平成 29 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(s,\ t)$ $(t \neq 0)$ を考える．

(1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いてあらわせ．

(2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いてあらわせ．

(3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素数 z は $z^5 = 1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする．硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 とおく．複素数 w を $w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$ と定める．

(1) 5 回とも表が出たとする．w の値を求めよ．

(2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0$，$a_1 = a_4 = 1$ のとき，$|w| < 1$ であることを示せ．

(3) $|w| < 1$ である確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a，b を自然数とし，不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \qquad \text{(A)}$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，$2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい．

(1) 不等式 (A) を満たし $b \geqq 2$ である自然数 a，b に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ．

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 a，b の組のうち，$b \geqq 2$ であるものをすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ b，c を実数とする．2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が

$$0 \leqq f(1) \leqq 2, \quad 5 \leqq f(3) \leqq 6$$

を満たすとする．

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

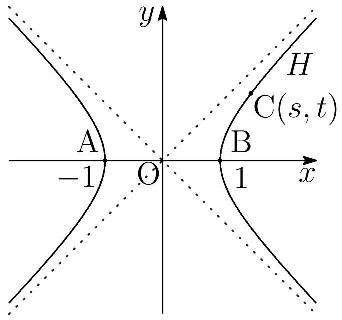
$\boxed{\mathbf{5}}$ xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく．回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく．

(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする．xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする．$t=(2\cos\theta)^2$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いてあらわせ．

(2) M の体積 V を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) H 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ における接線の方程式は



$$x = -1$$

H 上の点 $\mathrm{C}(s,\ t)$ は，$t \neq 0$ より　$s \neq \pm 1$
2 点 $\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{t}{s-1}(x-1)$$

上の 2 式を解いて　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{-1,\ \frac{-2t}{s-1}}\right)$

(2) H 上の点 $\mathrm{C}(s,\ t)$ における接線の方程式は　$sx - ty = 1$
直線 AB の方程式は　$y = 0$
この 2 式を解いて　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{1}{s},\ 0}\right)$

(3) H 上の点 B における接線の方程式は　$x = 1$
2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ を通る直線の方程式は　$y = \dfrac{t}{s+1}(x+1)$
この 2 式を解いて　$\mathrm{R}\left(1,\ \dfrac{2t}{s+1}\right)$
$s^2 - t^2 = 1$ に注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \left(-\frac{s+1}{s}, -\frac{2t}{s-1}\right) = \frac{1}{1-s}\left(\frac{s^2-1}{s}, 2t\right) = \frac{t}{1-s}\left(\frac{t}{s},\ 2\right),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \left(\frac{s-1}{s},\ \frac{2t}{s+1}\right) = \frac{1}{1+s}\left(\frac{s^2-1}{s},\ 2t\right) = \frac{t}{1+s}\left(\frac{t}{s},\ 2\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{QR}}$ であるから，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．

別解 $(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s, -2t)$，$(s+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1+s,\ 2t)$ より

$$(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (s+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (2,\ 0) = 2s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{s-1}{2s}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \dfrac{s+1}{2s}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

このとき，$\dfrac{s-1}{2s} + \dfrac{s+1}{2s} = 1$ より，直線 PR 上に点 Q がある．
よって，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ であるから，$z^5 = 1$ $(z \neq 1)$ より

$$w = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = \mathbf{0}$$

(2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0$，$a_1 = a_4 = 1$ のとき

$$w = z + z^4 = z + \frac{z^5}{z} = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = z + \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z + \overline{z}$$

$\theta = \dfrac{2\pi}{5}$ とおくと，$z = \cos\theta + i\sin\theta$，$\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta$ であるから

$$w = z + \overline{z} = 2\cos\theta < 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \qquad \text{よって} \qquad |w| < 1$$

(3) 表が出た枚数を n とする．

(i) $n = 0$ のとき，$w = 0$ より　$|w| = 0$

(ii) $n = 1$ のとき，$|w| = 1$

(iii) $n = 2$ のとき

$$|z + z^2| = |z||1 + z|, \qquad |z^2 + z^3| = |z^2||1 + z|,$$
$$|z^3 + z^4| = |z^3||1 + z|, \qquad |z^4 + 1| = |z^4||1 + z|$$

$1 + z$ の実部について　$1 + \cos\theta > 0$ であるから

$$|1 + z| = |z + z^2| = |z^2 + z^3| = |z^3 + z^4| = |z^4 + 1| > 1$$

$1 + z^2$ について　$1 + z^2 = 1 + (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$
$= (1 + \cos 2\theta) + i\sin 2\theta$

ゆえに　$|1 + z^2|^2 = (1 + \cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2$
$= 2 + 2\cos 2\theta = (2\cos\theta)^2 < 1$

$$|1 + z^2| = |z + z^3| = |z^2 + z^4| = |z^3 + 1| = |z^4 + z| < 1$$

このとき，$|w| < 1$ となるは，5 通り

(iv) $n = 3$ のとき　$1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$ より，例えば，$|1+z+z^2| = |z^3+z^4|$ であるから，$|w| < 1$ を満たす場合の数は，$n = 2$ の場合と等しい．

(v) $n = 4$ のとき，例えば，$|1+z+z^2+z^3| = |z^4| = 1$ であるから，$|w| < 1$ とならない．

(vi) $n = 5$ のとき，$w = 0$ であるから，$|w| = 0$

(i)〜(v) から，$|w| < 1$ となる確率は　$\dfrac{1 + 0 + 5 + 5 + 0 + 1}{2^5} = \dfrac{12}{32} = \mathbf{\dfrac{3}{8}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$ より　　$2\sqrt{7}-\dfrac{2}{b^4}<\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}<2\sqrt{7}+\dfrac{2}{b^4}$

$b \geqq 2$ のとき　$2\sqrt{7}-\dfrac{2}{b^4} \geqq 2\sqrt{7}-\dfrac{1}{8}>2\times 2.645-0.125>5.165$

$$2\sqrt{7}+\dfrac{2}{b^4} \leqq 2\sqrt{7}+\dfrac{1}{8}<2\times 2.646+0.125=5.417<6$$

したがって　$5.165<\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}<6$　よって　$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$

(2) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$，$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$ より

$$\left|\frac{a}{b}+\sqrt{7}\right|\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\frac{12}{b^4}\quad \text{ゆえに}\quad b^2|a^2-7b^2|<12\quad \cdots(*)$$

$\sqrt{7}$ は無理数であるから，自然数 a，b に対して $\dfrac{a}{b}\neq\sqrt{7}$ より　$a^2-7b^2\neq 0$

a^2-7b^2 は整数であるから，$(*)$ を満たす b $(b \geqq 2)$ は，$b=2,\ 3$ について調べればよい．

(i) $b=2$ のとき　$2^2|a^2-28|<12$　ゆえに　$|a^2-28|<3$

これを満たす自然数 a は存在しない．

(ii) $b=3$ のとき　$3^2|a^2-63|<12$　ゆえに　$|a^2-63|<\dfrac{4}{3}$

これを満たす自然数 a は　$a=8$

(i),(ii) より，求める a，b の組は　$\boldsymbol{(a,\ b)=(8,\ 3)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $m=f(1)$，$M=f(3)$ とおくと，$f(x)=-x^2+bx+c$ より

$$-1+b+c=m,\quad -9+3b+c=M$$

ゆえに　$$b=\frac{M-m}{2}+4,\quad c=\frac{3m-M}{2}-3$$

したがって　$$f(x)=-x^2+\left(\frac{M-m}{2}+4\right)x+\frac{3m-M}{2}-3$$

$$f(4)=\frac{3M-m}{2}-3$$

$f(4)$ は，$M=5$，$m=2$ のとき最小値 $\dfrac{7}{2}$ をとり，$M=6$，$m=0$ のとき最大値 6 をとる．よって　$\boldsymbol{\dfrac{7}{2} \leqq f(4) \leqq 6}$

(2) $k=\dfrac{M-m}{2}$ とおくと　$b=k+4$，$c=-3k+M-3$

$D=b^2+4c$，$q=\dfrac{D}{4}$ であるから

$$q=\frac{1}{4}\{(k+4)^2+4(-3k+M-3)\}=\frac{1}{4}(k-2)^2+M$$

$0 \leqq m \leqq 2$，$5 \leqq M \leqq 6$，$\dfrac{3}{2} \leqq k \leqq 3$ であるから，q は，

$M=6$，$k=3$ のとき $(m=0)$，最大値 $\dfrac{25}{4}$ をとり，

$M=5$，$k=2$ のとき $(m=1)$，最小値 5 をとる．

よって　$\boldsymbol{5 \leqq q \leqq \dfrac{25}{4}}$

(3) 放物線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，$\alpha+\beta=b$，$\alpha\beta=-c$ より，$D=b^2+4c$，$q=\dfrac{D}{4}$ に注意して

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=b^2+4c=D=4q=4\cdot 6=24$$

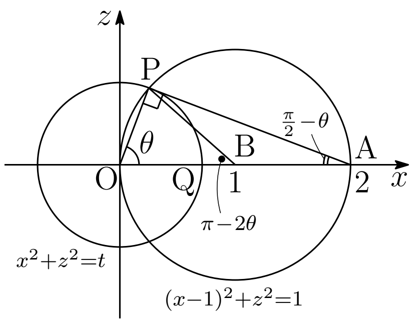
$\beta-\alpha=\sqrt{24}$ であるから　$S=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(\sqrt{24})^3=\boldsymbol{8\sqrt{6}}$

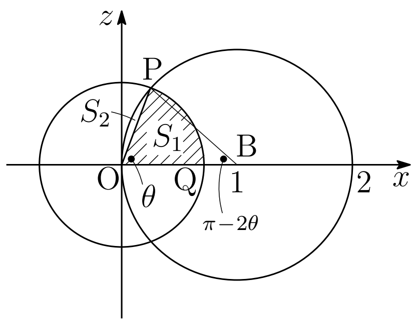
$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) xy 平面に垂直で O を通る座標軸を z とすると，立体 M の表す領域は

$$0 \leqq y \leqq 2, \quad y \geqq x^2 + z^2, \quad (x-1)^2 + z^2 \leqq 1$$

平面 $y = t$ 上に 2 円 $x^2 + z^2 = t$，$(x-1)^2 + z^2 = 1$ の交点の 1 つを P とし，OP と x 軸方向の正の向きとなす角を θ とすると，左下の図から

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OA}\cos\theta = 2\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad t = \mathrm{OP}^2 = (2\cos\theta)^2$$





右上の図において，扇形 OPQ の面積を S_1，弧 OP と線分 OP で囲まれた部分の面積を S_2 とすると ($\triangle$OPB は BO = BP = 1 の二等辺三角形)

$$S_1 = \frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta = 2\theta\cos^2\theta,$$
$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi - 2\theta) - \frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(\pi - 2\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$S(t) = 2(S_1 + S_2)$ であるから

$$\begin{aligned} S(t) &= 2\left(2\theta\cos^2\theta + \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \\ &= 2\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin 2\theta + \pi = \boldsymbol{2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi} \end{aligned}$$

(2) $t = (2\cos\theta)^2$ より $\quad \dfrac{dt}{d\theta} = -8\cos\theta\sin\theta = -4\sin 2\theta$

t	$0 \longrightarrow 2$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)\frac{dt}{d\theta}d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)(-4\sin 2\theta)d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4\theta\sin 4\theta + 2\cos 4\theta - 2 + 4\pi\sin 2\theta)\,d\theta \\ &= \Big[-\theta\cos 4\theta + \frac{3}{4}\sin 4\theta - 2\pi\cos 2\theta - 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi} \end{aligned}$$