

平成29年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分  
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

1 双曲線  $H: x^2 - y^2 = 1$  上の3点  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(s, t)$  ( $t \neq 0$ ) を考える.

- (1) 点  $A$  における  $H$  の接線と直線  $BC$  の交点を  $P$  とするとき,  $P$  の座標を  $s$  と  $t$  を用いてあらわせ.
- (2) 点  $C$  における  $H$  の接線と直線  $AB$  の交点を  $Q$  とするとき,  $Q$  の座標を  $s$  と  $t$  を用いてあらわせ.
- (3) 点  $B$  における  $H$  の接線と直線  $AC$  の交点を  $R$  とするとき, 3点  $P, Q, R$  は一直線上にあることを証明せよ.

2 複素数  $z$  は  $z^5 = 1$  を満たし, 実部と虚部がともに正であるものとする. 硬貨を投げて表が出れば1, 裏が出れば0とし, 5回投げて出た順に  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  とおく. 複素数  $w$  を  $w = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$  と定める.

- (1) 5回とも表が出たとする.  $w$  の値を求めよ.
- (2)  $a_0 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = a_4 = 1$  のとき,  $|w| < 1$  であることを示せ.
- (3)  $|w| < 1$  である確率を求めよ.

3  $a, b$  を自然数とし, 不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \quad (\text{A})$$

を考える. 次の問いに答えよ. ただし,  $2.645 < \sqrt{7} < 2.646$  であること,  $\sqrt{7}$  が無理数であることを用いてよい.

- (1) 不等式 (A) を満たし  $b \geq 2$  である自然数  $a, b$  に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ.

- (2) 不等式 (A) を満たす自然数  $a, b$  の組のうち,  $b \geq 2$  であるものをすべて求めよ.

4  $b, c$  を実数とする. 2次関数  $f(x) = -x^2 + bx + c$  が

$$0 \leq f(1) \leq 2, \quad 5 \leq f(3) \leq 6$$

を満たすとする.

- (1)  $f(4)$  のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) 放物線  $y = f(x)$  の頂点の  $y$  座標  $q$  のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) 放物線  $y = f(x)$  の頂点の  $y$  座標が 6 のとき, 放物線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ.

5  $xy$  平面上で放物線  $y = x^2$  と直線  $y = 2$  で囲まれた図形を,  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体を  $L$  とおく. 回転体  $L$  に含まれる点のうち,  $xy$  平面上の直線  $x = 1$  からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を  $M$  とおく.

- (1)  $t$  を  $0 \leq t \leq 2$  を満たす実数とする.  $xy$  平面上の点  $(0, t)$  を通り,  $y$  軸に直交する平面による  $M$  の切り口の面積を  $S(t)$  とする.  $t = (2 \cos \theta)^2$   $\left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  のとき,  $S(t)$  を  $\theta$  を用いてあらわせ.
- (2)  $M$  の体積  $V$  を求めよ.

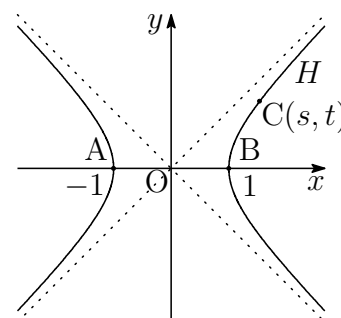
## 解答例

- 1 (1)  $H$  上の点  $A(-1, 0)$  における接線の方程式は

$$x = -1$$

$H$  上の点  $C(s, t)$  は,  $t \neq 0$  より  $s \neq \pm 1$   
2点  $B(1, 0)$ ,  $C(s, t)$  を通る直線の方程式は

$$y = \frac{t}{s-1}(x-1)$$



上の2式を解いて  $P\left(-1, \frac{-2t}{s-1}\right)$

- (2)  $H$  上の点  $C(s, t)$  における接線の方程式は  $sx - ty = 1$

直線  $AB$  の方程式は  $y = 0$

この2式を解いて  $Q\left(\frac{1}{s}, 0\right)$

- (3)  $H$  上の点  $B$  における接線の方程式は  $x = 1$

2点  $A(-1, 0)$ ,  $C(s, t)$  を通る直線の方程式は  $y = \frac{t}{s+1}(x+1)$

この2式を解いて  $R\left(1, \frac{2t}{s+1}\right)$

$s^2 - t^2 = 1$  に注意すると

$$\overrightarrow{QP} = \left(-\frac{s+1}{s}, -\frac{2t}{s-1}\right) = \frac{1}{1-s} \left(\frac{s^2-1}{s}, 2t\right) = \frac{t}{1-s} \left(\frac{t}{s}, 2\right),$$

$$\overrightarrow{QR} = \left(\frac{s-1}{s}, \frac{2t}{s+1}\right) = \frac{1}{1+s} \left(\frac{s^2-1}{s}, 2t\right) = \frac{t}{1+s} \left(\frac{t}{s}, 2\right)$$

$\overrightarrow{QP} // \overrightarrow{QR}$  であるから, 3点  $P, Q, R$  は同一直線上にある.

別解  $(s-1)\overrightarrow{OP} = (1-s, -2t)$ ,  $(s+1)\overrightarrow{OR} = (1+s, 2t)$  より

$$(s-1)\overrightarrow{OP} + (s+1)\overrightarrow{OR} = (2, 0) = 2s\overrightarrow{OQ}$$

したがって  $\overrightarrow{OQ} = \frac{s-1}{2s}\overrightarrow{OP} + \frac{s+1}{2s}\overrightarrow{OR}$

このとき,  $\frac{s-1}{2s} + \frac{s+1}{2s} = 1$  より, 直線  $PR$  上に点  $Q$  がある.

よって, 3点  $P, Q, R$  は同一直線上にある. ■

- 2 (1)  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$  であるから,  $z^5 = 1$  ( $z \neq 1$ ) より

$$w = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = 0$$

- (2)  $a_0 = a_2 = a_3 = 0$ ,  $a_1 = a_4 = 1$  のとき

$$w = z + z^4 = z + \frac{z^5}{z} = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z + \bar{z}$$

条件  $z^5 = 1$ ,  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$  より,  $\theta = \arg z = \frac{2\pi}{5}$  とおくと

$$w = z + \bar{z} = 2 \cos \theta < 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1 \quad \text{よって} \quad |w| < 1$$

- (3) 表が出た枚数を  $n$  とする.

- (i)  $n = 0$  のとき,  $w = 0$  より  $|w| = 0$
- (ii)  $n = 1$  のとき,  $|w| = 1$
- (iii)  $n = 2$  のとき

$$\begin{aligned} |z + z^2| &= |z||1 + z|, & |z^2 + z^3| &= |z^2||1 + z|, \\ |z^3 + z^4| &= |z^3||1 + z|, & |z^4 + 1| &= |z^4||1 + z| \end{aligned}$$

$1 + z$  の実部について  $1 + \cos \theta > 0$  であるから

$$|1 + z| = |z + z^2| = |z^2 + z^3| = |z^3 + z^4| = |z^4 + 1| > 1$$

$$\begin{aligned} 1 + z^2 \text{ について } 1 + z^2 &= 1 + (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= (1 + \cos 2\theta) + i \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } |1 + z^2|^2 &= (1 + \cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2 \\ &= 2 + 2 \cos 2\theta = (2 \cos \theta)^2 < 1 \end{aligned}$$

$$|1 + z^2| = |z + z^3| = |z^2 + z^4| = |z^3 + 1| = |z^4 + z| < 1$$

このとき,  $|w| < 1$  となるのは, 5通り

- (iv)  $n = 3$  のとき  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$  より, 例えば,  $|1 + z + z^2| = |z^3 + z^4|$  であるから,  $|w| < 1$  を満たす場合の数は,  $n = 2$  の場合と等しい.
  - (v)  $n = 4$  のとき, 例えば,  $|1 + z + z^2 + z^3| = |z^4| = 1$  であるから,  $|w| < 1$  とならない.
  - (vi)  $n = 5$  のとき,  $w = 0$  であるから,  $|w| = 0$
- (i)~(v) から,  $|w| < 1$  となる確率は  $\frac{1 + 0 + 5 + 5 + 0 + 1}{2^5} = \frac{3}{8}$  ■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \text{ より} \quad 2\sqrt{7} - \frac{2}{b^4} < \frac{a}{b} + \sqrt{7} < 2\sqrt{7} + \frac{2}{b^4}$$

$$b \geq 2 \text{ のとき} \quad 2\sqrt{7} - \frac{2}{b^4} \geq 2\sqrt{7} - \frac{1}{8} > 2 \times 2.645 - 0.125 > 5.165$$

$$2\sqrt{7} + \frac{2}{b^4} \leq 2\sqrt{7} + \frac{1}{8} < 2 \times 2.646 + 0.125 = 5.417 < 6$$

$$\text{したがって} \quad 5.165 < \frac{a}{b} + \sqrt{7} < 6 \quad \text{よって} \quad \left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

$$(2) \quad \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4}, \quad \left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6 \text{ より}$$

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{12}{b^4} \quad \text{ゆえに} \quad b^2|a^2 - 7b^2| < 12 \quad \dots (*)$$

$\sqrt{7}$ は無理数であるから、自然数  $a, b$  に対して  $\frac{a}{b} \neq \sqrt{7}$  より  $a^2 - 7b^2 \neq 0$   
 $a^2 - 7b^2$  は整数であるから、(\*) を満たす  $b$  ( $b \geq 2$ ) は、 $b = 2, 3$  について調べればよい。

$$(i) \quad b = 2 \text{ のとき} \quad 2^2|a^2 - 28| < 12 \quad \text{ゆえに} \quad |a^2 - 28| < 3$$

これを満たす自然数  $a$  は存在しない。

$$(ii) \quad b = 3 \text{ のとき} \quad 3^2|a^2 - 63| < 12 \quad \text{ゆえに} \quad |a^2 - 63| < \frac{4}{3}$$

これを満たす自然数  $a$  は  $a = 8$

$$(i), (ii) \text{ より, 求める } a, b \text{ の組は } (a, b) = (8, 3) \quad \blacksquare$$

- 4 (1)  $m = f(1)$ ,  $M = f(3)$  とおくと,  $f(x) = -x^2 + bx + c$  より

$$-1 + b + c = m, \quad -9 + 3b + c = M$$

ゆえに  $b = \frac{M - m}{2} + 4$ ,  $c = \frac{3m - M}{2} - 3$

したがって  $f(x) = -x^2 + \left(\frac{M - m}{2} + 4\right)x + \frac{3m - M}{2} - 3$

$$f(4) = \frac{3M - m}{2} - 3$$

$f(4)$  は,  $M = 5$ ,  $m = 2$  のとき最小値  $\frac{7}{2}$  をとり,  $M = 6$ ,  $m = 0$  のとき  
最大値 6 をとる. よって  $\frac{7}{2} \leq f(4) \leq 6$

- (2)  $k = \frac{M - m}{2}$  とおくと  $b = k + 4$ ,  $c = -3k + M - 3$

$D = b^2 + 4c$ ,  $q = \frac{D}{4}$  であるから

$$q = \frac{1}{4}\{(k + 4)^2 + 4(-3k + M - 3)\} = \frac{1}{4}(k - 2)^2 + M$$

$0 \leq m \leq 2$ ,  $5 \leq M \leq 6$ ,  $\frac{3}{2} \leq k \leq 3$  であるから,  $q$  は,

$M = 6$ ,  $k = 3$  のとき ( $m = 0$ ), 最大値  $\frac{25}{4}$  をとり,

$M = 5$ ,  $k = 2$  のとき ( $m = 1$ ), 最小値 5 をとる.

よって  $5 \leq q \leq \frac{25}{4}$

- (3) 放物線  $y = f(x)$  と  $x$  軸との共有点の  $x$  座標を  $\alpha$ ,  $\beta$  とすると ( $\alpha < \beta$ ),  
 $\alpha + \beta = b$ ,  $\alpha\beta = -c$  より,  $D = b^2 + 4c$ ,  $q = \frac{D}{4}$  に注意して

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 + 4c = D = 4q = 4 \cdot 6 = 24$$

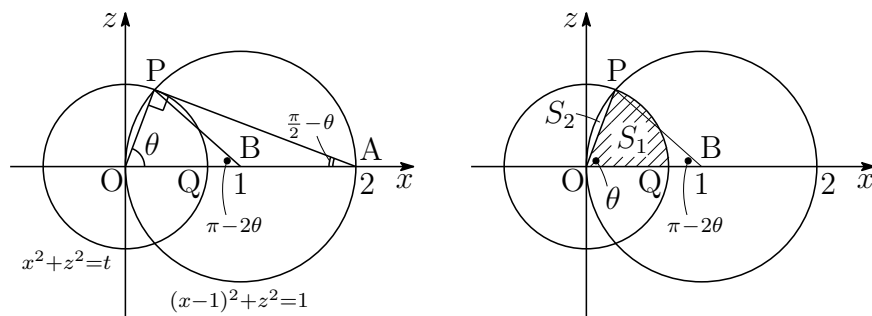
$\beta - \alpha = \sqrt{24}$  であるから  $S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{24})^3 = 8\sqrt{6}$  ■

- 5 (1)  $xy$  平面に垂直で  $O$  を通る座標軸を  $z$  とすると, 立体  $M$  の表す領域は

$$0 \leq y \leq 2, \quad y \geq x^2 + z^2, \quad (x-1)^2 + z^2 \leq 1$$

平面  $y = t$  上に 2 円  $x^2 + z^2 = t$ ,  $(x-1)^2 + z^2 = 1$  の交点の 1 つを  $P$  とし,  $OP$  と  $x$  軸方向の正の向きとなす角を  $\theta$  とすると, 左下の図から

$$OP = OA \cos \theta = 2 \cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad t = OP^2 = (2 \cos \theta)^2$$



右上の図において, 扇形  $OPQ$  の面積を  $S_1$ , 弧  $OP$  と線分  $OP$  で囲まれた部分の面積を  $S_2$  とすると ( $\triangle OPB$  は  $BO = BP = 1$  の二等辺三角形)

$$S_1 = \frac{1}{2} (2 \cos \theta)^2 \theta = 2\theta \cos^2 \theta,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 (\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin(\pi - 2\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$S(t) = 2(S_1 + S_2)$  であるから

$$\begin{aligned} S(t) &= 2 \left( 2\theta \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ &= 2\theta(2 \cos^2 \theta - 1) - \sin 2\theta + \pi = 2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi \end{aligned}$$

(2)  $t = (2 \cos \theta)^2$  より  $\frac{dt}{d\theta} = -8 \cos \theta \sin \theta = -4 \sin 2\theta$

$t$	$0 \rightarrow 2$
$\theta$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi) \frac{dt}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)(-4 \sin 2\theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4\theta \sin 4\theta + 2 \cos 4\theta - 2 + 4\pi \sin 2\theta) d\theta \\ &= \left[ -\theta \cos 4\theta + \frac{3}{4} \sin 4\theta - 2\pi \cos 2\theta - 2\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

■