

令和3年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B

- 1 a, b を $ab < 1$ をみたす正の実数とする. xy 平面上の点 $P(a, b)$ から, 曲線 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) に2本の接線を引き, その接点を $Q\left(s, \frac{1}{s}\right)$, $R\left(t, \frac{1}{t}\right)$ とする. ただし, $s < t$ とする.

(1) s および t を a, b を用いて表せ.

(2) 点 $P(a, b)$ が曲線 $y = \frac{9}{4} - 3x^2$ 上の $x > 0, y > 0$ をみたす部分を動くとき, $\frac{t}{s}$ の最小値とそのときの a, b の値を求めよ.

- 2 空間内に, 同一平面上にない4点 O, A, B, C がある. s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ をみたす実数とする. 線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0 , 線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0 , 線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P , 線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする. さらに4点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるとする.

(1) t を s を用いて表せ.

(2) $|\vec{OA}| = 1, |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 2, \angle AOB = 120^\circ, \angle BOC = 90^\circ, \angle COA = 60^\circ, \angle POQ = 90^\circ$ であるとき, s の値を求めよ.

- 3 n を自然数とし, t を $t \geq 1$ をみたす実数とする.

(1) $x \geq t$ のとき, 不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x \, dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2} \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - pn) = q$ をみたすような実数 p, q の値を求めよ.

4 整数 a, b, c に関する次の条件 (*) を考える.

$$\int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \cdots (*)$$

- (1) 整数 a, b, c が (*) および $a \neq b$ をみたすとき, c は 3 の倍数であることを示せ.
- (2) $c = 3600$ のとき, (*) および $a < b$ をみたす整数の組 (a, b) の個数を求めよ.

5 次の問いに答えよ.

- (1) a を実数とする. x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち, $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ.
- (2) 自然数 n に対し, $x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく. t を $|t| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とする. このとき, 曲線 $C: y = \sin x$ 上の点 $P(t, \sin t)$ における接線が, 不等式 $x \geq \frac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は, t が x_1, x_2, x_3, \dots のいずれかと等しいことであることを示せ.

解答例

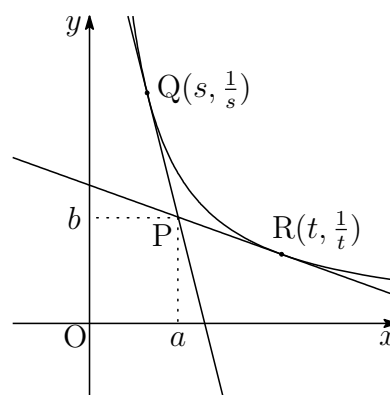
$$\boxed{1} \quad (1) \quad y = \frac{1}{x} \text{ より } y' = -\frac{1}{x^2}$$

曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 $Q\left(s, \frac{1}{s}\right)$ における接線は

$$y - \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}(x - s)$$

これが点 $P(a, b)$ を通るから

$$b - \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}(a - s)$$



$$s \text{ について整理すると } bs^2 - 2s + a = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に、曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 $R\left(t, \frac{1}{t}\right)$ についても次式を得る.

$$bt^2 - 2t + a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から, s, t ($s < t$) は 2 次方程式 $bu^2 - 2u + a = 0$ の解である.

このとき, $b > 0, D/4 = 1 - ab > 0$ に注意して

$$s = \frac{1 - \sqrt{1 - ab}}{b}, \quad t = \frac{1 + \sqrt{1 - ab}}{b}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{t}{s} = \frac{1 + \sqrt{1 - ab}}{1 - \sqrt{1 - ab}} = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - ab}} - 1$$

点 $P(a, b)$ は曲線 $y = \frac{9}{4} - 3x^2$ ($x > 0, y > 0$) の点であるから

$$a > 0, \quad (*) \quad b = \frac{9}{4} - 3a^2 > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ab = a \left(\frac{9}{4} - 3a^2 \right) = \frac{9}{4}a - 3a^3 \quad \text{より}$$

$$f(a) = \frac{9}{4}a - 3a^3 \quad \left(0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{とおくと} \quad f'(a) = \frac{9}{4} - 9a^2 = -9 \left(a + \frac{1}{2} \right) \left(a - \frac{1}{2} \right)$$

a	(0)	...	$\frac{1}{2}$...	$(\frac{\sqrt{3}}{2})$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$	(0)	↗	$\frac{3}{4}$	↘	(0)

ab が最大のとき, $\frac{t}{s}$ は最小となり, 最小値は

$$\frac{2}{1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4}}} - 1 = \mathbf{3}$$

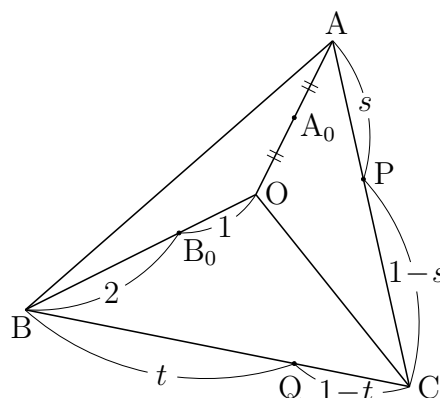
このとき, (*) より $\mathbf{a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}}$

- 2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$
 とすると, $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AC}$ より ($0 < s < 1$)

$$\vec{p} - \vec{a} = s(\overrightarrow{OC} - \vec{a})$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{OC} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{a} + \frac{1}{s}\vec{p}$$

点 Q は線分 BC を $t : (1-t)$ に内分する点であるから



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\left\{\left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{a} + \frac{1}{s}\vec{p}\right\} \\ &= t\left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + \frac{t}{s}\vec{p} \end{aligned}$$

$\vec{a} = 2\overrightarrow{OA_0}$, $\vec{b} = 3\overrightarrow{OB_0}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ であるから

$$\overrightarrow{OQ} = 2t\left(1 - \frac{1}{s}\right)\overrightarrow{OA_0} + 3(1-t)\overrightarrow{OB_0} + \frac{t}{s}\overrightarrow{OP}$$

点 Q は平面 A_0B_0P 上の点であるから

$$2t\left(1 - \frac{1}{s}\right) + 3(1-t) + \frac{t}{s} = 1 \quad \text{よって} \quad t = \frac{2s}{s+1}$$

- (2) 条件から $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos 90^\circ = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$\vec{p} = s\vec{c} + (1-s)\vec{a}$, $\vec{q} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$ について

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= \{s\vec{c} + (1-s)\vec{a}\} \cdot \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= s(1-t)\vec{b} \cdot \vec{c} + st|\vec{c}|^2 + (1-s)(1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-s)t\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 4st - (1-s)(1-t) + (1-s)t \\ &= 2t(s+1) + s - 1 \end{aligned}$$

(1) の結果および, $\angle POQ = 90^\circ$ より $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ であるから

$$2 \cdot \frac{2s}{s+1}(s+1) + s - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad s = \frac{1}{5}$$

3 (1) $f(x) = \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t)$, $g(x) = f(x) + \frac{(x-t)^2}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{xt}(x-t) \\ g'(x) &= f'(x) + x - t = -\frac{1}{xt}(x-t) + x - t \\ &= \frac{(xt-1)(x-t)}{xt} \end{aligned}$$

$x \geq t$ において ($t \geq 1$), $f(x)$ は単調減少, $g(x)$ は単調増加である.
 $f(t) = 0$, $g(t) = 0$ であるから, $x \geq t$ において

$$f(x) \leq 0, \quad g(x) = f(x) + \frac{(x-t)^2}{2} \geq 0$$

したがって
$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leq f(x) \leq 0$$

よって, $x \geq t$ のとき ($t \geq 1$), 次式が成立する.

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leq 0$$

別解 (部分積分法を用いた証明法)

$$\begin{aligned} \log x - \log t &= \int_t^x \frac{1}{u} du = \int_t^x (u-x)' \frac{1}{u} du \\ &= \left[(u-x) \frac{1}{u} \right]_t^x - \int_t^x (u-x) \left(-\frac{1}{u^2} \right) du \\ &= \frac{1}{t}(x-t) - \int_t^x \frac{x-u}{u^2} du \end{aligned}$$

したがって
$$\log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) = - \int_t^x \frac{x-u}{u^2} du \tag{A}$$

$1 \leq t \leq x$ であるから
$$0 \leq \int_t^x \frac{x-u}{u^2} du \leq \int_t^x (x-u) du$$

$$-\frac{(x-t)^2}{2} = \int_t^x (u-x) du \leq - \int_t^x \frac{x-u}{u^2} du \leq 0 \tag{B}$$

(A), (B) により, (1) の不等式が導かれる.

(2) (1) で示した不等式により

$$\begin{aligned} -\int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{(x-t)^2}{2} dx &\leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} (\log x - \log t) dx - \frac{1}{t} \int_t^{t+\frac{1}{n}} (x-t) dx \leq 0 \\ -\left[\frac{(x-t)^3}{6} \right]_t^{t+\frac{1}{n}} &\leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{t} \left[\frac{(x-t)^2}{2} \right]_t^{t+\frac{1}{n}} \leq 0 \\ -\frac{1}{6n^3} &\leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2} \leq 0 \end{aligned}$$

(3) (2) で不等式において, $t = 1 + \frac{k}{n}$ とすると

$$-\frac{1}{6n^3} \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) - \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leq 0$$

辺々に $-n$ を掛けると

$$0 \leq \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) - n \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x dx + \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leq \frac{1}{6n^2}$$

上式について, $k=0$ から $k=n-1$ までの総和をとると

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) - n \int_1^2 \log x dx + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leq \frac{1}{6n}$$

$p = \int_1^2 \log x dx$ とおくと

$$p = \int_1^2 \log x dx = \left[x(\log x - 1) \right]_1^2 = 2 \log 2 - 1$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \text{ より } 0 \leq a_n - pn + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leq \frac{1}{6n} \quad \dots (*)$$

$-q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ とおくと

$$q = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = -\frac{1}{2} \left[\log(1+x) \right]_0^1 = -\frac{\log 2}{2}$$

(*) において, $n \rightarrow \infty$ とすると, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - pn - q) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - pn) = q$$

よって $p = 2 \log 2 - 1, \quad q = -\frac{\log 2}{2}$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad \int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \cdots (*)$$

$$(*) \text{ より } \int_a^b x^2 dx + b \int_a^c x dx - a \int_b^c x dx = 0$$

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \frac{b}{2}(c^2 - a^2) - \frac{a}{2}(c^2 - b^2) = 0$$

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \frac{c^2}{2}(b - a) + \frac{ab}{2}(b - a) = 0$$

$$a \neq b \text{ であるから } 2(a^2 + ab + b^2) + 3c^2 + 3ab = 0$$

$$\text{したがって } (2a + b)(a + 2b) = -3c^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{上式より } 2a + b \equiv 0 \quad \text{または} \quad a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(2a + b) + (a + 2b) = 3(a + b) \text{ であるから}$$

$$2a + b \equiv 0, \quad a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \frac{2a + b}{3} \cdot \frac{a + 2b}{3} = -\frac{c^2}{3} \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$\textcircled{1}'$ の左辺は整数より、 c^2 は 3 で割り切れるから、 c は 3 の倍数である。

$$(2) \quad \frac{2a + b}{3} = A, \quad \frac{a + 2b}{3} = B \text{ とおくと } (A, B \text{ は整数})$$

$$a = 2A - B, \quad b = -A + 2B$$

$$c = 3600 \text{ のとき, } \textcircled{1}' \text{ より } AB = -2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \quad \cdots (**)$$

$$b - a = 3(B - A) \text{ であるから, } a < b \text{ より } A < 0 < B$$

よって、(**) を満たす組 (A, B) の個数は

$$(8 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = \mathbf{180} \text{ (個)}$$

5 (1) $f(x) = x - \tan x$ とおくと $f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \leq 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = -\infty$$

$f(x)$ は、区間 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ において単調減少で、 $-\infty < f(x) < \infty$ であるから、実数 a に対して

$$f(x) = a \quad \text{すなわち} \quad x - \tan x = a$$

を満たす x ($|x| < \frac{\pi}{2}$) がちょうど 1 個ある。

- (2) $C: y = \sin x$ より、 $y' = \cos x$ であるから、 C 上の点 $P(t, \sin t)$ における接線と点 $Q(u, \sin u)$ における接線は、それぞれ

$$y = x \cos t - t \cos t + \sin t, \quad y = x \cos u - u \cos u + \sin u$$

これらの 2 直線が一致するとき、 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \leq u$ を満たす t, u が存在する、すなわち

(A) $\cos t = \cos u, \quad -t \cos t + \sin t = -u \cos u + \sin u, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \leq u$
を満たす t, u が存在する。

これと次が同値であることを示せばよい。

(B) $f(x) = n\pi$ ($|x| < \frac{\pi}{2}$) の解を x_n とすると、 t は x_1, x_2, x_3, \dots のいずれかと等しい。

(A) \implies (B) を示す。(A) の第 1 式より

(i) $u = t + 2l\pi$ (l は自然数) または (ii) $u = -t + 2m\pi$ (m は自然数)

(i) のとき、 $\sin u = \sin t, \cos u = \cos t$ を (A) の第 2 式に代入すると

$$-t \cos t + \sin t = -u \cos t + \sin t \quad \text{ゆえに} \quad (u - t) \cos t = 0$$

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ より、 $\cos t \neq 0$ であるから、 $u = t$ となり不適。

(ii) のとき、 $\sin u = -\sin t, \cos u = \cos t$ を (A) の第 2 式に代入すると

$$-t \cos t + \sin t = -u \cos t - \sin t \quad \text{ゆえに} \quad u \cos t = t \cos t - 2 \sin t$$

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ より、 $\cos t \neq 0$ であるから $u = t - 2 \tan t$

$$u = -t + 2m\pi \text{ を代入すると } -t + 2m\pi = t - 2 \tan t$$

整理すると $t - \tan t = m\pi$ すなわち $f(t) = m\pi$

(B) \implies (A) は、(ii) の証明を逆に辿ればよい。(証終)