令和４年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

1 r を正の実数とする．複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，

$$z + w = zw$$

を満たす点 w が描く図形を求めよ．

2 $\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ であることを示せ．

(2) $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とするとき，$f(\cos\alpha) = 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\cos\alpha$ は無理数であることを示せ．

3 正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える．t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ．

4 $f(x) = \log(x+1) + 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2) (1) の解を α とする．実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

(3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ．

(4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 座標平面において，t を媒介変数として

$$x = e^t \cos t + e^\pi, \quad y = e^t \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r $(r>0)$ の円周上を動くとき

$$\left|z-\frac{3}{2}\right|=r \quad \cdots ①$$

$z+w=zw$ より　$(w-1)z=w$　$w\neq 1$ であるから　$z=\dfrac{w}{w-1}$　$\cdots ②$

② を ① に代入すると　$\left|\dfrac{w}{w-1}-\dfrac{3}{2}\right|=r$

$$\left|\frac{2w-3(w-1)}{w-1}\right|=2r \quad \text{ゆえに} \quad \frac{|w-3|}{|w-1|}=2r \qquad (*)$$

(i) $2r=1$ のとき，w は 2 点 $1,\ 3$ の垂直二等分線であるから

$$\mathrm{Re}(w)=2$$

(ii) $2r\neq 1$ のとき，w は 2 点 $1,\ 3$ を $1:2r$ に内分および外分する 2 点

$$\frac{2r+3}{1+2r},\quad \frac{-2r+3}{1-2r}$$

を直径の両端とする円 (アポロニウスの円) である．w の中心は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2r+3}{1+2r}+\frac{-2r+3}{1-2r}\right)=\frac{3-4r^2}{1-4r^2}$$

w の半径は

$$\frac{1}{2}\left|\frac{2r+3}{1+2r}-\frac{-2r+3}{1-2r}\right|=\frac{4r}{|1-4r^2|}$$

(i)，(ii) より，w が描く図形は

$$\begin{cases} \boldsymbol{r=\dfrac{1}{2}} \textbf{のとき　直線 } \mathbf{Re}(\boldsymbol{w})=\mathbf{2} \\ \boldsymbol{r\neq\dfrac{1}{2}} \textbf{のとき } (\boldsymbol{r}>\mathbf{0}) \textbf{　中心} \dfrac{\mathbf{3-4}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{1-4}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}\textbf{，半径} \dfrac{\mathbf{4}\boldsymbol{r}}{|\mathbf{1-4}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}|} \textbf{の円} \end{cases}$$

別解 $(*)$ より　$|w-3|^2 = 4r^2|w-1|^2$

$$(w-3)(\overline{w}-3) = 4r^2(w-1)(\overline{w}-1)$$
$$(1-4r^2)w\overline{w} - (3-4r^2)(w+\overline{w}) + 9 - 4r^2 = 0 \qquad (**)$$

(i) $r = \dfrac{1}{2}$ のとき，これを $(**)$ に代入すると

$$w + \overline{w} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(w) = \frac{w+\overline{w}}{2} = 2$$

(ii) $r \neq \dfrac{1}{2}$ のとき $(r > 0)$，$(**)$ より

$$w\overline{w} - \frac{3-4r^2}{1-4r^2}(w+\overline{w}) = -\frac{9-4r^2}{1-4r^2}$$
$$\left|w - \frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right|^2 = \left(\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right)^2 - \frac{9-4r^2}{1-4r^2}$$
$$\left|w - \frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right|^2 = \frac{16r^2}{(1-4r^2)^2}$$
$$\left|w - \frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right| = \frac{4r}{|1-4r^2|}$$

(i)，(ii) より，w が描く図形は

$$\begin{cases} \boldsymbol{r = \dfrac{1}{2}}\textbf{のとき} \quad \mathbf{Re}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{2} \\ \boldsymbol{r \neq \dfrac{1}{2}}\textbf{のとき } (\boldsymbol{r > 0}) \quad \textbf{中心}\dfrac{\mathbf{3-4}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{1-4}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}\textbf{，半径}\dfrac{\mathbf{4}\boldsymbol{r}}{|\mathbf{1-4}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}|} \end{cases}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ より　$\cos 4\alpha = \cos\dfrac{8\pi}{7} = \cos\left(\dfrac{\pi}{7} + \pi\right) = -\cos\dfrac{\pi}{7}$

$$\cos 3\alpha = \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$$

よって　$\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$

別証 $\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ より，$7\alpha = 2\pi$ であるから

$$\cos 4\alpha = \cos(2\pi - 3\alpha) = \cos(-3\alpha) = \cos 3\alpha$$

(2) $\cos(n+1)\alpha = 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha$ より

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1, \\
\cos 3\alpha &= 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha \\
&= 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \\
\cos 4\alpha &= 2\cos\alpha\cos 3\alpha - \cos 2\alpha \\
&= 2\cos\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) - (2\cos^2\alpha - 1) \\
&= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1
\end{aligned}$$

$x = \cos\alpha$ とおいて $(x \neq 1)$，上の 2 式を (1) の等式に代入すると

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 4x^3 - 3x \quad ゆえに \quad (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) = 0$$

$x \neq 1$ であるから　　$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

よって，$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とすると　$f(\cos\alpha) = 0$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}
8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1 &= 0 \\
(2\cos\alpha)^3 + (2\cos\alpha)^2 - 2(2\cos\alpha) - 1 &= 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

$\cos\alpha$ を有理数と仮定すると，$2\cos\alpha$ も有理数であるから

$$2\cos\alpha = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素である正の整数})$$

とおいて，これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{p^3}{q^3} + \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q} - 1 = 0 \quad ゆえに \quad \frac{p^3}{q} = -p^2 + 2pq + q^2$$

上の第 2 式の右辺は整数であるから，$q = 1$ より

$$p^3 = -p^2 + 2p + 1 \quad ゆえに \quad p(p^2 + p - 2) = 1$$

$p = 1$ となるが，$p = 1$ は上式を満たさない．よって $\cos\alpha$ は無理数.

補足 $q = 1$ であることを示すと

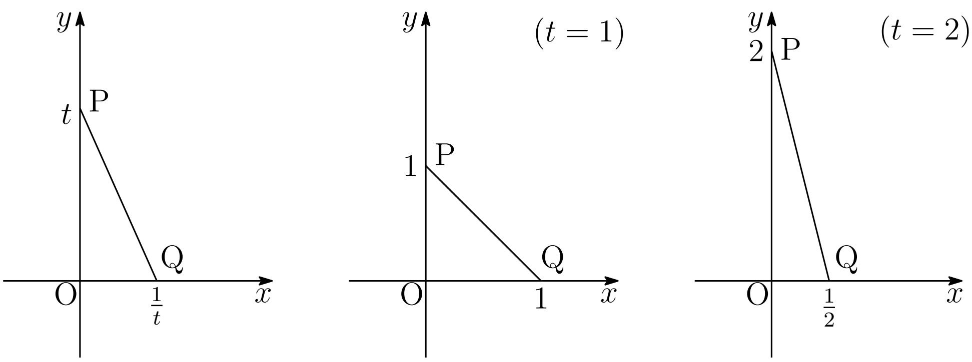
$$2\cos\alpha = p \quad ゆえに \quad \cos\alpha = \frac{p}{2}$$

$0 < \cos\alpha < 1$ より，$p = 1$ となり，$\cos\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ より矛盾. ■

$\boxed{3}$ 線分 PQ を表す方程式は $(1 \leqq t \leqq 2)$ $\quad y = -t^2x + t \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{t}\right)$

$f(t) = -t^2x + t \ (0 \leqq t \leqq 2)$ とおくと，線分 PQ が通過する領域は，点 Q が x 軸上で $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ にあることに注意すると

$$\begin{aligned} &0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad \min_{1 \leqq t \leqq 2} f(t) \leqq y \leqq \max_{1 \leqq t \leqq 2} f(t) \\ &\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} \quad 0 \leqq y \leqq \max_{1 \leqq t \leqq 2} f(t) \end{aligned}$$



$0 < x \leqq 1$ のとき $\quad f(t) = -x\left(t - \dfrac{1}{2x}\right)^2 + \dfrac{1}{4x}$

(i) $x = 0$ のとき，$f(t) = t$ より $\quad 1 \leqq y \leqq 2$

(ii) $2 \leqq \dfrac{1}{2x}$，すなわち，$0 < x \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき

$$f(1) \leqq y \leqq f(2) \quad \text{ゆえに} \quad -x + 1 \leqq y \leqq -4x + 2$$

(iii) $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{1}{2x} \leqq 2$，すなわち，$\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

(定義域の中央 $\dfrac{3}{2}$ が軸 $t = \dfrac{1}{2x}$ より左側にあるから，左端 $f(1)$ が最小値)

$$f(1) \leqq y \leqq f\left(\frac{1}{2x}\right) \quad \text{ゆえに} \quad -x + 1 \leqq y \leqq \frac{1}{4x}$$

(iv) $1 \leqq \dfrac{1}{2x} \leqq \dfrac{3}{2}$，すなわち，$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

(定義域の中央 $\dfrac{3}{2}$ が軸 $t = \dfrac{1}{2x}$ より右側にあるから，右端 $f(2)$ が最小値)

$$f(2) \leqq y \leqq f\left(\frac{1}{2x}\right) \quad \text{ゆえに} \quad -4x + 2 \leqq y \leqq \frac{1}{4x}$$

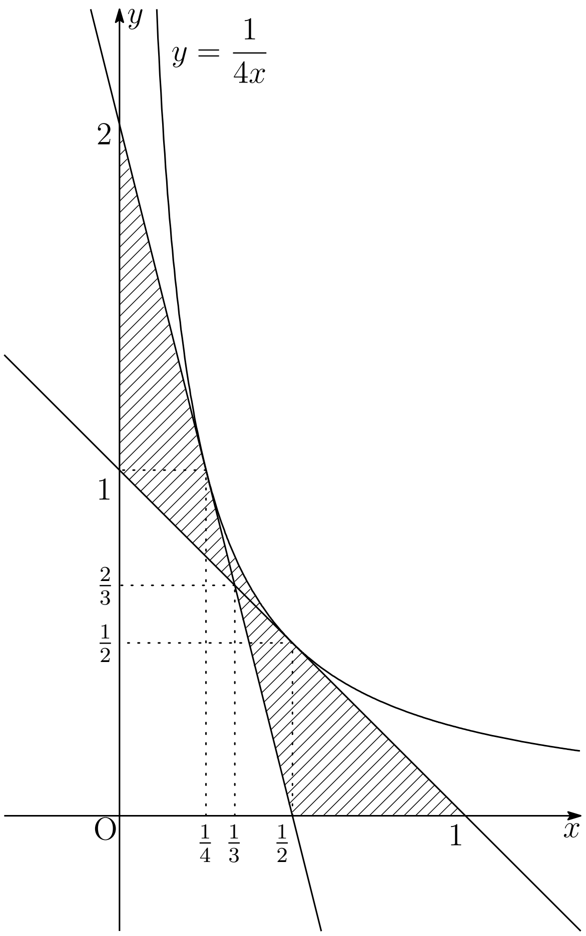
(v) $\dfrac{1}{2x} \leqq 1$，すなわち，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき

$$0 \leqq y \leqq f(1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq y \leqq -x+1$$

(i)〜(v) について，(i) と (ii) をまとめると次のようになる．

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{4} \text{ のとき} & -x+1 \leqq y \leqq -4x+2 \\ \dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{3} \text{ のとき} & -x+1 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4x} \\ \dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & -4x+2 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4x} \\ \dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} & 0 \leqq y \leqq -x+1 \end{cases}$$

求める領域は，下の図の境界線を含む斜線部分である．



$\boxed{4}$ (1) $g(x) = x - f(x)$ とおくと $(x > 0)$

$$g(x) = x - \log(x+1) - 1,$$
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$$

$g(x)$ は単調増加関数である．

$$g(0) = -1 < 0, \quad g(e^2 - 1) = e^2 - 4 = (e+2)(e-2) > 0$$

$g(x) = 0$，すなわち，$f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつ．

(2) $f(x) = \log(x+1) + 1$ より，$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$，$f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$x > 0$ において，$f'(x) > 0$，$f''(x) < 0$ より，$f(x)$ は単調増加，$f'(x)$ は単調減少である．$0 < x < \alpha$ を満たすとき

$$f(x) < f(\alpha) = \alpha \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} > 0 \qquad \text{(A)}$$

また，平均値の定理により

$$\frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} = f'(c), \quad x < c < \alpha$$

を満たす c が存在する．$x < c$ より $f'(x) > f'(c)$ であるから

$$\frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x) \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) より

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x) \qquad \text{(証終)}$$

別証 $f''(x) < 0$ を利用する．

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(x) &= \int_x^\alpha f'(t)\,dt = \int_x^\alpha (t-\alpha)' f'(t)\,dt \\ &= \Big[(t-\alpha)f'(t)\Big]_x^\alpha - \int_x^\alpha (t-\alpha)f''(t)\,dt \\ &= (\alpha - x)f'(x) + \int_x^\alpha (\alpha - t)f''(t)\,dt \\ &< (\alpha - x)f'(x) \end{aligned}$$

(3) すべての自然数 n について，$(*)$ $1 \leqq x_n < \alpha$ が成立することを示す．

［1］ $n = 1$ のとき，$x_1 = 1$ より，$(*)$ は成立する．

［2］ $n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．
$f(x)$ が単調増加であるから，$1 \leqq x_n < \alpha$ より

$$f(1) \leqq f(x_n) < f(\alpha) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < \log 2 + 1 \leqq x_{n+1} < \alpha$$

よって，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．　(証終)

$x = x_n$ として，(2) の結論を利用すると

$$0 < \frac{\alpha - f(x_n)}{\alpha - x_n} < f'(x_n)$$

$f'(x)$ が単調減少であることと $1 \leqq x_n$ により

$$0 < \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} < f'(x_n) \leqq f'(1) = \frac{1}{2} \qquad (**)$$

よって　$\dfrac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} < \dfrac{1}{2}$

(4) $(**)$ より　$0 < \alpha - x_{n+1} < \dfrac{1}{2}(\alpha - x_n)$

したがって　$0 < \alpha - x_n < (\alpha - 1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\alpha - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha - x_n) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

■

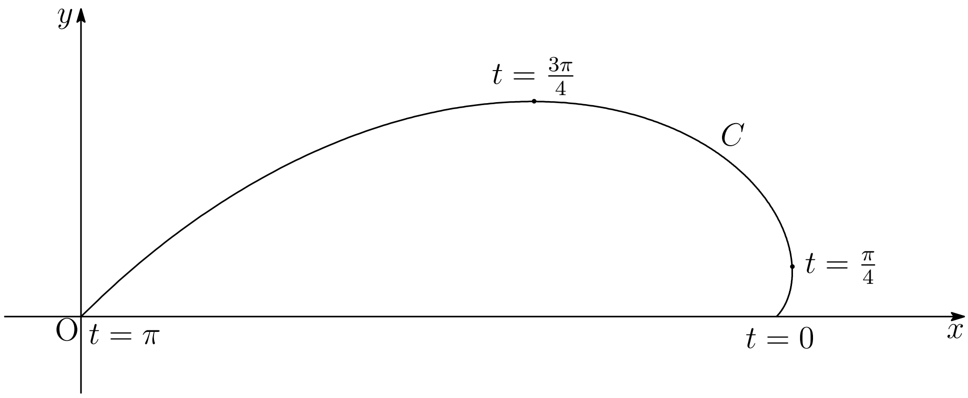
$\boxed{\mathbf{5}}$ $C : x = e^t \cos t + e^{\pi},\ y = e^t \sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) = \sqrt{2}e^t \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) = \sqrt{2}e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	(x_0, y_0)	$\cdots$	$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}})$	$\cdots$	$(x_{\frac{3\pi}{4}}, y_{\frac{3\pi}{4}})$	$\cdots$	$(0, 0)$

ただし　$(x_0, y_0) = (1 + e^{\pi},\ 0)$，$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}}) = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^{\pi},\ \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$，

$(x_{\frac{3\pi}{4}},\ y_{\frac{3\pi}{4}}) = \left(-\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^{\pi},\ \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$



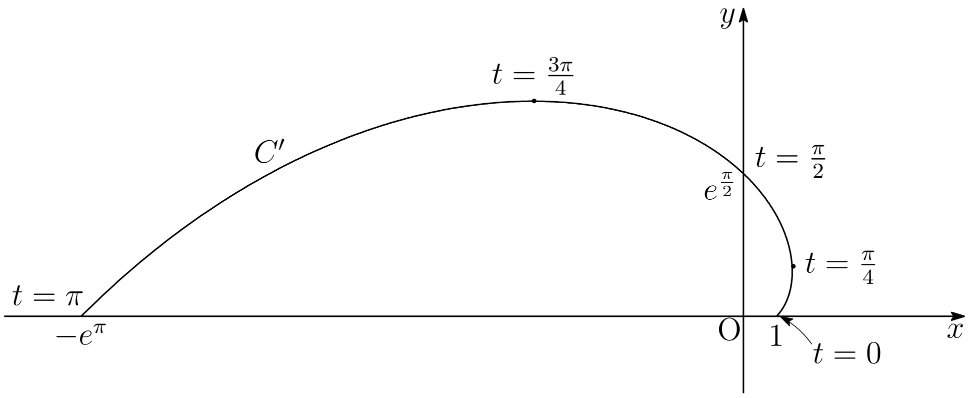
$x = f(t),\ y = g(t)$ とし，求める面積を S とすると

$$S = \int_{f(\pi)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx - \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx = -\int_{f(0)}^{f(\pi)} y\,dx$$
$$= -\int_0^{\pi} g(t)f'(t)\,dt = -\int_0^{\pi} e^t \sin t \cdot e^t(\cos t - \sin t)\,dt$$
$$= -\int_0^{\pi} e^{2t}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1 - \cos 2t}{2}\right)dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}(\sin 2t + \cos 2t - 1)\,dt$$
$$= -\frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}(\sin 2t - 1)\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}$$

別解 C を x 軸方向に $-e^{\pi}$ だけ平行移動させた曲線

$$C' : x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積を求めてもよい．



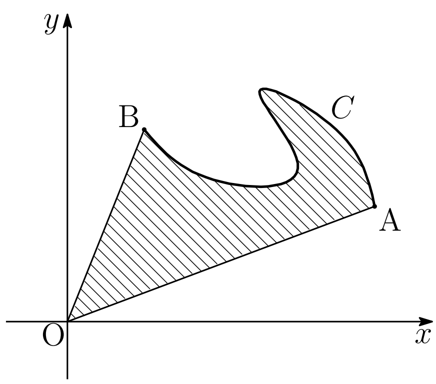
C' は O を極とする極方程式 $r = e^t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表されるから，その面積は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}$$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 $>$OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



本題は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

$$f(t)g'(t) - f'(t)g(t) = e^t\cos t\cdot e^t(\sin t + \cos t) - e^t(\cos t - \sin t)\cdot e^t\sin t = e^{2t}$$

したがって，求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}$$

補足 極座標 $x = r\cos t,\ y = r\sin t$ について $xy' - x'y = r^2$ であるから，ガウス・グリーンの定理により，極方程式における面積公式が導かれる．■