

平成28年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

- 1 1以上6以下の2つの整数 a, b に対し, 関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める.

$$(ア) \quad f_1(x) = \sin(\pi x)$$

$$(イ) \quad f_{2n}(x) = f_{2n-1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(ウ) \quad f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ.

- (1) $a = 2, b = 3$ のとき, $f_5(0)$ を求めよ.

- (2) $a = 1, b = 6$ のとき, $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ.

- (3) 1個のさいころを2回投げて, 1回目に出る目を a , 2回目に出る目を b とするとき, $f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ.

- 2 次の問いに答えよ.

- (1) c を正の定数とする. 正の実数 x, y が $x + y = c$ をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ.

- (2) 正の実数 x, y, z が $x + y + z = 1$ をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ.

- 3 座標平面において, 原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y = \sqrt{2}(x - 1)^2$ は, ただ1つの共有点 (a, b) をもつとする.

- (1) a, b, r の値をそれぞれ求めよ.

- (2) 連立不等式

$$a \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}(x - 1)^2, \quad x^2 + y^2 \geq r^2$$

の表す領域を, x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ.

4 正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

とおき、1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする。

- (1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき、 $2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ。
- (2) $S_n = 2 + \frac{m}{20}$ となる正の整数の組 (n, m) をすべて求めよ。
- (3) 整数 a と $0 \leq b < 1$ をみたす実数 b を用いて、

$$A_{20} S_{20} = a + b$$

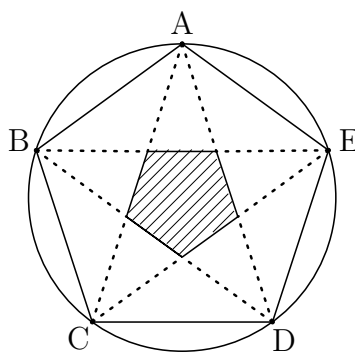
と表すとき、 b の値を求めよ。

5 円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び、円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ とおき、 \vec{a} の大きさを x とする。

- (1) \overrightarrow{AC} の大きさを y とするとき、 $x^2 = y(y - x)$ がなりたつことを示せ。
- (2) \overrightarrow{BC} を \vec{a} , \vec{c} を用いて表せ。
- (3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。 R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ。
- (4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし、 R_n の面積を S_n とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ。



斜線部分が R_2

解答例

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad & (\text{ア}) \quad f_1(x) = \sin(\pi x) \\
 & (\text{イ}) \quad f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\
 & (\text{ウ}) \quad f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ゆえに} \quad f_{2n+1}(x) &= f_{2n}(-x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - (-x)\right) \\
 &= f_{2n-1}\left(x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \dots(*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{したがって} \quad f_5(x) &= f_1\left(x + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) \\
 \text{よって, } a=2, b=3 \text{ のとき, } x=0 \text{ とすると}
 \end{aligned}$$

$$f_5(0) = f_1\left(\frac{5}{3}\right) = \sin \frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \quad (*) \text{ より} \quad f_{2k-1}(x) = f_1\left(x + (k-1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{したがって} \quad f_{2k}(x) &= f_{2k-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right) \\
 &= f_1\left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right) + (k-1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) \\
 &= f_1\left(k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - x\right) \quad \dots(**)
 \end{aligned}$$

$a=1, b=6$ のとき, $x=0$ とすると

$$f_{2k}(0) = f_1\left(\frac{7}{6}k\right) = \sin \frac{7}{6}k\pi = \sin\left(k\pi + \frac{k}{6}\pi\right) = (-1)^k \sin \frac{k}{6}\pi$$

よって

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{100} (-1)^k f_{2k}(0) &= \sum_{k=1}^{100} (-1)^k \cdot (-1)^k \sin \frac{k}{6}\pi = \sum_{k=1}^{100} \sin \frac{k}{6}\pi \\
 &= \sum_{k=1}^{95} \sin \frac{k}{6}\pi + \sum_{k=96}^{100} \sin \frac{k}{6}\pi \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{95} \left(\sin \frac{k}{6}\pi + \sin \frac{96-k}{6}\pi\right) + \sum_{k=96}^{100} \sin \frac{k}{6}\pi \\
 &= \sum_{k=96}^{100} \sin \frac{k}{6}\pi = 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$(3) (**) \text{より } f_6(x) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - x\right)$$

これに $x = 0$ を代入すると, (ア) により

$$f_6(0) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) = \sin 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0) = 0$ となるのは, $3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ が整数になるときで, 次の 8 組.

$$(a, b) = (1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 3), (6, 6)$$

よって, 求める確率は $\frac{8}{6^2} = \frac{2}{9}$ ■

2 (1) $x + y = c$ より

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{x+y+1}{xy} = 1 + \frac{c+1}{xy} \quad \dots \textcircled{1}$$

$x > 0, y > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{c}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{c^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する (等号が成立するのは, $x = y = \frac{c}{2}$ のとき).

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 1 + (c+1) \cdot \frac{4}{c^2} = \left(1 + \frac{2}{c}\right)^2$$

よって, $x = y = \frac{c}{2}$ のとき, 最小値 $\left(1 + \frac{2}{c}\right)^2$ をとる.

解説 n 個の正の数 x_1, x_2, \dots, x_n の相加平均 A , 相乗平均 G , 調和平均 H は

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

$A \geq G$ が成り立つから¹, n 個の正の数 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$$

したがって $A \geq G \geq H$

なお, 等号が成立するのは, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときに限る.

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf **3** を参照

補足 $\frac{1}{x}$ と $\frac{1}{y}$ の相乗平均・調和平均の大小関係により

$$\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \geq \frac{2}{x+y} = \frac{2}{c} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{c^2} \quad \left(\text{等号は } x=y=\frac{c}{2} \text{ のとき} \right)$$

(2) x, y, z は正の実数, $x+y+z=1$ であるから, $0 < z < 1$ より

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) > 0, \quad \left(1 - \frac{4}{3z}\right) < 0$$

したがって

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{4}{3z}\right) \quad \dots (*)$$

これが最大となるのは, z を固定したとき

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

が最小となるときである. $x+y=1-z$ であるから, (1) の結果により,
 $x=y=\frac{1-z}{2}$ を (*) に代入して

$$f(z) = \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{3z}\right) \quad (0 < z < 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2 \left(1 + \frac{2}{1-z}\right) \frac{2}{(1-z)^2} \cdot \left(1 - \frac{4}{3z}\right) + \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2 \cdot \frac{4}{3z^2} \\ &= 2 \cdot \frac{3-z}{1-z} \cdot \frac{2}{(1-z)^2} \cdot \frac{3z-4}{3z} + \left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2 \cdot \frac{4}{3z^2} \\ &= \frac{4(3-z)(3z-4)}{3z(1-z)^3} + \frac{4(3-z)^2}{3z^2(1-z)^2} \\ &= \frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2} \left(\frac{3z-4}{1-z} + \frac{3-z}{z}\right) = \frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2} \cdot \frac{(2z-1)(2z-3)}{z(1-z)} \end{aligned}$$

z	(0)	...	$\frac{1}{2}$...	(1)
$f'(z)$		+	0	-	
$f(z)$		↗	$-\frac{125}{3}$	↘	

$z = \frac{1}{2}$, $x = y = \frac{1}{4}$ のとき, 最大値 $-\frac{125}{3}$ をとる. ■

3 (1) 放物線上の点 $P(t, \sqrt{2}(t-1)^2)$ について, $f(t) = OP^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 + 2(t-1)^4, \\ f'(t) &= 2t + 8(t-1)^3 = 8t^3 - 24t^2 + 26t - 8 \\ &= 2(2t-1)(2t^2 - 5t + 4) = 2(2t-1) \left\{ 2 \left(t - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{7}{8} \right\} \end{aligned}$$

t	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	\searrow	$\frac{3}{8}$	\nearrow

よって $\mathbf{a} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $r = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

補足 放物線 $y = \sqrt{2}(x-1)^2$ 上の動点 $P(x, y)$ を

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = \sqrt{2}(t-1)^2, \\ \vec{v} &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \quad \vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

とおき, $f(t) = OP^2 = x^2 + y^2$ を微分すると

$$f'(t) = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2\vec{OP} \cdot \vec{v}$$

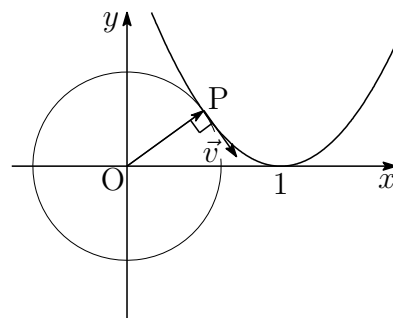
$f'(t) = 0$ のとき, $\vec{OP} \cdot \vec{v} = 0$ より, $\vec{OP} \perp \vec{v}$

$$f''(t) = 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + 2x \frac{d^2x}{dt^2} + 2y \frac{d^2y}{dt^2} = 2|\vec{v}|^2 + 2\vec{OP} \cdot \vec{a}$$

このとき, $\vec{OP} = (t, \sqrt{2}(t-1)^2)$, $\vec{v} = (1, 2\sqrt{2}(t-1))$, $\vec{a} = (0, 2\sqrt{2})$ より

$$|\vec{v}|^2 > 0, \quad \vec{OP} \cdot \vec{a} = 4(t-1)^2 \geq 0$$

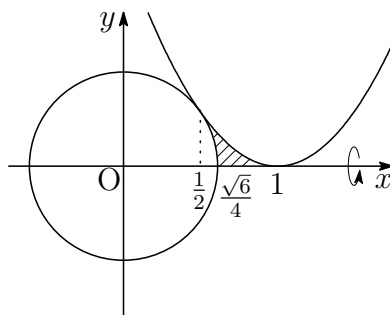
$f''(t) > 0$ であるから, $f'(t) = 0$ をみたす点において, OP は極小となる.



(2) (1) の結果から, 連立不等式

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2 + y^2 \geq 1$$

の表す領域は, 下の図の斜線部分.



この領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \left(\frac{3}{8} - x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{2}{5}(x-1)^5 \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \left[\frac{3}{8}x - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \\ &= \frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16} \end{aligned}$$

よって $V = \left(\frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16} \right) \pi$ ■

4 (1) N は $\log_2 n$ 以下の最大の整数であるから

$$N \leq \log_2 n < N + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^N \leq n < 2^{N+1}$$

自然数 k に対して, 非負整数 a_k と奇数 b_k を用いて

$$k = 2^{a_k} \cdot b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

とおくと

$$2^N A_n S_n = 2^N A_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{a_k} \cdot b_k} = \sum_{k=1}^n \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k}$$

$\frac{A_n}{b_k}$ は奇数, $k = 2^N$ のとき $a_k = N$, $k \neq 2^N$ のとき $a_k < N$ であるから

$$k = 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{ は奇数, } k \neq 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{ は偶数}$$

$2^N A_n S_n$ は 1 個の奇数と $n-1$ 個の偶数の和であるから, $2^N A_n S_n$ は奇数.

$$(2) S_n = 2 + \frac{m}{20} = \frac{40+m}{2^2 \cdot 5} \text{ より}$$

$$2^N A_n S_n = \frac{(40+m)A_n \cdot 2^{N-2}}{5}$$

上式は、奇数であるから、 $N \leq 2$ より、 $\log_2 n < N + 1$ に注意して

$$\log_2 n < 3 \quad \text{ゆえに} \quad n < 8$$

$$\text{したがって} \quad S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{5}{6}, \quad S_4 = 2 + \frac{1}{12},$$

$$S_5 = 2 + \frac{17}{60}, \quad S_6 = 2 + \frac{9}{20}, \quad S_7 = 2 + \frac{83}{140}$$

$$S_n = 2 + \frac{m}{20} \text{ となるのは} \quad (n, m) = (6, 9)$$

$$(3) \quad A_{20} S_{20} = A_{20} \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} \\ = \left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19} \right) \\ + \frac{1}{2} \left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9} \right) \\ + \frac{1}{4} \left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} \right) + \frac{A_{20}}{8} + \frac{A_{20}}{16} \quad \cdots (*)$$

n が 20 以下の奇数のとき、 $\frac{A_{20}}{n}$ は奇数の整数であるから

$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19} \text{ は整数} \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、 $A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9}$ は 5 つの奇数の和であるから

$$\frac{1}{2} \left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9} \right) \text{ の小数部分は } \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{ここで} \quad A_{20} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$$

$$\equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (-7) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3$$

$$\equiv 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 3 \equiv 9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3 \equiv 81 \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{16}$$

したがって、 $p = 4, 8, 16$ のとき $A_{20} \equiv 3 \pmod{p}$

$3^2 \equiv 1, 5^2 \equiv 1 \pmod{4}$ であるから

$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} \equiv A_{20} + 3A_{20} + 5A_{20} \equiv 9A_{20} \equiv A_{20} \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\frac{1}{4} \left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} \right) \text{ の小数部分は } \frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

また, $\frac{A_{20}}{8}$ の小数部分は $\frac{3}{8}$, $\frac{A_{20}}{16}$ の小数部分は $\frac{3}{16}$ であるから, これと (*), ①~③により

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{29}{16} = 1 + \frac{13}{16} \quad \text{よって } b = \frac{13}{16} \quad \blacksquare$$

- 5 (1) AC と BE の交点を F とすると, $\triangle BCF$ は二等辺三角形であるから

$$\begin{aligned} AB = BC = CF = x \\ AF = AC - CF = y - x \end{aligned}$$

$\triangle ABC \sim \triangle AFB$ であるから

$$x : y = y - x : x \quad \text{ゆえに } x^2 = y(y - x)$$

- (2) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$, $\vec{AD} = \frac{y}{x}\vec{BC}$ であるから

$$\vec{a} + \vec{BC} + \vec{c} = \frac{y}{x}\vec{BC} \quad \text{ゆえに } \vec{BC} = \frac{x}{y-x}(\vec{a} + \vec{c})$$

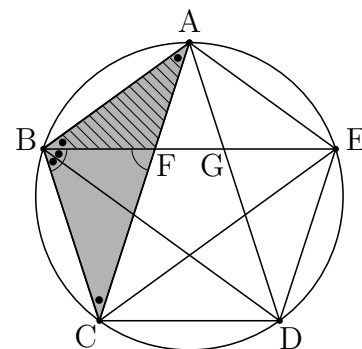
- (1) の結果から $y^2 - xy - x^2 = 0$ ゆえに $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 1 = 0$

$$\frac{y}{x} > 0 \text{ に注意して } \frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{よって } \vec{BC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

- (3) AD と BE の交点を G とすると, $BE = AC = y$, $BF = AF = y - x$ より

$$\begin{aligned} FG &= BE - 2BF \\ &= y - 2(y - x) = 2x - y = \left(2 - \frac{y}{x}\right)x \\ &= \left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x \end{aligned}$$

$$\text{よって, } R_2 \text{ の一辺の長さは } \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x$$



(4) (3)の結果から, $r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad S_n = S_1 \cdot (r^2)^{n-1} = S_1 \cdot r^{2n-2}$$

$|-r^2| < 1$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_1 \cdot r^{2k-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-r^2)^{k-1} \\ &= \frac{1}{1 - (-r^2)} = \frac{1}{1 + r^2} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

■