

平成30年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ.

(1) $x > 0$ の範囲で不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ.

(2) x が $x > 0$ の範囲を動くとき,

$$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ.

2 a, b を正の実数とし, $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ とする.

(1) c を実数とし, $f(x)$ が $x - c$ で割り切れるとする. このとき, $c > 0$ であり, $f(x)$ は $(x - c) \left(x - \frac{1}{c} \right)$ で割り切れることを示せ.

(2) $f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x - s)(x - t)(x - u)(x - v)$$

と因数分解できるとき, $a \geq 4$ が成り立つことを示せ.

(3) $a = 5$ とする. $f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x - s)(x - t)(x - u)(x - v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ.

3 2つの関数

$$f(t) = 2 \sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2 \cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える.

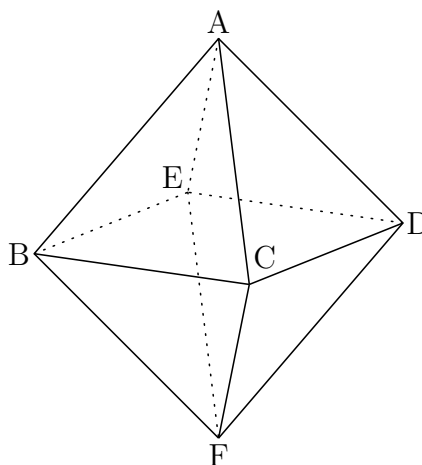
- (1) t が $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ.
- (2) t_1, t_2 を $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ を満たす実数とする. このとき $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ が成り立つことを示せ.
- (3) C と直線 $x = 1$ が囲む領域の面積 S を求めよ.

4 座標空間に6点

$$A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(-1, 0, 0), E(0, -1, 0), F(0, 0, -1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある. s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とする. 線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし, 線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする.

- (1) 4点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ.
- (2) 線分 PQ の中点を L とし, 線分 RS の中点を M とする. s, t が $0 < s < 1, 0 < t < 1$ の範囲を動くとき, 線分 LM の長さの最小値 m を求めよ.
- (3) 正八面体 ABCDEF の4点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする. 線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき, X を最大とするような s, t の値と, そのときの X の値を求めよ.



5 p, q を $0 < p < 1, 0 < q < 1$ を満たす実数とし, n を 2 以上の整数とする. 2 つのチーム A, B が野球の試合を n 回行う. 1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする. また, A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり, B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする. なお, 試合結果に引き分けはなく, 勝敗が決まるとする.

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ.

(2) $n \geq 3$ とする. B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right), \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x) \text{ とおくと}$$

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0$$

$$x > 0 \text{ において } f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

$$g(x) = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x) \text{ より, } x > 0 \text{ において}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{(1+x) - 2\sqrt{1+x} + 1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\sqrt{1+x} - 1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } x > 0 \text{ において } f(x) > 0, \quad g(x) > 0$$

$$\text{よって, } x > 0 \text{ の範囲で } x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \text{ より } y' = -\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2} + \frac{1}{x^2}$$

(1) の結果から, $x > 0$ において

$$\{\log(1+x)\}^2 < \frac{x^2}{1+x} \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2} + \frac{1}{x^2} < 0$$

したがって, $x > 0$ において, y は単調減少である.

$$x - \frac{x^2}{2} = \frac{x(2-x)}{2} \text{ であるから, } 0 < x < 2 \text{ のとき, (1) の結果から}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x} < \frac{1}{\log(1+x)} < \frac{2}{x(2-x)}$$

$$\text{したがって } \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x} < \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{2}{x(2-x)} - \frac{1}{x}$$

$$\text{ここで } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{2}{x(2-x)} - \frac{1}{x} \right\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, はさみうちの原理により } \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right\} = 0 \quad \text{よって } 0 < y < \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

2 (1) $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ が $x - c$ で割り切れるから、 $f(c) = 0$ より

$$c^4 - ac^3 + bc^2 - ac + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad ac(c^2 + 1) = c^4 + bc^2 + 1$$

a, b は正の実数であるから、上の第2式より $c > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left(x^2 - ax + b - \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - a \left(x + \frac{1}{x} \right) + b - 2 \right\} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$$f(c) = 0 \text{ であるから } \left(c + \frac{1}{c} \right)^2 - a \left(c + \frac{1}{c} \right) + b - 2 = 0$$

$$\text{したがって } f\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\frac{1}{c} + c \right)^2 - a \left(\frac{1}{c} + c \right) + b - 2 \right\} = 0$$

(i) $c \neq 1$ のとき、 $f(c) = f\left(\frac{1}{c}\right) = 0$ より、 $f(x)$ は $(x - c) \left(x - \frac{1}{c} \right)$ で割り切れる。

(ii) $c = 1$ のとき、 $f(1) = 0$ であるから、(*) より

$$-2a + b + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

① を (*) に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - a \left(x + \frac{1}{x} \right) + 2a - 4 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - a \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \right\} \\ &= (x^2 - 1)^2 - ax(x - 1)^2 \\ &= (x - 1)^2 \{ (x + 1)^2 - ax \} \end{aligned}$$

(i), (ii) より、 $f(x)$ は $(x - c) \left(x - \frac{1}{c} \right)$ で割り切れる。

- (2) $f(x)$ が $x-s$, $x-t$ で割り切れる, すなわち, これらを因数にもつとき,
 (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-s)(x-t) \left(x - \frac{1}{s}\right) \left(x - \frac{1}{t}\right) \\ &= \left\{x^2 - \left(s + \frac{1}{s}\right)x + 1\right\} \left\{x^2 - \left(t + \frac{1}{t}\right)x + 1\right\} \\ &= x^4 - \left(s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t}\right)x^3 + \left\{\left(s + \frac{1}{s}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) + 2\right\}x^2 \\ &\quad - \left(s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t}\right)x + 1 \end{aligned}$$

係数を比較して

$$a = s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t}, \quad b = \left(s + \frac{1}{s}\right) \left(t + \frac{1}{t}\right) + 2 \quad \dots (**)$$

(1) の結果から $s > 0$, $t > 0$

したがって, 相加・相乗平均の大小関係により, (*) の第1式は

$$s + \frac{1}{s} \geq 2\sqrt{s \cdot \frac{1}{s}} = 2, \quad t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2 \quad \text{よって} \quad a \geq 4$$

- (3) $\alpha = s + \frac{1}{s}$, $\beta = t + \frac{1}{t}$ とおくと, (2) の結果から $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 2$

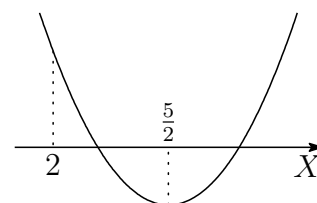
$a = 5$ のとき, (**) より $\alpha + \beta = 5$, $\alpha\beta = b - 2$

α , β を解とする2次方程式は $X^2 - 5X + b - 2 = 0$

$$g(X) = X^2 - 5X + b - 2 \text{ とおくと } g(X) = \left(X - \frac{5}{2}\right)^2 + b - \frac{33}{4}$$

$g(X) = 0$ の2解が $X \geq 2$ の範囲に実数解をもつことから

$$g(2) = b - 8 \geq 0, \quad b - \frac{33}{4} \leq 0$$



ゆえに $8 \leq b \leq \frac{33}{4}$

b は自然数であるから $b = 8$



3 (1) $f(t) = 2 \sin t + \cos 2t$, $g(t) = 2 \cos t + \sin 2t$ より ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \cos t - 2 \sin 2t = 2 \cos t - 4 \sin t \cos t \\ &= 2 \cos t(1 - 2 \sin t) \\ g'(t) &= -2 \sin t + 2 \cos 2t = -2 \sin t + 2(1 - 2 \sin^2 t) \\ &= -2(\sin t + 1)(2 \sin t - 1) \end{aligned}$$

$f(t)$, $g(t)$ の増減表は次のようになる.

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$	t	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	-		$g'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	1	\nearrow	$\frac{3}{2}$	\searrow	1	$g(t)$	2	\nearrow	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	\searrow	0

よって $f(t)$ の最大値 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$, $g(t)$ の最大値 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2) $f(t) = 2 \sin t + \cos 2t = -2 \sin^2 t + 2 \sin t + 1$ より

$$\begin{aligned} f(t_1) - f(t_2) &= -2(\sin^2 t_1 - \sin^2 t_2) + 2(\sin t_1 - \sin t_2) \\ &= -2(\sin t_1 - \sin t_2)(\sin t_1 + \sin t_2 - 1) \end{aligned}$$

$0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$, $f(t_1) = f(t_2)$ より, $\sin t_1 - \sin t_2 \neq 0$ に注意して

$$\sin t_1 + \sin t_2 - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$g(t) = 2 \cos t + \sin 2t = 2 \cos t + 2 \sin t \cos t = 2 \cos t(1 + \sin t)$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}g(t)^2 &= \cos^2 t(1 + \sin t)^2 = (1 - \sin t)(1 + \sin t)^3 \\ &= 2(1 + \sin t)^3 - (1 + \sin t)^4 \end{aligned}$$

$u = 1 + \sin t_1$, $v = 1 + \sin t_2$ とおくと, $\textcircled{1}$ より $u + v = 3$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\{g(t_1)^2 - g(t_2)^2\} &= 2(u^3 - v^3) - u^4 + v^4 \\ &= 2(u - v)(u^2 + uv + v^2) - (u - v)(u + v)(u^2 + v^2) \\ &= 2(u - v)(u^2 + uv + v^2) - 3(u - v)(u^2 + v^2) \\ &= (u - v)(-u^2 + 2uv - v^2) = (v - u)^3 \\ &= (\sin t_2 - \sin t_1)^3 \end{aligned}$$

$0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ より, $\sin t_2 - \sin t_1 > 0$ であるから, 上式より

$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$$

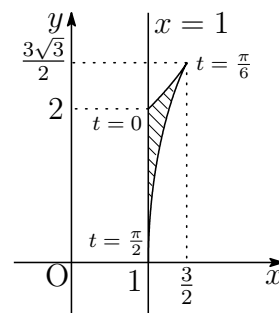
(3) (1) の結果から, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$f(t) \geq 1, \quad g(t) \geq 0$$

(2) の結果から, $0 \leq t_1 < \frac{\pi}{6} < t_2$ において,

$f(t_1) = f(t_2)$ を満たす t_1, t_2 に対して

$$g(t_1) > g(t_2)$$



したがって, 右の図の斜線部分の面積が S であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} y \frac{dx}{dt} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} y \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t + \sin 2t) \cdot (2 \sin t + \cos 2t)' dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t + \sin 2t)(2 \cos t - 2 \sin 2t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos^2 t - 2 \sin 2t \cos t - 2 \sin^2 2t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos 2t - \sin 3t - \sin t + \cos 4t + 1) dt \\ &= \left[\sin 2t + \frac{1}{3} \cos 3t + \cos t + \frac{1}{4} \sin 4t + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

■

- 4 (1) $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 0)$, $\vec{c} = (0, 1, 0)$ とすると, $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(-\vec{b})$, $E(-\vec{c})$, $F(-\vec{a})$ であるから

$$\vec{OP} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \quad \vec{OQ} = s\vec{a} + (1-s)\vec{c},$$

$$\vec{OR} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{b},$$

$$\vec{OS} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{c}$$

したがって $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (1-s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1-s)\vec{BC}$

$$\vec{SR} = \vec{OR} - \vec{OS} = (t-1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1-t)\vec{BC}$$

$\vec{PQ} // \vec{SR}$ であるから, 4点 P, Q, R, S は同一平面上にある.

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\vec{OL} &= \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{OM} &= \frac{\vec{OR} + \vec{OS}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{LM} &= \vec{OM} - \vec{OL} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

ゆえに $\vec{LM} = \left(\frac{s+t-2}{2}, \frac{s+t-2}{2}, -(s+t) \right)$

ここで, $s+t=2u$ とおくと ($0 < u < 1$) $\vec{LM} = (u-1, u-1, -2u)$

$$\begin{aligned}m^2 &= |\vec{LM}|^2 = (u-1)^2 + (u-1)^2 + (-2u)^2 \\ &= 6u^2 - 4u + 2 = 6\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって, $u = \frac{1}{3}$, すなわち, $s+t = \frac{2}{3}$ のとき, m は最小値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) 直線 LM と xy 平面との交点を H とすると, \vec{a} の係数に注意して

$$\vec{OH} = \frac{t\vec{OL} + s\vec{OM}}{s+t} = \frac{t(1-s) + s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c})$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{HL} &= \vec{OL} - \vec{OH} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{HM} &= -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

$s+t = \frac{2}{3}$ を上の 2 式に代入すると

$$\begin{aligned}\vec{HL} &= s(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (s, s, s), \\ \vec{HM} &= -t(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (-t, -t, -t)\end{aligned}$$

ゆえに $|\vec{HL}| = \sqrt{3}s$, $|\vec{HM}| = \sqrt{3}t$

平面 PQRS と線分 BE, CD のとの交点をそれぞれ H_1, H_2 とすると

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{BC}$$

ゆえに $|\overrightarrow{H_1H_2}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$

(1) の結果から $|\overrightarrow{PQ}| = (1-s)|\overrightarrow{BC}| = (1-s)\sqrt{2}$,

$$|\overrightarrow{SR}| = (1-t)|\overrightarrow{BC}| = (1-t)\sqrt{2}$$

X は 2 つの台形 PH_1H_2Q, H_1SRH_2 の和であるから

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(PQ + H_1H_2)HL + \frac{1}{2}(SR + H_1H_2)HM \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2} \right\} \sqrt{3}s + \frac{1}{2} \left\{ (1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2} \right\} \sqrt{3}t \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2} \{ 2(s+t) - (s^2 + t^2) \} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \{ 4(s+t) - (s+t)^2 - (s-t)^2 \} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \left\{ 4 \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 - (s-t)^2 \right\} = \frac{\sqrt{6}}{4} \left\{ \frac{20}{9} - (s-t)^2 \right\} \end{aligned}$$

よって, $s-t=0$, すなわち, $s=t=\frac{1}{3}$ のとき, X は最大値 $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ ■

- 5 (1) $n+1$ 試合目に A が勝つのは, n 試合目に A が勝っているときと B が勝っているときがあるから, 次の確率漸化式が成立する.

$$a_{n+1} = pa_n + q(1-a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = (p-q)a_n + q$$

したがって $a_{n+1} - \frac{q}{1-p+q} = (p-q) \left(a_n - \frac{q}{1-p+q} \right)$

$$a_n - \frac{q}{1-p+q} = (p-q)^{n-1} \left(a_1 - \frac{q}{1-p+q} \right)$$

$a_1 = p$ であるから

$$\begin{aligned} a_n - \frac{q}{1-p+q} &= (p-q)^{n-1} \cdot \frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q} \\ a_n &= \frac{(1-p)(p-q)^n + q}{1-p+q} \end{aligned}$$

(2) (i) n 試合目に A が勝つ場合

勝者が \boxed{BA} の順で 2 回, \boxed{A} が $n - 4$ 回であるから, その確率は

$${}_{n-2}C_2 \{(1-p)q\}^2 p^{n-4} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2 q^2 p^{n-4}$$

(ii) n 試合目に B が勝つ場合

勝者が \boxed{BA} の順で 1 回, \boxed{A} が $n - 3$ 回, 最後に \boxed{B} であるから, その確率は

$${}_{n-2}C_1 (1-p)q \cdot p^{n-3} \times (1-p) = (n-2)(1-p)^2 qp^{n-3}$$

(i),(ii) より

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2 q^2 p^{n-4} + (n-2)(1-p)^2 qp^{n-3} \\ &= \frac{1}{2}(1-p)^2 q(n-2)\{(n-3)q + 2p\}p^{n-4} \end{aligned}$$

