平成 30 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ の範囲で不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ．

(2) x が $x > 0$ の範囲を動くとき，

$$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a，b を正の実数とし，$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ とする．

(1) c を実数とし，$f(x)$ が $x - c$ で割り切れるとする．このとき，$c > 0$ であり，$f(x)$ は $(x-c)\left(x - \dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れることを示せ．

(2) $f(x)$ がある実数 s，t，u，v を用いて

$$f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるとき，$a \geqq 4$ が成り立つことを示せ．

(3) $a = 5$ とする．$f(x)$ がある実数 s，t，u，v を用いて

$$f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ．

3 2つの関数

$$f(t) = 2\sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2\cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C : x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．

(1) t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ．

(2) t_1，t_2 を $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ を満たす実数とする．このとき $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) C と直線 $x = 1$ が囲む領域の面積 S を求めよ．

4 座標空間に6点

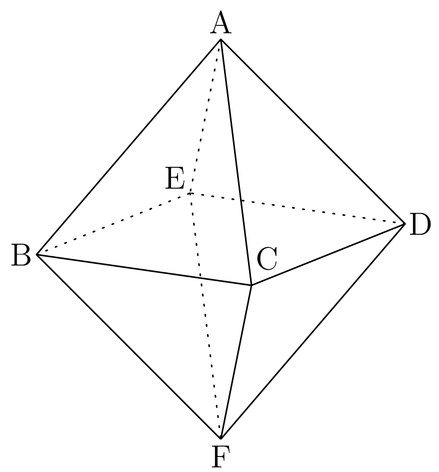
$$\mathrm{A}(0,0,1),\ \mathrm{B}(1,0,0),\ \mathrm{C}(0,1,0),\ \mathrm{D}(-1,0,0),\ \mathrm{E}(0,-1,0),\ \mathrm{F}(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体ABCDEFがある．s，t を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ を満たす実数とする．線分AB，ACをそれぞれ $1-s : s$ に内分する点をP，Qとし，線分FD，FEをそれぞれ $1-t : t$ に内分する点をR，Sとする．

(1) 4点P，Q，R，Sが同一平面上にあることを示せ．

(2) 線分PQの中点をLとし，線分RSの中点をMとする．s，t が $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ の範囲を動くとき，線分LMの長さの最小値 m を求めよ．

(3) 正八面体ABCDEFの4点P，Q，R，Sを通る平面による切り口の面積を X とする．線分LMの長さが(2)の値 m をとるとき，X を最大とするような s，t の値と，そのときの X の値を求めよ．



$\boxed{\mathbf{5}}$ p，q を $0 < p < 1$，$0 < q < 1$ を満たす実数とし，n を 2 以上の整数とする．2 つのチーム A，B が野球の試合を n 回行う．1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする．また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする．なお，試合結果に引き分けはなく，勝敗が決まるとする．

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ とする．B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$，$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$ とおくと

$$f(0)=0,\quad g(0)=0$$

$x>0$ において　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0$

$g(x)=\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$ より，$x>0$ において

$$\begin{aligned} g'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{1+x} \\ &=\frac{(1+x)-2\sqrt{1+x}+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}>0 \end{aligned}$$

したがって，$x>0$ において　$f(x)>0$，$g(x)>0$

よって，$x>0$ の範囲で　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

(2) $y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ より　$y'=-\dfrac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\dfrac{1}{x^2}$

(1) の結果から，$x>0$ において

$\{\log(1+x)\}^2<\dfrac{x^2}{1+x}$　ゆえに　$-\dfrac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\dfrac{1}{x^2}<0$

したがって，$x>0$ において，y は単調減少である．

$x-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x(2-x)}{2}$ であるから，$0<x<2$ のとき，(1) の結果から

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)}$$

したがって　$\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{2}{x(2-x)}-\dfrac{1}{x}$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sqrt{1+x}}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to+0}\left\{\frac{2}{x(2-x)}-\frac{1}{x}\right\}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$$

したがって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{2}$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}=0$　よって　$\boldsymbol{0<y<\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$ が $x-c$ で割り切れるから，$f(c)=0$ より

$$c^4-ac^3+bc^2-ac+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad ac(c^2+1)=c^4+bc^2+1$$

$a,\ b$ は正の実数であるから，上の第 2 式より　　$c>0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\left(x^2-ax+b-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2\right\} \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$f(c)=0$ であるから　$\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2-a\left(c+\dfrac{1}{c}\right)+b-2=0$

したがって　$f\left(\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{1}{c^2}\left\{\left(\dfrac{1}{c}+c\right)^2-a\left(\dfrac{1}{c}+c\right)+b-2\right\}=0$

(i) $c\neq 1$ のとき，$f(c)=f\left(\dfrac{1}{c}\right)=0$ より，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れる．

(ii) $c=1$ のとき，$f(1)=0$ であるから，$(*)$ より

$$-2a+b+2=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=2a-2 \quad \cdots①$$

① を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\frac{1}{x}\right)+2a-4\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\right\} \\ &= (x^2-1)^2-ax(x-1)^2 \\ &= (x-1)^2\{(x+1)^2-ax\} \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れる．

(2) $f(x)$ が $x-s$，$x-t$ で割り切れる，すなわち，これらを因数にもつとき，(1) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-s)(x-t)\left(x-\frac{1}{s}\right)\left(x-\frac{1}{t}\right) \\ &= \left\{x^2-\left(s+\frac{1}{s}\right)x+1\right\}\left\{x^2-\left(t+\frac{1}{t}\right)x+1\right\} \\ &= x^4-\left(s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}\right)x^3+\left\{\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+2\right\}x^2 \\ &\qquad -\left(s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}\right)x+1 \end{aligned}$$

係数を比較して

$$a = s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t},\quad b=\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+2 \quad \cdots(**)$$

(1) の結果から　$s>0$，$t>0$

したがって，相加・相乗平均の大小関係により，$(*)$ の第 1 式は

$$s+\frac{1}{s} \geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{1}{s}}=2,\quad t+\frac{1}{t} \geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2 \quad \text{よって} \quad a \geqq 4$$

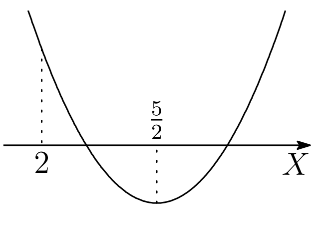
(3) $\alpha = s+\dfrac{1}{s}$，$\beta = t+\dfrac{1}{t}$ とおくと，(2) の結果から　$\alpha \geqq 2,\ \beta \geqq 2$

$a=5$ のとき，$(**)$ より　　$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=b-2$

α，β を解とする 2 次方程式は　$X^2-5X+b-2=0$

$g(X)=X^2-5X+b-2$ とおくと　$g(X)=\left(X-\dfrac{5}{2}\right)^2+b-\dfrac{33}{4}$

$g(X)=0$ の 2 解が $X \geqq 2$ の範囲に実数解をもつことから



$$g(2)=b-8 \geqq 0,\quad b-\frac{33}{4} \leqq 0$$

ゆえに　　$8 \leqq b \leqq \dfrac{33}{4}$

b は自然数であるから　　$\boldsymbol{b=8}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(t)=2\sin t+\cos 2t$，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ より $(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= 2\cos t - 2\sin 2t = 2\cos t - 4\sin t\cos t \\
&= 2\cos t(1-2\sin t) \\
g'(t) &= -2\sin t + 2\cos 2t = -2\sin t + 2(1-2\sin^2 t) \\
&= -2(\sin t + 1)(2\sin t - 1)
\end{aligned}
$$

$f(t)$，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

よって　$f(t)$ の最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$，$g(t)$ の最大値 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(2) $f(t)=2\sin t+\cos 2t=-2\sin^2 t+2\sin t+1$ より

$$
\begin{aligned}
f(t_1)-f(t_2) &= -2(\sin^2 t_1 - \sin^2 t_2) + 2(\sin t_1 - \sin t_2) \\
&= -2(\sin t_1 - \sin t_2)(\sin t_1 + \sin t_2 - 1)
\end{aligned}
$$

$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$f(t_1)=f(t_2)$ より，$\sin t_1 - \sin t_2 \neq 0$ に注意して

$$\sin t_1 + \sin t_2 - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

$g(t)=2\cos t+\sin 2t=2\cos t+2\sin t\cos t=2\cos t(1+\sin t)$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}g(t)^2 &= \cos^2 t(1+\sin t)^2 = (1-\sin t)(1+\sin t)^3 \\
&= 2(1+\sin t)^3 - (1+\sin t)^4
\end{aligned}
$$

$u=1+\sin t_1$，$v=1+\sin t_2$ とおくと，① より $u+v=3$ であるから

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\{g(t_1)^2-g(t_2)^2\} &= 2(u^3-v^3)-u^4+v^4 \\
&= 2(u-v)(u^2+uv+v^2)-(u-v)(u+v)(u^2+v^2) \\
&= 2(u-v)(u^2+uv+v^2)-3(u-v)(u^2+v^2) \\
&= (u-v)(-u^2+2uv-v^2) = (v-u)^3 \\
&= (\sin t_2 - \sin t_1)^3
\end{aligned}
$$

$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin t_2 - \sin t_1 > 0$ であるから，上式より

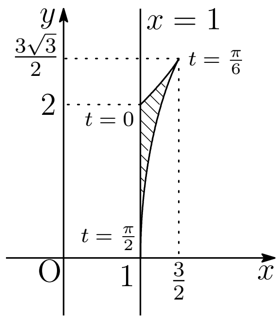
$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 \geqq 0$$

(3) (1) の結果から，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$$f(t) \geqq 1, \quad g(t) \geqq 0$$

(2) の結果から，$0 \leqq t_1 < \dfrac{\pi}{6} < t_2$ において，$f(t_1) = f(t_2)$ を満たす $t_1,\ t_2$ に対して

$$g(t_1) > g(t_2)$$



したがって，右の図の斜線部分の面積が S であるから

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)\cdot(2\sin t + \cos 2t)'dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t)\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2 t - 2\sin 2t\cos t - 2\sin^2 2t)\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2t - \sin 3t - \sin t + \cos 4t + 1)\,dt$$
$$= \left[\ \sin 2t + \frac{1}{3}\cos 3t + \cos t + \frac{1}{4}\sin 4t + t\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\vec{a} = (0, 0, 1)$，$\vec{b} = (1, 0, 0)$，$\vec{c} = (0, 1, 0)$ とすると，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{D}(-\vec{b})$，$\mathrm{E}(-\vec{c})$，$\mathrm{F}(-\vec{a})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{c}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (t-1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{SR}}$ であるから，4 点 P，Q，R，S は同一平面上にある．

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b}+\vec{c})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \left(\dfrac{s+t-2}{2},\ \dfrac{s+t-2}{2}, -(s+t)\right)$

ここで，$s+t=2u$ とおくと $(0<u<1)$　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = (u-1,\ u-1, -2u)$

$$m^2 = |\overrightarrow{\mathrm{LM}}|^2 = (u-1)^2 + (u-1)^2 + (-2u)^2$$
$$= 6u^2 - 4u + 2 = 6\left(u-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

よって，$u=\dfrac{1}{3}$，すなわち，$s+t=\dfrac{2}{3}$ のとき，m は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(3) 直線 LM と xy 平面との交点を H とすると，$\vec{a}$ の係数に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{t\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{s+t} = \frac{t(1-s)+s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

したがって

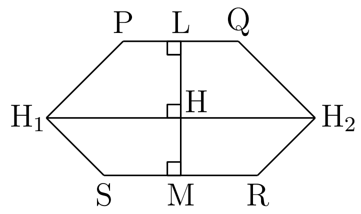
$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$
$$= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$
$$= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

$s+t=\dfrac{2}{3}$ を上の 2 式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = s(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (s,\ s,\ s),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (-t, -t, -t)$$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{HL}}| = \sqrt{3}s$，$|\overrightarrow{\mathrm{HM}}| = \sqrt{3}t$

平面 PQRS と線分 BE，CD のとの交点をそれぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{2}$

(1) の結果から　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = (1-s)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-s)\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{\mathrm{SR}}| = (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-t)\sqrt{2}$

X は 2 つの台形 $\mathrm{PH_1H_2Q}$，$\mathrm{H_1SRH_2}$ の和であるから

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}(\mathrm{PQ} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HL} + \frac{1}{2}(\mathrm{SR} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HM} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}s + \frac{1}{2}\left\{(1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}t \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t) - (s^2+t^2)\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\{4(s+t) - (s+t)^2 - (s-t)^2\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{4\cdot\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - (s-t)^2\right\} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{\frac{20}{9} - (s-t)^2\right\}
\end{aligned}$$

よって，$s-t=0$，すなわち，$s=t=\dfrac{1}{3}$ のとき，X は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}}{9}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $n+1$ 試合目に A が勝つのは，n 試合目に A が勝っているときと B が勝っているときがあるから，次の確率漸化式が成立する．

$$a_{n+1} = pa_n + q(1-a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = (p-q)a_n + q$$

したがって　$a_{n+1} - \dfrac{q}{1-p+q} = (p-q)\left(p_n - \dfrac{q}{1-p+q}\right)$

$$a_n - \frac{q}{1-p+q} = (p-q)^{n-1}\left(p_1 - \frac{q}{1-p+q}\right)$$

$a_1 = p$ であるから

$$\begin{aligned}
a_n - \frac{q}{1-p+q} &= (p-q)^{n-1}\cdot\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q} \\
a_n &= \boldsymbol{\frac{(1-p)(p-q)^n + q}{1-p+q}}
\end{aligned}$$

(2) (i) n 試合目に A が勝つ場合
勝者が $\boxed{\text{BA}}$ の順で 2 回，$\boxed{\text{A}}$ が $n-4$ 回であるから，その確率は

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_2\{(1-p)q\}^2p^{n-4} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2q^2p^{n-4} $$

(ii) n 試合目に B が勝つ場合
勝者が $\boxed{\text{BA}}$ の順で 1 回，$\boxed{\text{A}}$ が $n-3$ 回，最後に $\boxed{\text{B}}$ であるから，その確率は

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_1(1-p)q\cdot p^{n-3} \times (1-p) = (n-2)(1-p)^2qp^{n-3} $$

(i),(ii) より

$$ \begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(1-p)^2q^2p^{n-4} + (n-2)(1-p)^2qp^{n-3} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(1-p)^2q(n-2)\{(n-3)q+2p\}p^{n-4}} \end{aligned} $$