令和７年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 平面上の三角形 OAB を考える．$\angle$AOB は鋭角，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=t$ とする．また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，$\mathrm{OC}=1$ とする．線分 AB を $2:1$ に内分する点を P，点 A から直線 OP に下した垂線と直線 OB との交点を R とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を t を用いて表せ．

(2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ．

(3) 線分 OB の中点を M とする．点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

2 p と m を実数とし，関数 $f(x)=x^3+3px^2+3mx$ は $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする．

(1) $f(\alpha)-f(\beta)$ を p と m を用いて表せ．

(2) p と m が $f(\alpha)-f(\beta)=4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ．

3 座標空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ がある．$\angle\mathrm{OAP}=30^\circ$ かつ $y\geqq 0$ を満たすように点 P が動くとき，$(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ．

4 次の問いに答えよ．

(1) $t>0$ のとき

$$-\frac{1}{t}<\int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}\,dx<\frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}\,dx=0$ を示せ．

(3) $f(x)=\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく．

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}\,dx$$

を示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある．A，B，C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う．

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる．
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる．

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる．

　最初の文字列は ABC であるとする．コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする．

(1) k を正の整数とするとき，$p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，p_n を求めよ．

解答例

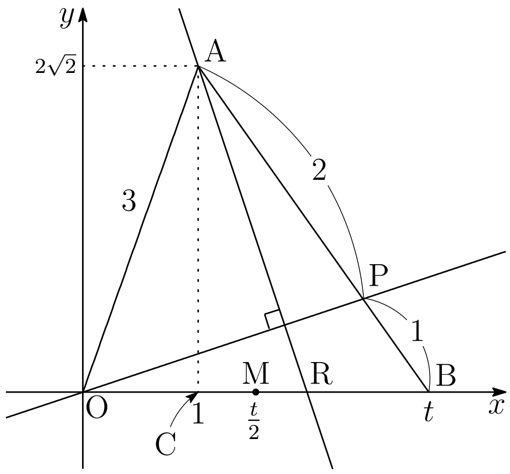
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{OCA}=90^\circ$ より　$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OC}^2}=2\sqrt{2}$

3 点 O，A，B を座標平面上の点として

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\quad \mathrm{A}(1,\ 2\sqrt{2}),\quad \mathrm{B}(t,\ 0)$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2\sqrt{2}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(t,\ 0)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t}$$



(2) 点 P は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから　$\mathrm{P}\left(\dfrac{2t+1}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$t>0$ に注意すると，直線 OP の傾きは　$\dfrac{2\sqrt{2}}{2t+1}$

点 $\mathrm{A}(1,\ 2\sqrt{2})$ を通り，直線 OP に垂直な直線の方程式は

$$y-2\sqrt{2}=-\frac{2t+1}{2\sqrt{2}}(x-1)$$

この直線と x 軸の交点が R であるから，$y=0$ とすると

$$-2\sqrt{2}=-\frac{2t+1}{2\sqrt{2}}(x-1)\quad \text{よって}\quad \mathrm{OR}=x=\boldsymbol{\frac{2t+9}{2t+1}}$$

(3) (2) の結果から $(t>0)$　$\dfrac{t}{2}\leqq\dfrac{2t+9}{2t+1}\leqq t$　ゆえに　$\begin{cases}2t^2-3t-18\leqq 0\\ 2t^2-t-9\geqq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{3-3\sqrt{17}}{4}\leqq t\leqq\frac{3+3\sqrt{17}}{4}\\ t\leqq\frac{1-\sqrt{73}}{4},\ \frac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\end{cases}$　$t>0$ より　$\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=x^3+3px^2+3mx$ より　　$f'(x)=3x^2+6px+3m$

$f(x)$ は $x=\alpha,\ \beta$ で極値をとるから，これらは $f'(x)=0$ の解である．
解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2p,\quad \alpha\beta=m \qquad (*)$$

したがって　　$f'(x)=3(x^2+2px+m)=3\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$
$=3(x-\alpha)(x-\beta)$

$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小であるから，下の増減表より　$\alpha<\beta$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\begin{aligned} f(\alpha)-f(\beta)&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx=3\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta) \\ &=3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

$\alpha,\ \beta$ は $f'(x)=0$ の実数解であるから $(\alpha<\beta)$，$(*)$ より

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4p^2-4m}=2\sqrt{p^2-m}$$

よって　　$f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{1}{2}\{2\sqrt{p^2-m}\}^3=\boldsymbol{4(p^2-m)^{\frac{3}{2}}}$

(2) $f(\alpha)-f(\beta)=4$ のとき，(1) の結果から

$$4(p^2-m)^{\frac{3}{2}}=4 \quad \text{ゆえに} \quad p^2-m=1 \quad \cdots①$$

$f''(x)=6x+6p$ であるから，$f''(x)=0$ を解くと　$x=-p$
① より，$m=p^2-1$ であるから　$f(x)=x^3+3px-2+3(p^2-1)x$

$$f(-p)=(-p)^3+3p^2(-p)+3(p^2-1)(-p)=-p^3+3p$$

したがって，変曲点は　　$(-p,-p^3+3p)$

この変曲点の軌跡を $(x,\ y)$ を用いると　$x=-p,\ y=-p^3+3p$

第 1 式から $p=-x$ を第 2 式に代入すると (p はすべての実数)，
変曲点の軌跡の方程式は

$$y=-(-x)^3+3(-x) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=x^3-3x}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ 3 点 O(0, 0, 0)，A(0, 1, 1)，P(x, y, 0) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = (0, -1, -1), \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x,\ y-1, -1)$$

$\angle\mathrm{OAP} = 30^\circ$ かつ $y \geqq 0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = |\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos 30^\circ$ より

$$2 - y = \sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{2}(2-y) = \sqrt{3}\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}$$

両辺を平方して整理すると

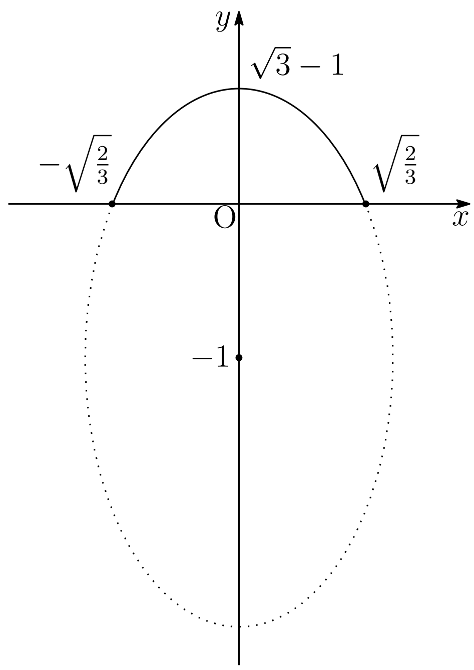
$$3x^2+y^2-2y-2=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2+\frac{(y+1)^2}{3}=1$$

$x=\cos\theta$，$y+1=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと，$y=\sqrt{3}\sin\theta-1 \geqq 0$ より

$$\sin\theta \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす鋭角 α を用いると，θ のとり得る値の範囲は

$$\alpha \leqq \theta \leqq \pi - \alpha$$



$x+1=\cos\theta+1$，$y+1=\sqrt{3}\sin\theta$ より，関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta+1) \qquad (\alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \sqrt{3}\{\cos\theta(\cos\theta+1)-\sin^2\theta\} \\ &= \sqrt{3}(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1) \end{aligned}$$

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3}}>\dfrac{1}{2}$ であるから，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$ に注意して

θ	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\pi-\alpha$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sqrt{3}\sin\alpha(\cos\alpha+1)=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}+1, \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{9}{4}, \\ f(\pi-\alpha) &= \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)=-\sqrt{\frac{2}{3}}+1 \end{aligned}$$

$f(\pi-\alpha)<f(\alpha)$ であるから　　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$**，最小値** $\boldsymbol{-\sqrt{\dfrac{2}{3}}+1}$

別解 1 点Pの表す図形は

$$x^2+\frac{(y+1)^2}{3}=1,\quad \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\leqq x\leqq\sqrt{\frac{2}{3}},\ 0\leqq y\leqq\sqrt{3}-1\right)$$

であるから，$(y+1)^2=3(1-x^2)$ より

$$(x+1)^2(y+1)^2=3(x+1)^2(1-x^2)=3(x+1)^3(1-x)$$

したがって

$$g(x)=3(x+1)^3(1-x)\quad \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\leqq x\leqq\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

とおくと

$$g'(x)=6(x+1)^2(1-2x)$$

x	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$g\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=3\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{2}+1\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=3\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$\sqrt{g(x)}$，すなわち，$(x+1)(y+1)$ のとりうる値の範囲は

$$1-\sqrt{\frac{2}{3}}\leqq(x+1)(y+1)\leqq\frac{9}{4}$$

よって　**最大値 $\boldsymbol{\frac{9}{4}}$，最小値 $\boldsymbol{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}$**

別解 2 点 P の表す図形を C とすると

$$C : y = -1 + \sqrt{3 - 3x^2} \qquad \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \leqq x \leqq \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

k を実数とし，$(x + 1)(y + 1) = k$ とおき $(x > -1)$，その図形を H とすると

$$H : y = \frac{k}{x + 1} - 1 \qquad (k > 0)$$

2 曲線 $C,\ H$ が共有点をもつ k の値の範囲を考える．

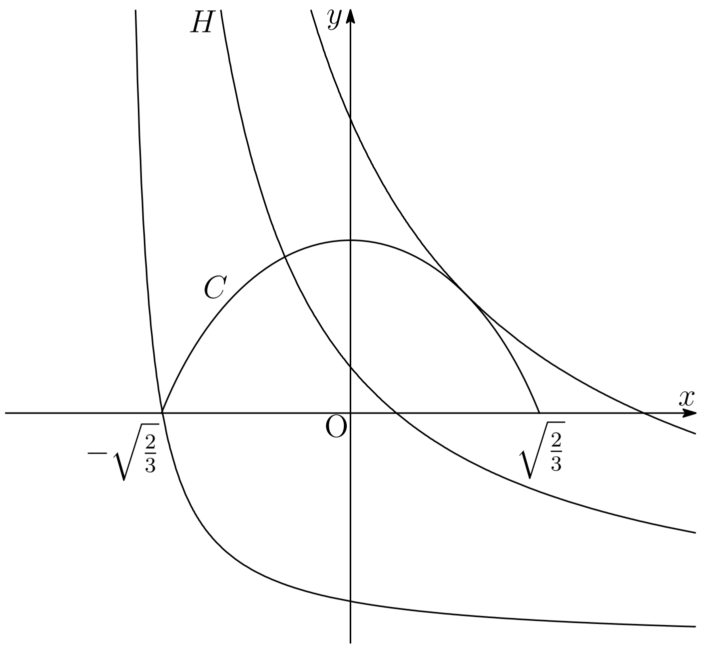
k が最小となるのは，H が点 $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\ 0 \right)$ を通るときで，k の最小値は

$$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \right)(0 + 1) = \boldsymbol{-\sqrt{\frac{2}{3}} + 1}$$

k が最大となるのは，2 曲線 $C,\ H$ が第 1 象限で接するときである．

C の関数を微分すると　$y' = -\dfrac{3x}{\sqrt{3 - 3x^2}}$

H の関数を微分すると　$y' = -\dfrac{k}{(x + 1)^2}$



C と H が接するときの接点の座標は，連立方程式

$$-1+\sqrt{3-3x^2}=\frac{k}{x+1}-1,\quad -\frac{3x}{\sqrt{3-3x^2}}=-\frac{k}{(x+1)^2}$$

の解である．それぞれ整理すると

$$\sqrt{3-3x^2}=\frac{k}{x+1},\quad \frac{3x}{\sqrt{3-3x^2}}=\frac{k}{(x+1)^2}$$

上の 2 式から k を消去すると

$$\frac{3x}{\sqrt{3-3x^2}}=\frac{\sqrt{3-3x^2}}{x+1}\quad \text{すなわち}\quad 2x^2+x-1=0$$

ゆえに　$(x+1)(2x-1)=0$　$x>-1$ であるから　$x=\dfrac{1}{2}$

これを C の方程式に代入すると，接点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

したがって，k の最大値は

$$\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

■

4 (1) $-\dfrac{1}{x^2} \leqq \dfrac{\sin x}{x^2} \leqq \dfrac{1}{x^2}$ であるから，$t>0$ に対し

$$-\int_t^{2t}\frac{dx}{x^2} \leqq \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}\,dx \leqq \int_t^{2t}\frac{dx}{x^2}$$

また，$\displaystyle\int_t^{2t}\frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_t^{2t} = \frac{1}{2t}$ であるから，$t>0$ のとき

$$-\frac{1}{t} < -\frac{1}{2t} \leqq \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}\,dx \leqq \frac{1}{2t} < \frac{1}{t}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}\,dx &= \int_t^{2t}\frac{(\sin x)'}{x}\,dx = \left[\frac{\sin x}{x}\right]_t^{2t} + \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}\,dx \\ &= \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}\,dx \qquad (*)\end{aligned}$$

$t>0$ より $\quad -\dfrac{3}{2t} = -\dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{t} \leqq \dfrac{\sin 2t}{2t} - \dfrac{\sin t}{t} \leqq \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{3}{2t}$

上式と (1) の結果の辺々を加えると

$$-\frac{5}{2t} < \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}\,dx < \frac{5}{2t} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より $\qquad -\dfrac{5}{2t} < \displaystyle\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{5}{2t}$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{5}{2t}\right) = 0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{5}{2t} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}\,dx = 0$$

(3) $2f(x) = 2\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = \cos x - \cos 2x$ より

$$2\int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^t \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_1^t \frac{\cos 2x}{x}\,dx \qquad \text{(A)}$$

ここで，$\displaystyle\int_1^t \frac{2x}{x}\,dx$ について，$y = 2x$ とおくと $\dfrac{dy}{dx} = 2$

x	$1 \longrightarrow t$
y	$2 \longrightarrow 2t$

$$\int_1^t \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \int_1^t \frac{\cos 2x}{2x}\,2dx = \int_2^{2t} \frac{\cos y}{y}\,dy = \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) より

$$\begin{aligned}
2\int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx &= \int_1^t \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx \\
&= \int_1^t \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{2t}^{2} \frac{\cos x}{x}\,dx \\
&= \int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_2^t \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{2t}^{2} \frac{\cos x}{x}\,dx \\
&= \int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{2t}^{t} \frac{\cos x}{x}\,dx \\
&= \int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx
\end{aligned}$$

したがって

$$\int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx$$

(2) の結果を利用すると

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$$

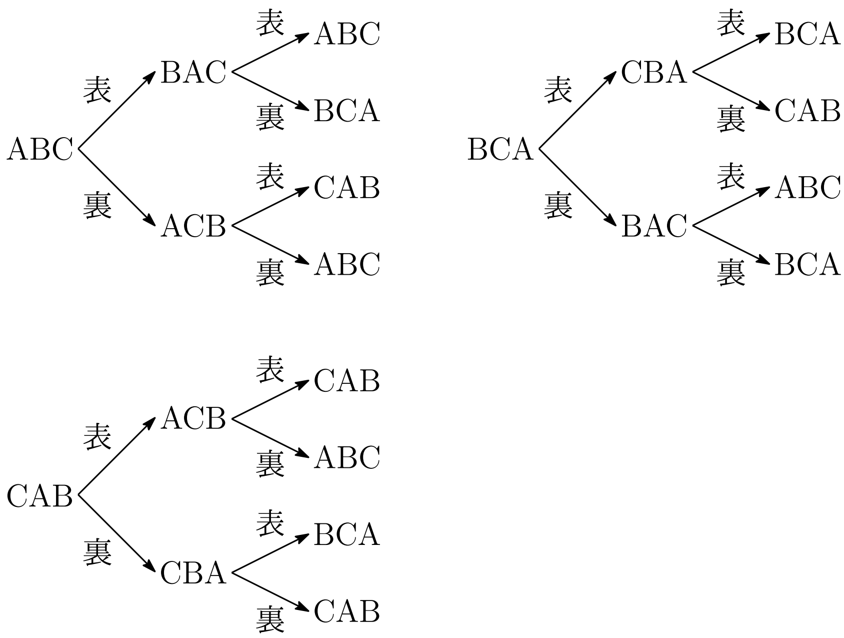
■

5 (1) コインを偶数回投げた後の文字の配列は $\{\mathrm{ABC},\ \mathrm{BCA},\ \mathrm{CAB}\}$ であり，
コインを奇数回投げた後の文字の配列は $\{\mathrm{ACB},\ \mathrm{BAC},\ \mathrm{CBA}\}$ である．
p_n，q_n と同様に，n 回投げた後の文字の配列が CAB である確率を r_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$
\begin{aligned}
&p_0 = 1,\ q_0 = r_0 = 0,\ p_1 = q_1 = r_1 = 0,\\
&p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n\\
&q_{n+2} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n\\
&r_{n+2} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n
\end{aligned}
$$

$p_{n+2} - q_{n+2} = \dfrac{1}{4}(p_n - q_n)$ であるから

$$p_{2k} - q_{2k} = (p_0 - q_0)\left(\frac{1}{4}\right)^k = \boldsymbol{\left(\frac{1}{4}\right)^k}$$



(2) n が偶数のとき

$$p_{n+2}+q_{n+2}+r_{n+2}=p_n+q_n+r_n=p_0+q_0+r_0=1$$

したがって

$$\begin{aligned}
p_{n+2}+q_{n+2}&=\frac{3}{4}p_n+\frac{3}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n\\
&=\frac{1}{4}(p_n+q_n)+\frac{1}{2}(p_n+q_n+r_n)\\
&=\frac{1}{4}(p_n+q_n)+\frac{1}{2}\\
p_{n+2}+q_{n+2}-\frac{2}{3}&=\frac{1}{4}\left(p_n+q_n-\frac{2}{3}\right)\\
p_n+q_n-\frac{2}{3}&=\left(p_0+q_0-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\\
p_n+q_n&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(1) の結果から

$$p_n-q_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$$

上の 2 式から q_n を消去すると

$$p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

よって $$\boldsymbol{p_n=\begin{cases}\mathbf{0} & (\boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数})\\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{n} & (\boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数})\end{cases}}$$

補足 $p_n=\dfrac{1+(-1)^n}{6}\left\{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ と表記してもよい.

同様に p_n を消去すると　$q_n=\dfrac{1+(-1)^n}{6}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}$

また，$p_n+q_n+r_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ であるから

$$r_n=\frac{1+(-1)^n}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$$

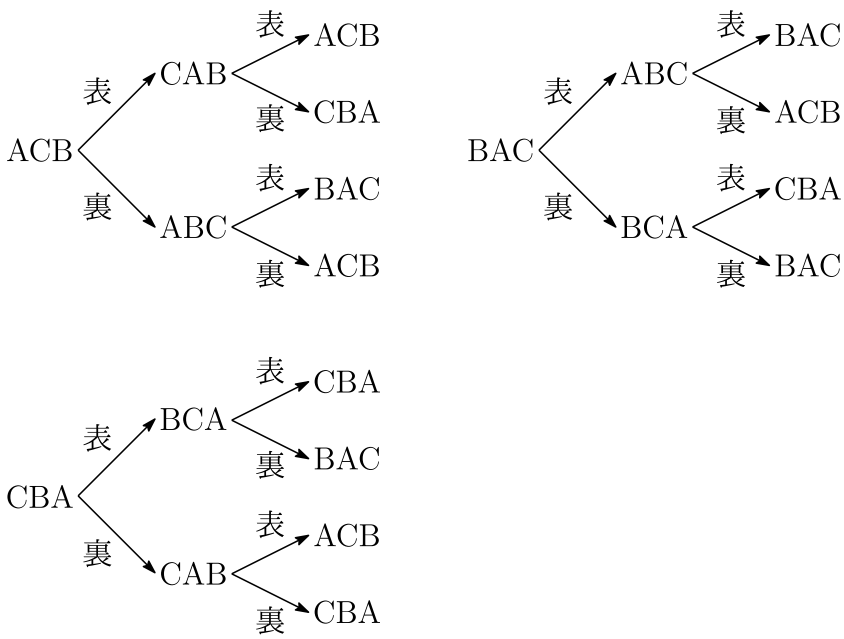
コインを n 回投げた後の文字の配列が ACB, BAC, CBA である確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned}
&a_0 = b_0 = c_0 = 0,\ a_1 = b_1 = \frac{1}{2},\ c_1 = 0, \\
&a_{n+2} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\
&b_{n+2} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\
&c_{n+2} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n
\end{aligned}$$

$a_{n+2} - b_{n+2} = \dfrac{1}{4}(a_n - b_n)$，$a_0 - b_0 = 0$，$a_1 - b_1 = 0$ であるから　$a_n = b_n$

n を奇数とすると

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n) \\
a_{n+2} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4} \\
a_{n+2} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{1}{3}\right) \\
a_n - \frac{1}{3} &= \left(a_1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} \\
a_n &= \frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}
\end{aligned}$$



n が整数のとき　$a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{6}\left\{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

$a_n = b_n$，$a_n + b_n + c_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ であるから

$$a_n = b_n = \frac{1-(-1)^n}{6}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\},$$
$$c_n = \frac{1-(-1)^n}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

■