令和６年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

1 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3} \quad (x \geqq 0)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) における実数解を a_n とおくとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

2 α，β を複素数とし，複素数 z に対して

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

とおく．α，β は

$$|f(1) - 3| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i) - 1| \leqq 3$$

を満たしながら動く．ただし，i は虚数単位である．

(1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

(2) $f(1+i) = 0$ であるとき，α，β の値を求めよ．

3 空間内の 2 直線 ℓ，m はねじれの位置にあるとする．ℓ と m の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

4 $a > 1$ とする．xy 平面において，点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする．

(1) 円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1$，$y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする．(1) における V_1 について，$V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ．

5 自然数 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ のうち，n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする.

(1) 自然数 $a,\ b,\ c$ および相異なる素数 $p,\ q,\ r$ に対して，等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{nx} + \cos\dfrac{x}{3}$ を微分すると $(x \geqq 0)$

$$f_n'(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin x$$

$x \geqq 0$ のとき，$-\dfrac{n}{2}e^{nx} \leqq -\dfrac{n}{2}$，$-\dfrac{1}{3}\sin x \leqq \dfrac{1}{3}$ であるから

$$f_n'(x) \leqq -\frac{n}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(n - \frac{2}{3}\right) < 0$$

したがって，$f_n(x)$ は単調減少．

また，$f_n(0) = \dfrac{3}{2} > 0$，$f_n\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{\frac{3n}{2}\pi} < 0$ であるから，方程式

$$f_n(x) = 0$$

は，ただ1つの実数解 $x \in \left(0,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ をもつ．

(2) $f_n(a_n) = 0$ より　$1 - \dfrac{1}{2}e^{na_n} + \cos\dfrac{a_n}{3} = 0$

$$e^{na_n} = 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) \quad \text{ゆえに} \quad na_n = \log 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) \qquad (*)$$

$a_n \in \left(0,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ であるから，$\log 2 < \log 2\left(1 + \cos\dfrac{a_n}{3}\right) < \log 4$ に注意して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) = \mathbf{0}$$

これを $(*)$ に代入して　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = \mathbf{\log 4}$

■

2 (1) $$|f(1)-3| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i)-1| \leqq 3$$

上の2式に $f(z)=z^2+\alpha z+\beta$ をそれぞれ代入して整理すると

$$|\alpha+\beta-2| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |\alpha i+\beta-2| \leqq 3$$

$w_1=\alpha+\beta-2$，$w_2=\alpha i+\beta-2$ とおくと　$|w_1| \leqq 1$，$|w_2| \leqq 3$

α，β を w_1，w_2 で表すと

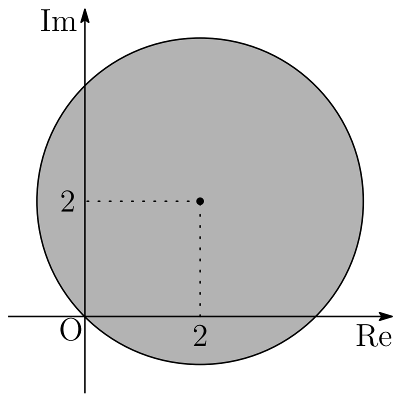
$$\alpha=\frac{1}{2}(1+i)(w_1-w_2), \quad \beta=\frac{1}{2}(1-i)w_1+\frac{1}{2}(1+i)w_2+2 \qquad (*)$$

$f(1+i)=(1+i)^2+\alpha(1+i)+\beta=(1+i)\alpha+\beta+2i$ に $(*)$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(1+i) &= \frac{1}{2}(1+i)^2(w_1-w_2)+\frac{1}{2}(1-i)w_1+\frac{1}{2}(1+i)w_2+2+2i \\ &= \frac{1}{2}(1+i)w_1+\frac{1}{2}(1-i)w_2+2+2i \end{aligned} \qquad (**)$$

$$\left|\frac{1}{2}(1+i)w_1\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|w_1| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left|\frac{1}{2}(1-i)w_2\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|w_2| \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$f(1+i)$ は中心 $2+2i$，半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ の円の内部で境界線を含む．



(2) $(**)$ より

$$\frac{1}{2}(1+i)w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right), \quad \frac{1}{2}(1-i)w_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

ゆえに　　$w_1=-1$，$w_2=-3i$

これを $(*)$ に代入して　　$\boldsymbol{\alpha=-2+i,\ \beta=3-i}$ ■

3 2 直線 ℓ, m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とする．ℓ と m は平行ではないから，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}$ とし，2 直線 ℓ, m 上の定点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{n})$，$\mathrm{B}(\beta_1\vec{a}+\beta_2\vec{b}+\beta_3\vec{n})$ とする．

ℓ を含み，$\vec{n}$ に平行な平面 S のベクトル方程式は，媒介変数 s_1, s_2 を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s_1\vec{a}+s_2\vec{n} &= \alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{n}+s_1\vec{a}+s_2\vec{n}\\ &= (s_1+\alpha_1)\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+(s_2+\alpha_3)\vec{n}\end{aligned}$$

m を含み，$\vec{n}$ に平行な平面 T のベクトル方程式は，媒介変数 t_1, t_2 を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t_1\vec{b}+t_2\vec{n} &= \beta_1\vec{a}+\beta_2\vec{b}+\beta_3\vec{n}+t_1\vec{b}+t_2\vec{n}\\ &= \beta_1\vec{a}+(t_1+\beta_2)\vec{b}+(t_2+\beta_3)\vec{n}\end{aligned}$$

S と T の共通部分は

$$(s_1+\alpha_1)\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+(s_2+\alpha_3)\vec{n}=\beta_1\vec{a}+(t_1+\beta_2)\vec{b}+(t_2+\beta_3)\vec{n} \qquad (*)$$

これを整理すると

$$(s_1+\alpha_1-\beta_1)\vec{a}+(-t_1+\alpha_2-\beta_2)\vec{b}+(s_2-t_2+\alpha_3-\beta_3)\vec{n}=\vec{0}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ は，1 次独立であるから

$$s_1+\alpha_1-\beta_1=0, \quad -t_1+\alpha_2-\beta_2=0, \quad s_2-t_2+\alpha_3-\beta_3=0$$

上の 3 式から

$$s_1=\beta_1-\alpha_1, \quad t_1=\alpha_2-\beta_2, \quad s_2-t_2=\beta_3-\alpha_3 \qquad (**)$$

このとき，2 直線 ℓ, m 上の 2 定点 P，Q をそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s_1\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t_1\vec{b}$$

とおくと，2 平面 S, T の共通部分は，$(*)$，$(**)$ より

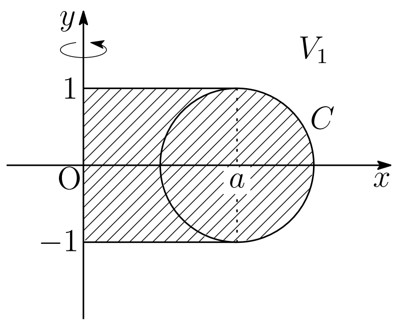
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s_2\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t_2\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s_2-t_2)\vec{n}=(\beta_3-\alpha_3)\vec{n}$$

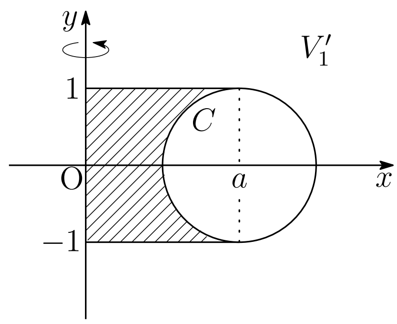
よって，ℓ と m の両方に直交する直線 PQ がただ 1 つ存在する．■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 円 $C: (x-a)^2+y^2=1$ より　$x^2=-(y+1)(y-1)-a^2+2ax$

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= -\int_{-1}^{1}(y+1)(y-1)\,dy - a^2\int_{-1}^{1}dy + 2a\int_{-1}^{1}x\,dy \\ &= \frac{1}{6}\cdot 2^3 - 2a^2 + 2a\left(2a+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (*) \\ &= \frac{4}{3}+2a^2+\pi a\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V_1=\pi\left(\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\right)}$





(2) 右上の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1' とすると，$(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1'}{\pi} &= \frac{1}{6}\cdot 2^3 - 2a^2 + 2a\left(2a-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4}{3}+2a^2-\pi a\end{aligned}$$

$V_2=V_1-V_1'$ であるから　$V_2=2\pi^2 a$

上式および (1) の結果を $V_1=2V_2$ に代入すると

$$\pi\left(\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\right)=2\times 2\pi^2 a$$

整理すると　$2a^2-3\pi a+\frac{4}{3}=0$　$\cdots$①

$f(a)=2a^2-3\pi a+\frac{4}{3}$ とすると　$f(1)=\frac{10}{3}-3\pi<0$

2 次方程式 $f(a)=0$ は 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつことに注意して，① を解くと

$$\boldsymbol{a=\frac{9\pi+\sqrt{81\pi^2-96}}{12}}$$

■

5 (1) $n=p^aq^br^c$ とする．

n 以下の自然数で p，q，r で割り切れる数の個数は，それぞれ

$$\frac{n}{p},\quad \frac{n}{q},\quad \frac{n}{r}$$

n 以下の自然数で pq，qr，rp で割り切れる数の個数は，それぞれ

$$\frac{n}{pq},\quad \frac{n}{qr},\quad \frac{n}{rp}$$

n 以下の自然数で pqr で割り切れる数の個数は

$$\frac{n}{pqr}$$

したがって [1]

$$\begin{aligned}
f(n) &= n-\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}+\frac{n}{r}\right)+\left(\frac{n}{pq}+\frac{n}{qr}+\frac{n}{rp}\right)-\frac{n}{pqr}\\
&= n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right) \qquad (*)\\
&= p^aq^br^c\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\\
&= p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)
\end{aligned}$$

(2) 次の (i)～(iv) を考える．

(i) $n=p^a$ のとき (p は素数，a は自然数)

$$f(n)=n-\frac{n}{p}=n\left(1-\frac{1}{p}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{f(n)}=\frac{p}{p-1}$$

上の第 2 式は整数で，p と $p-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p-1=1 \quad \text{ゆえに} \quad p=2$$

(ii) $n=p^aq^b$ のとき (p, q は素数 ($p<q$)，a, b は自然数)

$$f(n)=n-\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)+\frac{n}{pq}=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

したがって $\quad \dfrac{n}{f(n)}=\dfrac{pq}{(p-1)(q-1)}$

上式は整数で，p と $p-1$，q と $q-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p-1=1,\quad q-1=p \quad \text{ゆえに} \quad p=2,\quad q=3$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6(定理 3) を参照)

(iii) $n=p^aq^bq^c$ のとき ($p,\ q,\ r$ は素数 ($p<q<r$)，$a,\ b,\ c$ は自然数)，
(∗) より

$$\frac{n}{f(n)}=\frac{pqr}{(p-1)(q-1)(r-1)}$$

上式は整数で，p と $p-1$，q と $q-1$，r と $r-1$ はそれぞれ互いに素，$q-1,\ r-1$ はともに偶数であるから，上式は条件を満たさない．

(iv) n が 4 つ以上の素因数をもつとき，$n \geqq 2\cdot3\cdot5\cdot7=210$ となり，n が 100 以下の自然数であることに反する．

(i)〜(iv) より，求める 5 以上 100 以下の自然数 n は，整数 $a,\ b$ を用いて

$$n=2^a3^b \qquad (a \geqq 1,\ \ b \geqq 0)$$

で与えられる．これを満たす整数 $(a,\ b)$ の組は，次の 13 組

$$\begin{aligned}(a,\ b)=&(3,\ 0),\ (4,\ 0),\ (5,\ 0),\ (6,\ 0),\\ &(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1),(5,\ 1),\\ &(1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (3,\ 2),\\ &(1,\ 3)\end{aligned}$$

よって，求める n は

$$\boldsymbol{n=6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 32,\ 36,\ 48,\ 54,\ 64,\ 72,\ 96}$$

■