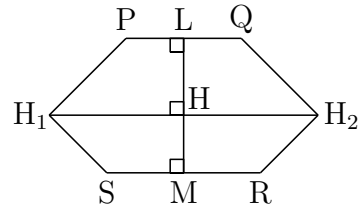
$$\begin{aligned}\vec{HL} &= s(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (s, s, s), \\ \vec{HM} &= -t(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (-t, -t, -t)\end{aligned}$$

ゆえに  $|\vec{HL}| = \sqrt{3}s$ ,  $|\vec{HM}| = \sqrt{3}t$

平面 PQRS と線分 BE, CD のとの交点をそれぞれ  $H_1, H_2$  とすると

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{BC}$$

ゆえに  $|\overrightarrow{H_1H_2}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$



(1) の結果から  $|\overrightarrow{PQ}| = (1-s)|\overrightarrow{BC}| = (1-s)\sqrt{2}$ ,  
 $|\overrightarrow{SR}| = (1-t)|\overrightarrow{BC}| = (1-t)\sqrt{2}$

$X$  は2つの台形  $PH_1H_2Q, H_1SRH_2$  の和であるから

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(PQ + H_1H_2)HL + \frac{1}{2}(SR + H_1H_2)HM \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2} \right\} \sqrt{3}s + \frac{1}{2} \left\{ (1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2} \right\} \sqrt{3}t \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2} \{ 2(s+t) - (s^2 + t^2) \} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \{ 4(s+t) - (s+t)^2 - (s-t)^2 \} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \left\{ 4 \cdot \frac{2}{3} - \left( \frac{2}{3} \right)^2 - (s-t)^2 \right\} = \frac{\sqrt{6}}{4} \left\{ \frac{20}{9} - (s-t)^2 \right\} \end{aligned}$$

よって、 $s-t=0$ , すなわち、 $s=t=\frac{1}{3}$  のとき、 $X$  は最大値  $\frac{5\sqrt{6}}{9}$  ■

- 5** (1)  $n+1$  試合目に A が勝つのは、 $n$  試合目に A が勝っているときと B が勝っているときがあるから、次の確率漸化式が成立する。

$$a_{n+1} = pa_n + q(1 - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = (p-q)a_n + q$$

したがって  $a_{n+1} - \frac{q}{1-p+q} = (p-q) \left( a_n - \frac{q}{1-p+q} \right)$

$$a_n - \frac{q}{1-p+q} = (p-q)^{n-1} \left( a_1 - \frac{q}{1-p+q} \right)$$

$a_1 = p$  であるから

$$\begin{aligned} a_n - \frac{q}{1-p+q} &= (p-q)^{n-1} \cdot \frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q} \\ a_n &= \frac{(1-p)(p-q)^n + q}{1-p+q} \end{aligned}$$

- (2) (i)  $n$  試合目に A が勝つ場合  
勝者が  $\boxed{BA}$  の順で 2 回,  $\boxed{A}$  が  $n-4$  回であるから, その確率は

$${}_{n-2}C_2\{(1-p)q\}^2p^{n-4} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2q^2p^{n-4}$$

- (ii)  $n$  試合目に B が勝つ場合  
勝者が  $\boxed{BA}$  の順で 1 回,  $\boxed{A}$  が  $n-3$  回, 最後に  $\boxed{B}$  であるから,  
その確率は

$${}_{n-2}C_1(1-p)q \cdot p^{n-3} \times (1-p) = (n-2)(1-p)^2qp^{n-3}$$

(i),(ii) より

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2q^2p^{n-4} + (n-2)(1-p)^2qp^{n-3} \\ &= \frac{1}{2}(1-p)^2q(n-2)\{(n-3)q + 2p\}p^{n-4} \end{aligned}$$



## 5.5 2019年(150分)

**1** 以下の問いに答えよ。ただし、 $\log$  は自然対数、 $e$  はその底とする。

(1)  $b$  を実数とする。関数

$$f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{x^2+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ。

(2)  $a \leq b$  を満たす正の実数  $a, b$  に対し、不等式

$$\frac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}} (b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 数列  $\{I_n\}$  を次のように定める。

$$I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n$$

を求めよ。ただし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0$$

を用いてもよい。

2 自然数  $a, b$  に対し,

$$w = \cos \frac{a\pi}{3+b} + i \sin \frac{a\pi}{3+b}$$

とおく. ただし,  $i$  は虚数単位とする. 複素数  $z_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を以下のよ  
うに定める.

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 - w, \quad z_n = (1 - w)z_{n-1} + wz_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

このとき以下の問いに答えよ.

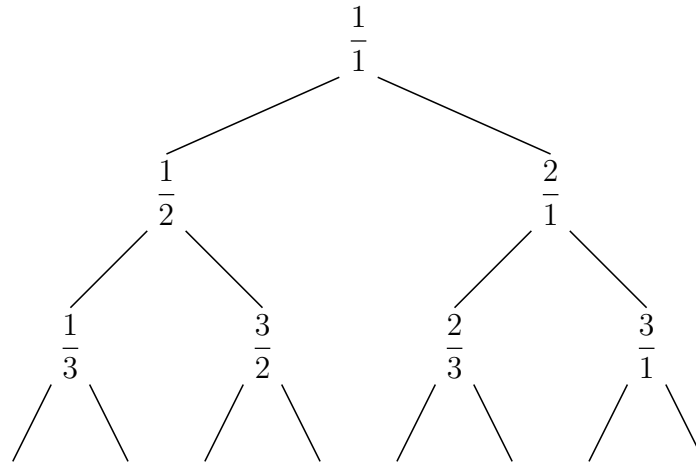
- (1)  $a = 4, b = 3$  のとき, 複素数平面上の点  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$  をこの  
順に線分で結んでできる図形を図示せよ.
- (2)  $a = 2, b = 1$  のとき,  $z_{63}$  を求めよ.
- (3) さいころを 2 回投げ, 1 回目に出た目を  $a$ , 2 回目に出た目を  $b$  とする. こ  
のとき  $z_{63} = 0$  である確率を求めよ.

3 実数  $s, t$  が  $s^2 + t^2 \leq 6$  を満たしながら変わるとき,  $xy$  平面上で点  $(s+t, st)$   
が動く領域を  $A$  とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $(2, \sqrt{2})$  が領域  $A$  の点かどうか判定せよ.
- (2)  $A$  を図示せよ.
- (3)  $A$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

4 下の図は、 $\frac{1}{1}$  から始めて分数  $\frac{p}{q}$  の左下に分数  $\frac{p}{p+q}$ ，右下に分数  $\frac{p+q}{q}$  を配置するという規則でできた樹形図の一部である。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ。ただし整数  $\frac{n}{1}$  は既約分数とみなす。
- (2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ。
- (3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ。
- (4)  $\frac{19}{44}$  はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ。  
たとえば、 $\frac{3}{1}$  は上から3段目の左から4番目である。



5 座標空間内の2つの球面

$$S_1 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 7$$

と

$$S_2 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1$$

を考える。  $S_1$  と  $S_2$  の共通部分を  $C$  とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1)  $S_1$  との共通部分が  $C$  となるような球面のうち、半径が最小となる球面の方程式を求めよ。
- (2)  $S_1$  との共通部分が  $C$  となるような球面のうち、半径が  $\sqrt{3}$  となる球面の方程式を求めよ。

解答例

1 (1)  $f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{x^2+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$  を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{x}{x^2+1} e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) \\ &= -\frac{2}{(x^2+1)^2} e^{-\frac{x^2}{2}} < 0 \end{aligned}$$

よって、 $f(x)$  は単調に減少する。

(2)  $0 < a \leq b$  および (1) の結果より、 $f(b) \leq f(a)$  であるから

$$\begin{aligned} \int_b^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{b}{b^2+1} e^{-\frac{b^2}{2}} &\leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} \\ \frac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1} e^{-\frac{b^2}{2}} &\leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$0 < a \leq t \leq b$  において、 $e^{-\frac{t^2}{2}} \leq e^{-\frac{a^2}{2}}$  であるから

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \int_a^b e^{-\frac{a^2}{2}} dt = \left[ e^{-\frac{a^2}{2}} t \right]_a^b = e^{-\frac{a^2}{2}} (b-a) \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② により、 $a \leq b$  を満たす正の実数  $a, b$  に対して、次式が成立する。

$$\frac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}} (b-a)$$

(3) (2) の結論において、 $t$  を  $\sqrt{n}t$  に置き換えると

$$\frac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leq \int_{\frac{a}{\sqrt{n}}}^{\frac{b}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{2}} \sqrt{n} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}} (b-a)$$

さらに、 $a = \sqrt{n}$ ,  $b = 2\sqrt{n}$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{n+1} e^{-\frac{n}{2}} - \frac{2\sqrt{n}}{4n+1} e^{-2n} &\leq \sqrt{n} \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{n}{2}} (2\sqrt{n} - \sqrt{n}) \\ \frac{1}{n+1} e^{-\frac{n}{2}} \left( 1 - \frac{2n+2}{4n+1} e^{-\frac{3}{2}n} \right) &\leq \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

ここで、 $J_n = \frac{1}{n+1} e^{-\frac{n}{2}} \left( 1 - \frac{2n+2}{4n+1} e^{-\frac{3}{2}n} \right)$ ,  $K_n = e^{-\frac{n}{2}}$  とおくと

$$J_n \leq I_n \leq K_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{n} \log J_n \leq \frac{1}{n} \log I_n \leq \frac{1}{n} \log K_n \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\log K_n = -\frac{n}{2} \text{ より}$$

$$\frac{1}{n} \log K_n = -\frac{1}{2} \text{ よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log K_n = -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\log J_n = -\log(n+1) - \frac{n}{2} + \log\left(1 - \frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right) \text{ より}$$

$$\frac{1}{n} \log J_n = -\frac{1}{n} \log(n+1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \log\left(1 - \frac{2 + \frac{2}{n}}{4 + \frac{1}{n}}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0 \text{ に注意して } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log J_n = -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{5}$$

③, ④, ⑤ から, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n = -\frac{1}{2}$$



**2** (1)  $z_1 = 1, z_2 = 1 - w, z_n = (1 - w)z_{n-1} + wz_{n-2}$  より

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= -w, \\ z_n - z_{n-1} &= -w(z_{n-1} - z_{n-2}) \end{aligned}$$

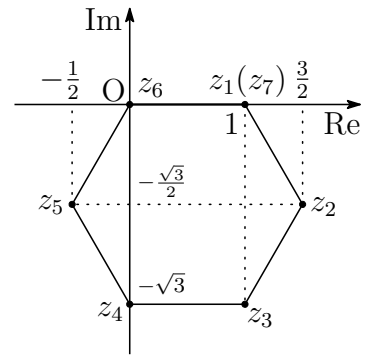
$$\text{したがって } \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \frac{z_4 - z_3}{z_3 - z_2} = \cdots = \frac{z_7 - z_6}{z_6 - z_5} = -w$$

$$a = 4, b = 3 \text{ より } w = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} -w &= (\cos \pi + i \sin \pi) \left( \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \\ &= \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } |z_n - z_{n-1}| = 1, \angle z_{n-1}z_nz_{n+1} = -\frac{\pi}{3}$$

よって, 点  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$  をこの順に線分で結んでできる図形は, 右の図のように1辺の長さが1の正六角形である.





(2)  $z_1 = 1, z_2 = 1 - w, z_n = (1 - w)z_{n-1} + wz_{n-2}$  より

$$z_{n+1} + wz_n = z_n + wz_{n-1} = z_2 + wz_1 = 1,$$

$$z_{n+1} - z_n = -w(z_n - z_{n-1}) = (-w)^{n-1}(z_2 - z_1) = (-w)^n$$

$$\text{上の2式から } z_n = \begin{cases} \frac{1 - (-w)^n}{1 + w} & (w \neq -1) \\ n & (w = -1) \end{cases} \quad \dots (*)$$

$$a = 2, b = 1 \text{ より } w = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\text{よって } z_{63} = \frac{1 - (-w)^{63}}{1 + w} = \frac{1 - (-i)^{63}}{1 + i} = \frac{1 - i}{1 + i} = -i$$

(3)  $w = \cos \frac{a\pi}{3+b} + i \sin \frac{a\pi}{3+b}, w \neq -1$  より  $\frac{a\pi}{3+b}$  は  $\pi$  の奇数倍でない

$$\begin{aligned} -w &= (\cos \pi + i \sin \pi) \left( \cos \frac{a\pi}{3+b} + i \sin \frac{a\pi}{3+b} \right) \\ &= \cos \left( \frac{a}{3+b} + 1 \right) \pi + i \sin \left( \frac{a}{3+b} + 1 \right) \pi \end{aligned}$$

$$z_{63} = \frac{1 - (-w)^{63}}{1 + w} = 0 \text{ となるとき, } (-w)^{63} = 1 \text{ であるから}$$

$$63 \left( \frac{a}{3+b} + 1 \right) \pi \text{ は } 2\pi \text{ の整数倍 ゆえに } \frac{63a\pi}{3+b} \text{ は } \pi \text{ の奇数倍}$$

したがって,  $(a, b)$  の満たす条件は

$$\frac{63a\pi}{3+b} \text{ は } \pi \text{ の奇数倍かつ } \frac{a\pi}{3+b} \text{ は } \pi \text{ の奇数倍でない}$$

これを満たす  $(a, b)$  は, 次の7組.

$$a = 1 \text{ のとき } b = 4, 6$$

$$a = 2 \text{ のとき } b = 3,$$

$$a = 3 \text{ のとき } b = 4, 6$$

$$a = 4 \text{ のとき } \text{なし}$$

$$a = 5 \text{ のとき } b = 4, 6$$

$$a = 6 \text{ のとき } \text{なし}$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{7}{6^2} = \frac{7}{36}$$



3 (1)  $s + t = 2, st = \sqrt{2}$  に対し

$$(s - t)^2 = (s + t)^2 - 4st = 2^2 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2}) < 0$$

したがって、これを満たす実数  $s, t$  は存在しない。  
よって、点  $(2, \sqrt{2})$  は領域  $A$  の点ではない。

(2)  $s + t = x, st = y$  とおくと、2数  $s, t$  は、2次方程式  $\lambda^2 - x\lambda + y = 0$  の解

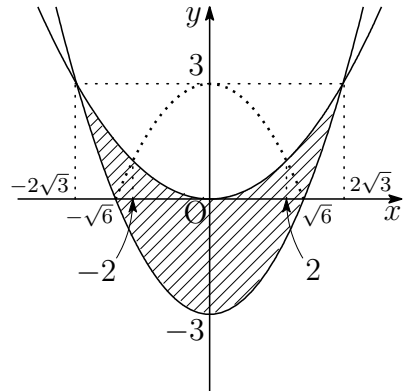
$$\frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

である。これが実数解で、条件  $s^2 + t^2 \leq 6$  を満たすから

$$x^2 - 4y \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4y}}{2}\right)^2 \leq 6$$

したがって、領域  $A$  の表す不等式は

$$\begin{cases} y \leq \frac{x^2}{4} \\ y \geq \frac{1}{2}x^2 - 3 \end{cases}$$



右の図の斜線部分で、境界線を含む。

(3) 求める回転体の体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 3\right)^2 dx + \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx - \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{2} - 3\right)^2 dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - 3x^2 + 9\right) dx + \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{x^4}{16} dx - \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{x^4}{4} - 3x^2 + 9\right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{20} - x^3 + 9x\right]_0^2 + \left[\frac{x^5}{80}\right]_2^{2\sqrt{3}} - \left[\frac{x^5}{20} - x^3 + 9x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{8(7 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6})}{5} \end{aligned}$$

よって、求める回転体の体積は  $V = \frac{16(7 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6})}{5}\pi$  ■

- 4 (1)  $n$  が  $m$  で割り切れること ( $m$  が  $n$  の約数) を  $m|n$  と表記し, 整数  $x, y$  の最大公約数を  $(x, y)$  と表記する.

$(p, q) | (p+q)$  および  $(p, q) | p$  であるから,  $(p, q)$  は  $p+q$  と  $p$  の公約数.

$$(p, q) | (p+q, p) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$q = (p+q) - p$  より,  $(p+q, p) | q$ , また,  $(p+q, p) | p$  であるから,  $(p+q, p)$  は  $q$  と  $p$  の公約数.

$$(p+q, p) | (p, q) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から  $(p, q) = (p+q, p) \quad \cdots (*)$

(\*) は  $p$  と  $q$  を交換しても成立するから

$$(q, p) = (q+p, q) \quad \text{ゆえに} \quad (p, q) = (p+q, q) \quad \cdots (**)$$

(\*), (\*\*) より,  $(p, q) = 1$  のとき,  $(p+q, p) = 1$ ,  $(p+q, q) = 1$

したがって,  $\frac{p}{q}$  が既約分数のとき,  $\frac{p}{p+q}$ ,  $\frac{p+q}{q}$  も既約分数である.

よって,  $\frac{1}{1}$  から始まるこの樹形図に現れる分数は, すべて既約分数である.

- (2)  $\frac{p}{q}$  について ( $p, q$  は自然数),  $n = p+q$  とする. 樹形図に現れない既約分数の集合  $A (\neq \phi)$  が存在すると仮定する.  $A$  における  $n$  の最小値を  $N$  とし, その  $N$  に対応する既約分数の 1 つを  $\frac{P}{Q}$  とする.

(i)  $P = Q$  のとき, すなわち,  $\frac{1}{1}$  は樹形図にあるので, 矛盾.

(ii)  $P < Q$  のとき, 既約分数  $\frac{P}{Q}$  に対し,  $\frac{P}{Q-P}$  は既約分数で

$$n = P + (Q - P) = N - P < N$$

したがって,  $N$  の最小性により, 既約分数  $\frac{P}{Q-P}$  は樹形図に現れる. この既約分数に対して左下に配置する規則を適用すると

$$\frac{P}{P + (Q - P)} = \frac{P}{Q}$$

このとき, 既約分数  $\frac{P}{Q}$  が樹形図に現れ, 矛盾.

(iii)  $P > Q$  のとき, 既約分数  $\frac{P}{Q}$  に対し,  $\frac{P-Q}{Q}$  は既約分数で

$$n = (P - Q) + Q = N - Q < N$$

したがって,  $N$  の最小性により, 既約分数  $\frac{P-Q}{Q}$  は樹形図に現れる.  
 この既約分数に対して右下に配置する規則を適用すると

$$\frac{(P - Q) + Q}{Q} = \frac{P}{Q}$$

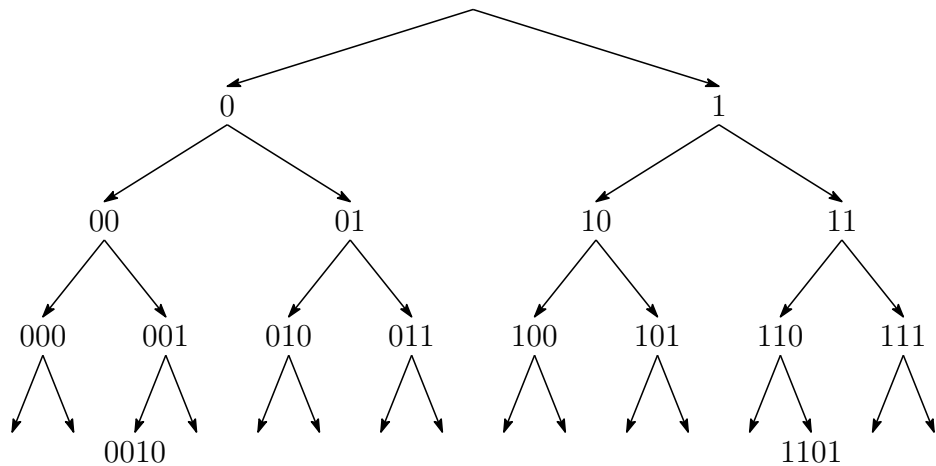
このとき, 既約分数  $\frac{P}{Q}$  が樹形図に現れ, 矛盾.

(i)~(iii) より,  $A = \phi$  となり, すべての正の有理数がこの樹形図に現れる.

(3) 樹形図に現れる既約分数  $\frac{p}{q}$  に対し,  $n = p + q$  とする.

樹形図に現れる有理数(既約分数)で, 等しい2数の存在を仮定し,  $n$  を最小にするものを考える. その値を  $n_0$  とすると, (2) と同様に,  $n_0$  の最小性により矛盾を生じる.

(4) 樹形図の既約分数に対して, 左下(分母に分子を加える), 右下(分子に分母を加える)にそれぞれ配置することを配置「0」, 配置「1」と表記する. 例えば, 「左下 → 左下 → 右下 → 左下」, 「右下 → 右下 → 左下 → 右下」の配置をそれぞれ0010, 1101と表記する. これらの文字列は4個であるから, 5段目にあり, 配置を2進数とみると, それぞれ2, 13. 起点に注意すると, これらにそれぞれ1を加えた3, 14が左からの順番を表す.



$\frac{1}{1}$  から  $\frac{19}{44}$  に至る配置は,  $\frac{19}{44}$  から  $\frac{1}{1}$  へ逆に辿ることにより

$$\frac{19}{44} \xleftarrow{0} \frac{19}{25} \xleftarrow{0} \frac{19}{6} \xleftarrow{1} \frac{13}{6} \xleftarrow{1} \frac{7}{6} \xleftarrow{1} \frac{1}{6} \xleftarrow{0} \frac{1}{5} \xleftarrow{0} \frac{1}{4} \xleftarrow{0} \frac{1}{3} \xleftarrow{0} \frac{1}{2} \xleftarrow{0} \frac{1}{1}$$

したがって,  $\frac{19}{44}$  の表す配置は 0000011100

文字列が10個で, 配置を2進数とみると28であるから, 起点に注意して

### 11段目の左から29番目



#### 5 (1) 2つの球面

$$S_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

$$S_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

の中心は, それぞれ  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 3, 3)$  であり, この2点間の距離は

$$\sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2} = 3$$

また,  $S_1$ ,  $S_2$  の半径は, それぞれ  $\sqrt{7}$ , 1 より

$$\sqrt{7} - 1 < 3 < \sqrt{7} + 1$$

したがって,  $S_1$  と  $S_2$  の共通部分  $C$  は円である.  $S_1$  と  $S_2$  の方程式から  $x^2 + y^2 + z^2$  の項を消去すると, 円  $C$  が存在する次の平面の方程式を得る.

$$2x + 4y + 4z - 25 = 0$$

これから,  $S_1$  との共通部分が  $C$  となる球面の方程式は, 実数  $k$  を用いて

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 7 + k(2x + 4y + 4z - 25) = 0$$

$$(x+k-1)^2 + (y+2k-1)^2 + (z+2k-1)^2 = 9k^2 + 15k + 7 \quad \dots (*)$$

ゆえに  $9k^2 + 15k + 7 = 9\left(k + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{3}{4}$

球面の半径が最小になるのは,  $k = -\frac{5}{6}$  ときで, その方程式は

$$\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

(2) 球面の半径が $\sqrt{3}$ になるとき  $9k^2 + 15k + 7 = 3$

ゆえに  $(3k+1)(3k+4) = 0$  これを解いて  $k = -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$

上の結果を(\*)に代入することにより, 求める球面の方程式は

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 &= 3, \\ \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 &= 3 \end{aligned}$$





## 第 6 章 神戸大学

### 出題分野 (2010-2019) 120 分

◀	神戸大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明		4		2						
	複素数と方程式		1								
	図形と方程式		2	1				2			
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法										
III	式と曲線										
	複素数平面									4	
	関数										
	極限				5		4		3・5	2	
	微分法とその応用	1	5		3	1	2・3		1		1
	積分法		3	3・4	4				2		
	積分法の応用	3		5		5	1	3・5		5	5
A	場合の数と確率	4				4	5		4	3	3
	整数の性質	2				2		4			4
	図形の性質										
B	平面上のベクトル										2
	空間のベクトル				1	3		1		1	
	数列										
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	5		2							

数字は問題番号



## 6.1 2015年(120分)

1 座標平面上の2つの曲線  $y = \frac{x-3}{x-4}$ ,  $y = \frac{1}{4}(x-1)(x-3)$  をそれぞれ  $C_1$ ,  $C_2$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 2曲線  $C_1$ ,  $C_2$  の交点をすべて求めよ.
- (2) 2曲線  $C_1$ ,  $C_2$  の概形をかき,  $C_1$  と  $C_2$  で囲まれた図形の面積を求めよ.

2 座標平面上の楕円  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  を  $C$  とする.  $a > 2$ ,  $0 < \theta < \pi$  とし,  $x$  軸上の点  $A(a, 0)$  と楕円  $C$  上の点  $P(2 \cos \theta, \sin \theta)$  をとる. 原点を  $O$  とし, 直線  $AP$  と  $y$  軸との交点を  $Q$  とする. 点  $Q$  を通り  $x$  軸に平行な直線と, 直線  $OP$  との交点を  $R$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 点  $R$  の座標を求めよ.
- (2) (1) で求めた点  $R$  の  $y$  座標を  $f(\theta)$  とする. このとき,  $0 < \theta < \pi$  における  $f(\theta)$  の最大値を求めよ.
- (3) 原点  $O$  と点  $R$  の距離の2乗を  $g(\theta)$  とする. このとき,  $0 < \theta < \pi$  における  $g(\theta)$  の最小値を求めよ.

3  $a$  を正の実数とする. 座標平面上の曲線  $C$  を

$$y = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$$

で定める. 曲線  $C$  が2つの変曲点  $P$ ,  $Q$  をもち, それらの  $x$  座標の差が  $\sqrt{2}$  であるとする. 以下の問に答えよ.

- (1)  $a$  の値を求めよ.
- (2) 線分  $PQ$  の中点と  $x$  座標が一致するような,  $C$  上の点を  $R$  とする. 三角形  $PQR$  の面積を求めよ.
- (3) 曲線  $C$  上の点  $P$  における接線が  $P$  以外で  $C$  と交わる点を  $P'$  とし, 点  $Q$  における接線が  $Q$  以外で  $C$  と交わる点を  $Q'$  とする. 線分  $P'Q'$  の中点の  $x$  座標を求めよ.

4  $a, b$  を実数とし、自然数  $k$  に対して  $x_k = \frac{2ak + 6b}{k(k+1)(k+3)}$  とする。以下の間に答えよ。

(1)  $x_k = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3}$  がすべての自然数  $k$  について成り立つような実数  $p, q, r$  を、 $a, b$  を用いて表せ。

(2)  $b = 0$  のとき、3以上の自然数  $n$  に対して  $\sum_{k=1}^n x_k$  を求めよ。また、 $a = 0$

のとき、4以上の自然数  $n$  に対して  $\sum_{k=1}^n x_k$  を求めよ。

(3) 無限級数  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  の和を求めよ。

5  $a, b, c$  を1以上7以下の自然数とする。次の条件(\*)を考える。

(\*) 3辺の長さが  $a, b, c$  である三角形と、3辺の長さが  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  である三角形が両方とも存在する。

以下の間に答えよ。

(1)  $a = b > c$  であり、かつ条件(\*)をみたす  $a, b, c$  の組の個数を求めよ。

(2)  $a > b > c$  であり、かつ条件(\*)をみたす  $a, b, c$  の組の個数を求めよ。

(3) 条件(\*)をみたす  $a, b, c$  の組の個数を求めよ。

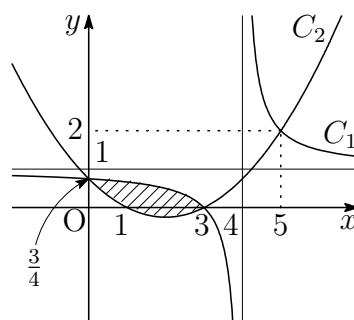
解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad C_1: y = \frac{x-3}{x-4}, \quad C_2: y = \frac{1}{4}(x-1)(x-3)$$

$C_1, C_2$  の方程式から  $y$  を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(x-1)(x-3) &= \frac{x-3}{x-4} \\ \frac{x-3}{4(x-4)} \{(x-1)(x-4) - 4\} &= 0 \\ \frac{x(x-3)(x-5)}{4(x-4)} &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに  $x = 0, 3, 5$  よって、求める交点は  $\left(0, \frac{3}{4}\right), (3, 0), (5, 2)$



(2) 求める面積を  $S$  とすると、上の図から

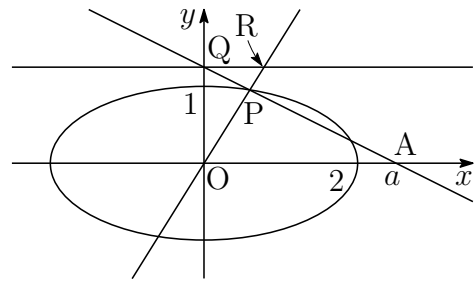
$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{ \frac{x-3}{x-4} - \frac{1}{4}(x-1)(x-3) \right\} dx \\ &= \int_0^3 \left\{ 1 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) \right\} dx \\ &= \left[ x + \log|x-4| - \frac{1}{4} \left( \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \right]_0^3 \\ &= 3 - \log 4 - \frac{1}{4}(9 - 18 + 9) = \mathbf{3 - 2 \log 2} \end{aligned}$$

■

- 2 (1) 2点  $A(a, 0)$ ,  $P(2 \cos \theta, \sin \theta)$  を通る直線方程式は ( $a > 2$ )

$$y = \frac{-\sin \theta}{a - 2 \cos \theta}(x - a)$$

ゆえに  $Q\left(0, \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta}\right)$



直線 OP の方程式は  $x \sin \theta - 2y \cos \theta = 0$

これに  $y = \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta}$  を代入すると ( $0 < \theta < \pi$ )

$$x \sin \theta - 2 \cdot \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta} \cdot \cos \theta = 0$$

$0 < \theta < \pi$  より,  $\sin \theta \neq 0$  であるから  $x = \frac{2a \cos \theta}{a - 2 \cos \theta}$

よって  $R\left(\frac{2a \cos \theta}{a - 2 \cos \theta}, \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta}\right)$

- (2) (1) の結果より,  $f(\theta) = \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta}$  であるから

$$f'(\theta) = a \cdot \frac{\cos \theta \cdot (a - 2 \cos \theta) - \sin \theta \cdot 2 \sin \theta}{(a - 2 \cos \theta)^2} = \frac{a(a \cos \theta - 2)}{(a - 2 \cos \theta)^2}$$

$a > 2$  より,  $f'(\theta) = 0$  を満たす  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) がただ1つ存在し, これを  $\alpha$  とすると

$$\cos \alpha = \frac{2}{a}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}$$

したがって,  $f(\theta)$  の増減表は

$\theta$	(0)	...	$\alpha$	...	( $\pi$ )
$f'(\theta)$		+	0	-	
( $\theta$ )		↗	極大	↘	

よって, 求める  $f(\theta)$  の最大値は

$$f(\alpha) = \frac{a \sin \alpha}{a - 2 \cos \alpha} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}}{a - 2 \cdot \frac{2}{a}} = \frac{a \sqrt{a^2 - 4}}{a^2 - 4} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 4}}$$

(3) (1) の結果より,  $g(\theta) = \text{OR}^2$  であるから

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \left( \frac{2a \cos \theta}{a - 2 \cos \theta} \right)^2 + \left( \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta} \right)^2 \\ &= \frac{4a^2 \cos^2 \theta + a^2(1 - \cos^2 \theta)}{(a - 2 \cos \theta)^2} = \frac{a^2(1 + 3 \cos^2 \theta)}{(a - 2 \cos \theta)^2} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$  であるから

$$h(t) = a^2(3t^2 + 1)(a - 2t)^{-2} \quad (-1 < t < 1)$$

とおくと,  $h(t)$  の最小値は,  $g(\theta)$  の最小値と一致するから

$$\begin{aligned} h'(t) &= a^2\{6t(a - 2t)^{-2} + (3t^2 + 1) \cdot 4(a - 2t)^{-3}\} \\ &= 2a^2\{3t(a - 2t) + 2(3t^2 + 1)\}(a - 2t)^{-3} \\ &= 2a^2(3at + 2)(a - 2t)^{-3} \end{aligned}$$

$a > 2$  より,  $-\frac{1}{3} < -\frac{2}{3a} < 0$  であるから,  $h(t)$  の増減表は

$t$	$(-1)$	$\dots$	$-\frac{2}{3a}$	$\dots$	$(1)$
$h'(t)$		$-$	$0$	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, 求める最小値は

$$\begin{aligned} h\left(-\frac{2}{3a}\right) &= a^2 \left\{ 3 \left(-\frac{2}{3a}\right)^2 + 1 \right\} \left\{ a - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3a}\right) \right\}^{-2} \\ &= a^2 \cdot \frac{4 + 3a^2}{3a^2} \cdot \left(\frac{3a^2 + 4}{3a}\right)^{-2} \\ &= \frac{3a^2 + 4}{3} \cdot \frac{9a^2}{(3a^2 + 4)^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + 4} \end{aligned}$$



3 (1)  $f(x) = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$  とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6(a+1)x^2 + 6ax, \\ f''(x) &= 12x^2 - 12(a+1)x + 6a \\ &= 6\{2x^2 - 2(a+1)x + a\} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$  の係数について

$$D/4 = (a+1)^2 - 2a = a^2 + 1 > 0$$

したがって、 $f''(x) = 0$  は異なる 2 つの実数解をもつ。この 2 つの実数解を  $\alpha, \beta$  とすると ( $\alpha < \beta$ )

$x$	$\cdots$	$\alpha$	$\cdots$	$\beta$	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$C$  上の 2 点  $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$  の前後で  $f''(x)$  の符号が変化するので、これらの 2 点は  $C$  の変曲点である。また、 $f''(x) = 0$  を解くと

$$\alpha = \frac{a+1 - \sqrt{a^2+1}}{2}, \quad \beta = \frac{a+2 + \sqrt{a^2+1}}{2}$$

上式より、 $\beta - \alpha = \sqrt{a^2+1}$ 。条件より、 $\beta - \alpha = \sqrt{2}$  であるから

$$\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}$$

$a > 0$  であるから  $a = 1$

注意  $f'(a) = 0$  は  $f(a)$  が極値であるための必要条件であるが、十分条件ではないように、 $f''(a) = 0$  は点  $(a, f(a))$  が変曲点であるための必要条件ではあるが、十分条件ではない。必ず、 $x = a$  の前後で  $f''(x)$  の符号が変化していることを示す必要がある。なお、 $f''(x)$  の符号は曲率<sup>1</sup>の符号を表す。

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2009.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf) の p.10 を参照。

(2) (1)の結果より  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ ,  $f''(x) = 6(2x^2 - 4x + 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 4x + 1) \left( \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{4} \right) - 2x + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{6} f''(x) \left( \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{4} \right) - 2x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$P\left(\alpha, -2\alpha + \frac{3}{4}\right)$ ,  $Q\left(\beta, -2\beta + \frac{3}{4}\right)$  とおく.

$$\alpha = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \quad \dots (*)$$

$f(1) = 0$  より,  $R(1, 0)$  であるから

$$\overrightarrow{RP} = \left( \alpha - 1, -2\alpha + \frac{3}{4} \right), \quad \overrightarrow{RQ} = \left( \beta - 1, -2\beta + \frac{3}{4} \right)$$

$\triangle PQR$  の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| (\alpha - 1) \left( -2\beta + \frac{3}{4} \right) - (\beta - 1) \left( -2\alpha + \frac{3}{4} \right) \right| \\ &= \frac{5}{8} |\beta - \alpha| = \frac{5}{8} \sqrt{2} \end{aligned}$$

(3)  $f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x - \alpha)^3 + (x - \alpha)^4$

曲線  $C: y = f(x)$  上の点  $P(\alpha, f(\alpha))$  における接線の方程式は

$$y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \quad \dots \textcircled{1}$$

$f''(\alpha) = 0$ ,  $f'''(x) = 24(x - 1)$  より  $f'''(\alpha) = 24(\alpha - 1)$  に注意して,  
 $y = f(x)$  と  $\textcircled{1}$  から  $y$  を消去すると

$$\begin{aligned} 4(\alpha - 1)(x - \alpha)^3 + (x - \alpha)^4 &= 0 \\ (x - \alpha)^3(x + 3\alpha - 4) &= 0 \end{aligned}$$

したがって,  $P'$  の  $x$  座標は  $-3\alpha + 4$

同様にして,  $Q'$  の  $x$  座標は  $-3\beta + 4$

よって, 線分  $P'Q'$  の中点の  $x$  座標は,  $(*)$  に注意して

$$-3 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + 4 = -3 \cdot 1 + 4 = 1$$

## 解説

関数  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$  について,  $f^{(4)}(x) = 4!$  であるから

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(p) + \int_p^x f'(t) dt = f(p) - \int_p^x (x-t)' f'(t) dt \\
 &= f(p) - \left[ (x-t)f'(t) \right]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t) dt \\
 &= f(p) + (x-p)f'(p) - \frac{1}{2!} \int_p^x \{(x-t)^2\}' f''(t) dt \\
 &= f(p) + (x-p)f'(p) - \frac{1}{2!} \left[ (x-t)^2 f''(t) \right]_p^x + \frac{1}{2!} \int_p^x (x-t)^2 f'''(t) dt \\
 &= f(p) + (x-p)f'(p) + \frac{1}{2!} (x-p)^2 f''(p) - \frac{1}{3!} \int_p^x \{(x-t)^3\}' f'''(t) dt \\
 &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!} (x-p)^2 - \frac{1}{3!} \left[ (x-t)^3 f'''(t) \right]_p^x \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \int_p^x (x-t)^3 f^{(4)}(t) dt \\
 &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!} (x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!} (x-p)^3 + 4 \int_p^x (x-t)^3 dt \\
 &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!} (x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!} (x-p)^3 - \left[ (x-t)^4 \right]_p^x \\
 &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!} (x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!} (x-p)^3 + (x-p)^4
 \end{aligned}$$

一般に,  $n$  次関数  $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  について ( $n \geq 2$ )

$$g(x) = g(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k + a_n(x-p)^n$$

が成り立つ. ■



$$\boxed{4} \quad (1) \quad x_k = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3} = \frac{(p+q+r)k^2 + (4p+3q+r)k + 3p}{k(k+1)(k+3)}$$

$$x_k = \frac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)} \text{ であるから}$$

$$p+q+r=0, \quad 4p+3q+r=2a, \quad 3p=6b$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{p=2b, \quad q=a-3b, \quad r=-a+b}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= 2b \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + (a-b) \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= 2b \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + (a-b) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

(上式は,  $n=1, 2$  のときも成立する)

(\*) より,  $b=0$  のとき ( $n \geq 3$ )

$$\sum_{k=1}^n x_k = a \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}$$

(\*) より,  $a=0$  のとき ( $n \geq 4$ )

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= 2b \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) - b \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= b \left( \frac{7}{6} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

(上式は,  $n=1, 2, 3$  のときも成立する)

$$(3) \quad (*) \text{ より} \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = 2b \cdot 1 + (a-b) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{6}a + \frac{7}{6}b$$

■

5 (1)  $a, b, c$ は1以上7以下の自然数であるから、 $a = b > c$ のとき  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

条件(\*)をみたすとき  $b + c > a$  かつ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

このとき、 $a = b > c$ であるから  $\frac{2}{b} > \frac{1}{c}$  すなわち  $2c > b > c$

ゆえに  $c = 1$ のとき  $2 > b > 1$ より なし

$c = 2$ のとき  $4 > b > 2$ より  $a = b = 3$

$c = 3$ のとき  $6 > b > 3$ より  $a = b = 4, 5$

$c = 4$ のとき  $8 > b > 4$ より  $a = b = 5, 6, 7$

$c = 5$ のとき  $10 > b > 5$ より  $a = b = 6, 7$

$c = 6$ のとき  $12 > b > 6$ より  $a = b = 7$

$c = 7$ のとき  $14 > b > 7$ より なし

よって、求める組の個数は  $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$  (個)

(2)  $a, b, c$ は1以上7以下の自然数であるから、 $a > b > c$ のとき  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

条件(\*)をみたすとき  $b + c > a$  かつ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

ゆえに  $a - b < c$  かつ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

このとき、 $a > b > c$ であるから  $1 \leq c \leq 5$

(i)  $a > b > c = 1$ のとき  $a - b < 1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1$

これをみたす  $(a, b)$ の組はなし

(ii)  $a > b > c = 2$ のとき  $a - b < 2, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$

よって、 $(a, b) = (4, 3)$ の1個

(iii)  $a > b > c = 3$ のとき  $a - b < 3, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{3}$

よって、 $(a, b) = (5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 5)$ の4個

(iv)  $a > b > c = 4$ のとき  $a - b < 4, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{4}$

よって、 $(a, b) = (6, 5), (7, 5), (7, 6)$ の3個

(v)  $a > b > c = 5$ のとき  $a - b < 5, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{5}$

よって、 $(a, b) = (7, 6)$ の1個

したがって、求める組の個数は  $1 + 4 + 3 + 1 = 9$  (個)

(3)  $a, b, c$  は1以上7以下の自然数であるから,  $a > b = c$  のとき  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

条件(\*)をみたすとき  $b + c > a$  かつ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

このとき,  $a > b = c$  であるから  $c + c > a$  すなわち  $2c > a > c$

これは(1)の個数に等しいから 9 (個)

また,  $a = b = c$  となる個数は7個であるから, 以上をまとめると

- $a = b > c$  の場合が9個であるから,  
 $b = c > a, c = a > b$  の場合もそれぞれ9個
- $a > b = c$  の場合が9個であるから,  
 $b > c = a, c > a = b$  の場合もそれぞれ9個
- $a > b > c$  の場合が9個であるから,  
 $a > c > b, b > a > c, b > a > c, c > a > b, c > b > a$   
 の場合もそれぞれ9個
- $a = b = c$  の場合が7個

よって, 条件(\*)をみたす  $a, b, c$  の個数は

$$9 \times 3 + 9 \times 3 + 9 \times 6 + 7 = 115 \text{ (個)}$$



## 6.2 2016年(120分)

**1** 四面体OABCにおいて、PをOAの中点、Qを辺OBを2:1に内分する点、Rを辺BCの中点とする。P、Q、Rを通る平面と辺ACの交点をSとする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1)  $\vec{PQ}$ 、 $\vec{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 比 $|\vec{AS}| : |\vec{SC}|$ を求めよ。
- (3) 四面体OABCを1辺の長さが1の正四面体とするとき、 $|\vec{QS}|$ を求めよ。

**2**  $a$ を正の定数とし、 $f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1)  $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2)  $a = 2$ とする。すべての実数 $x$ に対して $f(x) \geq 2x + b$ が成り立つような実数 $b$ の取りうる値の範囲を求めよ。
- (3)  $0 < a \leq \frac{3}{2}$ とする。すべての実数 $x$ に対して $f(x) \geq 2x + b$ が成り立つような実数 $b$ の取りうる値の範囲を $a$ を用いて表せ。また、その条件をみたす点 $(a, b)$ の領域を $ab$ 平面上に図示せよ。

**3**  $a$ を正の定数とし、2曲線 $C_1 : y = \log x$ 、 $C_2 : y = ax^2$ が点Pで接しているとする。以下の問に答えよ。

- (1) Pの座標と $a$ の値を求めよ。
- (2) 2曲線 $C_1$ 、 $C_2$ と $x$ 軸で囲まれた部分を $x$ 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

4 約数, 公約数, 最大公約数を次のように定める.

- 2つの整数  $a, b$  に対して,  $a = bk$  をみたす整数  $k$  が存在するとき,  $b$  は  $a$  の約数であるという.
- 2つの整数に共通の約数をそれらの公約数という.
- 少なくとも一方が0でない2つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という.

以下の問に答えよ.

- (1)  $a, b, c, p$  は0でない整数で  $a = pb + c$  を満たしているとする.
- (i)  $a = 18, b = 30, c = -42, p = 2$  のとき,  $a$  と  $b$  の公約数の集合  $S$ , および  $b$  と  $c$  の公約数の集合  $T$  を求めよ.
- (ii)  $a$  と  $b$  の最大公約数を  $M$ ,  $b$  と  $c$  の最大公約数を  $N$  とする.  $M$  と  $N$  は等しいことを示せ. ただし,  $a, b, c, p$  は0でない任意の整数とする.
- (2) 自然数の列  $\{a_n\}$  を

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 4$$

で定める.

- (i)  $a_{n+1}$  と  $a_n$  の最大公約数を求めよ.
- (ii)  $a_{n+4}$  を  $a_{n+2}$  と  $a_n$  を用いて表せ.
- (iii)  $a_{n+2}$  と  $a_n$  の最大公約数を求めよ.

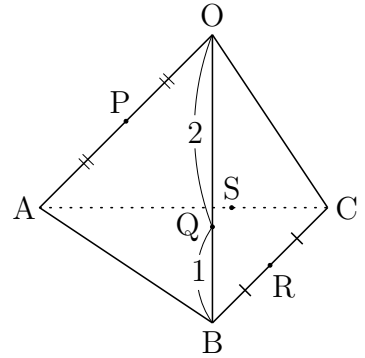
5 極方程式で表された  $xy$  平面上の曲線  $r = 1 + \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) を  $C$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 曲線  $C$  上の点を直交座標  $(x, y)$  で表したとき,  $\frac{dx}{d\theta} = 0$  となる点, および  $\frac{dy}{d\theta} = 0$  となる点の直交座標を求めよ.
- (2)  $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{dy}{dx}$  を求めよ.
- (3) 曲線  $C$  の概形を  $xy$  平面上にかけ.
- (4) 曲線  $C$  の長さを求めよ.

解答例

1 (1) 右の図から

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \vec{OQ} - \vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}, \\ \vec{PR} &= \vec{OR} - \vec{OP} \\ &= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}}{2}\end{aligned}$$



(2) Sは平面PQR上の点であるから、実数  $s, t$  を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OS} &= \vec{OP} + s\vec{PQ} + t\vec{PR} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + t(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - s - t)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + t\right)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

このとき、Sは直線AC上の点であるから

$$\frac{1}{2}(1 - s - t) + \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{2}{3}s + t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = -1, \quad t = \frac{4}{3}$$

したがって  $\vec{OS} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$  よって  $|\vec{AS}| : |\vec{SC}| = 2 : 1$

$$(3) \quad \vec{QS} = \vec{OS} - \vec{OQ} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

$$\begin{aligned}\text{したがって} \quad |\vec{QS}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 8\vec{b}\cdot\vec{c} + 4\vec{c}\cdot\vec{a})\end{aligned}$$

このとき  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\text{ゆえに} \quad |\vec{QS}|^2 = \frac{1}{9}(1 + 4 + 4 - 2 - 4 + 2) = \frac{5}{9} \quad \text{よって} \quad |\vec{QS}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

■

**2** (1)  $g(x) = x^2 + 2ax + a$  とおくと  $g(x) = (x+a)^2 - a^2 + a$

$a > 0$  に注意すると

(i)  $-a^2 + a \geq 0$ , すなわち,  $0 < a \leq 1$  のとき,  $g(x) \geq 0$  であるから

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

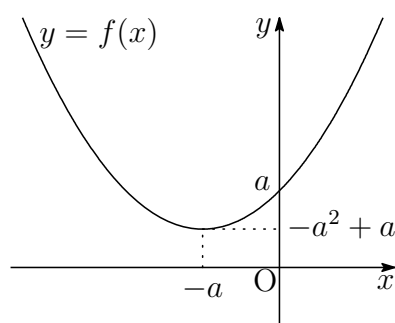
(ii)  $-a^2 + a < 0$ , すなわち,  $1 < a$  のとき,

$$g(x) = 0 \text{ の解は } x = -a \pm \sqrt{a^2 - a}$$

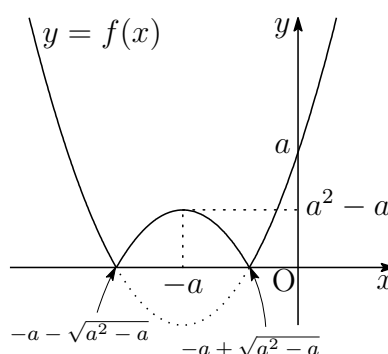
$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & (x \leq -a - \sqrt{a^2 - a}, -a + \sqrt{a^2 - a} \leq x) \\ -g(x) & (-a - \sqrt{a^2 - a} \leq x \leq -a + \sqrt{a^2 - a}) \end{cases}$$

(i), (ii) より,  $y = f(x)$  のグラフは, 次のようになる.

(i)  $0 < a \leq 1$  のとき



(ii)  $1 < a$  のとき



(2)  $a = 2$  のとき,  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸との交点の  $x$  座標は, (1)(ii) のグラフに  $a = 2$  を代入して

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

また,  $g(x) = x^2 + 4x + 2$  であるから,  $g'(x) = 2x + 4$  より

$$g'(-2 + \sqrt{2}) = 2(-2 + \sqrt{2}) + 4 = 2\sqrt{2} > 2$$

点  $(-2 + \sqrt{2}, 0)$  が直線  $y = 2x + b$  の上側またはこの直線上にあるときで

$$0 \geq 2(-2 + \sqrt{2}) + b \quad \text{すなわち} \quad b \leq 4 - 2\sqrt{2}$$

(3) (i)  $0 < a \leq 1$  のとき, すべての  $x$  について,

$$g(x) \geq 2x + b \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2(a-1)x + a - b \geq 0$$

が成り立つので, 係数について

$$(a-1)^2 - (a-b) \leq 0 \quad \text{よって} \quad b \leq -a^2 + 3a - 1$$

(ii)  $1 < a \leq \frac{3}{2}$  のとき,  $g'(x) = 2x + 2a$  より

$$g'(-a + \sqrt{a^2 - a}) = 2(-a + \sqrt{a^2 - a}) + 2a = 2\sqrt{a^2 - a}$$

ここで  $a^2 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$  ゆえに  $0 < a^2 - a \leq \frac{3}{4}$

このとき  $g'(-a + \sqrt{a^2 - a}) \leq 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} < 2$

したがって,  $y = f(x)$  と  $y = 2x + b$  のグラフが接するとき, 接点は,  $x$  軸の上側にある. 接点の  $x$  座標を  $t$  とすると,  $g'(t) = 2$  より

$$2t + 2a = 2$$

これを解いて  $t = 1 - a$

$y = g(x)$  上の点  $(1 - a, g(1 - a))$  における接線の方程式は

$$y - g(1 - a) = 2(x - 1 + a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - a^2 + 3a - 1$$

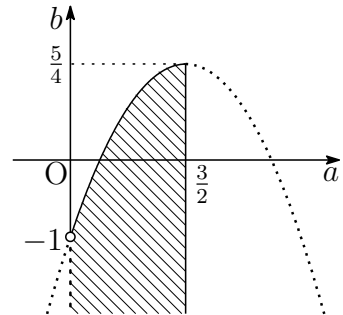
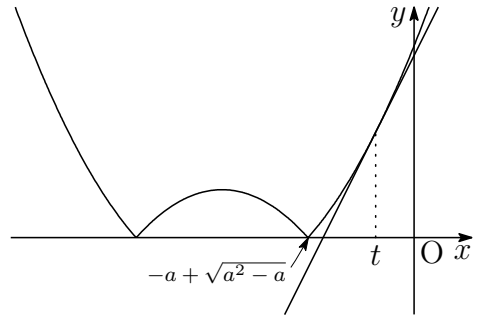
$f(x) \geq 2x + b$  が成り立つとき, 直線  $y = 2x + b$  はこの直線の下側または一致するので, 求める条件は

$$b \leq -a^2 + 3a - 1$$

よって, (i), (ii) より, 求める領域は

$$b \leq -a^2 + 3a - 1 \quad (0 < a \leq 3)$$

また, 点  $(a, b)$  の領域は, 右の図の斜線部分部分である.





**3** (1)  $f(x) = \log x$ ,  $g(x) = ax^2$  とすると  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g'(x) = 2ax$

点 P の  $x$  座標を  $t$  とすると,  $f(t) = g(t)$ ,  $f'(t) = g'(t)$  であるから

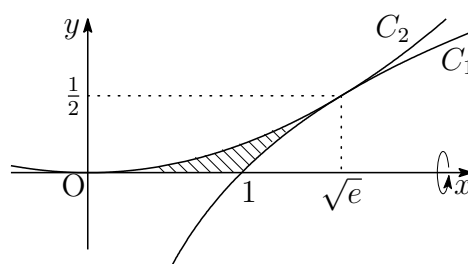
$$\log t = at^2, \quad \frac{1}{t} = 2at$$

第2式から  $at^2 = \frac{1}{2}$  これを第1式に代入すると

$$\log t = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad t = \sqrt{e}, \quad a = \frac{1}{2e}$$

(2) 求める立体の体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\sqrt{e}} \left( \frac{x^2}{2e} \right)^2 dx \\ &\quad - \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx \end{aligned}$$



ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{e}} \left( \frac{x^2}{2e} \right)^2 dx &= \frac{1}{4e^2} \int_0^{\sqrt{e}} x^4 dx = \frac{1}{4e^2} \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{20}, \\ \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx &= \left[ x(\log x)^2 \right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} x(2 \log x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\sqrt{e}}{4} - 2 \int_1^{\sqrt{e}} \log x dx \\ &= \frac{\sqrt{e}}{4} - 2 \left[ x(\log x - 1) \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{\sqrt{e}}{4} + \sqrt{e} - 2 = \frac{5}{4}\sqrt{e} - 2 \end{aligned}$$

したがって  $\frac{V}{\pi} = \frac{\sqrt{e}}{20} - \left( \frac{5}{4}\sqrt{e} - 2 \right) = 2 - \frac{6}{5}\sqrt{e}$

よって  $V = \left( 2 - \frac{6}{5}\sqrt{e} \right) \pi$  ■

- 4 (1) (i)  $a = 18 = 2 \cdot 3^2$ ,  $b = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ,  $c = -42 = -2 \cdot 3 \cdot 7$  より

$$S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\},$$

$$T = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

- (ii)  $n$  が  $m$  で割り切れること ( $m$  が  $n$  の約数) を  $m | n$  と表記し, 整数  $x, y$  の最大公約数を  $(x, y)$  と表記すると

$$(x, y) | x, \quad (x, y) | y$$

が成り立つ.  $a = pb + c$  より  $(b, c) | a$  また,  $(b, c) | b$  であるから,  $(b, c)$  は  $a$  と  $b$  の公約数, すなわち

$$(b, c) | (a, b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に,  $c = a - pb$  より  $(a, b) | c$  また,  $(a, b) | b$  であるから,  $(a, b)$  は  $b$  と  $c$  の公約数, すなわち

$$(a, b) | (b, c) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  より  $(a, b) = (b, c)$  よって  $M = N$

- (2) (i) (1)(ii) を  $a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n$  に適用すると  $(a_{n+2}, a_{n+1}) = (a_{n+1}, a_n)$  よって  $(a_{n+1}, a_n) = (a_2, a_1) = (4, 3) = \mathbf{1}$

- (ii)  $a_{n+4} = 6a_{n+3} + a_{n+2}$ ,  $a_{n+3} = 6a_{n+2} + a_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= 6a_{n+3} + a_{n+2} = 6(6a_{n+2} + a_{n+1}) + a_{n+2} \\ &= 37a_{n+2} + 6a_{n+1} \end{aligned}$$

$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n$  より,  $6a_{n+1} = a_{n+2} - a_n$  であるから

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= 37a_{n+2} + (a_{n+2} - a_n) \\ &= 38a_{n+2} - a_n \end{aligned}$$

よって  $a_{n+4} = 38a_{n+2} - a_n$

- (iii) (1)(ii) を  $a_{n+4} = 38a_{n+2} + (-a_n)$  に適用すると

$$(a_n + 4, a_{n+2}) = (a_{n+2}, -a_n) = (a_{n+2}, a_n)$$

$$a_3 = 6a_2 + a_1 = 6 \cdot 4 + 3 = 27, \quad a_4 = 6a_3 + a_2 = 6 \cdot 27 + 4 = 166$$

(ii) の結果により

$$n \text{ が奇数のとき } (a_{n+2}, a_n) = (a_3, a_1) = (27, 3) = \mathbf{3}$$

$$n \text{ が偶数のとき } (a_{n+2}, a_n) = (a_4, a_2) = (166, 4) = \mathbf{2}$$



5 (1)  $r = 1 + \cos \theta$  より

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$$

これらを  $\theta$  について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin \theta \cos \theta + (1 + \cos \theta)(-\sin \theta) \\ &= -\sin \theta(1 + 2 \cos \theta), \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\sin \theta \sin \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ &= -(1 - \cos^2 \theta) + (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ &= (1 + \cos \theta)(-1 + 2 \cos \theta) \end{aligned}$$

ゆえに,  $\frac{dx}{d\theta} = 0$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) の解は  $\theta = 0, \pi, 2\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

よって, これらの点の座標は  $(2, 0), (0, 0), \left(-\frac{1}{4}, \pm \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

また,  $\frac{dy}{d\theta} = 0$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) の解は  $\theta = \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

よって, これらの点の座標は  $(0, 0), \left(\frac{3}{4}, \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

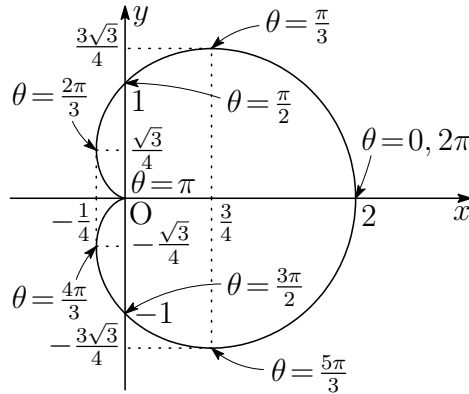
$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{(1 + \cos \theta)(-1 + 2 \cos \theta)}{-\sin \theta(1 + 2 \cos \theta)} \\ &= \frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{\sin \theta(1 - \cos \theta)} \cdot \frac{1 - 2 \cos \theta}{1 + 2 \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{1 - 2 \cos \theta}{1 + 2 \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{1 - 2 \cos \theta}{1 + 2 \cos \theta} = \frac{0}{1+1} \cdot \frac{1+2}{1-2} = 0$$

(3)  $f(\theta) = 1 + \cos \theta$  とすると,  $f(2\pi - \theta) = r(\theta)$ .  $C$  は  $x$  軸に関して対称であるから,  $0 \leq \theta \leq \pi$  における  $C$  の増減を調べる.

$\theta$	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	$\pi$
$\frac{dx}{d\theta}$	0	-	-	-	0	+	0
$x$	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$	+	+	0	-	-	-	0
$y$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

上の増減表および(2)の結果から,  $C$  の概形は次のようになる.



(4)  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  より

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta$$

ゆえに 
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$r = 1 + \cos \theta$  であるから

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2 \\ &= 2(1 + \cos \theta) = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって, 曲線  $C$  の長さを  $l$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \int_0^\pi 2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \left[ 4 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 4 \end{aligned}$$

よって  $l = 8$

補足 曲線  $r = a(1 + \cos \theta)$  は, カージオイド (cardioid) または心臓形という.

## 解説

$C$  の  $x$  軸の上側の部分と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{1}{4}}^2 y \, dx - \int_{-\frac{1}{4}}^0 y \, dx \\
 &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 r \sin \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r \sin \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta \\
 &= - \int_0^{\pi} r \sin \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} (r^2)' \sin \theta \cos \theta \, d\theta + \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 \theta \, d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ r^2 \sin \theta \cos \theta \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \, d\theta + \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \right]_0^{\pi} = \frac{3}{4} \pi
 \end{aligned}$$

$C$  の  $x$  軸の上側の部分を  $x$  軸のまわりに 1 回転した回転体の体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{4}}^2 y^2 \, dx - \int_{-\frac{1}{4}}^0 y^2 \, dx \\
 &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 r^2 \sin^2 \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r^2 \sin^2 \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta \\
 &= - \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta \\
 &= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} (r^3)' \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta + \int_0^{\pi} r^3 \sin^3 \theta \, d\theta \\
 &= -\frac{1}{3} \left[ r^3 \sin^2 \theta \cos \theta \right]_0^{\pi} + \frac{1}{3} \int_0^{\pi} r^3 (2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta) \, d\theta + \int_0^{\pi} r^3 \sin^3 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi} r^3 \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{3} \left[ -\frac{1}{4} (1 + \cos \theta)^4 \right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

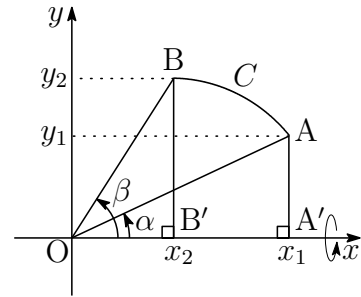
よって  $V = \frac{8}{3} \pi$

曲線  $r = f(\theta)$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) の弧長  $l$ ,  $x$  軸と囲まれた部分の面積  $S$ ,  $x$  軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積  $V$  は

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta, \quad S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 \, d\theta, \quad V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} r^3 \sin \theta \, d\theta$$

極方程式と面積

$C : r = f(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) とし,  $C$  上の  $\theta = \alpha, \beta$  に対応する点を, それぞれ  $A, B$  とし,  $A, B$  から  $x$  軸に垂線  $AA', BB'$  を引く.  $S_A = \triangle OAA', S_B = \triangle OBB'$  とし, 曲線  $C, x$  軸, 2直線  $AA', BB'$  で囲まれた領域  $D_C$  の面積を  $S_C$ , 曲線  $C, 2$ 直線  $OA, OB$  で囲まれた領域  $D$  の面積を  $S$  とすると



$$\begin{aligned}
 S_C &= \int_{x_2}^{x_1} y \, dx = \int_{\beta}^{\alpha} r \sin \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r^2)' \sin \theta \cos \theta \, d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \sin^2 \theta \, d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ r^2 \sin \theta \cos \theta \right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \sin^2 \theta \, d\theta \\
 &= -S_B + S_A + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta
 \end{aligned}$$

よって  $S = S_C + S_B - S_A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$

極方程式と  $x$  軸の周りの回転体の体積

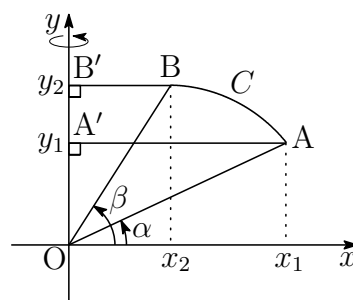
次に  $\triangle OAA', \triangle OBB'$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ,  $V_A, V_B$  とし, また, 領域  $D_C, D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ,  $V_C, V$  とすると

$$\begin{aligned}
 V_C &= \pi \int_{x_2}^{x_1} y^2 \, dx = \pi \int_{\beta}^{\alpha} r^2 \sin^2 \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta \\
 &= -\frac{\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} (r^3)' \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta + \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin^3 \theta \, d\theta \\
 &= -\frac{\pi}{3} \left[ r^3 \sin^2 \theta \cos \theta \right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 (2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta) d\theta + \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin^3 \theta \, d\theta \\
 &= -V_B + V_A + \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta \, d\theta
 \end{aligned}$$

よって  $V = V_C + V_B - V_A = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta \, d\theta$

極方程式と  $y$  軸の周りの回転体の体積

$C: r = f(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) とし,  $C$  上の  $\theta = \alpha, \beta$  に対応する点を, それぞれ  $A, B$  とし,  $A, B$  から  $y$  軸に垂線  $AA', BB'$  を引く. 曲線  $C, y$  軸, 2 直線  $AA', BB'$  で囲まれた領域を  $D_C$  とし, 曲線  $C, 2$  直線  $OA, OB$  で囲まれた領域を  $D$  とする.  $\triangle OAA', \triangle OBB'$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ,  $V_A, V_B$  とし, また, 領域  $D_C, D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ,  $V_C, V$  とすると



$$\begin{aligned} V_C &= \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cos^2 \theta (r' \sin \theta + r \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} (r^3)' \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} \left[ r^3 \cos^2 \theta \sin \theta \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 (-2 \cos \theta \sin^2 \theta + \cos^3 \theta) d\theta + \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos^3 \theta d\theta \\ &= V_B - V_A + \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

よって  $V = V_C + V_A - V_B = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos \theta d\theta$

## 極方程式の計量

- 弧長  $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$

- 面積  $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$

- $x$  軸の周りの回転体の体積  $V$

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta d\theta \quad (0 \leq \alpha < \beta \leq \pi)$$

- $y$  軸の周りの回転体の体積  $V$

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos \theta d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$



## 6.3 2017年(120分)

**1**  $n$  を自然数とする.

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく.  $3 < \pi < 4$  であることを用いて, 以下の問に答えよ.

- (1)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき,  $f''(x) < 0$  であることを示せ.
- (2) 方程式  $f(x) = 0$  は  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  の範囲に解をただ1つもつことを示せ.
- (3) (2)における解を  $x_n$  とする.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  であることを示し,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$  を求めよ.

**2**  $n$  を自然数とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 実数  $x$  に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

- (2) 次の等式をみたす  $S$  の値を求めよ.

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1 - e^{-k})}{k} - S = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

- (3) 不等式

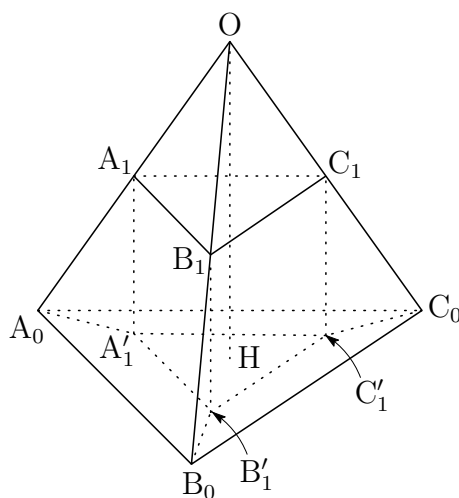
$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

が成り立つことを示し,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1 - e^{-k})}{k}$  を求めよ.



**3** 1辺の長さが $a_0$ の正四面体 $OA_0B_0C_0$ がある. 図のように, 辺 $OA_0$ 上の点 $A_1$ , 辺 $OB_0$ 上の点 $B_1$ , 辺 $OC_0$ 上の点 $C_1$ から平面 $A_0B_0C_0$ に下ろした垂線をそれぞれ $A_1A'_1$ ,  $B_1B'_1$ ,  $C_1C'_1$ としたとき, 三角柱 $A_1B_1C_1-A'_1B'_1C'_1$ は正三角柱になるとする. ただし, ここでは底面が正三角形であり, 側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする. 同様に, 点 $A_2, B_2, C_2, A'_2, B'_2, C'_2, \dots$ を次のように定める. 正四面体 $OA_kB_kC_k$ において, 辺 $OA_k$ 上の点 $A_{k+1}$ , 辺 $OB_k$ 上の点 $B_{k+1}$ , 辺 $OC_k$ 上の点 $C_{k+1}$ から平面 $A_kB_kC_k$ に下ろした垂線をそれぞれ $A_{k+1}A'_{k+1}$ ,  $B_{k+1}B'_{k+1}$ ,  $C_{k+1}C'_{k+1}$ としたとき, 三角柱 $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}-A'_{k+1}B'_{k+1}C'_{k+1}$ は正三角柱になるとする. 辺 $A_kB_k$ の長さを $a_k$ とし, 正三角柱 $A_kB_kC_k-A'_kB'_kC'_k$ の体積を $V_k$ とするととき, 以下の間に答えよ.

- (1) 点 $O$ から平面 $A_0B_0C_0$ に下ろした垂線を $OH$ とし,  $\theta = \angle OA_0H$ とするととき,  $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めよ.
- (2)  $a_1$ を $a_0$ を用いて表せ.
- (3)  $V_k$ を $a_0$ を用いて表し,  $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ を求めよ.



- 4  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, -1, -1)$ ,  $\vec{v}_3 = (-1, 1, -1)$ ,  $\vec{v}_4 = (-1, -1, 1)$  とする. 座標空間内の動点  $P$  が原点  $O$  から出発し, 正四面体のサイコロ (1, 2, 3, 4 の目がそれぞれ確率  $\frac{1}{4}$  で出る) をふるごとに, 出た目が  $k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) のときは  $\vec{v}_k$  だけ移動する. すなわち, サイコロを  $n$  回ふった後の動点  $P$  の位置を  $P_n$  とし, サイコロを  $(n+1)$  回目によって出た目が  $k$  ならば

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \vec{v}_k$$

である. ただし,  $P_0 = O$  である. 以下の問に答えよ.

- (1) 点  $P_2$  が  $x$  軸上にある確率を求めよ.
  - (2)  $\overrightarrow{P_0 P_2} \perp \overrightarrow{P_2 P_4}$  となる確率を求めよ.
  - (3) 4点  $P_0, P_1, P_2, P_3$  が同一平面上にある確率を求めよ.
  - (4)  $n$  を 6 以下の自然数とする.  $P_n = O$  となる確率を求めよ.
- 5  $r, c, \omega$  は正の定数とする. 座標平面上の動点  $P$  は時刻  $t = 0$  のとき原点にあり, 毎秒  $c$  の速さで  $x$  軸上を正の方向へ動いているとする. また, 動点  $Q$  は時刻  $t = 0$  のとき点  $(0, -r)$  にあるとする. 点  $P$  から見て, 動点  $Q$  が点  $P$  を中心とする半径  $r$  の円周上を毎秒  $\omega$  ラジアン割合で反時計回りに回転しているとき, 以下の問に答えよ.
- (1) 時刻  $t$  における動点  $Q$  の座標  $(x(t), y(t))$  を求めよ.
  - (2) 動点  $Q$  の描く曲線が交差しない, すなわち,  $t_1 \neq t_2$  ならば  $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$  であるための必要十分条件を  $r, c, \omega$  を用いて与えよ.

## 解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3 \text{ より}$$

$$f'(x) = \cos x - 2nx + \frac{1}{3}x^2,$$

$$f''(x) = -\sin x - 2n + \frac{2}{3}x$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\pi < 4$  に注意して

$$f''(x) < -2n + \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} < -2 \cdot 1 + \frac{\pi}{3} < -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f'(0) &= 1 > 0, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= -\pi \left(n - \frac{\pi}{12}\right) = -\pi \left(1 - \frac{\pi}{12}\right) < 0 \end{aligned}$$

(1) の結果から,  $f'(x)$  は単調減少であるから, 上の結果により

$$f'(\alpha) = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす  $\alpha$  が唯一存在する.

$$\begin{aligned} \text{また} \quad f(0) &= 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - n \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \\ &< 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{2}\right)^3 = -\frac{13}{36} < 0 \end{aligned}$$

したがって,  $f(x)$  の増減表は

$x$	0	...	$\alpha$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

よって, 方程式  $f(x) = 0$  は  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  の範囲にただ1つの解をもつ.

$$(3) \quad f(x_n) = 0 \text{ であるから} \quad \sin x_n - nx_n^2 + \frac{1}{9}x_n^3 = 0 \quad \dots (*)$$

$$\text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin x_n + \frac{1}{9}x_n^3 \right) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

$$\text{上式および} (*) \text{ から} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x_n}{x_n} + \frac{1}{9}x_n^2 \right) = 1 \quad \blacksquare$$

2 (1)  $t \neq 0$  のとき  $\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$  ゆえに  $\sum_{k=0}^n t^n - \frac{1}{1-t} = -\frac{t^{n+1}}{1-t}$

$t = -e^{-x}$  において, 上式に代入すると

$$\sum_{k=0}^n (-e^{-x})^k - \frac{1}{1+e^{-x}} = -\frac{(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}$$

よって  $\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$

(2) (1) の結果から  $\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}}$   
 $= \sum_{k=1}^n (-1)^k e^{-kx} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

したがって

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 e^{-kx} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[ -\frac{e^{-kx}}{k} \right]_0^1 - \left[ \log(1+e^{-x}) \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k} - \log \frac{1+e^{-1}}{2} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

よって  $S = \log \frac{1+e^{-1}}{2}$

(3)  $0 \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \leq e^{-(n+1)x}$  であるから

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 e^{-(n+1)x} dx = \left[ -\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-n-1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$  から, はさみうちの原理により  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx = 0$

(\*) より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k} - \log \frac{1+e^{-1}}{2} = 0$

よって  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k} = \log \frac{1+e^{-1}}{2}$  ■

3 (1) 直角三角形  $OA_0H$  について  $\cos \theta = \frac{A_0H}{OA_0} = \frac{A_0H}{a_0}$

H は  $\triangle A_0B_0C_0$  の外心であるから、正弦定理により

$$\frac{a_0}{\sin 60^\circ} = 2A_0H \quad \text{ゆえに} \quad \frac{A_0H}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{よって} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{また} \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(2)  $OA_1 = A_1B_1 = a_1$  より  $A_0A_1 = a_0 - a_1$   
 $A_1A'_1 = A_0A_1 \sin \theta = (a_0 - a_1) \sin \theta$  であるから、 $A_1B_1 = A_1A'_1$  のとき

$$a_1 = (a_0 - a_1) \sin \theta \quad \text{ゆえに} \quad a_1 = \frac{a_0 \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$\text{よって} \quad a_1 = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}} a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} a_0 = (\sqrt{6} - 2) a_0$$

(3) (2) と同様にして  $a_{k+1} = (\sqrt{6} - 2) a_k$  ゆえに  $a_k = (\sqrt{6} - 2)^k a_0$

$$\text{したがって} \quad V_k = \frac{1}{2} a_k^2 \sin 60^\circ \cdot a_k = \frac{\sqrt{3}}{4} a_k^3 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{6} - 2)^{3k} a_0^3$$

$|\sqrt{6} - 2| < 1$  に注意して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} V_k &= \frac{\sqrt{3} a_0^3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{6} - 2)^{3k} \\ &= \frac{\sqrt{3} a_0^3}{4} \cdot \frac{(\sqrt{6} - 2)^3}{1 - (\sqrt{6} - 2)^3} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{18} a_0^3 \end{aligned}$$

4 (1)  $i, j = 1, 2, 3, 4$  とし、 $\vec{v}_i + \vec{v}_j$  が  $x$  軸と平行になる組み合わせは

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (2, 0, 0) \\ \vec{v}_3 + \vec{v}_4 &= \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = (-2, 0, 0) \end{aligned}$$

したがって、求める確率は  $\frac{2! + 2!}{4^2} = \frac{1}{4}$

(2)  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  とおくと,  $\overrightarrow{P_0P_2}$  および  $\overrightarrow{P_2P_4}$  は, 次のベクトルからなる.

$$\begin{array}{ll} \vec{v}_1 + \vec{v}_1 = 2\vec{v}_1, & \vec{v}_2 + \vec{v}_2 = 2\vec{v}_2, \\ \vec{v}_3 + \vec{v}_3 = 2\vec{v}_3, & \vec{v}_4 + \vec{v}_4 = 2\vec{v}_4, \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_1, & \vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_2, \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_3, & \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_3, \\ \vec{v}_2 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_2, & \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = -2\vec{e}_1 \end{array}$$

$\vec{v}_j \cdot \vec{e}_k \neq 0$  であるから ( $j = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3$ ),  $\overrightarrow{P_0P_2} \perp \overrightarrow{P_2P_4}$  となるのは,  $\overrightarrow{P_0P_2}$  および  $\overrightarrow{P_2P_4}$  が座標軸に平行で, 互いに垂直な場合について調べればよい. (1)の結果と同様に,  $\overrightarrow{P_0P_2}$  および  $\overrightarrow{P_2P_4}$  は,  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸と平行となる確率は  $\frac{1}{4}$  であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \times {}_3P_2 = \frac{3}{8}$$

(3)  $i \neq j, j \neq k, k \neq i$  のとき,  $\vec{v}_i, \vec{v}_j, \vec{v}_k$  は1次独立であるから,  $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}$  がすべて異なる場合を除く確率であるから

$$1 - \frac{{}_4P_3}{4^3} = 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \frac{5}{8}$$

(4)  $\vec{v}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  の成分はすべて奇数である.

ゆえに,  $n = 1, 3, 5$  のとき,  $P_n = 0$  となる確率は 0

$\overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_2P_4}, \overrightarrow{P_4P_6}$  は (2) で求めたベクトルである.

ゆえに,  $n = 2, 6$  のとき,  $P_n = 0$  のとなる確率は 0

$n = 4$  のとき,  $P_n = 0$  のとなるのは,  $\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_4}$  が

$$\begin{array}{lll} 2\vec{e}_1 + (-2\vec{e}_1), & 2\vec{e}_2 + (-2\vec{e}_2), & 2\vec{e}_3 + (-2\vec{e}_3), \\ -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_1, & -2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2, & -2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_3 \end{array}$$

の場合である. このとき, 求める確率は  $\frac{2}{4^2} \cdot \frac{2}{4^2} \times 6 = \frac{3}{32}$

よって, 求める確率は  $n = 1, 2, 3, 5, 6$  のとき 0,  $n = 4$  のとき  $\frac{3}{32}$



$$\boxed{5} \quad (1) \quad \overrightarrow{OP} = (ct, 0), \quad \overrightarrow{PQ} = (r \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}), r \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})) = (r \sin \omega t, -r \cos \omega t)$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = (ct + r \sin \omega t, -r \cos \omega t)$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{Q}(ct + r \sin \omega t, -r \cos \omega t)$$

- (2)  $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$  ならば  $t_1 = t_2$  であるための必要十分条件を求めればよい. (1)の結果から,  $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$  のとき

$$ct_1 + r \sin \omega t_1 = ct_2 + r \sin \omega t_2, \quad -r \cos \omega t_1 = -r \cos \omega t_2$$

上の2式から

$$r(\sin \omega t_2 - \sin \omega t_1) = c(t_2 - t_1), \quad r(\cos \omega t_2 - \cos \omega t_1) = 0$$

したがって

$$\begin{aligned} c^2(t_2 - t_1)^2 &= r^2(\sin \omega t_2 - \sin \omega t_1)^2 + r^2(\cos \omega t_2 - \cos \omega t_1)^2 \\ &= 2r^2\{1 - \cos \omega(t_2 - t_1)\} \\ &= 4r^2 \sin^2 \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2} \end{aligned}$$

ここで,  $\theta = \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2}$  とおくと

$$c^2 \left( \frac{2\theta}{\omega} \right)^2 = 4r^2 \sin^2 \theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{c}{r\omega} |\theta| = |\sin \theta|$$

これが  $\theta = 0$  以外に解をもたない条件, すなわち, 方程式

$$\left| \frac{\sin \theta}{\theta} \right| = \frac{c}{r\omega} \quad \dots (*)$$

が解を持たない条件を求めればよい.  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$  とすると,  $f(-\theta) = f(\theta)$  であるから,  $\theta > 0$  について調べる.

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$y = \sin \theta$  と  $y = \theta$  のグラフから,  $0 < \theta \leq \pi$  のとき

$$\theta > \sin \theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

$$\theta > \pi \text{ のとき} \quad \left| \frac{\sin \theta}{\theta} \right| < \frac{1}{\pi} \quad \text{したがって} \quad \left| \frac{\sin \theta}{\theta} \right| < 1$$

$$(*) \text{ が解をもたないとき} \quad \frac{c}{r\omega} \geq 1 \quad \text{よって} \quad \mathbf{c \geq r\omega} \quad \blacksquare$$

## 6.4 2018年(120分)

- 1  $t$  を  $0 < t < 1$  を満たす実数とする.  $OABC$  を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする. 辺  $OA$  を  $1-t:t$  に内分する点を  $P$ , 辺  $OB$  を  $t:1-t$  に内分する点を  $Q$ , 辺  $BC$  の中点を  $R$  とする. また  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{c} = \vec{OC}$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1)  $\vec{QP}$  と  $\vec{QR}$  を  $t$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ.
- (2)  $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$  のとき,  $t$  の値を求めよ.
- (3)  $t$  が (2) で求めた値をとるとき,  $\triangle PQR$  の面積を求めよ.

- 2  $k$  を 2 以上の整数とする. また

$$f(x) = \frac{1}{k} \left( (k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}} \right)$$

とおく. 以下の問に答えよ.

- (1)  $x > 0$  において, 関数  $y = f(x)$  の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ.
- (2) 数列  $\{x_n\}$  が  $x_1 > 1$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を満たすとき,  $x_n > 1$  を示せ.
- (3) (2) の数列  $\{x_n\}$  に対し,

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ. また  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  を求めよ.

- 3 さいころを 3 回ふって, 1 回目に出た目の数を  $a$ , 2 回目と 3 回目に出た目の数の和を  $b$  とし, 2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \dots (*)$$

を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) (\*) が  $x = 1$  を解にもつ確率を求めよ.
- (2) (\*) が整数を解にもつとする. このとき (\*) の解は共に正の整数であり, また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ.
- (3) (\*) が整数を解にもつ確率を求めよ.



4 整式  $f(x)$  は実数を係数にもつ3次式で、3次の係数は1、定数項は  $-3$  とする。方程式  $f(x) = 0$  は、1と虚数  $\alpha, \beta$  を解にもつとし、 $\alpha$  の実部は1より大きく、 $\alpha$  の虚部は正とする。複素数平面上で  $\alpha, \beta, 1$  が表す点を順に  $A, B, C$  とし、原点を  $O$  とする。以下の問に答えよ。

- (1)  $\alpha$  の絶対値を求めよ。
- (2)  $\theta$  を  $\alpha$  の偏角とする。  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (3)  $S$  を最大にする  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) とそのときの整式  $f(x)$  を求めよ。

5 座標空間において、 $O$  を原点とし、 $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$ ,  $C(1, 1, 0)$  とする。  $\triangle OAB$  を直線  $OC$  の周りに1回転してできる回転体を  $L$  とする。以下の問に答えよ。

- (1) 直線  $OC$  上にない点  $P(x, y, z)$  から直線  $OC$  におろした垂線を  $PH$  とする。  $\overrightarrow{OH}$  と  $\overrightarrow{HP}$  を  $x, y, z$  の式で表せ。
- (2) 点  $P(x, y, z)$  が  $L$  の点であるための条件は

$$z^2 \leq 2xy \text{ かつ } 0 \leq x + y \leq 2$$

であることを示せ。

- (3)  $1 \leq a \leq 2$  とする。  $L$  を平面  $x = a$  で切った切り口の面積  $S(a)$  を求めよ。
- (4) 立体  $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in L, 1 \leq x \leq 2\}$  の体積を求めよ。

解答例

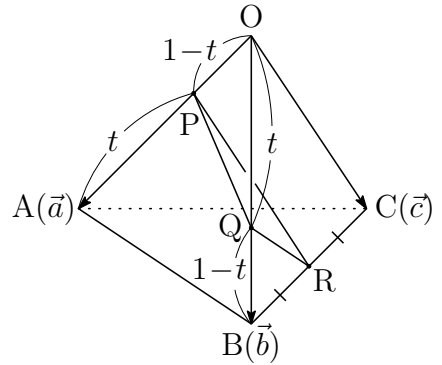
1 (1)  $\vec{OP} = (1-t)\vec{a}$ ,  $\vec{OQ} = t\vec{b}$ ,  $\vec{OR} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

したがって

$$\vec{QP} = \vec{OP} - \vec{OQ} = (1-t)\vec{a} - t\vec{b}$$

$$\vec{QR} = \vec{OR} - \vec{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - t\vec{b}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



(2)  $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$  より,  $\vec{QP} \cdot \vec{QR} = 0$  であるから

$$\{(1-t)\vec{a} - t\vec{b}\} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right\} = 0$$

ゆえに  $(1-t) \left(\frac{1}{2} - t\right) \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{c} \cdot \vec{a} - t \left(\frac{1}{2} - t\right) |\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}t\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

上式に  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1^2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ,  $|\vec{b}| = 1$  を代入すると

$$\frac{1}{2}(1-t) \left(\frac{1}{2} - t\right) + \frac{1}{4}(1-t) - t \left(\frac{1}{2} - t\right) - \frac{1}{4}t = 0$$

整理すると  $6t^2 - 7t + 2 = 0$  ゆえに  $(2t-1)(3t-2) = 0$

$0 < t < 1$  に注意して, これを解くと  $t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

(3) (i)  $t = \frac{1}{2}$  のとき  $\vec{QP} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ ,  $\vec{QR} = \frac{1}{2}\vec{c}$ ,  $|\vec{QR}| = \frac{1}{2}|\vec{c}| = \frac{1}{2}$

ゆえに  $|\vec{QP}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2} = \frac{1}{2}$

よって  $\Delta PQR = \frac{1}{2}|\vec{QP}||\vec{QR}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(ii)  $t = \frac{2}{3}$  のとき  $\vec{QP} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b})$ ,  $\vec{QR} = \frac{1}{6}(-\vec{a} + 3\vec{c})$

ゆえに  $|\vec{QP}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$|\vec{QR}| = \frac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{c} + 9|\vec{c}|^2} = \frac{1}{6}\sqrt{1^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{6}$

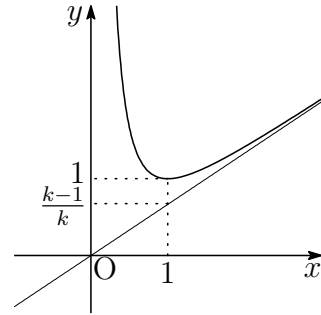
よって  $\Delta PQR = \frac{1}{2}|\vec{QP}||\vec{QR}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{21}}{36}$  ■

2 (1)  $f(x) = \frac{1}{k} \left( (k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}} \right)$  より

$$f'(x) = \frac{1}{k}(k-1) \left( 1 - \frac{1}{x^k} \right) \quad \dots (*)$$

$x > 0$  において、 $f(x)$  の増減は

$x$	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	1	↗



$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( f(x) - \frac{k-1}{k}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{kx^{k-1}} = 0$$

したがって、 $y = f(x)$  の漸近線は  $x = 0, y = \frac{k-1}{k}x$

よって、グラフの概形は右の図のようになる。

(2)  $x_n > 1$  であることを数学的帰納法により示す。

[1]  $x_1 > 1$  であるから、 $n = 1$  のとき成立する。

[2]  $n = j$  のとき、 $x_j > 1$  であると仮定すると、平均値の定理により

$$\frac{x_{j+1} - 1}{x_j - 1} = \frac{f(x_j) - f(1)}{x_j - 1} = f'(c)$$

を満たす  $c$  ( $1 < c < x_j$ ) が存在する。このとき、(\*) より

$$0 < f'(c) = \frac{k-1}{k} \left( 1 - \frac{1}{c^k} \right) < \frac{k-1}{k}$$

したがって  $0 < \frac{x_{j+1} - 1}{x_j - 1} < \frac{k-1}{k} \quad \dots (**)$

よって、 $x_j > 1$  のとき、 $x_{j+1} > 1$  が成立する。

[1] , [2] より、すべての自然数  $n$  について、 $x_n > 1$  が成立する。

(3) (\*\*) より、 $n > 1$  のとき  $0 < \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_{j+1} - 1}{x_j - 1} < \prod_{j=1}^{n-1} \frac{k-1}{k}$

したがって  $0 < \frac{x_n - 1}{x_1 - 1} < \left( \frac{k-1}{k} \right)^{n-1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{k-1}{k} \right)^{n-1} = 0$  であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

解説 (2) ですべての自然数  $n$  について,  $x_n > 1$  を示した (下に有界).

$x > 1$  のとき

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{k} \left( (k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}} \right) - x \\ &= \frac{1}{k} \left( -1 + \frac{1}{x^{k-1}} \right) = \frac{1-x^k}{kx^{k-1}} < 0 \end{aligned}$$

$x_j > 1$  のとき,  $f(x_j) - x_j < 0$  ゆえに  $x_{j+1} < x_j$

$\{x_n\}$  は下に有限な単調減少列であるから,  $\{x_n\}$  は極限值をもつ<sup>2</sup>.

$x > 1$  ( $0 < x < 1$  でもよい) のとき,  $f(x) - 1 > 0$  は, 次式からも示される.

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{1}{k} \left( (k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{kx^{k-1}} \{ (k-1)x^k - kx^{k-1} + 1 \} \\ &= \frac{(x-1)^2}{kx^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} jx^{j-1} \end{aligned}$$

または,  $f''(x) = \frac{k-1}{x^{k+1}}$  より,  $x > 0$  において,  $f''(x) > 0$  であるから

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t) dt = - \int_1^x (x-t)' f'(t) dt \\ &= - \left[ (x-t)f'(t) \right]_1^x + \int_1^x (x-t)f''(t) dt \\ &= (x-1)f'(1) + \int_1^x (x-t)f''(t) dt = \int_1^x (x-t)f''(t) dt \end{aligned}$$

$1 < x$  のとき,  $1 < t < x$  において,  $x-t > 0$  より  $\int_1^x (x-t)f''(t) dt > 0$

$x < 1$  のとき,  $x < t < 1$  において,  $t-x > 0$  より

$$\int_1^x (x-t)f''(t) dt = \int_x^1 (t-x)f''(t) dt > 0$$

したがって,  $0 < x_1 < 1$  であっても,  $x_j > 1$  ( $j = 2, 3, \dots$ ) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

<sup>2</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki\\_2008.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2008.pdf) [8] を参照.

- 3 (1) 2次方程式  $x^2 - ax + b = 0 \cdots (*)$  が  $x = 1$  を解にもつから  $b = a - 1$   
 $1 \leq a \leq 6, 2 \leq b \leq 12$  であるから

$$(a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

$a$  の値に対する確率は  $\frac{1}{6}$ , それぞれの  $b$  の値に対する確率は

$b$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{6} \left( \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} \right) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

- (2) 2次方程式  $(*)$  の解を  $\alpha, \beta$  とすると, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

$(*)$  の整数解を  $\alpha$  とすると, 上の第1式から

$$\beta = a - \alpha$$

上式の右辺は整数であるから,  $\beta$  も整数である.

2整数  $\alpha, \beta$  について,  $\alpha \leq \beta$  とおいても一般性を失わないから

$$2\alpha \leq \alpha + \beta = a \leq 6 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha \leq 3$$

- (3) (i)  $x = 2$  が2次方程式  $(*)$  の解のとき  $b = 2a - 4$

$$(a, b) = (3, 2), (4, 4), (5, 6), (6, 8)$$

- (ii)  $x = 3$  が2次方程式  $(*)$  の解のとき  $b = 3a - 9$

$$(a, b) = (4, 3), (5, 6), (6, 9)$$

(1),(i),(ii) より

$a$	3	4	4,5	6	5	6	6
$b$	2	3	4	5	6	8	9

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{6} \left( \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} \cdot 2 + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} \right) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$



- 4 (1) 実数を係数とする3次方程式が虚数  $\alpha$  を解にもつとき,  $\bar{\alpha}$  もこの方程式の解であるから,  $\beta = \bar{\alpha}$  である. 3次方程式の解と係数の関係から

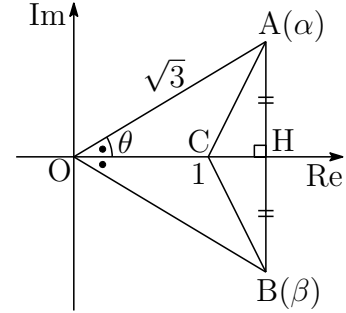
$$\alpha\beta \cdot 1 = |\alpha|^2 = -\frac{-3}{1} \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha| = \sqrt{3}$$

- (2) 右の図において

$$CH = OH - OC = \sqrt{3} \cos \theta - 1$$

$$AH = \sqrt{3} \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S &= 2\Delta ACH = 2 \cdot \frac{1}{2} AH \cdot CH \\ &= \sqrt{3} \sin \theta (\sqrt{3} \cos \theta - 1) \end{aligned}$$



- (3)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  において,  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$  の解を  $\theta = \varphi$  とし,

$$g(\theta) = \frac{S}{\sqrt{3}} = \sin \theta (\sqrt{3} \cos \theta - 1) \quad (0 < \theta < \varphi)$$

とすると

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \cos \theta (\sqrt{3} \cos \theta - 1) + \sin \theta (-\sqrt{3} \sin \theta) \\ &= 2\sqrt{3} \cos^2 \theta - \cos \theta - \sqrt{3} \\ &= (\sqrt{3} \cos \theta + 1)(2 \cos \theta - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{\sqrt{3}}$  より,  $\cos \frac{\pi}{6} > \cos \varphi$ , すなわち,  $\frac{\pi}{6} < \varphi$  に注意して

$\theta$	(0)	...	$\frac{\pi}{6}$	...	( $\varphi$ )
$g'(\theta)$		+	0	-	
$g(\theta)$		↗	極大	↘	

よって,  $S$  を最大にする  $\theta$  は  $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\text{ゆえに} \quad \alpha = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \beta = \bar{\alpha} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

したがって,  $\alpha + \beta = 3$ ,  $\alpha\beta = 3$  より, 2数  $\alpha, \beta$  を解とする2次方程式は

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$\text{よって} \quad f(x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 3) = x^3 - 4x^2 + 6x - 3$$

別解  $\alpha = p + qi$  とおくと ( $1 < p < \sqrt{3}$ ,  $q > 0$ )  $p^2 + q^2 = 3$

$$S = (p-1)q \text{ より } S^2 = (p-1)^2 q^2 = (p-1)^2 (3-p^2)$$

$$h(p) = (p-1)^2 (3-p^2) \text{ とおくと } (1 < p < \sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} h'(p) &= 2(p-1)(3-p^2) + (p-1)^2 \cdot (-2p) \\ &= 2(p-1)\{3-p^2\} - 2p(p-1)^2 \\ &= 2(p-1)\{3-p^2 - p(p-1)\} \\ &= -2(p-1)(2p^2 - p - 3) \\ &= -2(p-1)(2p-3)(p+1) \end{aligned}$$

$p$	(1)	...	$\frac{3}{2}$	...	$(\sqrt{3})$
$h'(p)$		+	0	-	
$h(p)$		↗	極大	↘	

$S$  が極大となるとき,  $p = \frac{3}{2}$  であるから

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + q^2 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

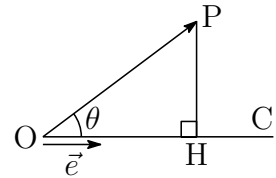
したがって  $\alpha = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\beta = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\theta = \arg \alpha = \frac{\pi}{6}$  ■

- 5 (1)  $\vec{OC}$  と同じ向き of 単位ベクトルを  $\vec{e} = \frac{\vec{OC}}{|\vec{OC}|}$  とおくと

$$\begin{aligned}\vec{OH} &= (\vec{OP} \cdot \vec{e})\vec{e} = \frac{(\vec{OP} \cdot \vec{OC})}{|\vec{OC}|^2} \vec{OC} = \frac{x+y}{2} \vec{OC} \\ &= \frac{x+y}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, 0\right), \\ \vec{HP} &= \vec{OP} - \vec{OH} = (x, y, z) - \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, 0\right) \\ &= \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}, z\right)\end{aligned}$$

補足  $\vec{OC}$  と同じ方向 of 単位ベクトルを  $\vec{e}$  とし,  $\vec{PH}$  と  $\vec{e}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\begin{aligned}\vec{OP} \cdot \vec{e} &= |\vec{OP}| |\vec{e}| \cos \theta = |\vec{OP}| \cos \theta \\ \vec{OH} &= (|\vec{OP}| \cos \theta) \vec{e} \text{ であるから } \vec{OH} = (\vec{OP} \cdot \vec{e}) \vec{e}\end{aligned}$$



- (2) P が L 上 of 点であるとき,  $|\vec{HP}| \leq |\vec{OH}|$  であるから,  $|\vec{HP}|^2 \leq |\vec{OH}|^2$  より

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + z^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

これを整理すると  $z^2 \leq 2xy \dots \textcircled{1}$

また, H は線分 OC 上にあるから,  $\vec{OH} = \frac{x+y}{2} \vec{OC}$  より

$$0 \leq \frac{x+y}{2} \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq x+y \leq 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, 求める条件は  $z^2 \leq 2xy$  かつ  $0 \leq x+y \leq 2$



(3)  $L$  の平面  $x = a$  ( $1 \leq a \leq 2$ ) による断面の領域は

$$z^2 \leq 2ay, 0 \leq a + y \leq 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{z^2}{2a} \leq y \leq 2 - a$$

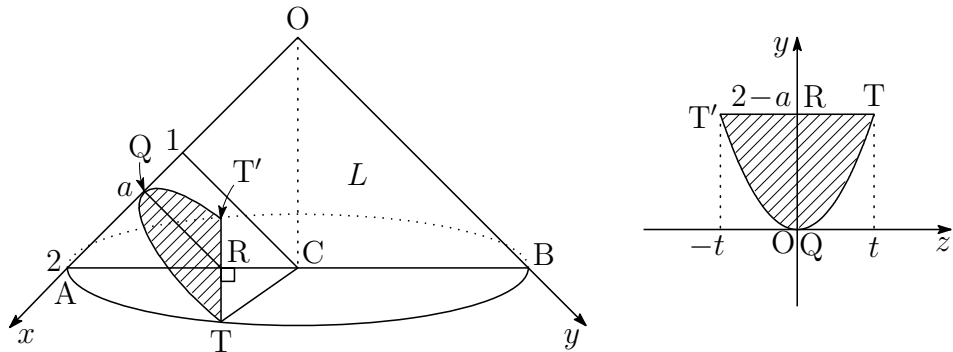
放物線  $y = \frac{z^2}{2a}$  と直線  $y = 2 - a$  の交点の  $z$  座標は

$$2 - a = \frac{z^2}{2a} \quad \text{ゆえに} \quad z = \pm\sqrt{2a(2 - a)}$$

したがって,  $S(a)$  は下の図の斜線部分の面積である.

ここで,  $t = \sqrt{2a(2 - a)}$  とおくと,  $2 - a = \frac{t^2}{2a}$  に注意して

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-t}^t \left( \frac{t^2}{2a} - \frac{z^2}{2a} \right) dz = \frac{1}{2a} \int_{-t}^t (t + z)(t - z) dz \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2t)^3 = \frac{2t^3}{3a} \\ &= \frac{2 \cdot 2a(2 - a) \sqrt{2a(2 - a)}}{3a} = \frac{4}{3} (2 - a) \sqrt{2a(2 - a)} \end{aligned}$$



別解 平面  $x = a$  と  $x$  軸, 線分  $AB$  との交点をそれぞれ  $Q, R$  とすると

$$QR = QA = 2 - a$$

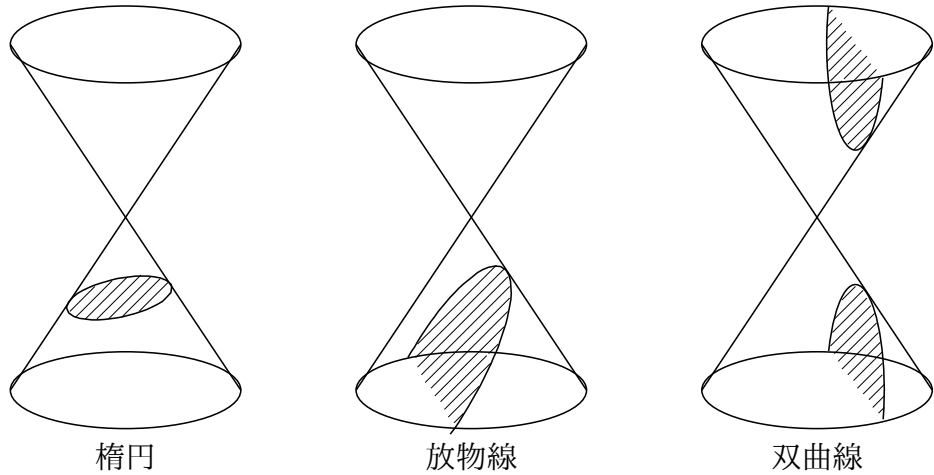
上の図において,  $CR = \sqrt{2}(a - 1)$ ,  $CT = CA = \sqrt{2}$  であるから

$$RT = \sqrt{CT^2 - CR^2} = \sqrt{2 - 2(a - 1)^2} = \sqrt{2a(2 - a)}$$

円錐の母線に平行な平面  $x = a$  による切り口は放物線であるから

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{2}{3} QR \cdot TT' = \frac{2}{3} QR \cdot 2RT \\ &= \frac{2}{3} (2 - a) \cdot 2 \sqrt{2a(2 - a)} = \frac{4}{3} (2 - a) \sqrt{2a(2 - a)} \end{aligned}$$

補足 平面による円錐面の切り口は2次曲線である．そのため，2次曲線を円錐曲線ともいう．とくに，放物線となるのは，平面が母線と平行な場合である．また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合である．とくに，平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は1点に退化する．



(4) (3)の結果から，求める立体の体積を  $V$  とすると

$$V = \int_1^2 S(a) da = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_1^2 (2-a)\sqrt{1-(a-1)^2} da$$

$$u = a - 1 \text{ とおくと } \frac{du}{da} = 1 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline a & 1 \rightarrow 2 \\ \hline u & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2-a)\sqrt{1-(a-1)^2} da &= \int_0^1 (1-u)\sqrt{1-u^2} du \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du - \int_0^1 u\sqrt{1-u^2} du \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[ \frac{1}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって  $V = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) = \left( \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9} \right) \sqrt{2}$  ■

## 6.5 2019年(120分)

1 以下の間に答えよ.

(1) 関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

の  $x > 0$  における最大値とそのときの  $x$  の値を求めよ.

(2)  $a$  を  $a \neq 1$  をみたす正の実数とする. 曲線  $y = e^x$  と曲線  $y = x^a$  ( $x > 0$ ) が共有点  $P$  をもち, さらに点  $P$  において共通の接線をもつとする. 点  $P$  の  $x$  座標を  $t$  とするとき,  $a$  と  $t$  の値を求めよ.

(3)  $a$  と  $t$  を (2) で求めた実数とする.  $x$  を  $x \neq t$  をみたす正の実数とすると,  $e^x$  と  $x^a$  の大小を判定せよ.

2  $|\overrightarrow{AB}| = 2$  をみたす  $\triangle PAB$  を考え, 辺  $AB$  の中点を  $M$ ,  $\triangle PAB$  の重心を  $G$  とする. 以下の間に答えよ.

(1)  $|\overrightarrow{PM}|^2$  を内積  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  を用いて表せ.

(2)  $\angle AGB = \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  の値を求めよ.

(3) 点  $A$  と点  $B$  を固定し,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}$  をみたすように点  $P$  を動かすとき,  $\angle ABG$  の最大値を求めよ. ただし,  $0 < \angle ABG < \pi$  とする.

3  $n$  を 2 以上の整数とする. 2 個のさいころを同時に投げるとき, 出た目の数の積を  $n$  で割った余りが 1 となる確率を  $P_n$  とする. 以下の間に答えよ.

(1)  $P_2, P_3, P_4$  を求めよ.

(2)  $n \geq 36$  のとき,  $P_n$  を求めよ.

(3)  $P_n = \frac{1}{18}$  となる  $n$  をすべて求めよ.

4 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を  $\{a_n\}$  とする.

$$1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4, \dots$$

すなわち,  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4$  で, 4 以上の自然数  $n$  に対し,  $a_n = a_{n-3}$  とする. この数列の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1)  $S_n$  を求めよ.
- (2)  $S_n = 2019$  となる自然数  $n$  は存在しないことを示せ.
- (3) どのような自然数  $k$  に対しても,  $S_n = k^2$  となる自然数  $n$  が存在することを示せ.

5 媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = (1 + \cos t) \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を  $C$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1)  $\frac{dy}{dx}$  および  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を  $t$  の関数として表せ.
- (2)  $C$  の凹凸を調べ,  $C$  の概形を描け.
- (3)  $C$  で囲まれる領域の面積  $S$  を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ を微分すると } f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$x$	(0)	...	$e$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

よって  $x = e$  のとき 最大値  $\frac{1}{e}$

$$(2) \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = x^a \text{ とおくと } g'(x) = e^x, \quad h'(x) = ax^{a-1}$$

条件より,  $g(t) = h(t), \quad g'(t) = h'(t)$  であるから

$$(*) \quad \begin{cases} e^t = t^a \\ e^t = at^{a-1} \end{cases}$$

上の2式から,  $e^t$  を消去すると

$$t^a = at^{a-1} \quad \text{ゆえに} \quad (t-a)t^{a-1} = 0$$

$t > 0$  より,  $t = a$  であるから, これを (\*) の第1式に代入して

$$e^a = a^a \quad \text{ゆえに} \quad a = e \quad \text{よって} \quad a = t = e$$

$$(3) \quad \text{条件より, } e^x \ (x \neq e) \text{ と } x^e \text{ の大小を比較する. (1) の結果から}$$

$$\frac{1}{e} > \frac{\log x}{x} \quad \text{ゆえに} \quad x > e \log x \quad \text{よって} \quad e^x > x^e$$



2 (1) 点 M は辺 AB の中点であるから、 $\vec{PM} = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PB})$  より

$$|\vec{PM}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{PA} + \vec{PB}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2) + \frac{1}{2}\vec{PA} \cdot \vec{PB} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{PB} - \vec{PA}| = 2 \text{ より}$$

$$|\vec{PB}|^2 - 2\vec{PA} \cdot \vec{PB} + |\vec{PA}|^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 = 4 + 2\vec{PA} \cdot \vec{PB}$$

上の結果を ① に代入すると

$$|\vec{PM}|^2 = \frac{1}{4}(4 + 2\vec{PA} \cdot \vec{PB}) + \frac{1}{2}\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PA} \cdot \vec{PB} + 1$$

(2) 点 G は  $\triangle PAB$  の重心であるから  $\vec{PM} = 3\vec{GM}$   $\dots \textcircled{2}$

$$\text{また, } \vec{GM} = \frac{1}{2}(\vec{GA} + \vec{GB}) \text{ より } \vec{PM} = \frac{3}{2}(\vec{GA} + \vec{GB}) \quad \dots \textcircled{3}$$

$\angle AGB = \frac{\pi}{2}$  であるから

$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} = 0 \quad \text{および} \quad |\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 = |\vec{AB}|^2 = 2^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{ より } |\vec{PM}|^2 &= \frac{9}{4}|\vec{GA} + \vec{GB}|^2 = \frac{9}{4}(|\vec{GA}|^2 + 2\vec{GA} \cdot \vec{GB} + |\vec{GB}|^2) \\ &= \frac{9}{4}(|\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2) = \frac{9}{4} \cdot 4 = 9 \end{aligned}$$

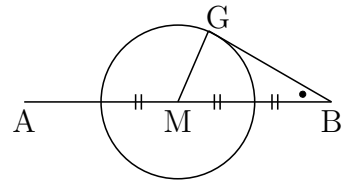
これを (1) の結果に代入して  $9 = \vec{PA} \cdot \vec{PB} + 1$  よって  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 8$

(3)  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \frac{5}{4}$  を (1) の結果に代入すると

$$|\vec{PM}|^2 = 1 + \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{PM}| = \frac{3}{2}$$

これに ② を代入することにより  $|\vec{GM}| = |\vec{MG}| = \frac{1}{2}$

したがって、G は M を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の円周上にある。B からこの円に引いた接線と辺 AB のなす角が求める最大値であるから、 $MB = 1$  より



$$\angle ABG = \frac{\pi}{6}$$



- 3** (1) 2個のさいころの出た目をそれぞれ  $a, b$  とし,  $X = ab - 1$  とおくと,  $X$  は右の表のようになる.

$$X = ab - 1$$

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	7	9	11
3	2	5	8	11	14	17
4	3	7	11	15	19	23
5	4	9	14	19	24	29
6	5	11	17	23	29	35

$$X \equiv 0 \pmod{n} \quad \dots (*)$$

を満たす  $X$  の個数について

$n = 2$  のとき, 次の 9 個

$$0, 2, 2, 4, 4, 8, 14, 14, 24$$

$n = 3$  のとき, 次の 8 個

$$0, 3, 3, 3, 9, 9, 15, 24$$

$n = 4$  のとき, 次の 5 個

$$0, 4, 4, 8, 24$$

$$\text{よって} \quad P_2 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad P_3 = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}, \quad P_4 = \frac{5}{36}$$

- (2)  $n \geq 36$  のとき, (\*) を満たす  $X$  の個数は 1 個

$$\text{よって, } n \geq 36 \text{ のとき} \quad P_n = \frac{1}{36}$$

- (3)  $P_n = \frac{1}{18} = \frac{2}{36}$  であるから, (\*) を満たす  $X$  が 2 個, すなわち, 0 以外に 1 個だけ, (\*) を満たす  $n$  を求めればよい.  $a \neq b$  のときの次の  $X$  について

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 17, 19, 23, 29\} \quad \dots \textcircled{1}$$

これらは, (\*) を満たす  $X$  が 2 個以上存在するので, これらは含まない.

また, (2) の結果から,  $n \geq 36$  を含まない.

以上を除く,  $a = b$  のとき

$$8 = 2^3, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 24 = 2^3 \cdot 3, \quad 35 = 5 \cdot 7$$

これらの 4 数の約数で他の数の約数に含まれないこと, さらに ① に含まれないことに注意すると, 求める  $n$  は

$$2 \cdot 3, \quad 2^2 \cdot 3, \quad 3 \cdot 5, \quad 2^3 \cdot 3, \quad 5 \cdot 7 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{6, 12, 15, 24, 35}$$



4 (1) (i)  $n \equiv 0 \pmod{3}$  のとき

$$S_n = S_3 + (1 + 3 + 4) \frac{n-3}{3} = 8 + \frac{8}{3}(n-3) = \frac{8n}{3}$$

(ii)  $n \equiv 1 \pmod{3}$  のとき

$$S_n = S_1 + (3 + 4 + 1) \frac{n-1}{3} = 1 + \frac{8}{3}(n-1) = \frac{8n-5}{3}$$

(iii)  $n \equiv 2 \pmod{3}$  のとき

$$S_n = S_2 + (4 + 1 + 3) \frac{n-2}{3} = 4 + \frac{8}{3}(n-2) = \frac{8n-4}{3}$$

$$\text{よって } S_n = \begin{cases} \frac{8n}{3} & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ \frac{8n-5}{3} & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ \frac{8n-4}{3} & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

(2)  $n = 3m + r$  とおくと ( $r = 0, 1, 2$ )

$$r = 0 \text{ のとき } S_{3m} = \frac{8 \cdot 3m}{3} = 8m$$

$$r = 1 \text{ のとき } S_{3m+1} = \frac{8(3m+1) - 5}{3} = 8m + 1$$

$$r = 2 \text{ のとき } S_{3m+2} = \frac{8(3m+2) - 4}{3} = 8m + 4$$

2019  $\equiv 3 \pmod{8}$  であるから,  $S_n = 2019$  となる自然数  $n$  は存在しない.

(3) i)  $k \equiv 0, \pm 4 \pmod{8}$  のとき  $k^2 \equiv 0 \pmod{8}$

ii)  $k \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod{8}$  のとき  $k^2 \equiv 1 \pmod{8}$

iii)  $k \equiv \pm 2 \pmod{8}$  のとき  $k^2 \equiv 4 \pmod{8}$

i)~iii) および (2) の結果から, どのような自然数  $k$  に対しても,

$$S_n = k^2$$

となる自然数  $n$  が存在する. ■



5 (1)  $x = \sin t, y = (1 + \cos t) \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) より

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin^2 t + (1 + \cos t) \cos t = 2 \cos^2 t + \cos t - 1$$

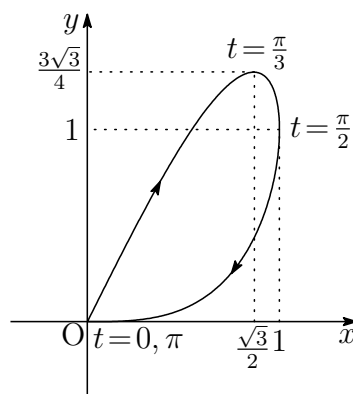
したがって

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \cos^2 t + \cos t - 1}{\cos t} = 2 \cos t + 1 - \frac{1}{\cos t} \\ &= \frac{(\cos t + 1)(2 \cos t - 1)}{\cos t} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( 2 \cos t + 1 - \frac{1}{\cos t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( 2 \cos t + 1 - \frac{1}{\cos t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left( -2 \sin t - \frac{\sin t}{\cos^2 t} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= -\frac{\sin t(2 \cos^2 t + 1)}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cos t} = -\frac{\sin t(2 \cos^2 t + 1)}{\cos^3 t} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  のとき  $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$  より 上に凸

$\frac{\pi}{2} < t < \pi$  のとき  $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$  より 下に凸

$t$	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\pi$
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	0	-	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	-	-	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
$(x, y)$	(0, 0)		$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$		(1, 1)		(0, 0)



(3) 曲線  $C$  で囲まれる領域の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\sin 0}^{\sin \frac{\pi}{2}} y \, dx - \int_{\sin \pi}^{\sin \frac{\pi}{2}} y \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\pi} y \frac{dx}{dt} dt \\
 &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \sin t \cos t \, dt \\
 &= - \int_0^{\pi} \{ \cos t + (\cos t)^2 \} (\cos t)' dt \\
 &= - \left[ \frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

別解  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  のとき  $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$   
 $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$  のとき  $\cos t = -\sqrt{1 - \sin^2 t}$

$x = \sin t, y = (1 + \cos t) \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$  より

$$y = (1 \pm \sqrt{1 - x^2})x$$

したがって、求める面積  $S$  は、2曲線

$$y = (1 + \sqrt{1 - x^2})x, \quad y = (1 - \sqrt{1 - x^2})x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

で囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 (1 + \sqrt{1 - x^2})x \, dx - \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2})x \, dx \\
 &= \int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2} \, dx = \left[ -\frac{2}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$





## 第 7 章 広島大学

### 出題分野 (2010-2019)

◀	広島大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式										5
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	2							2	1	
III	式と曲線										
	複素数平面							3		2	4
	関数										
	極限						2		1		
	微分法とその応用				4		3			5	5
	積分法									3	
A	積分法の応用	3		3	5	2	1	2	4		3
	場合の数と確率	4		5			5	4	3		2
	整数の性質	5	2					5	5		
B	図形の性質		3								5
	平面上のベクトル		4	4	3						
	空間のベクトル					3	3	1			
	数列		5	2	2	4				4	1
C	確率分布と統計					5					
	行列 (旧課程)	1	1	1	1	1	数字は問題番号				

## 7.1 2015年(150分)

1 座標平面上の点  $P(1, 1)$  を中心とし、原点  $O$  を通る円を  $C_1$  とする。  $k$  を正の定数として、曲線  $y = \frac{k}{x}$  ( $x > 0$ ) を  $C_2$  とする。  $C_1$  と  $C_2$  は2点で交わり、その交点を  $Q, R$  とするとき、直線  $PQ$  は  $x$  軸に平行であるとする。点  $Q$  の  $x$  座標を  $q$  とし、点  $R$  の  $x$  座標を  $r$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $k, q, r$  の値を求めよ。
- (2) 曲線  $C_2$  と線分  $OQ, OR$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。
- (3)  $x = 1 + \sqrt{2} \sin \theta$  とおくことにより、定積分  $\int_r^q \sqrt{2 - (x-1)^2} dx$  の値を求めよ。
- (4) 円  $C_1$  の原点  $O$  を含まない弧  $QR$  と曲線  $C_2$  で囲まれた図形を、 $x$  軸のまわりに1回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

2 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。ただし、 $p_n, q_n$  は

$$p_1^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n^2 - 4q_n > 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

を満たす実数とする。  $C_n$  と  $x$  軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを  $l_n$  とする。また、  $C_n$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S_n$  は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left( \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \right)^3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $C_n$  の頂点の  $y$  座標を  $l_n$  を用いて表せ。
- (2) 数列  $\{l_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3)  $p_n = n\sqrt{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) であるとき、  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left( -\frac{2q_n}{n^2} \right)$  を求めよ。ただし、  $\log x$  は  $x$  の自然対数である。

**3** 座標空間内に5点

$$O(0, 0, 0), A\left(0, 0, \frac{3}{4}\right), B\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), C(s, t, 0), D(0, u, 0)$$

がある。ただし、 $s, t, u$ は実数で、 $s > 0, t > 0, s + t = 1$ を満たすとする。3点A, B, Cの定める平面が $y$ 軸と点Dで交わっているとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線ABと $x$ 軸との交点の $x$ 座標を求めよ。
- (2)  $u$ を $t$ を用いて表せ。また、 $0 < u < 1$ であることを示せ。
- (3) 点 $(0, 1, 0)$ をEとする。点Dが線分OEを12:1に内分するとき、 $t$ の値を求めよ。

**4**  $a, b, p$ は $a > 0, b > 0, p < 0$ を満たす実数とする。座標平面上の2曲線

$$C_1: y = e^x, \quad C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える。ただし、 $e$ は自然対数の底である。 $C_1$ と $C_2$ が点 $(p, e^p)$ を共有し、その点における $C_1$ の接線と $C_2$ の接線が一致するとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $p$ を $a$ を用いて表せ。
- (2)  $\lim_{a \rightarrow \infty} (p + a)$ を求めよ。
- (3)  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a}$ を求めよ。

5  $m, n$  を自然数とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $m \geq 2, n \geq 2$  とする. 異なる  $m$  種類の文字から重複を許して  $n$  個を選び, 1列に並べる. このとき, ちょうど2種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ.
- (2)  $n \geq 3$  とする. 3種類の文字  $a, b, c$  から重複を許して  $n$  個を選び, 1列に並べる. このとき  $a, b, c$  すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ.
- (3)  $n \geq 3$  とする.  $n$  人を最大3組までグループ分けする. このときできたグループ数が2である確率  $p_n$  を求めよ. ただし, どのグループ分けも同様に確からしいとする.

たとえば,  $n = 3$  のとき, A, B, C の3人のグループ分けする方法は

$$\{(A, B, C)\}, \{(A, B), (C)\}, \{(A, C), (B)\}, \\ \{(B, C), (A)\}, \{(A), (B), (C)\}$$

の5通りであるので,  $p_3 = \frac{3}{5}$  である.

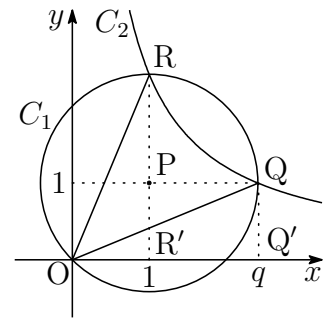
- (4) (3) の確率  $p_n$  が  $\frac{1}{3}$  以下となるような  $n$  の範囲を求めよ.

解答例

- 1** (1)  $OP = \sqrt{2}$  より,  $C_1$  は中心  $(1, 1)$ , 半径  $\sqrt{2}$  の円.  
 $k > 0$  より,  $C_1$  と  $C_2$  の交点  $Q, R$  は第1象限あるから,  $PQ = \sqrt{2}$  より

$$q - 1 = \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad q = 1 + \sqrt{2}$$

$C_1, C_2$  は直線  $y = x$  に関して対称であるから,  
 $R$  は直線  $y = x$  に関して  $Q(1 + \sqrt{2}, 1)$  と対称.



したがって  $R(1, 1 + \sqrt{2})$  よって  $r = 1$

$R$  は  $C_2 : y = \frac{k}{x}$  上の点であるから  $1 + \sqrt{2} = \frac{k}{1}$  よって  $k = 1 + \sqrt{2}$

- (2)  $R'(1, 0), Q'(1 + \sqrt{2}, 0)$  とおく. 求める面積を  $S_1$  とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \triangle ORR' + \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1 + \sqrt{2}}{x} dx - \triangle OQQ' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) \left[ \log x \right]_1^{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2}) \cdot 1 \\ &= (1 + \sqrt{2}) \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

- (3)  $x = 1 + \sqrt{2} \sin \theta$  より  $\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2} \cos \theta$
- |          |                               |
|----------|-------------------------------|
| $x$      | $1 \rightarrow 1 + \sqrt{2}$  |
| $\theta$ | $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ |

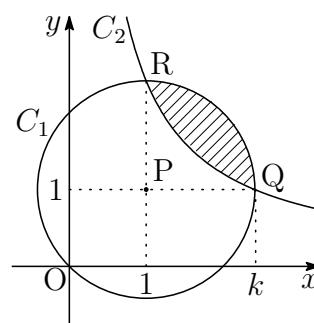
したがって, 求める定積分は

$$\begin{aligned} \int_1^{1+\sqrt{2}} \sqrt{2 - (x - 1)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos \theta \cdot \sqrt{2} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



(4)  $f(x) = \sqrt{2 - (x-1)^2}$  とおくと,  $q = k$  により

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_1^k \{f(x) + 1\}^2 dx - \int_1^k \left(\frac{k}{x}\right)^2 dx \\ &= \int_1^k (\{f(x)\}^2 + 1) dx + 2 \int_1^k f(x) dx \\ &\quad - \int_1^k \frac{k^2}{x^2} dx \quad \dots (*) \end{aligned}$$



このとき, (3) の結果を利用して

$$\begin{aligned} \int_1^k (\{f(x)\}^2 + 1) dx &= \int_1^k \{3 - (x-1)^2\} dx \\ &= \left[ 3x - \frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^k \\ &= 3(k-1) - \frac{1}{3}(k-1)^3 \\ &= 3\sqrt{2} - \frac{1}{3}(\sqrt{2})^3 = \frac{7\sqrt{2}}{3}, \end{aligned}$$

$$2 \int_1^k f(x) dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi,$$

$$\int_1^k \frac{k^2}{x^2} dx = \left[ -\frac{k^2}{x} \right]_1^k = k(k-1) = 2 + \sqrt{2}$$

これらを (\*) に代入して, 整理すると

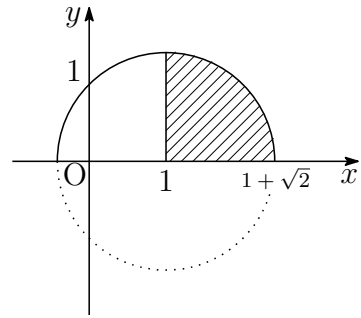
$$\frac{V}{\pi} = \pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 \quad \text{よって} \quad V = \pi \left( \pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 \right)$$

別解 (3)  $y = \sqrt{2 - (x - 1)^2}$  とおくと

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2$$

したがって、求める定積分の値は、右の図の斜線部分の面積であるから

$$S = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$$



補足 上の図の斜線部分を  $x$  軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi (\sqrt{2})^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$

図の斜線部分は、 $x \geq 0, y \geq 0$  にあるから、上の図形の重心の  $y$  座標  $h$  は、パップス・ギュルダンの定理 ( $V = 2\pi hS$ ) により<sup>1</sup>

$$h = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}}{2\pi \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

図形の対称性により、重心の  $x$  座標  $d$  は

$$d = 1 + h = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

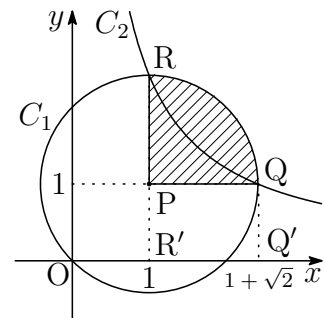
したがって、斜線部分を  $y$  軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積  $V_0$  は

$$V_0 = 2\pi dS = 2\pi \left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \left(\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

右の図の斜線部分を  $x$  軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積も  $V_0$  に等しい。

また、長方形  $PQQ'R'$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させた回転体は、半径 1、高さ  $\sqrt{2}$  の円柱であるから、 $f(x) = \sqrt{2 - (x - 1)^2}$  について、次が成り立つ。

$$\pi \int_1^{1+\sqrt{2}} \{f(x) + 1\}^2 dx = V_0 + \sqrt{2}\pi$$



パップス・ギュルダンの定理は、高校数学の範囲外である。入試では使用できないが、便利な検算法である。 ■

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2012.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf) (p.6 を参照)

- 2 (1) 2次方程式  $x^2 - p_n x + q_n = 0$  の解は

$$x = \frac{p_n \pm \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}$$

これが放物線  $y = x^2 - p_n x + q_n$  と  $x$  軸との共有点の  $x$  座標であるから、これらの差をとることにより

$$\ell_n = \sqrt{p_n^2 - 4q_n} \quad \cdots (*)$$

$y = x^2 - p_n x + q_n$  を変形すると

$$y = \left(x - \frac{p_n}{2}\right)^2 - \frac{p_n^2 - 4q_n}{4}$$

よって、頂点の  $y$  座標は  $-\frac{p_n^2 - 4q_n}{4} = -\frac{\ell_n^2}{4}$

$$(2) S_n = \frac{1}{6}\ell_n^3 \text{ であるから } \frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\right)^3$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \text{ より } \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$\text{したがって } \frac{\ell_{n+1}}{(n+2)\sqrt{n+1}} = \frac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$\text{ゆえに } \frac{\ell_n}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{\ell_1}{2} = \frac{\sqrt{p_1^2 - 4q_1}}{2} = 1 \text{ よって } \ell_n = (n+1)\sqrt{n}$$

$$(3) (*) \text{ を平方すると } \ell_n^2 = p_n^2 - 4q_n$$

これに  $p_n = n\sqrt{n}$  および (2) の結果を代入すると

$$(n+1)^2 n = n^3 - 4q_n \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{2q_n}{n^2} = 1 + \frac{1}{2n}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(-\frac{2q_n}{n^2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■



4 (1) 点  $(p, e^p)$  は  $C_2$  上の点であるから

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{e^{2p}}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$C_2$  上の点  $(p, e^p)$  における接線の方程式は

$$\frac{px}{a^2} + \frac{e^p y}{b^2} = 1$$

すなわち 
$$y = -\frac{b^2 p}{a^2 e^p} x + \frac{b^2}{e^p}$$

$y = e^x$  を微分すると  $y' = e^x$

この直線の傾きが  $C_1$  上の点  $(p, e^p)$  における接線の傾きに等しいから

$$-\frac{b^2 p}{a^2 e^p} = e^p \quad \text{ゆえに} \quad \frac{e^{2p}}{b^2} = -\frac{p}{a^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

② を ① に代入すると

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{p}{a^2} = 1 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - p - a^2 = 0$$

$p < 0$  に注意してこれを解くと 
$$p = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} p + a &= \frac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2} + a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 + 4a^2} - 2a}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2} + 2a} \right) \end{aligned}$$

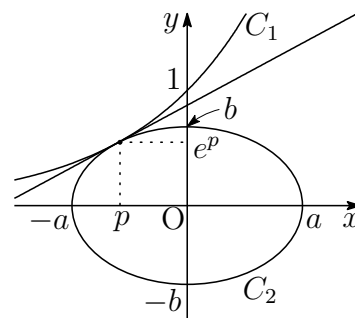
よって 
$$\lim_{a \rightarrow \infty} (p + a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2} + 2a} \right) = \frac{1}{2}$$

(3) ② より,  $b^2 = -\frac{a^2 e^{2p}}{p}$  であるから

$$\frac{b^2 e^{2a}}{a} = -\frac{a^2 e^{2p}}{p} \cdot \frac{e^{2a}}{a} = -\frac{a e^{2p+2a}}{p} = \frac{a}{a - (p + a)} e^{2(p+a)}$$

したがって, (2) の結果を利用して

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{a - (p + a)} e^{2(p+a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}(p + a)} e^{2(p+a)} = e$$



- 5 (1)  $m$  種類の文字から2種類の文字を選らぶ場合の総数は

$${}_m C_2 = \frac{m(m-1)}{2} \quad (\text{通り})$$

特定の2種類の文字列, 例えば,  $a, b$  を1列に並べる場合の総数は  $2^n$  通りある. この中で  $a$  だけが1列に並ぶ場合が1通りと,  $b$  だけが1列に並ぶ場合が1通りある. したがって, 両方の文字が並ぶ場合の総数は

$$2^n - 2 \quad (\text{通り}) \quad \dots \textcircled{1}$$

よって, 求める場合の数は

$$\frac{m(m-1)}{2} \times (2^n - 2) = m(m-1)(2^{n-1} - 1) \quad (\text{通り})$$

- (2) 重複を許して,  $a, b, c$  の3種類の文字を1列に並べる場合の総数は  $3^n$  通りある. この内, 1種類の文字だけからなるものが3通りあり, 2種類の文字からなる場合の数は, (1)の結果に  $m=3$  を代入して  $6(2^{n-1} - 1)$  通りある. したがって,  $a, b, c$  すべての文字を含む文字列の総数は

$$3^n - 3 - 6(2^{n-1} - 1) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \quad (\text{通り})$$

- (3) (i)  $n$  人を1グループとする場合の総数は 1通り  
(ii)  $n$  人を  $a, b$  の2グループに分ける場合の総数は, ①の結果から

$$2^n - 2 \quad (\text{通り})$$

このとき,  $a, b$  のグループの区別をなくすと

$$\frac{2^n - 2}{2!} = 2^{n-1} - 1 \quad (\text{通り})$$

- (iii)  $n$  人を  $a, b, c$  の3グループに分ける場合の総数は, (2)の結果から

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \quad (\text{通り})$$

このとき,  $a, b, c$  のグループの区別をなくすと

$$\frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$$

- (i)~(iii) から, 求める確率  $p_n$  は

$$p_n = \frac{2^{n-1} - 1}{1 + (2^{n-1} - 1) + \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1}$$

(4)  $p_n \leq \frac{1}{3}$  のとき ( $n \geq 3$ ), (3) の結果から

$$\frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1} \leq \frac{1}{3} \quad \text{整理すると} \quad 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7 \geq 0 \quad \cdots (*)$$

$f(n) = 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7$  とおくと

$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 2^3 + 7 = -8$$

$$f(4) = 3^3 - 3 \cdot 2^4 + 7 = -14$$

$$f(5) = 3^4 - 3 \cdot 2^5 + 7 = -8$$

$$f(6) = 3^5 - 3 \cdot 2^6 + 7 = 58$$

ここで

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= (3^n - 3 \cdot 2^{n+1} + 7) - (3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7) \\ &= 2 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n = 2^n \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3 \right\} \end{aligned}$$

したがって  $f(3) > f(4) < f(5) < f(6) < \cdots$

よって, (\*) を満たす  $n$  の範囲は  $n \geq 6$

## 解説

異なる  $m$  種類の文字から重複を許して  $n$  個を選び, 1列に並べるとき,  $k$  種類の文字を含む文字列の総数を  ${}_n Q_k$  とすると ( $1 \leq k \leq m$ ), 次が成立する.

$${}_n Q_1 = 1$$

$${}_n Q_2 = 2^n - {}_2 C_1 \cdot {}_n Q_1$$

$${}_n Q_3 = 3^n - {}_3 C_1 \cdot {}_n Q_1 - {}_3 C_2 \cdot {}_n Q_2$$

$${}_n Q_4 = 4^n - {}_4 C_1 \cdot {}_n Q_1 - {}_4 C_2 \cdot {}_n Q_2 - {}_4 C_3 \cdot {}_n Q_3$$

$${}_n Q_5 = 5^n - {}_5 C_1 \cdot {}_n Q_1 - {}_5 C_2 \cdot {}_n Q_2 - {}_5 C_3 \cdot {}_n Q_3 - {}_5 C_4 \cdot {}_n Q_4$$

⋮

$${}_n Q_k = k^n - \sum_{j=1}^{k-1} {}_k C_j \cdot {}_n Q_j$$

${}_n Q_1 = 1$  より,  ${}_n Q_2 = 2^n - 2$  となり, これらを用いて (本題 (2) の計算)

$${}_n Q_3 = 3^n - {}_3 C_1 \cdot 1 - {}_3 C_2 \cdot (2^n - 2) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

例1  $n$ 個並べたときに丁度3種類の文字がそろふ確率を  $P_3(n)$  とすると

$$P_3(n) = \frac{3 \times {}_{n-1}Q_2}{3^n} = \frac{3(2^{n-1} - 2)}{3^n} = \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}$$

また, 文字が3種類そろふまで並べる文字数の期待値を  $E_3$  とすると

$$\begin{aligned} E_3 &= \sum_{n=3}^{\infty} nP_3(n) = \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 - 2 \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - 1 \right\} = \frac{11}{2} \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

補足  $|x| < 1$  のとき,  $1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  を微分すると

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

この計算は, 次の公式<sup>2</sup> を利用すると簡単に求めることができる.

#### Coupon collector's problem

$m$ 種類の文字すべてがそろふまで並べる文字数の期待値  $E_m$  は

$$E_m = m \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

実際  $E_3 = 3 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{2}$

例2 サイコロを投げて, すべての目がそろふまで投げる回数の期待値(期待回数)は

$$E_6 = 6 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{147}{10}$$

■

<sup>2</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima\\_2012.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf) (p.12 に証明)



## 7.2 2016年(150分)

1 座標空間に4点

$$O(0, 0, 0), A(s, s, s), B(-1, 1, 1), C(0, 0, 1)$$

がある。ただし、 $s > 0$ とする。 $t, u, v$ を実数とし、

$$\vec{d} = \vec{OB} - t\vec{OA}, \quad \vec{e} = \vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB}$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$ のとき、 $t$ を $s$ を用いて表せ。
- (2)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$ ,  $\vec{OA} \perp \vec{e}$ ,  $\vec{d} \perp \vec{e}$ のとき、 $u, v$ を $s$ を用いて表せ。
- (3) (2)のとき、2点D, Eを

$$\vec{OD} = \vec{d}, \quad \vec{OE} = \vec{e}$$

となる点とする。四面体OADEの体積が2であるとき、 $s$ の値を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1)  $a$ を正の定数とする。関数  $f(x) = \frac{e^x - ae^{-x}}{2}$  の逆関数  $f^{-1}(x)$  を求めよ。
- (2) (1)で求めた  $f^{-1}(x)$  の導関数を求めよ。
- (3)  $c$ を定数とする。 $x$ 軸,  $y$ 軸, 直線  $x = c$  および曲線  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + c^2}}$  で囲まれる部分の面積を求めよ。

**3** 複素数平面上を、点  $P$  が次のように移動する.

1. 時刻 0 では、 $P$  は原点にいる. 時刻 1 まで、 $P$  は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する. 移動後の  $P$  の位置を  $Q_1(z_1)$  とすると、 $z_1 = 1$  である.
2. 時刻 1 に  $P$  は  $Q_1(z_1)$  において進行方向が  $\frac{\pi}{4}$  回転し、時刻 2 までその方向に速さ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  で移動する. 移動後の  $P$  の位置を  $Q_2(z_2)$  とすると、 $z_2 = \frac{3+i}{2}$  である.
3. 以下同様に、時刻  $n$  に  $P$  は  $Q_n(z_n)$  において進行方向を  $\frac{\pi}{4}$  回転し、時刻  $n+1$  までその方向に速さ  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$  で移動する. 移動後の  $P$  の位置を  $Q_{n+1}(z_{n+1})$  とする. ただし  $n$  は自然数である.

$\alpha = \frac{1+i}{2}$  として、次の問いに答えよ.

- (1)  $z_3, z_4$  を求めよ.
- (2)  $z_n$  を  $\alpha, n$  を用いて表せ.
- (3)  $P$  が  $Q_1(z_1), Q_2(z_2), \dots$  と移動するとき、 $P$  はある点  $Q(w)$  に限りなく近づく.  $w$  を求めよ.
- (4)  $z_n$  の実部が (3) で求めた  $w$  の実部より大きくなるようなすべての  $n$  を求めよ.

**4**  $xy$  平面上に原点を出発点として動く点  $Q$  があり、次の試行を行う.

1 枚の硬貨を投げ、表が出たら  $Q$  は  $x$  軸の正の方向に 1、裏が出たら  $y$  軸の正の方向に 1 動く. ただし、点  $(3, 1)$  に到達したら  $Q$  は原点に戻る.

この試行を  $n$  回繰り返した後の  $Q$  の座標を  $(x_n, y_n)$  とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $(x_4, y_4) = (0, 0)$  となる確率を求めよ.
- (2)  $(x_8, y_8) = (5, 3)$  となる確率を求めよ.
- (3)  $x_8 + y_8 \leq 4$  となる確率を求めよ.
- (4)  $x_{4n} + y_{4n} \leq 4k$  となる確率を  $n$  と  $k$  で表せ. ここで  $k$  は  $n$  以下の自然数とする.

## 5 数列

$$x_n = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を考える. この数列は  $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$  であるが, 各項の下1桁をみると,  $1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \dots$  となっており, 2から循環が始まり循環の周期は4である. 次の問いに答えよ.

- (1) 数列  $\{x_n\}$  の各項の下2桁は, あるところから循環する. 循環が始まるところと, 循環の周期を求めよ. ここで, 1桁の数に対しては0を補って下2桁とみなすことにする. たとえば, 2の下2桁は02とする.
- (2) 4の倍数で, 25で割って1余る2桁の自然数  $A$  を求めよ.
- (3) 8の倍数で, 125で割って1余る3桁の自然数  $B$  を求めよ.
- (4) 数列  $\{x_n\}$  の各項の下3桁は, あるところから循環する. 循環が始まるところと, 循環の周期を求めよ. ここで,  $2^m$  を125で割って1余るような最小の自然数  $m$  が100であることを用いてもよい.

解答例

1 (1)  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(s, s, s)$ ,  $B(-1, 1, 1)$ ,  $C(0, 0, 1)$  より

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= s(1, 1, 1), \\ \vec{d} &= \vec{OB} - t\vec{OA} = (-1, 1, 1) - t(s, s, s) \\ &= (-1 - st, 1 - st, 1 - st)\end{aligned}$$

$\vec{OA} \perp \vec{d}$  より,  $\vec{OA} \cdot \vec{d} = 0$  であるから ( $s > 0$ ),

$$1(-1 - st) + 1(1 - st) + 1(1 - st) = 0 \quad \text{よって} \quad t = \frac{1}{3s}$$

(2) (1)の結果から,  $st = \frac{1}{3}$  より  $\vec{d} = \left(-1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(-2, 1, 1)$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB} = (0, 0, 1) - u(s, s, s) - v(-1, 1, 1) \\ &= (-us + v, -us - v, 1 - us - v)\end{aligned}$$

$\vec{OA} \perp \vec{e}$ ,  $\vec{d} \perp \vec{e}$  より,  $\vec{OA} \cdot \vec{e} = 0$ ,  $\vec{d} \cdot \vec{e} = 0$  であるから

$$\begin{aligned}1(-us + v) + 1(-us - v) + 1(1 - us - v) &= 0, \\ -2(-us + v) + 1(-us - v) + 1(1 - us - v) &= 0\end{aligned}$$

$$\text{整理すると} \quad \begin{cases} -3us - v + 1 = 0 \\ -4v + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{よって} \quad u = \frac{1}{4s}, v = \frac{1}{4}$$

(3) (2)の結果から,  $su = v = \frac{1}{4}$  であるから

$$\vec{e} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}(0, -1, 1)$$

$\vec{OD} = \vec{d}$ ,  $\vec{OE} = \vec{e}$  より,

$$\vec{OA} \perp \vec{OD}, \vec{OA} \perp \vec{OE}, \vec{OD} \perp \vec{OE}$$

このとき, 四面体 OADE の体積が 2 であるから,  $\frac{1}{6}|\vec{OA}||\vec{OD}||\vec{OE}| = 2$  より

$$\frac{1}{6} \cdot s\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 \quad \text{よって} \quad s = 6$$

解説

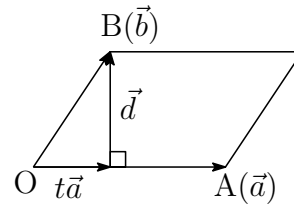
座標空間に4点

$$O(0, 0, 0), A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$$

があるとき、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  とおく。

$\vec{d} = \vec{b} - t\vec{a}$  が  $\vec{a} \perp \vec{d}$  であるとき、 $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$  より

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - t\vec{a}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$



$\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が張る平行四辺形の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S^2 &= (|\vec{a}||\vec{d}|)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b} - t\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2(|\vec{b}|^2 - 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{a}|^2) \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - 2t|\vec{a}|^2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (t|\vec{a}|^2)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  であるから

$$\begin{aligned} S^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

ここで、 $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$  とおくと

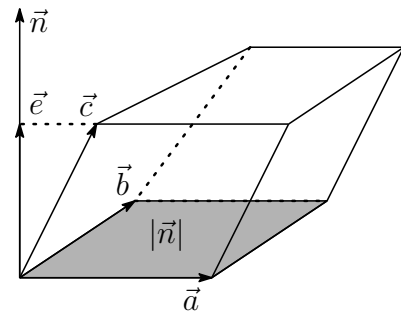
$$|\vec{n}| = S, \quad \vec{n} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$$

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  の張る平行六面体について、 $\vec{c}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  および  $\vec{n}$  に平行なベクトル  $\vec{e}$  を用いて

$$\vec{c} = \vec{e} + u\vec{a} + v\vec{b} \quad (u, v \text{ は定数})$$

とかける。このとき

$$\vec{n} \cdot \vec{e} = \vec{n} \cdot (\vec{c} - u\vec{a} - v\vec{b}) = \vec{n} \cdot \vec{c}$$



$\vec{n}$  と  $\vec{e}$  のなす角は  $0^\circ$  または  $180^\circ$  であるから  $|\vec{n} \cdot \vec{e}| = |\vec{n}||\vec{e}|$

この平行六面体の体積を  $V$  とすると、 $V = |\vec{n}||\vec{e}|$  であるから

$$V = |\vec{n} \cdot \vec{e}| = |\vec{n} \cdot \vec{c}| = |(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3|$$

よって、四面体 OABC の体積は、 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot |\vec{e}| = \frac{1}{6} |\vec{n}||\vec{e}| = \frac{1}{6} V$  より

$$\frac{1}{6} |(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3|$$



2 (1)  $y = f(x)$  とおくと,  $y = \frac{e^x - ae^{-x}}{2} \dots \textcircled{1}$  より

$$e^{2x} - 2ye^x + y^2 = y^2 + a \quad \text{ゆえに} \quad (e^x - y)^2 = y^2 + a$$

$$\textcircled{1} \text{ より} \quad e^x - y = e^x - \frac{e^x - ae^{-x}}{2} = \frac{e^x + ae^{-x}}{2} > 0 \quad (a > 0)$$

$$\text{したがって} \quad e^x - y = \sqrt{y^2 + a} \quad \text{すなわち} \quad x = \log(y + \sqrt{y^2 + a})$$

$$\text{よって, 求める逆関数は} \quad f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + a})$$

$$(2) (1) \text{の結果から} \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

$$\text{別解} \quad y = \frac{e^x - ae^{-x}}{2} \text{ より} \quad y' = \frac{e^x + ae^{-x}}{2}$$

$$\text{ここで, } e^x = y + \sqrt{y^2 + a}, \quad e^{-x} = \frac{-y + \sqrt{y^2 + a}}{a} \text{ であるから}$$

$$y' = \frac{y + \sqrt{y^2 + a} + a \cdot \frac{-y + \sqrt{y^2 + a}}{a}}{2} = \sqrt{y^2 + a}$$

$y = f(x)$ ,  $x = g(y)$  とおき,  $g(y) = x$  を  $x$  について微分すると

$$g'(y)y' = 1 \quad \text{ゆえに} \quad g'(y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + a}}$$

$$\text{よって} \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

$$(3) (1),(2) \text{の結果を用いると} \quad \{\log(x + \sqrt{x^2 + c^2})\}' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + c^2}}$$

求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c^2}} = \left[ \log(x + \sqrt{x^2 + c^2}) \right]_0^c \\ &= \log(c + \sqrt{2}c) - \log c \\ &= \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$



$$\boxed{3} \quad (1) \quad z_1 = 1, \quad z_2 - z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{2},$$

$$z_3 - z_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot i = \frac{i}{2},$$

$$z_4 - z_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1+i}{4}$$

$$\text{したがって} \quad z_3 = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) = 1 + \frac{1+i}{2} + \frac{i}{2} = \frac{3+2i}{2},$$

$$z_4 = z_3 + (z_4 - z_3) = \frac{3+2i}{2} + \frac{-1+i}{4} = \frac{5+5i}{4}$$

(2)  $k$  を自然数とすると

$$\begin{aligned} z_{k+1} - z_k &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \left( \cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^k = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^k = \alpha^k \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad z_n = z_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

$$(3) \quad |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ であるから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$$

$$\text{よって} \quad w = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1+i}{2}} = 1 + i$$

$$(4) \quad \frac{1}{1 - \alpha} = 1 + i = 2\alpha \text{ であるから, (2) の結果より}$$

$$\begin{aligned} z_n &= 2\alpha(1 - \alpha^n) = 2\alpha - 2\alpha^{n+1} \\ &= 1 + i - 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+1} \left( \cos \frac{n+1}{4}\pi + i \sin \frac{n+1}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \operatorname{Re}(z_n) = 1 - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} \cos \frac{n+1}{4}\pi$$

また, (3) の結果から  $\operatorname{Re}(w) = 1$  であるから

$$\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(w) = - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} \cos \frac{n+1}{4}\pi > 0$$

$$\frac{\pi}{2} + 2j\pi < \frac{n+1}{4}\pi < \frac{3}{2}\pi + 2j\pi \quad (j \text{ は整数}) \text{ であるから} \quad 8j+1 < n < 8j+5$$

$$\text{よって} \quad n = 8j + 2, 8j + 3, 8j + 4 \quad (j \text{ は負でない整数}) \quad \blacksquare$$

- 4 (1)  $(x_4, y_4) = (0, 0)$  となるのは、硬貨を4回投げて、表が3回、裏が1回出る確率であるから

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

- (2)  $(x_8, y_8) = (5, 3)$  となるのは、点(3, 1)を通らずに、点(5, 3)に到達する確率であるから、(1)の結果を利用して

$${}_8C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{4} \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{32} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

- (3)  $x_8 + y_8 \leq 4$  となるのは、4回目に点(3, 1)に到達することである。したがって、(1)の結果から、求める確率は

$$\frac{1}{4}$$

- (4)  $x_{4n} + y_{4n} \leq 4k$  となるのは、4回目, 8回目,  $\dots$ ,  $4(n-k)$  回目に点(3, 1)に到達する, すなわち, ちょうど  $n-k$  回原点に戻る. よって, (1)の結果から, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \frac{1}{4^{n-k}}$$



- 5 (1)  $x_n = 2^n$  の下2桁は, 次のようになる.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_n$	02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48
$n$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$x_n$	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

よって, 04 から循環が始まり循環の周期は 20 である.

- (2) 25 で割って 1 余る 2 桁の数は 26, 51, 76

A は 4 の倍数であるから  $A = 76$

別解  $4x \equiv 1 \pmod{25}$  を満たす整数  $x$  は

$$24x \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad -x \equiv 6 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv -6 \pmod{25}$$

$$x = 25k - 6 \text{ であるから } (k \text{ は整数}) \quad 4x = 100k - 24$$

A は 2 桁の自然数であるから,  $k = 1$  を代入して  $A = 76$



(3) 125 で割って 1 余る 3 桁の自然数は

$$126, 251, 376, 501, 626, 751, 876$$

$B$  は 8 の倍数であるから  $B = 376$

別解  $8y \equiv 1 \pmod{125}$  を満たす整数  $y$  は

$$120y \equiv 15 \quad \text{ゆえに} \quad -5y \equiv 15 \pmod{125}$$

$$24y \equiv 3, \quad -25y \equiv 75 \pmod{125} \text{ であるから}$$

$$24y - 25y \equiv 3 + 75 \quad \text{ゆえに} \quad y \equiv -78 \pmod{125}$$

$$y = 125j - 78 \text{ であるから } (j \text{ は整数}) \quad 8y = 1000j - 624$$

$B$  は 3 桁の自然数であるから,  $j = 1$  を代入して  $B = 376$

(4) 循環の周期を  $e$  とすると ( $e$  は自然数), 整数  $m$  に対して

$$2^{m+e} - 2^m = 1000M \quad (M \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{m-3}(2^e - 1) = 125M$$

$2^{m-3}$  は整数であるから, これを満たす最小の  $m$  は 3

したがって, 循環の始まりは  $2^3$  すなわち **008**

$$2^e - 1 \text{ は } 125 \text{ で割り切れるから} \quad 2^e \equiv 1 \pmod{125}$$

これを満たす最小の自然数  $e$  は 100 であるから, 求める周期は **100**

## 解説

1から $n$ までの自然数のうちで、 $n$ と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を、オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または $\varphi$ 関数 (phi function) といい、以下の定理が成り立つ。

## 定理 1

$p_1, p_2, \dots, p_l$  を素数,  $k_1, k_2, \dots, k_l$  を自然数とすると

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}$$

について、次式が成り立つ。

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right)$$

## フェルマー・オイラーの定理 (Fermat-Euler Theorem)

自然数 $n$ と互いに素である自然数 $a$ について、次式が成り立つ。

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証明 [http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga\\_2005.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf) (p6 を参照).

## 定理 2

自然数 $n$ と互いに素である自然数 $a$ について

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 $e$ (位数)は、 $\varphi(n)$ の約数である。

証明  $\varphi(n)$ が $e$ で割り切れないと仮定し、 $\varphi(n)$ を $e$ で割った商を $q$ 、余りを $r$ とすると

$$\varphi(n) = eq + r \quad (0 < r < e)$$

したがって 
$$a^{\varphi(n)} = a^{eq+r} = (a^e)^q a^r$$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1, a^e \equiv 1 \pmod{n}$  であるから

$$a^r \equiv 1 \pmod{n}$$

これは、 $e$ が位数であることに反する。

証終

## 別解(1)

循環の周期を  $e$  とすると ( $e$  は自然数), 整数  $n$  に対して

$$2^{n+e} - 2^n = 100N \quad (N \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-2}(2^e - 1) = 25N$$

$2^{n-2}$  は整数であるから, これを満たす最小の  $n$  は 2

したがって, 循環の始まりは  $2^2$  すなわち **04**

$2^e - 1$  は 25 で割り切れるから  $2^e \equiv 1 \pmod{25}$  ... ①

$25 = 5^2$  より,  $\varphi(25) = 25 \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20$  であるから, フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$$

① を満たす最小の自然数  $e$ (位数) は, 20 の約数であるから, 法 25 について

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^4 \equiv 16, \quad 2^5 \equiv 7, \quad 2^{10} \equiv 7^2 \equiv -1$$

よって, 求める周期(位数)は **20**

## 別解(4)

循環の周期を  $e$  とすると ( $e$  は自然数), 整数  $m$  に対して

$$2^{m+e} - 2^m = 1000M \quad (M \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{m-3}(2^e - 1) = 125M$$

$2^{m-3}$  は整数であるから, これを満たす最小の  $m$  は 3

したがって, 循環の始まりは  $2^3$  すなわち **008**

$2^e - 1$  は 125 で割り切れるから  $2^e \equiv 1 \pmod{125}$  ... ②

$125 = 5^3$  より,  $\varphi(125) = 125 \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100$  であるから, フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$$

② を満たす最小の自然数  $e$ (位数) は, 100 の約数であるから, 法 125 について

$$\begin{aligned} 2^1 &\equiv 2, & 2^2 &\equiv 4, & 2^4 &\equiv 16, & 2^5 &\equiv 32, \\ 2^{10} &\equiv 32^2 \equiv 1024 \equiv 24, & 2^{20} &\equiv 24^2 \equiv 576 \equiv -24, \\ 2^{25} &\equiv -24 \cdot 32 \equiv -768 \equiv -43, & 2^{50} &\equiv (-43)^2 \equiv 1849 \equiv -1 \end{aligned}$$

よって, 求める周期(位数)は **100** ■

## 7.3 2017年(150分)

**1** 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = \tan \frac{\pi}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1} + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. 次の問いに答えよ.

- (1)  $a_2 = \tan \frac{\pi}{6}$ ,  $a_3 = \tan \frac{\pi}{12}$ であることを示せ.
- (2) 一般項  $a_n$  の表す  $n$  の式を推定し, それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ.
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$  を求めよ.

**2**  $a > 0$  とする. 次の問いに答えよ.

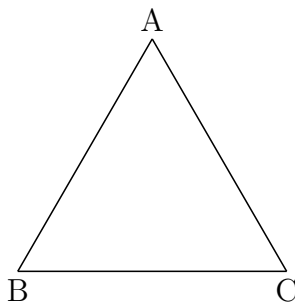
- (1) 関数  $f(t) = t^3 - 2at + 1$  の区間  $t \geq 0$  における最小値を,  $a$  を用いて表せ.
- (2) (1) で求めた最小値が  $0$  となるときの  $a$  の値を  $A$  とおく.  $A^3$  を求めよ.
- (3) 座標平面上の曲線  $y = x^4$  を  $C_1$ , 点  $(0, a)$  を中心とする半径  $a$  の円を  $C_2$  とする.  $C_1$  と  $C_2$  の共有点の個数を調べよ.
- (4) 座標平面において, 点  $P$  が曲線  $y = x^4$  上を動くときの点  $P$  と点  $(0, a)$  の距離の最小値を考える. その最小値が  $a$  に等しくなるような  $a$  の値の範囲を求めよ.

- 3 表が出る確率が  $p$ , 裏が出る確率が  $1-p$  であるようなコインがある. ただし,  $0 < p < 1$  である. このとき, 下図のような正三角形の3頂点  $A, B, C$  を次の規則で移動する動点  $R$  を考える.

コインを投げて表が出れば  $R$  は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば  $R$  は時計まわりに隣の頂点に移動する.

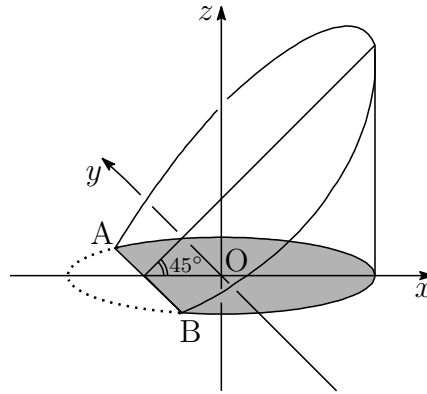
$R$  は最初  $A$  にあり, 全部で  $(2N+3)$  回移動する. ここで,  $N$  は自然数である. 移動回数がちょうど  $k$  に達したときに  $R$  が  $A$  に初めて戻る確率を  $P_k$  ( $k = 2, 3, \dots, 2N+3$ ) とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $P_2, P_3$  を求めよ.
- (2)  $P_{2m}, P_{2m+1}$  ( $2 \leq m \leq N+1$ ) を求めよ.
- (3)  $p = \frac{1}{2}$  とする. 移動回数がちょうど  $2N+3$  に達したときに  $R$  が  $A$  に2度目に戻る確率  $Q$  を求めよ.



4 座標空間内の平面  $H : z = 0$  とその上の曲線  $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  を考える.  $C$  上の点を通り  $z$  軸に平行な直線の全体が作る曲面を  $K$  とする.  $C$  上の2点  $A\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), B\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  に対し, 線分  $AB$  を含み平面  $H$  と  $45^\circ$  の角をなす平面を  $T$  とする. ただし, 平面  $T$  と  $z$  軸の交点の  $z$  座標は正であるとす. 平面  $H$ , 平面  $T$  および曲面  $K$  が囲む二つの立体のうち  $z$  軸と交わるものを  $V$  とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 立体  $V$  と平面  $H$  の共通部分 (下図の灰色で示される部分) の面積を求めよ.
- (2) 立体  $V$  を平面  $x = t$  ( $-1 < t < 2$ ) で切ったとき, 断面の面積  $S(t)$  を  $t$  を用いて表せ.
- (3) 立体  $V$  の体積を求めよ.



5  $x$  座標,  $y$  座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ. 格子点  $O(0, 0)$  および  $A(50, 14)$  を考える. 次の問いに答えよ.

- (1)  $\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 6$  を満たす格子点  $P$  を一つ求めよ.
- (2)  $m$  を自然数とする.  $\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 6$  を満たす格子点  $P$  のうち, 長さ  $OP$  が  $m$  番目に小さい点を  $P_m$  とする.  $P_1$  および  $P_2$  を求めよ.
- (3)  $P_m$  を (2) で定めた格子点とする. 自然数  $k$  に対し, ベクトル  $\vec{P_{2k}P_{2k+1}}$  および  $\vec{P_{2k}P_{2k+2}}$  を成分表示せよ.
- (4)  $P_m$  を (2) で定めた格子点とする.  $Q$  を  $\vec{OQ} = \vec{P_{14}P_{16}}$  を満たす点とする. 四角形  $OQP_{16}P_{14}$  の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ.

解答例

1 (1)  $a_n = \tan \theta_n \left( -\frac{\pi}{2} < \theta_n < \frac{\pi}{2} \right) \cdots (*)$  とおくと

$$a_1 = \tan \frac{\pi}{3} \text{ より } \theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1} + 1} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta_{n+1} &= \frac{\tan \theta_n}{\sqrt{\tan^2 \theta_n + 1} + 1} = \frac{\sin \theta_n}{1 + \cos \theta_n} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta_n}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\cos \frac{\theta_n}{2}} = \tan \frac{\theta_n}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} \quad \cdots \textcircled{2} \quad \text{すなわち } \theta_n = \frac{\pi}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} \quad \cdots (**)$$

$$\text{したがって } a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} \text{ よって } a_2 = \tan \frac{\pi}{6}, a_3 = \tan \frac{\pi}{12}$$

(2) (\*) を用いて,  $a_n$  は (\*\*) であると推定する.

[1]  $n = 1$  のとき, ① より, (\*\*) は成立する.

[2]  $n = k$  のとき, (\*\*) が成立する,

$$\text{すなわち, } \theta_k = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-1}} \text{ と仮定すると, } \textcircled{2} \text{ より}$$

$$\theta_{k+1} = \frac{1}{2} \theta_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-1}} = \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$$

したがって,  $n = k + 1$  のときも (\*\*) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数  $n$  について, (\*\*) は成立する.

$$\text{よって } a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

$$(3) (**) \text{ より, } 2^n = \frac{2\pi}{3\theta_n} \text{ であるから } 2^n a_n = \frac{2\pi}{3\theta_n} \tan \theta_n = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\tan \theta_n}{\theta_n}$$

$n \rightarrow \infty$  のとき,  $\theta_n \rightarrow +0$  であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \lim_{\theta_n \rightarrow +0} \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\tan \theta_n}{\theta_n} = \frac{2\pi}{3}$$



**2** (1)  $f(t) = t^3 - 2at + 1$  ( $a > 0$ ) より

$$f'(t) = 3t^2 - 2a = 3 \left( t + \sqrt{\frac{2a}{3}} \right) \left( t - \sqrt{\frac{2a}{3}} \right)$$

$t \geq 0$ における  $f(t)$  増減表は

$t$	0	...	$\sqrt{\frac{2a}{3}}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	1	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、最小値は  $f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} - 2a\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1 = -\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1$

(2)  $a = A$  のとき、最小値が 0 であるから、(1) の結果より

$$-\frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}} = 1$$

両辺を平方すると  $\frac{16A^2}{9} \cdot \frac{2A}{3} = 1$  よって  $A^3 = \frac{27}{32}$

(3)  $C_1 : y = x^4, C_2 : x^2 + (y - a)^2 = a^2$  から  $y$  を消去すると

$$x^2 + (x^4 - a)^2 = a^2 \quad \text{整理すると} \quad x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) = 0 \quad \dots (*)$$

$C_1$  と  $C_2$  の共有点の個数は、方程式 (\*) の実数解の個数に等しい。

$t = x^2 \dots \textcircled{1}$  とおくと、上の方程式は  $tf(t) = 0 \quad \dots (**)$

(1) の結果を利用すると、 $f(t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) の解の個数は、次のようになる。

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) > 0, \quad \text{すなわち, } 0 < a < \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \text{ のとき} \quad 0 \text{ 個}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) = 0, \quad \text{すなわち, } a = \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \text{ のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) < 0, \quad \text{すなわち, } \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} < a \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

① より、これらの正の解  $t$  に対し、(\*) の解はそれぞれ  $x = \pm\sqrt{t}$  である。

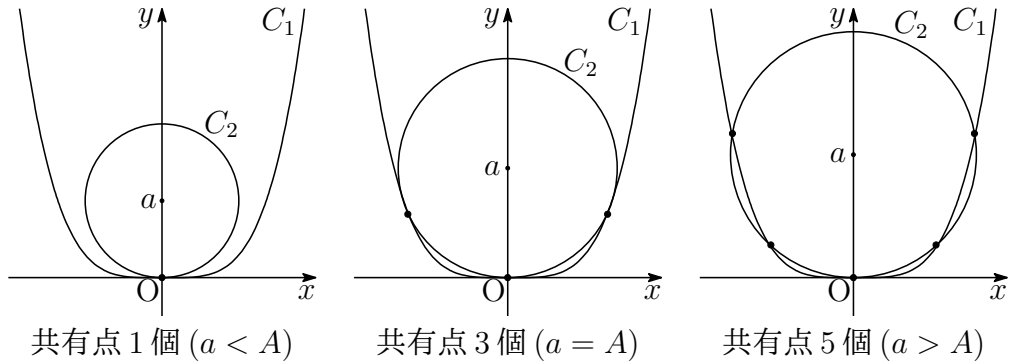
(\*), (\*\*) より  $0 < a < \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$  のとき  $1$  個

$a = \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$  のとき  $3$  個

$\frac{3}{2\sqrt[3]{4}} < a$  のとき  $5$  個



補足  $a$  の値による  $C_1$  と  $C_2$  の共有点は次のようになる.



(4)  $C_1$  上の点  $(x, x^4)$  と点  $(0, a)$  間の距離を  $d$  とすると

$$d^2 = x^2 + (x^4 - a)^2 = x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2$$

$d$  の最小値が  $a$  であるとき,  $d^2 \geq a^2$  であるから

$$x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2 \geq a^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) \geq 0$$

上式が常に成り立つとき, 任意の  $x$  に対して

$$x^6 - 2ax^2 + 1 \geq 0$$

が成立する  $a$  の範囲であるから,  $t = x^2$  とおくと,  $t \geq 0$  において, 常に

$$f(t) \geq 0$$

を満たす  $a$  の範囲である.

したがって, (1) の結果から  $f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) \geq 0$  を満たす  $a$  の範囲は ( $a > 0$ )

$$-\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} \quad \text{よって} \quad 0 < a \leq \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$$



- 3 (1)  $P_2$  は,  $A \rightarrow B \rightarrow A$  または  $A \rightarrow C \rightarrow A$  と移動する確率より

$$P_2 = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

$P_3$  は,  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  または  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  と移動する確率より

$$P_3 = p^3 + (1-p)^3$$

- (2) 移動回数がちょうど  $2m$  に達したとき, R が A に初めて戻る場合, 最初に  $A \rightarrow B$  と移動し BC 間を  $m-1$  回往復して最後に  $B \rightarrow A$  と移動するか, 最初に  $A \rightarrow C$  と移動し CB 間を  $m-1$  回往復して最後に  $C \rightarrow A$  と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p) + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p \\ &= 2\{p(1-p)\}^m \end{aligned}$$

移動回数がちょうど  $2m+1$  に達したとき, R が A に初めて戻る場合, 最初に  $A \rightarrow B$  と移動し BC 間を  $m-1$  回往復して最後に  $B \rightarrow C \rightarrow A$  と移動するか, 最初に  $A \rightarrow C$  と移動し CB 間を  $m-1$  回往復して最後に  $C \rightarrow B \rightarrow A$  と移動する確率であるから

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2 + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= \{p^3 + (1-p)^3\}\{p(1-p)\}^{m-1} \end{aligned}$$

- (3)  $p = \frac{1}{2}$  のとき  $p(1-p) = \frac{1}{4}$ ,  $p^3 + (1-p)^3 = \frac{1}{4}$

$$q = \frac{1}{4} \text{ とおくと, (2) の結果から } P_{2m} = 2q^m, \quad P_{2m+1} = q \cdot q^{m-1} = q^m$$

移動回数が  $2k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) のとき R が A に初めて戻り,  $2N+3$  回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} = 2q^k \cdot q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

移動回数が  $2k+1$  ( $1 \leq k \leq N$ ) のとき R が A に初めて戻り,  $2N+3$  回目に R が A に 2 度目に戻る確率は

$$P_{2k+1}P_{2(N-k+1)} = q^k \cdot 2q^{N-k+1} = 2q^{N+1}$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \{P_{2k}P_{2(N-k+1)+1} + P_{2k+1}P_{2(N-k+1)}\} &= \sum_{k=1}^N (2q^{N+1} + 2q^{N+1}) \\ &= \sum_{k=1}^N q^N = Nq^N = \frac{N}{4^N} \end{aligned}$$



4 (1)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  より, 求める面積を  $S$  とすると  $S = 2 \int_{-1}^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$

$x = 2 \cos \theta$  とおくと  $\frac{dx}{d\theta} = -2 \sin \theta$

$x$	$-1 \rightarrow 2$
$\theta$	$\frac{2\pi}{3} \rightarrow 0$

よって

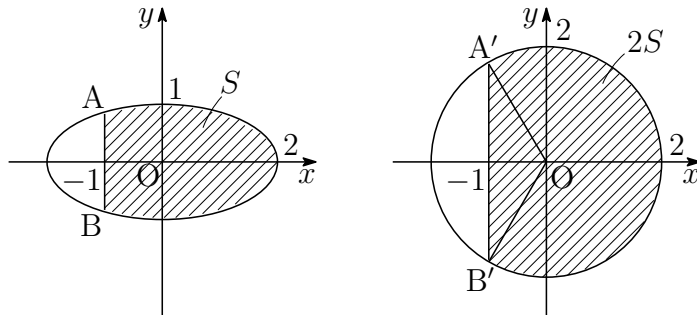
$$S = 2 \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta} (-2 \sin \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 4 \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (2 - 2 \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \left[ 2\theta - \sin 2\theta \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

別解 楕円  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  を  $x$  軸を元に  $y$  軸方向に 2 倍に拡大したものは, 中心が原点で半径 2 の円. このとき, 2 点  $A\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $B\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  が移動した点をそれぞれ  $A'(-1, \sqrt{3})$ ,  $B'(-1, -\sqrt{3})$  とおくと,  $\angle A'OB = \frac{2\pi}{3}$

$$2S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} \quad \text{よって} \quad S = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}$$



(2) 平面  $x = t$  ( $-1 < t < 2$ ) と楕円柱面  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  との交点の  $y$  座標は

$$\frac{t^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \pm \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$$

平面  $x = t$  ( $-1 < t < 2$ ) と平面  $T: z = x + 1$  との交点の  $z$  座標は  $z = t + 1$   
 $V$  を平面  $x = t$  ( $-1 < t < 2$ ) で切った断面は, 底面  $2\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$ , 高さ  $t + 1$  の長方形であるから

$$S(t) = 2(t + 1)\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$$

(3)  $V$  の体積は, (2) の結果および (1) で求めた定積分に注意して

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 S(t) dt &= \int_{-1}^2 2t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} dt + 2 \int_{-1}^2 \sqrt{1-\frac{t^2}{4}} dt \\ &= \left[ -\frac{8}{3} \left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^2 + S \\ &= \sqrt{3} + \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



**5** (1)  $O(0, 0)$ ,  $A(50, 14)$  より,  $P(x, y)$  とおくと,  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$  より

$$50x + 14y = 6 \quad \text{ゆえに} \quad 25x + 7y = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x, y$  は整数であるから,  $25 \equiv 4 \pmod{7}$  より,  $\textcircled{1}$  は

$$4x \equiv 3 \quad \text{ゆえに} \quad 8x \equiv 6 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv -1 \pmod{7}$$

整数  $k$  を用いて,  $x = 7k - 1$  とおき, これを  $\textcircled{1}$  に代入すると

$$25(7k - 1) + 7y = 3 \quad \text{ゆえに} \quad y = -25k + 4$$

したがって  $(x, y) = (7k - 1, -25k + 4) \quad \cdots (*)$

$k = 0$  を  $(*)$  に代入すると  $(-1, 4)$

(2)  $(*)$  より  $OP^2 = (7k - 1)^2 + (-25k + 4)^2 = 674k^2 - 214k + 17$

$$= 647 \left(k - \frac{107}{647}\right)^2 - \frac{107^2}{647} + 17$$

したがって,  $m$  と  $k$  は次のように対応する.

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$k$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	...

よって  $P_1(-1, 4), P_2(6, -21)$

(3)  $(*)$  および (2) の表から  $P_{2k}(7k - 1, -25k + 4) \quad \cdots (**)$

また  $P_{2k+1}(7(-k) - 1, -25(-k) + 4)$  すなわち  $P_{2k+1}(-7k - 1, 25k + 4)$

$(**)$  より,  $P_{2k+2}(7k + 6, -25k - 21)$  であるから

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}} = (-14k, 50k), \quad \overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}} = (7, -25)$$

(4) (\*\*) および (3) の結果に  $k = 7$  を代入すると

$$P_{14}(48, -171), \quad \overrightarrow{P_{14}P_{16}} = (7, -25)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_{16}} \text{ より } Q(7, -25)$$

$$\text{直線 } OQ \text{ の方程式は } 25x + 7y = 0$$

$$\text{直線 } P_{14}P_{16} \text{ の方程式は}$$

$$25(x - 48) + 7(y + 171) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 25x + 7y = 3$$

$$\text{直線 } OP_{14} \text{ の方程式は } 171x + 48y = 0$$

$$\text{直線 } QP_{16} \text{ の方程式は}$$

$$171(x - 7) + 48(y + 25) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 171x + 48y = -3$$

したがって、四角形  $OQP_{16}P_{14}$  の周および内部を表す領域は

$$\begin{cases} 0 \leq 25x + 7y \leq 3 \\ -3 \leq 171x + 48y \leq 0 \end{cases}$$

この領域内の点  $(x, y)$  が格子点であるとき、 $25x + 7y$  および  $171x + 48y$  は整数であるから、整数  $i, j$  ( $0 \leq i \leq 3, -3 \leq j \leq 0$ ) を用いて

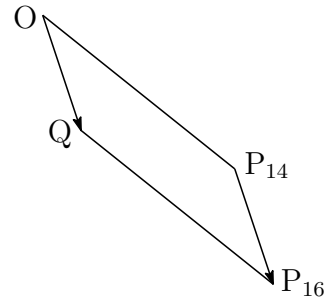
$$\begin{cases} 25x + 7y = i \\ 171x + 48y = j \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad x = 16i - \frac{7j}{3}, \quad y = -57i + \frac{25j}{3}$$

$x, y$  は整数であるから、条件を満たす  $(i, j)$  の組は

$$(i, j) = (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, -3), (1, -3), (2, -3), (3, -3),$$

よって、これに対応する格子点  $(x, y)$  は

$$(0, 0), (16, -57), (32, -114), (48, -171), \\ (7, -25), (23, -82), (39, -139), (55, -196)$$



## 7.4 2018年(150分)

1 次の問いに答えよ.

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点  $(u, v)$  の存在範囲を図示せよ.

(A) 2次式  $t^2 - ut + v$  は,  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  を満たす実数  $x, y$  を用いて  $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$  と因数分解される.

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点  $(u, v)$  の存在範囲を図示せよ.

(B) 2次式  $t^2 - ut + v$  は,  $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$  を満たす実数  $x, y$  を用いて  $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$  と因数分解される.

(3) 座標平面上の点  $(x, y)$  が4点  $(0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 2)$  を頂点とする長方形の周および内部を動くとき, 点  $(x+y, xy)$  の動く範囲の面積を求めよ.

2 複素数平面上の4点  $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta)$  を頂点とする四角形  $ABCD$  を考える. ただし, 四角形  $ABCD$  は, すべての内角が  $180^\circ$  より小さい四角形 (凸四角形) であるとする. また, 四角形  $ABCD$  の頂点は反時計回りに  $A, B, C, D$  の順に並んでいるとする. 四角形  $ABCD$  の外側に, 4辺  $AB, BC, CD, DA$  をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形  $APB, BQC, CRD, DSA$  を作る. 次の問いに答えよ.

(1) 点  $P$  を表す複素数を求めよ.

(2) 四角形  $PQRS$  が平行四辺形であるための必要十分条件は, 四角形  $ABCD$  がどのような四角形であることか答えよ.

(3) 四角形  $PQRS$  が平行四辺形であるならば, 四角形  $PQRS$  は正方形であることを示せ.

3 次の問いに答えよ.

(1) すべての実数  $t$  に対し,  $1+t \leq e^t$  が成り立つことを示せ.

(2) 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx$  の値を求めよ.

(3) 次の不等式を示せ.

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \leq 2 - \sqrt{2}$$

- 4 0, 1, 2, 3の数字が一つずつ書かれた4枚のカードがある. この中から1枚を取り出し, 書かれた数字を見て元に戻す. この操作を  $N$  回繰り返す, カードに書かれた数字を順に  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  とする. ここで,  $N$  は3以上の自然数である. さらに, 複素数

$$\alpha = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

を用いて, 項数  $N$  の数列  $\{X_n\}$  を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, \quad X_{n+1} = X_n \alpha^{Z_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1)$$

により定める.  $n = 1, 2, \dots, N$  に対し,  $X_n = \alpha$  となる確率を  $P_n$  とし,  $X_n = \alpha^2$  となる確率を  $Q_n$  とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $P_1$  を求めよ.
  - (2)  $n = 1, 2, \dots, N-1$  とする.  $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$  となる確率を求めよ.
  - (3)  $n = 1, 2, \dots, N$  とする.  $X_n = 1$  となる確率を,  $P_n$  と  $Q_n$  を用いて表せ.
  - (4)  $n = 1, 2, \dots, N-1$  に対し,  $P_n$  を用いて  $P_{n+1}$  を表せ.
  - (5)  $n = 1, 2, \dots, N$  に対し,  $P_n$  を求めよ.
- 5 座標平面上で, 曲線  $C: y = x^3 - 3x$  と,  $b > a^3 - 3a$  を満たすように動く点  $P(a, b)$  を考える. また, 点  $P$  に対し, 二つの不等式

$$|x - a| \leq 1, \quad |y - b| \leq 1$$

によって表される座標平面上的領域を  $B$  とする. 領域  $B$  と曲線  $C$  に対して,  $B$  と  $C$  が共有点  $Q$  をもち, さらに  $B$  と  $C$  の共有点が  $B$  の境界線上にしかないとき,  $B$  と  $C$  は点  $Q$  で接するというようにする. 次の問いに答えよ.

- (1) 曲線  $C$  の概形をかき, さらに点  $P$  の座標が  $(-2, 3)$  のときの領域  $B$  を図示せよ.
- (2)  $B$  と  $C$  が  $x < -1$  の範囲にある点で接するように, 点  $P$  は動くとする. このときの点  $P$  の軌跡を求めよ.
- (3)  $B$  と  $C$  がある点で接するように点  $P$  は動くとする. このときの点  $P$  の軌跡を求めよ.
- (4) (3) の点  $P$  の軌跡は, ある関数  $y = f(x)$  のグラフで表すことができる. この  $f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能であることを示せ.

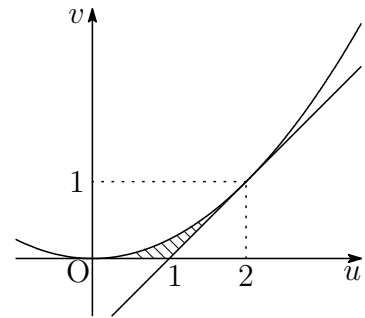
解答例

- 1 (1)  $f(t) = t^2 - ut + v$  とおくと  $f(t) = \left(t - \frac{u}{2}\right)^2 + v - \frac{u^2}{4}$   
 2次方程式  $f(t) = 0$  の実数解  $x, y$  が  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  を満たすから,  
 $f(0) \geq 0, f(1) \geq 0$  および上式より

$$v \geq 0, \quad 1 - u + v \geq 0, \quad 0 \leq \frac{u}{2} \leq 1, \quad v - \frac{u^2}{4} \leq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ v \geq 0 \\ v \geq u - 1 \\ v \leq \frac{u^2}{4} \end{cases}$$



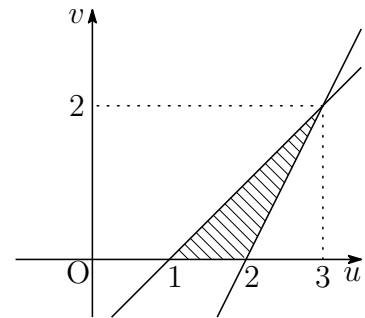
よって、求める領域は、右の図の斜線部分  
 で境界を含む。

- (2) 2次方程式  $f(t) = 0$  の実数解  $x, y$  が  $0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 2$  を満たすから,  
 $f(0) \geq 0, f(1) \leq 0, f(2) \geq 0$  より

$$v \geq 0, \quad 1 - u + v \leq 0, \quad 4 - 2u + v \geq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} v \geq 0 \\ v \leq u - 1 \\ v \geq 2u - 4 \end{cases}$$



よって、求める領域は、右の図の斜線部分  
 で境界を含む。



- (3)  $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 2\}$  とすると,  $(x, y)$  が4点  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(0, 2)$  を頂点とする長方形の周および内部は  $A \cup B$  である. (1), (2) で求めた領域をそれぞれ  $E$ ,  $F$  とすると

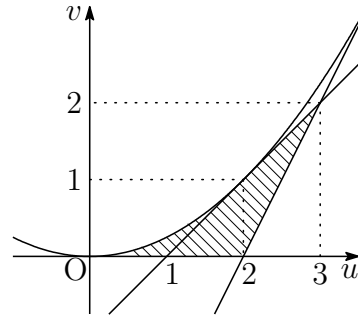
点  $(x + y, xy)$  すなわち 点  $(u, v)$

の表す領域は  $E \cup F$  で, 右の図のようになる.

よって, 求める面積を  $S$  とすると

$$S = \int_0^2 \frac{u^2}{4} du + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

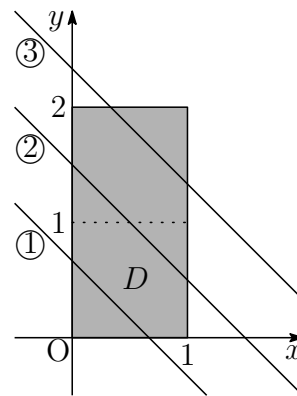
$$= \left[ \frac{u^3}{12} \right]_0^2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$



別解  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$  とし, 直線  $x + y = u$  上の点  $(x, y) \in D$  における  $v = xy$  のとる値の範囲を求める.

$$v = x(u - x) = -\left(x - \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{4}$$

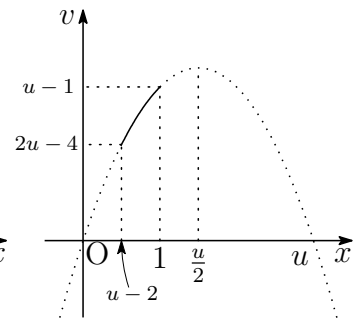
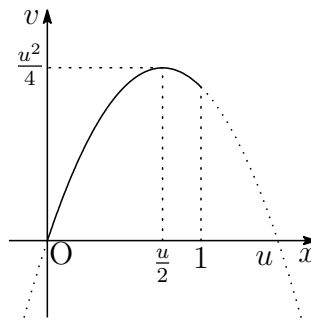
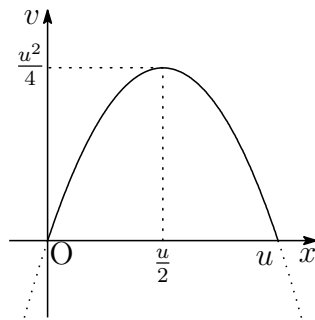
- ①  $0 \leq u \leq 1$  のとき  $0 \leq x \leq u$
- ②  $1 \leq u \leq 2$  のとき  $0 \leq x \leq 1$
- ③  $2 \leq u \leq 3$  のとき  $u - 2 \leq x \leq 1$



①  $0 \leq u \leq 1$

②  $1 \leq u \leq 2$

③  $2 \leq u \leq 3$



- (i)  $0 \leq u \leq 2$  のとき  $0 \leq v \leq \frac{u^2}{4}$
- (ii)  $2 \leq u \leq 3$  のとき  $2u - 4 \leq v \leq u - 1$

よって  $S = \int_0^2 \frac{u^2}{4} du + \int_2^3 \{(u - 1) - (2u - 4)\} du = \frac{7}{6}$  ■

2 (1)  $P(z_1)$  とすると

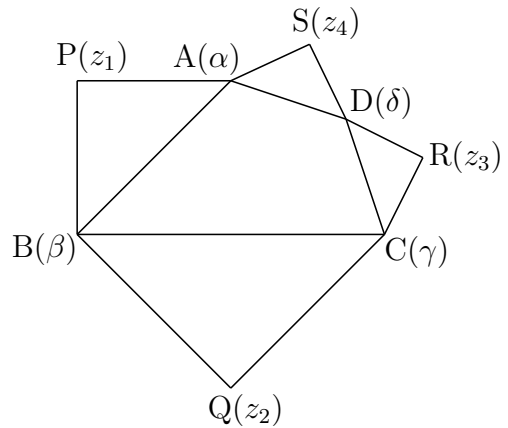
$$\frac{BP}{BA} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \angle\alpha\beta z_1 = \frac{\pi}{4}$$

したがって

$$\frac{z_1 - \beta}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ゆえに  $z_1 - \beta = \frac{1}{2}(1+i)(\alpha - \beta)$

よって  $z_1 = \frac{1}{2}(1+i)\alpha + \frac{1}{2}(1-i)\beta$



(2)  $Q(z_2)$ ,  $R(z_3)$ ,  $S(z_4)$  とおくと, (1) と同様にして

$$z_2 = \frac{1}{2}(1+i)\beta + \frac{1}{2}(1-i)\gamma, \quad z_3 = \frac{1}{2}(1+i)\gamma + \frac{1}{2}(1-i)\delta$$

$$z_4 = \frac{1}{2}(1+i)\delta + \frac{1}{2}(1-i)\alpha$$

ゆえに 
$$\begin{aligned} -z_1 + z_2 - z_3 + z_4 &= \frac{1}{2}(1+i)(-\alpha + \beta - \gamma + \delta) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-i)(-\beta + \gamma - \delta + \alpha) \\ &= i(-\alpha + \beta - \gamma + \delta) \end{aligned}$$

したがって  $-z_1 + z_2 - z_3 + z_4 = 0 \iff -\alpha + \beta - \gamma + \delta = 0$

すなわち  $z_2 - z_1 = z_3 - z_4 \iff \beta - \alpha = \gamma - \delta$

よって, 四角形 ABCD が平行四辺形であることは四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件である.

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるから, (2) の結果より,  $\delta - \gamma = \alpha - \beta$

$$z_1 - z_2 = \frac{1}{2}(1+i)(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}(1-i)(\beta - \gamma),$$

$$\begin{aligned} z_3 - z_2 &= \frac{1}{2}(1+i)(\gamma - \beta) + \frac{1}{2}(1-i)(\delta - \gamma) \\ &= \frac{1}{2}(1+i)(\gamma - \beta) + \frac{1}{2}(1-i)(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

したがって  $i(z_3 - z_2) = \frac{1}{2}(i-1)(\gamma - \beta) + \frac{1}{2}(i+1)(\alpha - \beta) = z_1 - z_2$

上式から  $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = i$  ゆえに  $PQ = QR$ ,  $\angle PQR = 90^\circ$

四角形 PQRS は平行四辺形でもあるから, 四角形 PQRS は正方形. ■

**3** (1)  $f(t) = e^t - 1 - t$  とおくと  $f'(t) = e^t - 1$

$t$	...	0	-
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって、すべての実数  $t$  に対し、次式が成立する。

$$e^t - 1 - t \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 1 + t \leq e^t \quad \dots(*)$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \left[ \tan x - \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

(3) (\*) より  $1 - t \leq e^{-t}$

$t > -1$  のとき、 $1 + t > 0$  であるから、(\*) より  $e^{-t} \leq \frac{1}{1 + t}$

したがって、 $t > -1$  のとき  $1 - t \leq e^{-t} \leq \frac{1}{1 + t} \quad \dots(**)$

$t = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ) とすると、(\*\*) を満たすから

$$1 - \sin x \leq e^{-\sin x} \leq \frac{1}{1 + \sin x}$$

したがって  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$

このとき  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin x) dx = \left[ x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) および上の結果から

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \leq 2 - \sqrt{2}$$



- 4 (1)  $X_1 = \alpha$ , すなわち,  $Z_1 = 1$  となる確率であるから  $\frac{1}{4}$
- (2)  $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ , すなわち,  $Z_{n+1} = 0, 3$  となる確率であるから  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- (3)  $X_n = 1$  となる確率を  $R_n$  とすると  $P_n + Q_n + R_n = 1 \cdots (*)$   
 よって  $R_n = 1 - P_n - Q_n$
- (4) 条件により, 次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}Q_n + \frac{1}{4}R_n \\ Q_{n+1} &= \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{4}R_n \\ R_{n+1} &= \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}Q_n + \frac{1}{2}R_n \end{aligned}$$

上の第2式と第3式の辺々を加えると

$$Q_{n+1} + R_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{3}{4}(Q_n + R_n)$$

(\*) より,  $Q_n + R_n = 1 - P_n$  であるから, これを上式に代入すると

$$1 - P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{3}{4}(1 - P_n) \quad \text{ゆえに} \quad P_{n+1} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}$$

(5) (4)の結果から  $P_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left(P_n - \frac{1}{3}\right)$

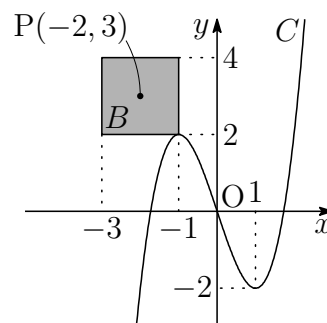
ゆえに  $P_n - \frac{1}{3} = \left(P_1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(1)の結果を代入して  $P_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$  ■

5 (1)  $y = x^3 - 3x$  より

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$x$	...	-1	...	1	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	2	↘	-2	↗



曲線  $C$  の概形は右の図のようになる。

$P$  が  $(-2, 3)$  のとき、領域  $B$  は  $|x+2| \leq 1, |y-3| \leq 1$  によって、右の図のようになる。

(2)  $g(x) = x^3 - 3x$  とおくと、 $P$  は  $C : y = g(x) (x < -1)$  を  $x$  軸方向に  $-1$ ,  $y$  軸方向に  $1$  だけ平行移動したものであるから

$$y = g(x+1) + 1 \quad (x+1 < -1)$$

よって  $y = x^3 + 3x^2 - 1 \quad (x < -2)$

(3) 右の図のように  $B$  と  $C$  が 2 点で接するときの  $P$  の  $x$  座標を  $\alpha$  とすると

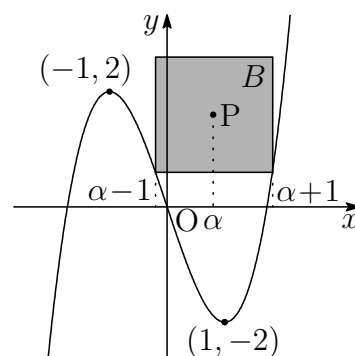
$$g(\alpha-1) = g(\alpha+1)$$

$$(\alpha-1)^3 - 3(\alpha-1) + 1 = (\alpha+1)^3 - 3(\alpha+1) + 1$$

整理すると  $3\alpha^2 - 2 = 0$

このとき、 $\alpha > 0$  であることに注意して

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



$g(x) = x^3 - 3x$  とおくと、点  $P$  の軌跡の方程式は

$$y = \begin{cases} g(x+1) + 1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leq x \leq 0) \\ g(x-1) + 1 & (0 < x \leq \alpha) \\ g(x+1) + 1 & (\alpha < x) \end{cases}$$

よって

$$y = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leq x \leq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 3 & (0 < x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}) \\ x^3 + 3x^2 - 1 & (\frac{\sqrt{6}}{3} < x) \end{cases}$$

(4) (3)の結果から

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x < -2) \\ 3 & (-2 \leq x \leq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 3 & (0 < x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}) \\ x^3 + 3x^2 - 1 & (\frac{\sqrt{6}}{3} < x) \end{cases}$$

したがって  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{3 - 3}{x} = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(x^3 - 3x^2 + 3) - 3}{x} = 0$$

ゆえに  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

よって,  $f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能である.

補足  $f(x)$  は微分可能 ( $C^1$ 級) である.

実際,  $f(x) = 3$  ( $-2 \leq x \leq 0$ ),  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$  ( $0 \leq x < \frac{\sqrt{6}}{3}$ ) より

$$f''(x) = 0 \quad (-2 < x < 0), \quad f''(x) = 6x - 6 \quad \left(0 < x < \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$\lim_{x \rightarrow -0} f''(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f''(x) = -6$  より,  $C^2$  級ではない. ■

## 7.5 2019年(150分)

- 1  $a > 0, r > 0$  とし, 数列  $\{a_n\}$  を初項  $a$ , 公比  $r$  の等比数列とする. また, 数列  $\{b_n\}$  は次のように定義される.

$$b_1 = a, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ.

- (1)  $b_n$  を  $a, r$  および  $n$  を用いて表せ.  
 (2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列  $\{c_n\}$  は等差数列であることを証明せよ.

- (3) (2) で与えられた数列  $\{c_n\}$  の初項から第  $n$  項までの平均を  $M_n$  とする. すなわち,

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$$

とする. このとき, 一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列  $\{d_n\}$  は等比数列であることを証明せよ.

- 2 箱の中に 1 から  $N$  までの数が一つずつ書かれた  $N$  枚のカードが入っている. ただし,  $N$  を 2 以上の自然数とする. 「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し, そのカードに書かれた数を読み取り, そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す. 1 回目, 2 回目, 3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を, それぞれ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  とする. また, 座標平面上に 4 点  $P_1(a_1, 0), P_2(a_1, a_2), P_3(a_1 - a_3, a_2), P_4(a_1 - a_3, a_2 - a_4)$  を定める. 次の問いに答えよ.

- (1)  $P_4$  が原点  $O(0, 0)$  に一致する確率を  $N$  を用いて表せ.  
 (2)  $P_4$  が連立不等式  $x \geq 0, y \leq 0$  の表す領域にある確率を  $N$  を用いて表せ.  
 (3)  $P_4$  が直線  $y = x$  上にある確率を  $N$  を用いて表せ.  
 (4)  $N = 2^m$  とする. ただし,  $m$  を自然数とする.  $P_4$  が原点  $O$  に一致し, かつ, 四角形  $P_1P_2P_3P_4$  の面積が  $2^m$  となる確率を  $m$  を用いて表せ.

3 関数  $f(x)$  は実数全体で連続で、すべての実数  $x$  に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t}f(t) dt$$

を満たすとする。ただし、 $e$  は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

- (1)  $f(0)$  の値を求めよ。また、 $f'(x) = 2(x-1)\cos x$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $f(x)$  を求めよ。
- (3) 方程式  $f(x) = 0$  は、 $0 < x < \pi$  の範囲にただ一つの解をもつことを示せ。
- (4) (3) のただ一つの解を  $\alpha$  とする。曲線  $y = f(x)$  ( $0 \leq x \leq \alpha$ )、 $x$  軸および  $y$  軸によって囲まれる部分の面積を  $S_1$  とし、曲線  $y = f(x)$  ( $\alpha \leq x \leq \pi$ )、 $x$  軸および直線  $x = \pi$  によって囲まれる部分の面積を  $S_2$  とする。 $S_1$  と  $S_2$  の大小を判定せよ。

4  $i$  を虚数単位とし、複素数  $z$  に対して、

$$w = z^2 + 2z + 1 - 2i$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $w$  の実部が 0 となる複素数  $z$  全体を複素数平面上に図示せよ。
- (2)  $w = 0$  を満たす複素数  $z$  の個数は 2 個であることを証明し、それぞれを  $a + bi$  ( $a, b$  は実数) の形に書き表せ。
- (3) (2) で求めた二つの複素数のうち実部の大きい方を  $\alpha$ 、実部の小さい方を  $\beta$  とし、対応する複素数平面上の点をそれぞれ A, B とする。また、線分 AB の中点を M とする。複素数  $z$  に対応する複素数平面上の点が、線分 AM 上 (両端を含む) を動くとき、複素数  $w$  の描く図形を複素数平面上に図示せよ。
- (4) 複素数  $z$  に対応する複素数平面上の点が、点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき、複素数  $w$  の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

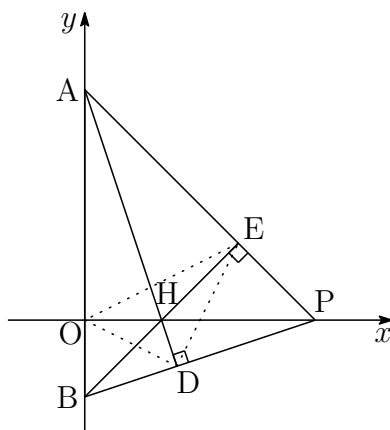


5 原点を  $O$  とする座標平面上において、点  $A(0, 3)$ ,  $B(0, -1)$  および  $x$  軸上の正の部分動く点  $P(t, 0)$  があり、 $\angle APB$  は鈍角でないとする。  $\triangle ABP$  の垂心を  $H$ 、頂点  $A$  から辺  $BP$  に下ろした垂線と辺  $BP$  との交点を  $D$ 、頂点  $B$  から辺  $PA$  に下ろした垂線と辺  $PA$  との交点を  $E$  とする。次の問いに答えよ。ただし、三角形の各頂点から対辺、またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わることが知られている。その交点のことを、三角形の垂心という。

- (1)  $\angle APB$  が直角となる  $t$  の値を求めよ。
- (2) 点  $H$  の座標を  $t$  を用いて表せ。

以下では、 $t$  が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする。

- (3) 点  $H$  が  $\triangle ODE$  の内心であることを証明せよ。ただし、1組の対角の和が  $180^\circ$  である四角形は円に内接することを、証明なしに利用してもよい。
- (4)  $\triangle ODE$  の内接円の半径を  $t$  の関数  $f(t)$  として表せ。
- (5) (4) で求めた関数  $f(t)$  は最大値をもつことを示せ。ただし、最大値を与える  $t$  の値を求める必要はない。



## 解答例

- 1 (1) 数列  $\{a_n\}$  は初項  $a$ , 公比  $r$  の等比数列であるから ( $a > 0, r > 0$ )

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$b_1 = a_1 = a, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{より} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$$

$n \geq 2$  のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} ar^k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{a} = a^{n-1} r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$n = 1 \text{ のときも, 上式は成立することから } \quad b_n = a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

(2) (1) の結果から  $\log_2 b_n = n \log_2 a + \frac{1}{2}n(n-1) \log_2 r$

$$\text{したがって} \quad c_n = \frac{\log_2 b_n}{n} = \log_2 a + \frac{1}{2}(n-1) \log_2 r$$

よって, 数列  $\{c_n\}$  は, 初項  $\log_2 a$ , 公差  $\frac{1}{2} \log_2 r$  の等差数列

- (3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \left\{ \log_2 a + \frac{1}{2}(k-1) \log_2 r \right\} = n \log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1) \log_2 r$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad M_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k = \frac{1}{n} \left\{ n \log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1) \log_2 r \right\} \\ &= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1) \log_2 r \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$$

よって, 数列  $\{d_n\}$  は, 初項  $a$ , 公比  $r^{\frac{1}{4}}$  の等比数列である. ■

2 (1)  $a_1 - a_3 = 0$ , すなわち,  $a_1 = a_3$  を満たす  $(a_1, a_3)$  の組は  $N$  (組)

同様に,  $a_2 - a_4 = 0$  を満たす  $(a_2, a_4)$  の組も  $N$  (組)

よって, 求める確率は  $\frac{N \cdot N}{N^4} = \frac{1}{N^2}$

(2)  $a_1 - a_3 > 0$ , すなわち,  $a_1 > a_3$  を満たす  $(a_1, a_3)$  の組は  ${}_N C_2$  (組)

$a_1 - a_3 = 0$  を満たす  $(a_1, a_3)$  の組は, (1) で示した  $N$  (組)

ゆえに,  $a_1 - a_3 \geq 0$  を満たす組は  ${}_N C_2 + N = \frac{1}{2}N(N+1)$

同様に,  $a_2 - a_4 \geq 0$  を満たす組も  $\frac{1}{2}N(N+1)$

よって, 求める確率は  $\frac{\{\frac{1}{2}N(N+1)\}^2}{N^4} = \frac{(N+1)^2}{4N^2}$

(3)  $P_4$  が直線  $y = x$  上にあるとき

$$a_1 - a_3 = a_2 - a_4 = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1))$$

それぞれの  $k$  に対する  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  の組数は  $N - |k|$

その総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=-(N+1)}^{N+1} (N - |k|)^2 &= N^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (N - k)^2 = N^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \\ &= N^2 + 2 \cdot \frac{1}{6} N(N-1)(2N-1) \\ &= \frac{1}{3} N(2N^2 + 1) \end{aligned}$$

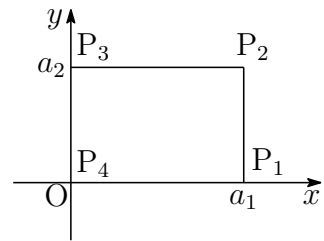
よって, 求める確率は  $\frac{\frac{1}{3}N(2N^2 + 1)}{N^4} = \frac{2N^2 + 1}{3N^3}$

(4)  $P_1(a_1, 0), P_2(a_1, a_2), P_4$  が原点に一致する

とき,  $a_1 - a_3 = 0$  より,  $P_3(0, a_2)$ . ゆえに, 四角形  $P_1P_2P_3P_4$  は右の図のようになる.

この四角形の面積が  $2^m (= N)$  となるとき

$$(a_1, a_2) = (2^j, 2^{m-j}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, m)$$



よって, 求める確率は  $\frac{m+1}{N^4} = \frac{m+1}{(2^m)^4} = \frac{m+1}{2^{4m}}$



3 (1) 与えられた関数  $f(x)$  から

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - e^x \int_0^x e^{-t}f(t) dt \quad \cdots (*)$$

これに  $x=0$  を代入すると  $f(0) = 1$

(\*) を  $x$  で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)\cos x + x\sin x - e^x \int_0^x e^{-t}f(t) dt - e^x \cdot e^{-x}f(x) \\ &= (x-1)\cos x + x\sin x - e^x \int_0^x e^{-t}f(t) dt - f(x) \end{aligned}$$

上式および (\*) から  $f(x)$  を消去すると  $f'(x) = 2(x-1)\cos x$

(2) (1) の結果から

$$f(x) = \int 2(x-1)\cos x dx = 2(x-1)\sin x + 2\cos x + C$$

$f(0) = 1$  より  $2 + C = 1$  ゆえに  $C = -1$

よって  $f(x) = 2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1$

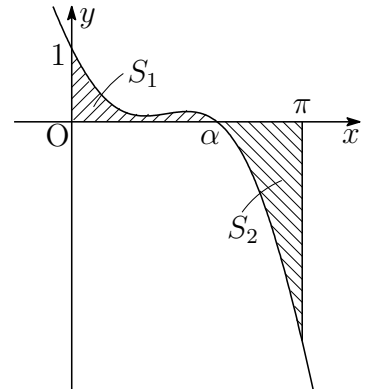
(3) (1), (2) の結果から

$x$	0	...	1	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\pi$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{2})$	$\searrow$	-3

$1 < \frac{\pi}{3}$  であるから,  $\cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  より

$$f(1) = 2\cos 1 - 1 > 0$$

よって, 方程式  $f(x) = 0$  は,  $0 < x < \pi$  の範囲にただ一つの解をもつ.



(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi \{2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1\} dx \\ &= \left[ -2(x-1)\cos x + 4\sin x - x \right]_0^\pi = \pi - 4 < 0 \end{aligned}$$

$S_1 = \int_0^\alpha f(x) dx$ ,  $S_2 = -\int_\alpha^\pi f(x) dx$  であるから

$$S_1 - S_2 = \int_0^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\pi f(x) dx = \int_0^\pi f(x) dx < 0$$

よって  $S_1 < S_2$  ■

4 (1)  $w = (z + 1)^2 - 2i$  であるから,  $z = x + yi$  とすると

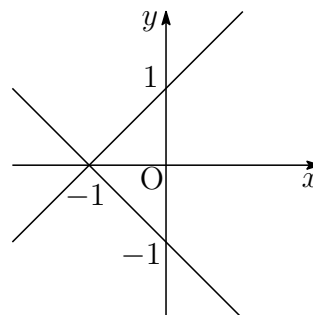
$$\begin{aligned} w &= (x + yi + 1)^2 - 2i = (x + 1)^2 + 2(x + 1)yi - y^2 - 2i \\ &= (x + 1)^2 - y^2 + 2\{(x + 1)y - 1\}i \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$w$  の実部が 0 のとき, (\*) より

$$(x + 1)^2 - y^2 = 0$$

したがって  $y = \pm(x + 1)$

よって,  $z$  の表す図形は右の図のとおり.



(2)  $w = 0$  のとき, (\*) より 
$$\begin{cases} (x + 1)^2 - y^2 = 0 \\ (x + 1)y - 1 = 0 \end{cases}$$

第1式から, 次の場合分けを行う.

(i)  $y = x + 1$  のとき, これを第2式に代入して

$$(x + 1)^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x(x + 2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0, -2$$

したがって  $x = 0$  のとき  $y = 1$ ,  $x = -2$  のとき  $y = -1$

(ii)  $y = -(x + 1)$  のとき, これを第2式に代入して

$$-(x + 1)^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 1)^2 = -1$$

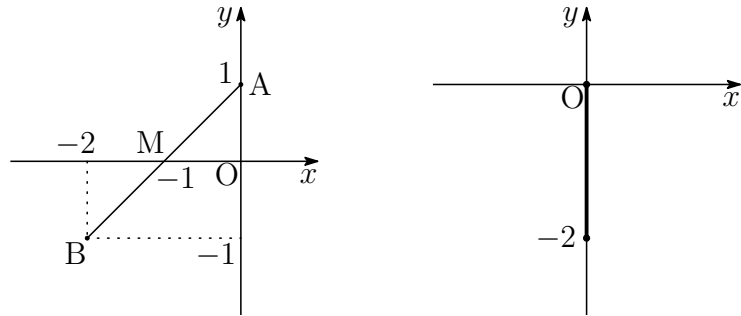
これを満たす実数  $x$  は存在しない.

(i), (ii) より, 求める複素数は  $i, -2 - i$

- (3) 条件より,  $A(i)$ ,  $B(-2-i)$  であり, 線分  $AB$  の中点は  $M(-1)$   
 線分  $AM$  上 (両端を含む) の点  $x+yi$  は  $y=x+1$  ( $-1 \leq x \leq 0$ ) であるから, これを (\*) に代入すると

$$\begin{aligned} w &= (x+1)^2 - (x+1)^2 + 2\{(x+1)(x+1) - 1\}i \\ &= \{2(x+1)^2 - 2\}i \end{aligned}$$

$-1 \leq x \leq 0$  より,  $-2 \leq 2(x+1)^2 - 2 \leq 0$  であるから,  $w$  は, 右下の図のように, 虚軸上の2点  $-2i$  と  $0$  を結ぶ線分 (両端を含む) 上を動く.



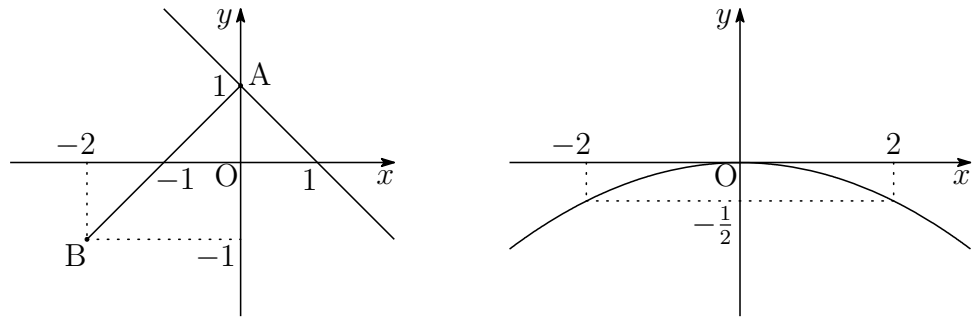
- (4) 点  $z$  が, 点  $A$  を通り線分  $AB$  に垂直な直線  $y = -x + 1$  上を動くとき, これを (\*) に代入して

$$\begin{aligned} w &= (x+1)^2 - (-x+1)^2 + 2\{(x+1)(-x+1) - 1\}i \\ &= 4x - 2x^2i \end{aligned}$$

上式において,  $x$  を  $\frac{x}{4}$  に置き換えると

$$w = 4 \cdot \frac{x}{4} - 2 \left(\frac{x}{4}\right)^2 i = x - \frac{x^2}{8}i$$

よって, 複素数平面上の点  $z = x+yi$  は, 右下の図のように放物線  $y = -\frac{x^2}{8}$  上を動く.



- 5 (1) 3点  $A(0, 3)$ ,  $B(0, -1)$ ,  $P(t, 0)$  ( $t > 0$ ) により

$$\text{直線 AP の傾きは } -\frac{3}{t}, \quad \text{直線 BP の傾きは } \frac{1}{t}$$

$$2 \text{ 直線 AP, BP は直交するから } -\frac{3}{t} \cdot \frac{1}{t} = -1 \quad \text{よって } t = \sqrt{3}$$

- (2) 直線 BE は点  $B(0, -1)$  を通り、傾き  $\frac{t}{3}$  であるから (直線 AP に垂直)

$$y = \frac{t}{3}x - 1 \quad \text{ゆえに } y = \frac{t}{3} \left( x - \frac{3}{t} \right) \quad \text{よって } H \left( \frac{3}{t}, 0 \right)$$

- (3) 四角形 AOHE, 四角形 OBDH, 四角形 HDPE は、それぞれ対角の和が  $180^\circ$  であるから、円に内接する。

四角形 AOHE において  $\angle EOH = \angle EAH$

$$\angle OEH = \angle OAH$$

四角形 OBDH において  $\angle HOD = \angle HBD$

四角形 HDPE において  $\angle HED = \angle HPD$

$\triangle AHE \sim \triangle BHD$  より  $\angle EAH = \angle HBD$

$\triangle AHO \sim \triangle PHD$  より  $\angle OAH = \angle HPD$

上の第1, 第3, 第5式から

$$\angle EOH = \angle HOD \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に、上の第2, 第4, 第6式から

$$\angle OEH = \angle HED \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、 $\triangle ODE$  において、線分 OH, EH は、それぞれ  $\angle O$ ,  $\angle E$  の二等分線である。よって、点 H は  $\triangle ODE$  の内心である。

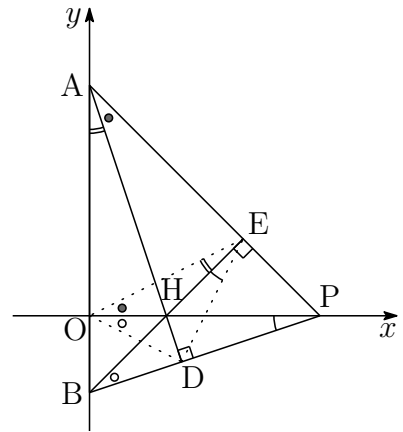
- (4) 点 E は、直線 AP :  $y = -\frac{3}{t}x + 3$  と (2) の直線  $y = \frac{t}{3}x - 1$  交点である。

$$\text{これらの連立方程式を解くと } E \left( \frac{12t}{t^2 + 9}, \frac{3t^2 - 9}{t^2 + 9} \right)$$

$$\text{ゆえに、直線 OE の方程式は } y = \frac{3t^2 - 9}{12t}x \quad \text{すなわち } (t^2 - 3)x - 4ty = 0$$

$\triangle ODE$  の内接円の半径  $f(t)$  は、点  $H \left( \frac{3}{t}, 0 \right)$  から直線 OE までの距離であるから ( $t > \sqrt{3}$ )

$$f(t) = \frac{\left| (t^2 - 3) \cdot \frac{3}{t} - 4t \cdot 0 \right|}{\sqrt{(t^2 - 3)^2 + (-4t)^2}} = \frac{3(t^2 - 3)}{t\sqrt{(t^2 - 3)^2 + 16t^2}}$$



(5) (4)の結果から

$$f(t)^2 = \frac{9(t^2 - 3)^2}{t^2\{(t^2 - 3)^2 + 16t^2\}}$$

$t > \sqrt{3}$  より,  $t^2 - 3 = \frac{1}{u}$  とおくと ( $u > 0$ )

$$f(t)^2 = \frac{9\left(\frac{1}{u}\right)^2}{\left(\frac{1}{u} + 3\right)\left\{\left(\frac{1}{u}\right)^2 + 16\left(\frac{1}{u} + 3\right)\right\}} = \frac{9}{\left(\frac{1}{u} + 3\right)\{1 + 16u(1 + 3u)\}}$$

$g(u) = \left(\frac{1}{u} + 3\right)\{1 + 16u(1 + 3u)\}$  とおくと ( $u > 0$ )

$$g(u) = 144u^2 + 96u + 19u + \frac{1}{u}$$

$$g'(u) = 288u + 96 - \frac{1}{u^2}$$

$$g''(u) = 288 + \frac{2}{u^3} > 0$$

$g'(u)$  は単調増加,  $\lim_{u \rightarrow +0} g'(u) < 0$ ,  $\lim_{u \rightarrow \infty} g'(u) > 0$

したがって,  $g'(u) = 0$  を満たす  $u_0$  が唯一存在する.

$u$	(0)	...	$u_0$	...
$g'(u)$		-	0	+
$g(u)$		↘	極小	↗

ゆえに,  $g(u)$  は最小値  $g(u_0)$  をとる.

よって,  $t = \sqrt{3 + \frac{1}{u_0}}$  のとき  $f(t)$  は最大値をとる. ■