平成 31 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．ただし，log は自然対数，e はその底とする．

(1) b を実数とする．関数

$$f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ．

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 a，b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める．

$$I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log I_n$$

を求めよ．ただし，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(n+1) = 0$$

を用いてもよい．

2 自然数 a，b に対し，

$$w = \cos\frac{a\pi}{3+b} + i\sin\frac{a\pi}{3+b}$$

とおく．ただし，i は虚数単位とする．複素数 z_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を以下のように定める．

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 - w, \quad z_n = (1-w)z_{n-1} + wz_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $a = 4$，$b = 3$ のとき，複素数平面上の点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ．

(2) $a = 2,\ b = 1$ のとき，z_{63} を求めよ．

(3) さいころを 2 回投げ，1 回目に出た目を a，2 回目に出た目を b とする．このとき $z_{63} = 0$ である確率を求めよ．

3 実数 s，t が $s^2 + t^2 \leqq 6$ を満たしながら変わるとき，xy 平面上で点 $(s+t,\ st)$ が動く領域を A とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $(2,\ \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ．

(2) A を図示せよ．

(3) A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

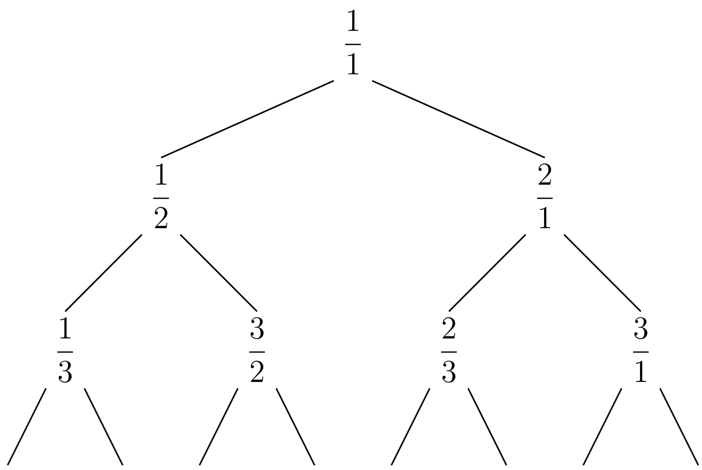
4 下の図は，$\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$，右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ．ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす．

(2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ．

(3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ．

(4) $\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ．たとえば，$\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である．



5 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

を考える．S_1 と S_2 の共通部分を C とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ．

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x) = \displaystyle\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) \\ &= -\frac{2}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}} < 0 \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は単調に減少する．

(2) $0 < a \leqq b$ および (1) の結果より，$f(b) \leqq f(a)$ であるから

$$\int_b^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad \cdots①$$

$0 < a \leqq t \leqq b$ において，$e^{-\frac{t^2}{2}} \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}$ であるから

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq \int_a^b e^{-\frac{a^2}{2}}\,dt = \Big[\, e^{-\frac{a^2}{2}}t \,\Big]_a^b = e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a) \qquad \cdots②$$

①，② により，$a \leqq b$ を満たす正の実数 a，b に対して，次式が成立する．

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

(3) (2) の結論において，t を $\sqrt{n}\,t$ に置き換えると

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_{\frac{a}{\sqrt{n}}}^{\frac{b}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{2}}\sqrt{n}\,dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

さらに，$a = \sqrt{n}$，$b = 2\sqrt{n}$ とすると

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1}e^{-\frac{n}{2}} - \frac{2\sqrt{n}}{4n+1}e^{-2n} \leqq \sqrt{n}\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt \leqq e^{-\frac{n}{2}}(2\sqrt{n}-\sqrt{n})$$

$$\frac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}\left(1 - \frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right) \leqq \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt \leqq e^{-\frac{n}{2}}$$

ここで，$J_n = \dfrac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}\left(1 - \dfrac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$，$K_n = e^{-\frac{n}{2}}$ とおくと

$$J_n \leqq I_n \leqq K_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{n}\log J_n \leqq \frac{1}{n}\log I_n \leqq \frac{1}{n}\log K_n \qquad \cdots③$$

$\log K_n = -\dfrac{n}{2}$ より

$$\frac{1}{n}\log K_n = -\frac{1}{2} \quad よって \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log K_n = -\frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

$\log J_n = -\log(n+1) - \dfrac{n}{2} + \log\left(1 - \dfrac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$ より

$$\frac{1}{n}\log J_n = -\frac{1}{n}\log(n+1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\log\left(1 - \frac{2+\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1) = 0$ に注意して $\quad\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log J_n = -\frac{1}{2} \quad \cdots ⑤$

③，④，⑤ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

2 (1) $z_1 = 1$，$z_2 = 1 - w$，$z_n = (1-w)z_{n-1} + wz_{n-2}$ より

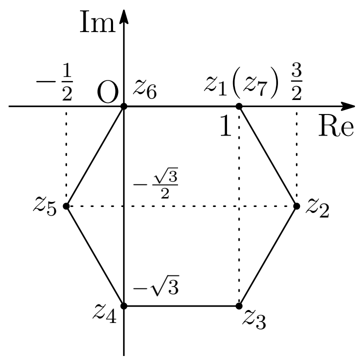
$$z_2 - z_1 = -w,$$
$$z_n - z_{n-1} = -w(z_{n-1} - z_{n-2})$$

したがって $\quad \dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \dfrac{z_4 - z_3}{z_3 - z_2} = \cdots = \dfrac{z_7 - z_6}{z_6 - z_5} = -w$

$a = 4$，$b = 3$ より $\quad w = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$$-w = (\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

ゆえに $\quad |z_n - z_{n-1}| = 1$，$\angle z_{n-1}z_nz_{n+1} = -\dfrac{\pi}{3}$



よって，点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形は，右の図のように 1 辺の長さが 1 の正六角形である．

(2) $z_1 = 1$，$z_2 = 1 - w$，$z_n = (1-w)z_{n-1} + wz_{n-2}$ より

$$z_{n+1} + wz_n = z_n + wz_{n-1} = z_2 + wz_1 = 1,$$
$$z_{n+1} - z_n = -w(z_n - z_{n-1}) = (-w)^{n-1}(z_2 - z_1) = (-w)^n$$

上の 2 式から $\quad z_n = \begin{cases} \dfrac{1-(-w)^n}{1+w} & (w \neq -1) \\ n & (w = -1) \end{cases} \quad \cdots(*)$

$a = 2$，$b = 1$ より $\quad w = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$

よって $\quad z_{63} = \dfrac{1-(-w)^{63}}{1+w} = \dfrac{1-(-i)^{63}}{1+i} = \dfrac{1-i}{1+i} = \boldsymbol{-i}$

(3) $w = \cos\dfrac{a\pi}{3+b} + i\sin\dfrac{a\pi}{3+b}$，$w \neq -1$ より $\quad \dfrac{a\pi}{3+b}$ は π の奇数倍でない

$$\begin{aligned} -w &= (\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{a\pi}{3+b} + i\sin\frac{a\pi}{3+b}\right) \\ &= \cos\left(\frac{a}{3+b}+1\right)\pi + i\sin\left(\frac{a}{3+b}+1\right)\pi \end{aligned}$$

$z_{63} = \dfrac{1-(-w)^{63}}{1+w} = 0$ となるとき，$(-w)^{63} = 1$ であるから

$$63\left(\frac{a}{3+b}+1\right)\pi \text{は } 2\pi \text{の整数倍} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{63a\pi}{3+b}\text{は}\pi\text{の奇数倍}$$

したがって，$(a,\ b)$ の満たす条件は

$$\frac{63a\pi}{3+b}\text{は}\pi\text{の奇数倍かつ} \quad \frac{a\pi}{3+b}\text{は}\pi\text{の奇数倍でない}$$

これを満たす $(a,\ b)$ は，次の 7 組.

$a = 1$ のとき $\quad b = 4,\ 6$
$a = 2$ のとき $\quad b = 3,$
$a = 3$ のとき $\quad b = 4,\ 6$
$a = 4$ のとき $\quad$ なし
$a = 5$ のとき $\quad b = 4,\ 6$
$a = 6$ のとき $\quad$ なし

よって，求める確率は $\quad \dfrac{7}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $s+t=2$，$st=\sqrt{2}$ に対し

$$(s-t)^2=(s+t)^2-4st=2^2-4\cdot\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})<0$$

したがって，これを満たす実数 s，t は存在しない．
よって，点 $(2,\ \sqrt{2})$ は領域 A の点ではない．

(2) $s+t=x$，$st=y$ とおくと，2 数 s，t は，2 次方程式 $\lambda^2-x\lambda+y=0$ の解

$$\frac{x\pm\sqrt{x^2-4y}}{2}$$

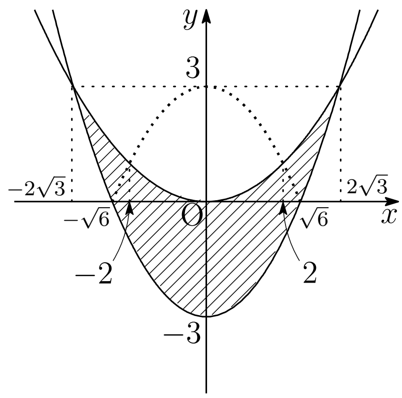
である．これが実数解で，条件 $s^2+t^2\leqq 6$ を満たすから

$$x^2-4y\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2}\right)^2\leqq 6$$

したがって，領域 A の表す不等式は

$$\begin{cases} y\leqq \dfrac{x^2}{4} \\ y\geqq \dfrac{1}{2}x^2-3 \end{cases}$$

右の図の斜線部分で，境界線を含む．



(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{2\pi}&=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}-3\right)^2dx+\int_2^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2dx-\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-3\right)^2dx\\
&=\int_0^2\left(\frac{x^4}{4}-3x^2+9\right)dx+\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{x^4}{16}dx-\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^4}{4}-3x^2+9\right)dx\\
&=\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_0^2+\left[\frac{x^5}{80}\right]_2^{2\sqrt{3}}-\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\\
&=\frac{8(7-3\sqrt{3}+3\sqrt{6})}{5}
\end{aligned}$$

よって，求める回転体の体積は　$V=\boldsymbol{\dfrac{16(7-3\sqrt{3}+3\sqrt{6})}{5}\pi}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記する．

$(p, q)\,|\,(p+q)$ および $(p, q)\,|\,p$ であるから，(p, q) は $p+q$ と p の公約数．

$$(p, q)\,|\,(p+q, p) \quad \cdots ①$$

$q=(p+q)-p$ より，$(p+q, p)\,|\,q$，また，$(p+q, p)\,|\,p$ であるから，$(p+q, p)$ は q と p の公約数．

$$(p+q, p)\,|\,(p, q) \quad \cdots ②$$

①，② から $\qquad (p, q)=(p+q, p) \quad \cdots (*)$

$(*)$ は p と q を交換しても成立するから

$$(q, p)=(q+p, q) \quad \text{ゆえに} \quad (p, q)=(p+q, q) \quad \cdots (**)$$

$(*)$，$(**)$ より，$(p, q)=1$ のとき，$(p+q, p)=1$，$(p+q, q)=1$

したがって，$\dfrac{p}{q}$ が既約分数のとき，$\dfrac{p}{p+q}$，$\dfrac{p+q}{q}$ も既約分数である．

よって，$\dfrac{1}{1}$ から始まるこの樹形図に現れる分数は，すべて既約分数である．

(2) $\dfrac{p}{q}$ について (p，q は自然数)，$n=p+q$ とする．樹形図に現れない既約分数の集合 $A(\neq \phi)$ が存在すると仮定する．A における n の最小値を N とし，その N に対応する既約分数の 1 つを $\dfrac{P}{Q}$ とする．

(i) $P=Q$ のとき，すなわち，$\dfrac{1}{1}$ は樹形図にあるので，矛盾．

(ii) $P<Q$ のとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ に対し，$\dfrac{P}{Q-P}$ は既約分数で

$$n=P+(Q-P)=N-P<N$$

したがって，N の最小性により，既約分数 $\dfrac{P}{Q-P}$ は樹形図に現れる．
この既約分数に対して左下に配置する規則を適用すると

$$\frac{P}{P+(Q-P)}=\frac{P}{Q}$$

このとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ が樹形図に現れ，矛盾．

(iii) $P > Q$ のとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ に対し，$\dfrac{P-Q}{Q}$ は既約分数で

$$n = (P-Q) + Q = N - Q < N$$

したがって，N の最小性により，既約分数 $\dfrac{P-Q}{Q}$ は樹形図に現れる．この既約分数に対して右下に配置する規則を適用すると

$$\frac{(P-Q)+Q}{Q} = \frac{P}{Q}$$

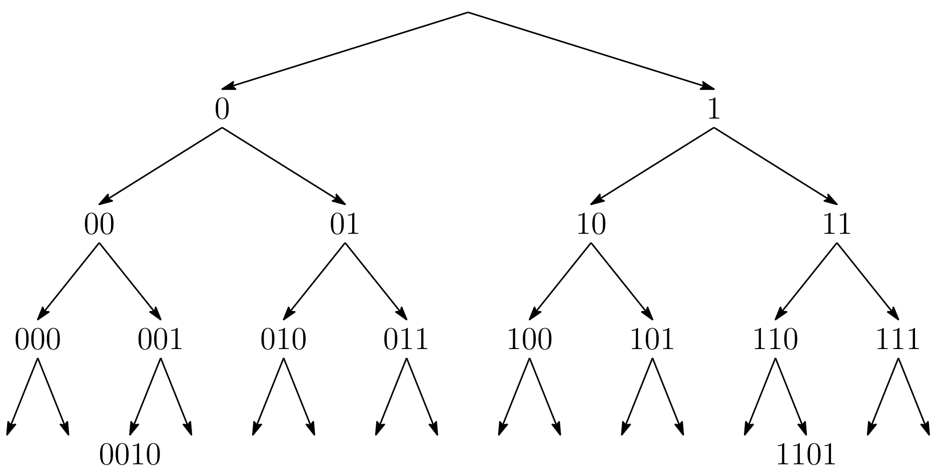
このとき，既約分数 $\dfrac{P}{Q}$ が樹形図に現れ，矛盾．

(i)〜(iii) より，$A = \phi$ となり，すべての正の有理数がこの樹形図に現れる．

(3) 樹形図に現れる既約分数 $\dfrac{p}{q}$ に対し，$n = p + q$ とする．

樹形図に現れる有理数 (既約分数) で，等しい 2 数の存在を仮定し，n を最小にするものを考える．その値を n_0 とすると，(2) と同様に，n_0 の最小性により矛盾を生じる．

(4) 樹形図の既約分数に対して，左下 (分母に分子を加える)，右下 (分子に分母を加える) にそれぞれ配置することを配置「0」，配置「1」と表記する．例えば,「左下 → 左下 → 右下 → 左下」,「右下 → 右下 → 左下 → 右下」の配置をそれぞれ 0010，1101 と表記する．これらの文字列は 4 個であるから，5 段目にあり，配置を 2 進数とみると，それぞれ 2，13．起点に注意すると，これらにそれぞれ 1 を加えた 3，14 が左からの順番を表す．



$\dfrac{1}{1}$ から $\dfrac{19}{44}$ に至る配置は，$\dfrac{19}{44}$ から $\dfrac{1}{1}$ へ逆に辿ることにより

$$\frac{19}{44}\xleftarrow{0}\frac{19}{25}\xleftarrow{0}\frac{19}{6}\xleftarrow{1}\frac{13}{6}\xleftarrow{1}\frac{7}{6}\xleftarrow{1}\frac{1}{6}\xleftarrow{0}\frac{1}{5}\xleftarrow{0}\frac{1}{4}\xleftarrow{0}\frac{1}{3}\xleftarrow{0}\frac{1}{2}\xleftarrow{0}\frac{1}{1}$$

したがって，$\dfrac{19}{44}$ の表す配置は　0000011100

文字列が 10 個で，配置を 2 進数とみると 28 であるから，起点に注意して

11 段目の左から 29 番目

$\boxed{5}$ (1) 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$$
$$S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

の中心は，それぞれ $(1,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 3,\ 3)$ であり，この 2 点間の距離は

$$\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=3$$

また，S_1，S_2 の半径は，それぞれ $\sqrt{7}$，1 より

$$\sqrt{7}-1<3<\sqrt{7}+1$$

したがって，S_1 と S_2 の共通部分 C は円である．S_1 と S_2 の方程式から $x^2+y^2+z^2$ の項を消去すると，円 C が存在する次の平面の方程式を得る．

$$2x+4y+4z-25=0$$

これから，S_1 との共通部分が C となる球面の方程式は，実数 k を用いて

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-7+k(2x+4y+4z-25)=0$$
$$(x+k-1)^2+(y+2k-1)^2+(z+2k-1)^2=9k^2+15k+7 \quad \cdots(*)$$

ゆえに　　$9k^2+15k+7=9\left(k+\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

球面の半径が最小になるのは，$k=-\dfrac{5}{6}$ ときで，その方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}}$$

(2) 球面の半径が $\sqrt{3}$ になるとき　　$9k^2+15k+7=3$

ゆえに　$(3k+1)(3k+4)=0$　これを解いて　$k=-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}$

上の結果を $(*)$ に代入することにより，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3,}$$
$$\boldsymbol{\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3}$$