令和２年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

1 関数

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geqq 0)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $f(x)$ とその導関数の極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

をそれぞれ求めよ．ただし，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることを用いてよい．

(3) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない．

2 1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k = 1$，出た目が 2 の場合は $X_k = -1$，その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする．

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき，Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ を Z_n で表す．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) Z_2 が実数でない確率を求めよ．

(2) Z_1，Z_2，Z_3，$\cdots$，Z_n がいずれも実数でない確率を求めよ．

(3) Z_n が実数となる確率を p_n とする．p_n を n を用いて表し，極限 $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を 2 以上の自然数とする．三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す．$\angle \mathrm{ACB} = n\angle \mathrm{ABC}$ であるとき，$c < nb$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ t を正の実数とする．xy 平面において，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad xy \leqq 1, \quad x + y \leqq t$$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく．極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S(t) - 2\log t)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す．三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．以下の問いに答えよ．

(1) a の値を固定して b の値を変化させるとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．これを示せ．

(2) a，b の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える a，b の値をそれぞれ求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x \geqq 0$ より，$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} > 0$ であるから，$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log f(x) = \frac{1}{x+1}\log(x+1) \qquad \text{(A)}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{(x+1)^2}\log(x+1) + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2} \qquad \text{(B)}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

よって　　最大値 $\boldsymbol{f(e-1) = e^{\frac{1}{e}}}$

(2) (A) より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$　　よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = 1}$

上式および (B) より

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \frac{f(x)}{x+1}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{\log(x+1)}{x+1}\right) = \mathbf{0}$$

補足 $g(x) = 2(\sqrt{x+1}-1) - \log(x+1)$ とおくと $(x \geqq 0)$　$g'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+1}$

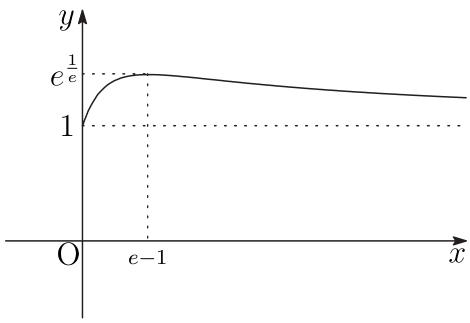
$g(0) = 0$，$x > 0$ において $g'(x) > 0$ であるから　$g(x) \geqq 0$ $(x \geqq 0)$

ゆえに　$x \geqq 0$ において　$0 \leqq \dfrac{\log(x+1)}{x+1} \leqq \dfrac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} \leqq \lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+1}\right) = 0$$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$

(3) (1)，(2) の結果から，$y = f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



2 (1) Z_2 が実数となるのは

$$(X_1,\ X_2) = (0,\ 0),\ (1, -1),\ (-1,\ 1)$$

したがって，Z_2 が実数である確率は

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $X_1 = 1$ または $X_1 = -1$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ とすると

$S_n = 1$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = 1) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

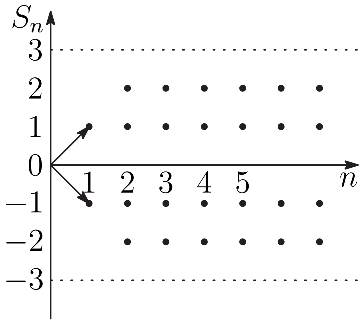
$S_n = 2$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = -1) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$S_n = -1$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = -1) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$S_n = -2$ のとき，$P(X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = 1) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$



(3) 法 3 について

$$p_n = P(S_n \equiv 0),\quad q_n = P(S_n \equiv 1),\quad r_n = P(S_n \equiv 2)\quad (\mathrm{mod}\ 3)$$

とすると，$p_1 = \frac{4}{6}$，$p_{n+1} = \frac{4}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n$ であるから

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}(p_n + q_n + r_n)\quad ゆえに\quad p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}$$

したがって　$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$　ゆえに　$p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

これから　$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$　よって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $C = \angle\mathrm{ACB}$，$B = \angle\mathrm{ABC}$ とする．正弦定理により $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$C = nB$ であるから $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin nB}$ ゆえに $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin nB}{\sin B}$ $\cdots$①

$B + C < \pi$，$C = nB$ $(n \geqq 2)$ より，$B < \dfrac{\pi}{n+1} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，B は鋭角

$0 < B < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，2 以上の自然数 n について

$$\frac{\sin nB}{\sin B} < n \quad \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法で示す.

［1］$n = 2$ のとき，$(*)$ より

$$\frac{\sin 2B}{\sin B} = \frac{2\sin B\cos B}{\sin B} = 2\cos B < 2$$

このとき，$(*)$ は成立する.

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると $\dfrac{\sin kB}{\sin B} < k$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(k+1)B}{\sin B} &= \frac{\sin kB\cos B + \cos kB\sin B}{\sin B}\\ &= \frac{\sin kB}{\sin B}\cdot\cos B + \cos kB\\ &< k\cdot 1 + 1 = k + 1\end{aligned}$$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する.

［1］,［2］より，2 以上の自然数 n について，$(*)$ は成立する.

① および $(*)$ により

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin nB}{\sin B} < n \quad \text{よって} \quad c < nb$$

別解 $f(\theta) = n\sin\theta - \sin n\theta$ とおくと $\left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{n}\right)$

$$f'(\theta) = n\cos\theta - n\cos n\theta = n(\cos\theta - \cos n\theta)$$

$n \geqq 2$ のとき，$0 < \theta < n\theta < \pi$ において，$\cos n\theta < \cos\theta$ であるから

$$f'(\theta) > 0$$

$f(0)=0$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，$0<\theta<n\theta<\pi$ において

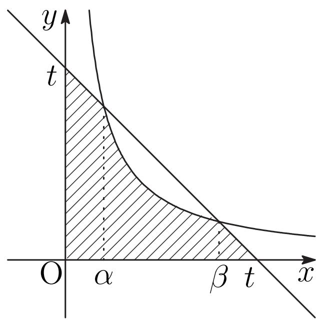
$$f(\theta)=n\sin\theta-\sin n\theta>0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}<n \quad \cdots(**)$$

条件から，$B+C<\pi$，$C=nB\ (n\geqq 2)$ より，$B<\dfrac{\pi}{n+1}<\dfrac{\pi}{n}$

$\theta=B$，$n\theta=C$ とおくと，①，$(**)$ より

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin nB}{\sin B}<n \quad \text{よって} \quad c<nb$$

$\boxed{4}$ 曲線 $xy=1$ と直線 $x+y=t\ (t>2)$ の 2 式から，y を消去すると



$$x(t-x)=1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-tx+1=0$$

この方程式の解を α, β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}, \quad \beta=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2},$$
$$\alpha+\beta=t, \quad \alpha\beta=1, \quad \beta-\alpha=\sqrt{t^2-4}$$

曲線 $xy=1$ と直線 $x+y=t$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left(t-x-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\,tx-\frac{x^2}{2}-\log x\,\right]_\alpha^\beta\\&=t(\beta-\alpha)-\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\log\frac{\beta}{\alpha}=(\beta-\alpha)\left(t-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\log\frac{\beta^2}{\alpha\beta}\\&=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}-2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\end{aligned}$$

$S(t)=\dfrac{t^2}{2}-S$ より，$S(t)=\dfrac{t(t-\sqrt{t^2-4})}{2}+2\log\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}S(t)-2\log t&=\frac{t(t-\sqrt{t^2-4})}{2}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}-2\log t\\&=\frac{2t}{t+\sqrt{t^2-4}}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2t}\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S(t)-2\log t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{t^2}}}+2\log\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{t^2}}}{2}\right)$

$$=\frac{2}{1+1}+2\log\frac{1+1}{2}=\mathbf{1}$$

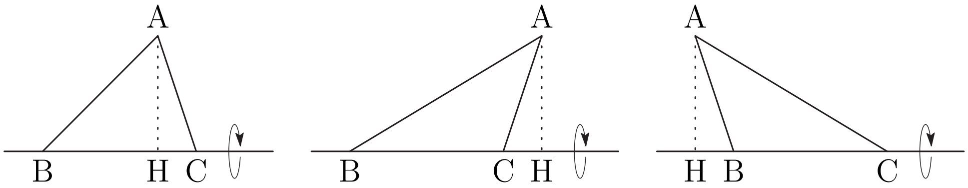
$\boxed{5}$ (1) 点 A から直線 BC に垂線 AH を引く．$h = \mathrm{AH}$ とすると

(i) H が線分 BC 上にあるとき

$$V = \frac{\pi}{3}ah^2$$

(ii) H が線分 BC 上にないとき

$$V = \frac{\pi}{3}|\mathrm{BH} - \mathrm{CH}|h^2 = \frac{\pi}{3}ah^2$$



(i)，(ii) の結果から，a は定数であるから，V が最大となるのは，h が最大のときである．三角形の成立条件 $|\mathrm{AB} - \mathrm{AC}| < \mathrm{BC} < \mathrm{AB} + \mathrm{CA}$ より

$$|(2-a-b)-b| < a < (2-a-b)+b$$

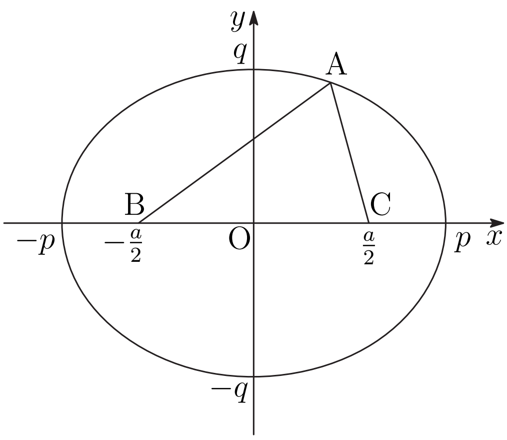
これを解いて　$1 < a+b,\ \ a < 1,\ \ b < 1$

条件より，$\mathrm{BC} = a$ は定数であるから，$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 2$ より，

$$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = 2 - a \quad \cdots ①$$

は定数であるから，点 A は，2 点 B，C を焦点とする長軸の長さが $2-a$ の楕円上の点である．$\mathrm{BC} = a$ より，座標平面上に $\mathrm{B}\left(-\frac{a}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ をとると，楕円の頂点 $(\pm p,\ 0)$，$(0,\ \pm q)$ は $(p,\ q > 0)$

$$2p = 2 - a, \quad \sqrt{p^2 - q^2} = \frac{a}{2} \quad \text{ゆえに} \quad p = 1 - \frac{a}{2},\ \ q^2 = 1 - a \quad \cdots ②$$



よって，h が最大となるのは，点 A が y 軸上，すなわち，△ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．

(2) (1) の結果から

$$V = \frac{\pi}{3} a h^2$$

が最大となるのは，AB = AC，$h = q$ のときであるから，①，② より

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = b = 1 - \frac{a}{2}$$

$$V = \frac{\pi}{3} a(1-a) = -\frac{\pi}{3}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{12}$$

よって，$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b = \frac{3}{4}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$ をとる．