平成 28 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

$\boxed{1}$ 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a，b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　　$(n=1,2,3,\cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　　$(n=1,2,3,\cdots)$

以下の問いに答えよ．

(1) $a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) $a=1$，$b=6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ．

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ．

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) c を正の定数とする．正の実数 x，y が $x+y=c$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ．

(2) 正の実数 x，y，z が $x+y+z=1$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ．

$\boxed{3}$ 座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 $(a,\ b)$ をもつとする．

(1) a，b，r の値をそれぞれ求めよ．

(2) 連立不等式

$$a \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2,\quad x^2+y^2 \geqq r^2$$

の表す領域を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

$\boxed{4}$ 正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする．

(1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ．

(2) $S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 $(n,\ m)$ をすべて求めよ．

(3) 整数 a と $0 \leqq b < 1$ をみたす実数 b を用いて，

$$A_{20} S_{20} = a + b$$

と表すとき，b の値を求めよ．

$\boxed{5}$ 円上の 5 点 A，B，C，D，E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している．5 点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2 = y(y - x)$ がなりたつことを示せ．

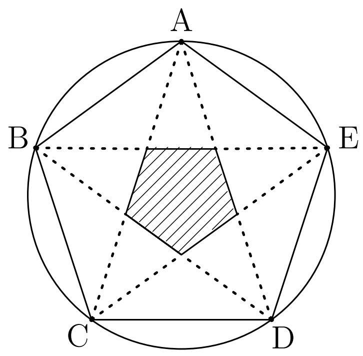
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする．R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする．

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ．



斜線部分が R_2

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

（ア）$f_1(x)=\sin(\pi x)$

（イ）$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)\qquad (n=1,2,3,\cdots)$

（ウ）$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)\qquad (n=1,2,3,\cdots)$

ゆえに
$$\begin{aligned} f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)&=f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-(-x)\right)\\ &=f_{2n-1}\left(x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

したがって
$$f_5(x)=f_1\left(x+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)$$

よって，$a=2$，$b=3$ のとき，$x=0$ とすると
$$f_5(0)=f_1\left(\frac{5}{3}\right)=\sin\frac{5}{3}\pi=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $(*)$ より
$$f_{2k-1}(x)=f_1\left(x+(k-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)$$

したがって
$$\begin{aligned} f_{2k}(x)&=f_{2k-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right)\\ &=f_1\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right)+(k-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)\\ &=f_1\left(k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-x\right)\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

$a=1$，$b=6$ のとき，$x=0$ とすると
$$f_{2k}(0)=f_1\left(\frac{7}{6}k\right)=\sin\frac{7}{6}k\pi=\sin\left(k\pi+\frac{k}{6}\pi\right)=(-1)^k\sin\frac{k}{6}\pi$$

よって
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100}(-1)^kf_{2k}(0)&=\sum_{k=1}^{100}(-1)^k\cdot(-1)^k\sin\frac{k}{6}\pi=\sum_{k=1}^{100}\sin\frac{k}{6}\pi\\ &=\sum_{k=1}^{95}\sin\frac{k}{6}\pi+\sum_{k=96}^{100}\frac{k}{6}\pi\\ &=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{95}\left(\sin\frac{k}{6}\pi+\sin\frac{96-k}{6}\pi\right)+\sum_{k=96}^{100}\frac{k}{6}\pi\\ &=\sum_{k=96}^{100}\frac{k}{6}\pi=0+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}+\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(3) (**) より　$f_6(x)=f_1\left(3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)-x\right)$

これに $x=0$ を代入すると，(ア) により

$$f_6(0)=f_1\left(3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)=\sin 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0)=0$ となるのは，$3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ が整数になるときで，次の 8 組.

$$(a,b)=(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 6),\ (6,\ 2),\ (3,\ 3),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{8}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $x+y=c$ より

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x+y+1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}\quad\cdots①$$

$x>0$，$y>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{c}{2}=\frac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{xy}\geqq\frac{4}{c^2}\quad\cdots②$$

が成立する $\left(\text{等号が成立するのは}, x=y=\dfrac{c}{2}\text{のとき}\right)$.

①，② より　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\geqq 1+(c+1)\cdot\dfrac{4}{c^2}=\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2$

よって，$x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2}$ をとる.

解説 n 個の正数 $x_1,\ x_2,\cdots,x_n$ の相加平均 A，相乗平均 G，調和平均 H は

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$
$$G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$
$$\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$A\geqq G$ が成り立つから [1]，n 個の整数 $\dfrac{1}{x_1},\ \dfrac{1}{x_2},\ \cdots,\ \dfrac{1}{x_n}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqq\sqrt{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{H}\geqq\frac{1}{G}$$

したがって　$A\geqq G\geqq H$

なお，等号が成立するのは，$x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときに限る.

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{3}$ を参照

補足 $\dfrac{1}{x}$ と $\dfrac{1}{y}$ の相乗平均・調和平均の大小関係により

$$\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} \geqq \frac{2}{x+y} = \frac{2}{c} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \geqq \frac{4}{c^2} \quad \left(\text{等号は } x=y=\frac{c}{2} \text{ のとき}\right)$$

(2) x，y，z は正の実数，$x+y+z=1$ であるから，$0<z<1$ より

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)>0, \quad \left(1-\frac{4}{3z}\right)<0$$

したがって

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right) \quad \cdots(*)$$

これが最大となるのは，z を固定したとき

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

が最小となるときである．$x+y=1-z$ であるから，(1) の結果により，$x=y=\dfrac{1-z}{2}$ を $(*)$ に代入して

$$f(z)=\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right) \quad (0<z<1)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 2\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\frac{2}{(1-z)^2}\cdot\left(1-\frac{4}{3z}\right)+\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}\\
&= 2\cdot\frac{3-z}{1-z}\cdot\frac{2}{(1-z)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z}+\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}\\
&= \frac{4(3-z)(3z-4)}{3z(1-z)^3}+\frac{4(3-z)^2}{3z^2(1-z)^2}\\
&= \frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2}\left(\frac{3z-4}{1-z}+\frac{3-z}{z}\right)=\frac{4(3-z)}{3z(1-z)^2}\cdot\frac{(2z-1)(2z-3)}{z(1-z)}
\end{aligned}$$

z	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		$\nearrow$	$-\frac{125}{3}$	$\searrow$	

$z=\dfrac{1}{2}$，$x=y=\dfrac{1}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{-\dfrac{125}{3}}$ をとる．

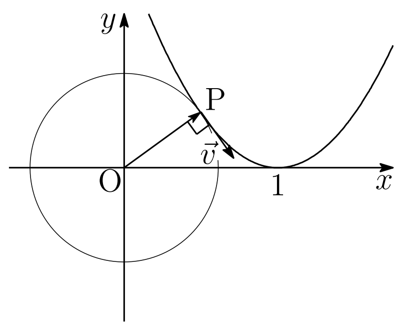
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 放物線上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{2}(t-1)^2)$ について，$f(t)=\mathrm{OP}^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2+2(t-1)^4, \\ f'(t) &= 2t+8(t-1)^3 = 8t^3-24t^2+26t-8 \\ &= 2(2t-1)(2t^2-5t+4) = 2(2t-1)\left\{2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right\} \end{aligned}$$

t	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=\frac{\sqrt{2}}{4}},\ r=\sqrt{\frac{3}{8}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$

補足 放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ 上の動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を



$$x=t,\quad y=\sqrt{2}(t-1)^2,$$
$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\quad \vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

とおき，$f(t)=\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$ を微分すると

$$f'(t)=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}$$

$f'(t)=0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{v}$

$$f''(t)=2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+2x\frac{d^2x}{dt^2}+2y\frac{d^2y}{dt^2}=2|\vec{v}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t,\ \sqrt{2}(t-1)^2)$，$\vec{v}=(1,\ 2\sqrt{2}(t-1))$，$\vec{a}=(0,\ 2\sqrt{2})$ より

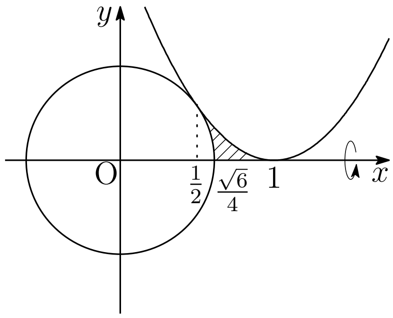
$$|\vec{v}|^2>0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=4(t-1)^2\geqq 0$$

$f''(t)>0$ であるから，$f'(t)=0$ をみたす点において，OP は極小となる．

(2) (1) の結果から，連立不等式

$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2+y^2 \geqq 1$$

の表す領域は，下の図の斜線部分．



この領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \left(\frac{3}{8} - x^2\right) dx \\
&= \left[\,\frac{2}{5}(x-1)^5\,\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[\,\frac{3}{8}x - \frac{x^3}{3}\,\right]_{\frac{\sqrt{6}}{4}}^{1} \\
&= \frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16}
\end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{\left(\frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16}\right)\pi}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) N は $\log_2 n$ 以下の最大の整数であるから

$$N \leqq \log_2 n < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^N \leqq n < 2^{N+1}$$

自然数 k に対して，自然数 a_k と奇数 b_k を用いて

$$k = 2^{a_k} \cdot b_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

とおくと

$$2^N A_n S_n = 2^N A_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{a_k} \cdot b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k}$$

$\dfrac{A_n}{b_k}$ は奇数，$k = 2^N$ のとき $a_k = N$，$k \neq 2^N$ のとき $a_k < N$ であるから

$$k = 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{は奇数}, \quad k \neq 2^N \text{ のとき } \frac{A_n}{b_k} \cdot 2^{N-a_k} \text{は偶数}$$

$2^N A_n S_n$ は 1 個の奇数と $n-1$ 個の偶数の和であるから，$2^N A_n S_n$ は奇数．

(2) $S_n = 2 + \dfrac{m}{20} = \dfrac{40+m}{2^2{\cdot}5}$ より

$$2^N A_n S_n = \frac{(40+m)A_n}{5}{\cdot}2^{N-2}$$

上式は，奇数であるから，$N \leqq 2$ より，$\log_2 n < N+1$ に注意して

$$\log_2 n < 3 \quad \text{ゆえに} \quad n < 8$$

したがって　$S_1 = 1,\ \ S_2 = 1 + \dfrac{1}{2},\ \ S_3 = 1 + \dfrac{5}{6},\ \ S_4 = 2 + \dfrac{1}{12},$

$$S_5 = 2 + \frac{17}{120},\ \ S_6 = 2 + \frac{9}{20},\ \ S_7 = 2 + \frac{83}{140}$$

$S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ となるのは　　$\boldsymbol{(n,\ m) = (6,\ 9)}$

(3)
$$\begin{aligned} A_{20}S_{20} &= A_{20}\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k} \\ &= \left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9}\right) \\ &\qquad + \frac{1}{4}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5}\right) + \frac{A_{20}}{8} + \frac{A_{20}}{16} \qquad \cdots(*) \end{aligned}$$

n が 20 以下の奇数のとき，$\dfrac{A_{20}}{n}$ は奇数の整数であるから

$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \cdots + \frac{A_{20}}{19} \text{ は整数} \quad \cdots ①$$

また，$A_{20} + \dfrac{A_{20}}{3} + \dfrac{A_{20}}{5} + \dfrac{A_{20}}{7} + \dfrac{A_{20}}{9}$ は 5 つの奇数の和であるから

$$\frac{1}{2}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} + \frac{A_{20}}{7} + \frac{A_{20}}{9}\right) \text{ の小数部分は } \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

ここで
$$\begin{aligned} A_{20} &= 1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}9{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}15{\cdot}17{\cdot}19 \\ &\equiv 1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}(-7){\cdot}(-5){\cdot}(-3){\cdot}(-1){\cdot}1{\cdot}3 \\ &\equiv 3^2{\cdot}5^2{\cdot}7^2{\cdot}3 \equiv 9{\cdot}9{\cdot}1{\cdot}3 \equiv 81{\cdot}3 \equiv 1{\cdot}3 \equiv 3 \pmod{16} \end{aligned}$$

したがって，$p = 4,\ 8,\ 16$ のとき　$A_{20} \equiv 3 \pmod{p}$

$3^2 \equiv 1,\ \ 5^2 \equiv 1 \pmod 4$ であるから

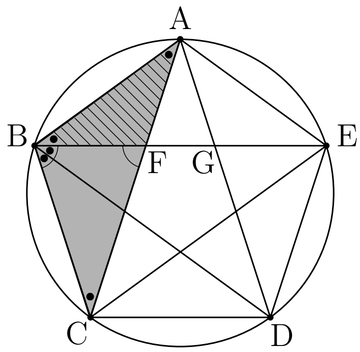
$$A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5} \equiv A_{20} + 3A_{20} + 5A_{20} \equiv 9A_{20} \equiv A_{20} \equiv 3 \pmod 4$$

$$\frac{1}{4}\left(A_{20} + \frac{A_{20}}{3} + \frac{A_{20}}{5}\right) \text{ の小数部分は } \frac{3}{4} \quad \cdots ③$$

また，$\dfrac{A_{20}}{8}$ の小数部分は $\dfrac{3}{8}$，$\dfrac{A_{20}}{16}$ の小数部分は $\dfrac{3}{16}$ であるから，これと (∗)，①〜③ により

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{29}{16} = 1 + \frac{13}{16} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = \frac{13}{16}}$$

5 (1) AC と BE の交点を F とすると，△BCF は二等辺三角形であるから



$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CF} = x$$
$$\mathrm{AF} = \mathrm{AC} - \mathrm{CF} = y - x$$

△ABC ≡ △AFB であるから

$$x : y = y - x : x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = y(y - x)$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから

$$\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \vec{c} = \frac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{x}{y - x}(\vec{a} + \vec{c})$$

(1) の結果から　$y^2 - xy - x^2 = 0$　ゆえに　$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{y}{x} - 1 = 0$

$\dfrac{y}{x} > 0$ に注意して　$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}(\vec{a} + \vec{c})}$

(3) AD と BE の交点を G とすると，$\mathrm{BF} = \mathrm{AF} = y - x$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{FG} &= \mathrm{AE} - 2\mathrm{BF} \\ &= y - 2(y - x) = 2x - y = \left(2 - \frac{y}{x}\right)x \\ &= \left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x\end{aligned}$$

よって，R_2 の一辺の長さは　$\boldsymbol{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}x}$

(4) (3) の結果から，$r = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad S_n = S_1 \cdot (r^2)^{n-1} = S_1 \cdot r^{2n-2}$$

$|-r^2| < 1$ であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_1 \cdot r^{2k-2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-r^2)^{k-1} \\
&= \frac{1}{1-(-r^2)} = \frac{1}{1+r^2} \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}
\end{aligned}$$