# 令和５年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
# 理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

**1** $n$ を 2 以上の自然数とする．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n} (-x)^{k-1} \right\} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

**2** 平面上の 3 点 O，A，B が

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1 \quad かつ \quad (2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする．

(1) $(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ．

(2) 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})| \leqq \frac{1}{3} \quad かつ \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \leqq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

**3** P を座標平面上の点とし，点 P の座標を $(a,\ b)$ とする．$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 $t$ のうち，曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(\mathrm{P})$ とする．$N(\mathrm{P}) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

**4** $a$，$b$ を $a^2+b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする．座標空間の点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ b)$ と点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ をとる．点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を $\alpha$ とし，平面 $\alpha$ と直線 AP との交点を Q とする．

(1) $(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$ をみたすように点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ が $xy$ 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 1個のさいころを $n$ 回投げて，$k$ 回目に出た目を $a_k$ とする．$b_n$ を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k} a_k$$

により定義し，$b_n$ が7の倍数となる確率を $p_n$ とする．

(1) $p_1$，$p_2$ を求めよ．

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $-x \neq 1$ に注意して

$$1+\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}=\frac{1}{x+1}-\frac{(-x)^n}{1+x}$$

したがって
$$\frac{1}{1+x}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{(-x)^n}{x+1}$$
$$(-1)^n\left\{\frac{1}{1+x}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}=\frac{x^n}{x+1} \quad \cdots ①$$

ここで，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}=\frac{1-x}{2(x+1)} \geqq 0$$
$$1-\frac{x}{2}-\frac{1}{x+1}=\frac{x(1-x)}{2(x+1)} \geqq 0$$

上の 2 式から
$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{x+1} \leqq 1-\frac{x}{2}$$
$$\frac{1}{2}x^n \leqq \frac{x^n}{x+1} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1} \quad \cdots ②$$

①，② から，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成立する．

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}$ とおくと，(1) の結果から

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n f(x) \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$
$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n\,dx \leqq (-1)^n\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx$$
$$\frac{1}{2(n+1)} \leqq (-1)^n\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)} \qquad (*)$$

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n} (-x)^{k-1} \right) dx \\
&= \Big[\ \log(x+1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\ \Big]_0^1 \\
&= \log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 - a_n \qquad (**)
\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(n+1)} &\leqq (-1)^n(\log 2 - a_n) \leqq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \\
-\frac{n}{2(n+1)} &\geqq (-1)^n n(a_n - \log 2) \geqq -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \qquad \text{(A)}
\end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n}{2(n+1)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{1}{2+\frac{2}{n}} \right\} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+\frac{4}{n}} \right\} = -\frac{1}{2}$$

(A) および上の 2 式から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n(a_n - \log 2) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

■

**2** (1)

$$(*)\begin{cases} |2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1 \\ (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{v}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}\vec{u}+\dfrac{1}{3}\vec{v}$

これらを $(*)$ に代入すると　$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$

$$\vec{u}\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}\right)=\frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

よって　$(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\mathbf{0}$

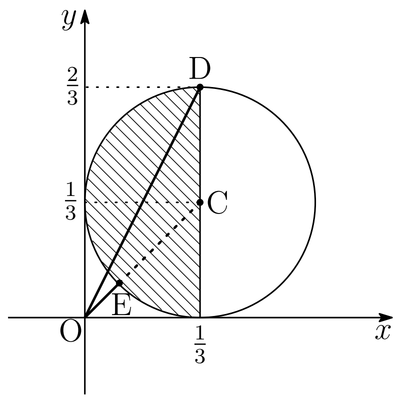
(2) 与えられた条件から

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}\right)\right|\leqq\frac{1}{3}\quad \text{かつ}\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u}\leqq\frac{1}{3}$$

(1) の結果から，$\vec{u}=(1,\ 0)$，$\vec{v}=(0,\ 1)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とおくと

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{9}\quad \text{かつ}\quad x\leqq\frac{1}{3}$$

点 P の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む.




上の図において　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|-|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y = \cos x$ を微分すると　$y' = -\sin x$

$y = \cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線の方程式は $(-\pi \leqq t \leqq \pi)$

$$y = (-\sin t)(x - t) + \cos t$$

この直線が点 $(a,\ b)$ を通るから

$$b = (-\sin t)(a - t) + \cos t$$

これを満たす実数 $t$ は，平面 $tu$ における曲線 $u = (-\sin t)(a - t) + \cos t$ と直線 $u = b$ の共有点の $t$ 座標に一致する．$f(t) = (-\sin t)(a - t) + \cos t$ とおくと

$$f'(t) = (t - a)\cos t$$

(i) $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(t)$ の増減表は

| $t$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2} + a$ | $\searrow$ | $\cos a$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2} - a$ | $\searrow$ | $-1$ |

$N(\mathrm{P}) = 4$ となる条件は，増減表から　$f(a) < b < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\cos a < b < \frac{\pi}{2} - a$$

(ii) $a = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(t)$ の増減表は

| $t$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\pi$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

増減表から，$N(\mathrm{P}) = 4$ を満たす点 $(a,\ b)$ は存在しない．

(iii) $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$ のとき，$f(t)$ の増減表は

| $t$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}+a$ | $\searrow$ | $\frac{\pi}{2}-a$ | $\nearrow$ | $\cos a$ | $\searrow$ | $-1$ |

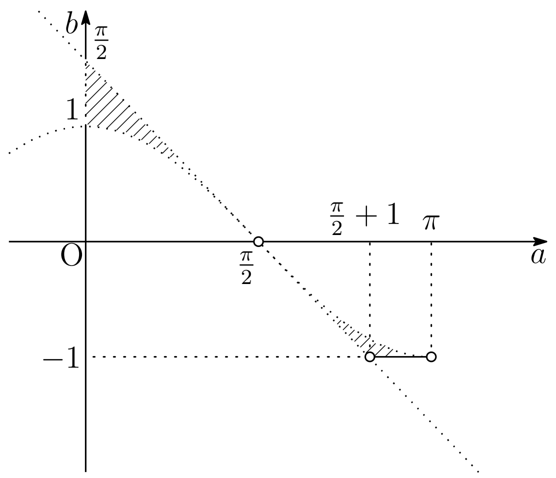
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \geqq f(\pi)$ のとき，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < b < f(a)$ より

$$\frac{\pi}{2} - a < b < \cos a$$

- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < f(\pi)$ のとき，$f(\pi) \leqq b < f(a)$ より

$$-1 \leqq b < \cos a$$

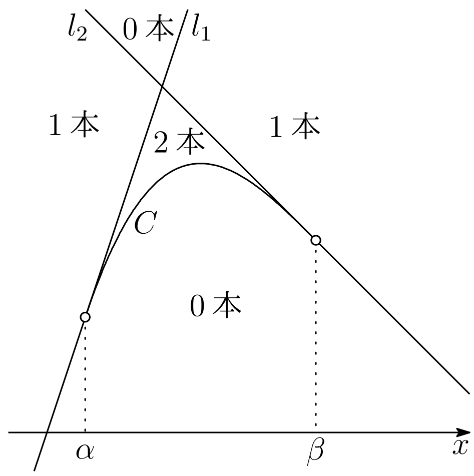
(i)〜(iii) から，点 $(a,\ b)$ の表す領域は，下の図の実線部分を含む斜線部分で，○および点線部分を含まない．




**補足** $y = \cos x$ の変曲点 $\left(\pm\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ により，次の 3 つの領域に分けて考える．

- 曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(-\pi, -1)$ と変曲点 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ における 2 接線によってできる領域
- 曲線 $y = \cos x$ 上の変曲点 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ における 2 接線によってできる領域
- 曲線 $y = \cos x$ 上の変曲点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ と点 $(\pi, -1)$ における 2 接線によってできる領域

**解説** 区間 $\alpha < x < \beta$ において，$f''(x)$ が常に定符号である曲線 $C : y = f(x)$ に引ける接線の本数は $(\alpha < x < \beta)$，$C$ および $x = \alpha,\ \beta$ における 2 本の接線 $l_1,\ l_2$ によって，下の図のようになる ($l_1,\ l_2$ 上の点から引ける接線の本数は 0 本).




$y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は $(\alpha < t < \beta)$

$$f'(t)(x - t) + f(t) - y = 0$$

この接線が点 $(p,\ q)$ を通るとき

$$f'(t)(p - t) + f(t) - q = 0$$

これから

$$\varphi(t) = f'(t)(p - t) + f(t) - q \qquad (*)$$

とおくと，方程式 $\varphi(t) = 0$ の解 $(\alpha < t < \beta)$ の個数は，点 $(p,\ q)$ から曲線 $C$ に引ける接線の本数と一致する．

$$\varphi'(t) = f''(t)(p - t)$$

$f''(t) < 0$ のとき，$\varphi(t)$ の増減表は

| $t$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $p$ | $\cdots$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\varphi(t)$ | $\varphi(\alpha)$ | $\searrow$ | $\varphi(p)$ | $\nearrow$ | $\varphi(\beta)$ |

たとえば，$\varphi(t) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき

$$\varphi(\alpha) > 0, \quad \varphi(p) < 0, \quad \varphi(\beta) > 0$$

$(*)$ より，このとき，$l_1$ の下側，$C$ の上側，$l_2$ の下側となる [1]． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf $\boxed{6}$ を参照

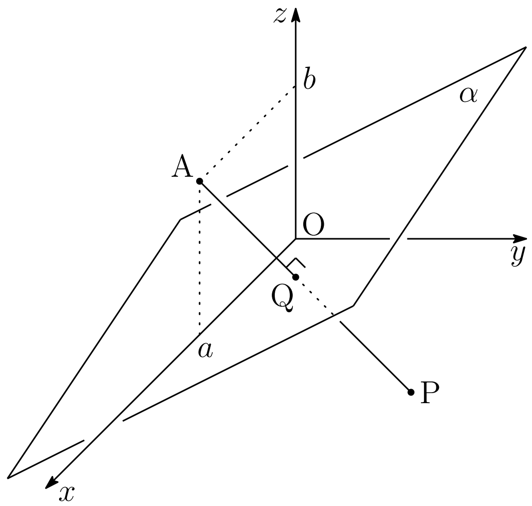
**4** (1) $\mathrm{AP}\perp\alpha$ で，直線 AP と平面 $\alpha$ との交点が Q であるから

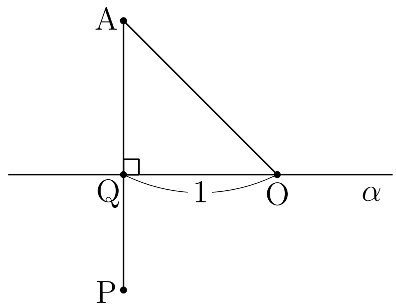
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\pm|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\quad\cdots②$

①，② より　$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}})^2=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$

よって　$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$




(2) $\mathrm{A}(a,\ 0,\ b)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=a^2+b^2-1$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(x-a)^2+y^2+b^2$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2=(ax-a^2-b^2)^2$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$(ax-a^2-b^2)^2=\{(x-a)^2+y^2+b^2\}(a^2+b^2-1)$$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{(b^2-1)x^2+(a^2+b^2-1)y^2+2ax-a^2-b^2=0}$$

**補足** $a^2+b^2-1>0$ であるから，$0<|b|<1$ のとき双曲線．$|b|=1$ のとき放物線，$|b|>1$ のとき楕円．■

$\boxed{5}$ (1) $b_1 = a_1$ より　$\boldsymbol{p_1 = 0}$

$b_2 = {a_1}^2 + a_2$，${a_1}^2 \not\equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$ {a_1}^2 + a_2 \equiv 0 \pmod 7 $$

を満たす $a_2$ がただ 1 つ存在する．よって　$\boldsymbol{p_2 = \dfrac{1}{6}}$

(2) $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k} a_k$ より

$$ \begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} {a_1}^{n+1-k} a_k = \sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= a_1 \sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k} a_k + a_{n+1} = a_1 b_n + a_{n+1} \end{aligned} $$

(i) $b_n \not\equiv 0 \pmod 7$ のとき，$a_1 b_n \not\equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$ a_1 b_n + a_{n+1} \equiv 0 \pmod 7 $$

となる $a_{n+1}$ がただ一つ定まる．

(ii) $b_n \equiv 0 \pmod 7$ のとき，$a_1 b_n \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$ a_1 b_n + a_{n+1} \not\equiv 0 \pmod 7 $$

(i)，(ii) および (1) の結果から，$\{p_n\}$ について，次の確率漸化式が成立する．

$$ p_1 = 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{6}(1 - p_n) $$

上の第 2 式から

$$ p_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_n - \frac{1}{7}\right) \quad \text{ゆえに} \quad p_n - \frac{1}{7} = \left(p_1 - \frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} $$

$p_1 = 0$ より　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{7}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$　■