平成 27 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

1 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ．

(2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x)\,dx$$

で定める．$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\log(1+x) \leqq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい．

2 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ．

3 以下の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ．

(2) p，q，$\sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする．そのとき，$p = q = 0$ であることを示せ．

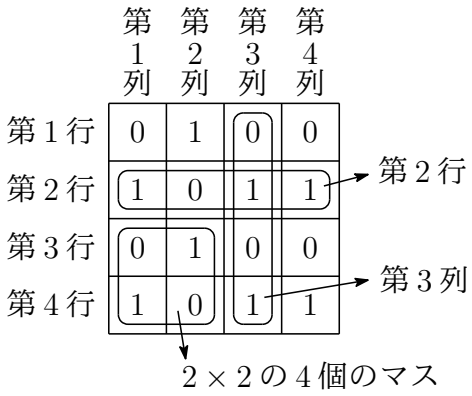
4 座標空間の x 軸上に動点 P，Q がある．P，Q は時刻 0 において，原点を出発する．P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く．その後，ともに時刻 1 で停止する．点 P，Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A，B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ．

5 n を 2 以上の整数とする．正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる．マスは上から第 1 行，第 2 行，$\cdots$，左から第 1 列，第 2 列，$\cdots$，と数える．数字の入れ方についての次の条件 p を考える．

条件 p : 1 から $n-1$ までの整数 i，j についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る．



($n = 4$ の場合の入れ方の例)

(1) 条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ．

(2) 条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\displaystyle\int_0^n \frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$ において，$\dfrac{x}{n}=t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=n \qquad \begin{array}{c||c} x & 0 \longrightarrow n \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$$

したがって
$$\begin{aligned}\int_0^n f_n(x)\,dx &= \int_0^n \frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx \\ &= \int_0^1 \frac{nt}{n(1+nt)}\log(1+t)\cdot n\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{nx}{1+nx}\log(1+x)\,dx\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq \dfrac{nx}{1+nx} < 1$，$\log(1+x) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(1+x)\,dx - I_n &= \int_0^1 \log(1+x)\,dx - \int_0^1 \frac{nx}{1+nx}\log(1+x)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{1+nx} > 0$，$0 \leqq \log(1+x) \leqq \log 2$ であるから

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x) \leqq (\log 2)\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} \qquad \cdots ②$$

ここで
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} &= \left[\frac{\log(1+nx)}{n}\right]_0^1 \\ &= \frac{\log(1+n)}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{n+1}\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{n+1} = 0$

はさみうちの原理により，② から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx = 0$

① より
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n &= \int_0^1 \log(1+x)\,dx \\ &= \Big[(1+x)\log(1+x) - x\Big]_0^1 = \mathbf{2\log 2 - 1}\end{aligned}$$

補足 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき} \quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

すなわち　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+0} x\log\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0}(-x\log x) = 0$ ■

2 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
&= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2x\sqrt{1-y^2}\cdot y\sqrt{1-x^2}\\
&= \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geqq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})\\
&= x^2y^2 + (1-x^2)(1-y^2) - 2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\\
&= \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

よって　$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$

別解 $x = \cos\alpha$，$y = \cos\beta$ とおくと $(0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
&= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
&= \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\\
&= (\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha)^2 = \sin^2(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

このとき，$0 \leqq \sin^2(\alpha+\beta) \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

■

3 (1) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (m,\ n \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき，この両辺を平方すると

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{ゆえに} \quad m^2 = 2n^2$$

m^2 は偶数であるから，m も偶数で，ある自然数 m' を用いて $m = 2m'$ とおける．これを上式に代入して

$$(2m')^2 = 2n^2 \quad \text{ゆえに} \quad n^2 = 2m'^{\,2}$$

したがって，n^2 は偶数となり，n も偶数である．このとき，m と n がともに偶数となり，m，n が互いに素であることと矛盾する．

よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではなく，すなわち，無理数である．

次に，$\sqrt[3]{3}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt[3]{3} = \frac{k}{l} \qquad (k,\ l \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき，この両辺を 3 乗すると

$$3 = \frac{k^3}{l^3} \quad \text{ゆえに} \quad k^3 = 3l^3$$

k^3 は 3 の倍数であるから，k も 3 の倍数で，ある自然数 k' を用いて $k = 3k'$ とおける．これを上式に代入して

$$(3k')^3 = 3l^3 \quad \text{ゆえに} \quad l^3 = 3{\cdot}3k'^{\,3}$$

したがって，l^3 は 3 の倍数となり，l も 3 の倍数である．このとき，k と l がともに 3 の倍数となり，k，l が互いに素であることと矛盾する．

よって，$\sqrt[3]{3}$ は有理数ではなく，すなわち，無理数である．

(2) $\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r$ (r は有理数) $\cdots(*)$ とおく．

$(*)$ より，$\sqrt[3]{3}q=r-\sqrt{2}p$ の両辺を 3 乗すると

$$3q^3=r^3-3r^2p\sqrt{2}+6rp^2-2\sqrt{2}p^3$$

したがって　$\sqrt{2}p(2p^2+3r^2)=6p^2r-3q^3+r^3$

$p\neq 0$ であると仮定すると，$p(2p^2+3r^2)\neq 0$ であるから

$$\sqrt{2}=\frac{6p^2r-3q^3+r^3}{p(2p^2+3r^2)}$$

$p,\ q,\ r$ は，有理数であるから，上式の右辺は有理数であり，$\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する．したがって　$p=0$

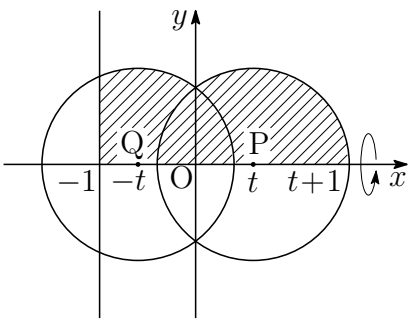
これを $(*)$ に代入すると　$\sqrt[3]{3}q=r$

$q\neq 0$ であると仮定すると　$\sqrt[3]{3}=\dfrac{r}{q}$

$q,\ r$ は有理数であるから，上式の右辺は有理数であり，$\sqrt[3]{3}$ が無理数であることと矛盾する．したがって　$q=0$

よって　$p=q=0$ ■

4 (1) 点 P，Q を中心とする半径 1 の球面が xy 平面によって切り取られる円の方程式は，それぞれ次のようになる．



$$(x-t)^2+y^2=1,\quad (x+t)^2+y^2=1$$

$V(t)$ は右の図の斜線部分を x 軸の周りに一回転させた立体の体積であるから

$$\begin{aligned}\frac{V(t)}{\pi}&=\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx+\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx\\&=\left[x-\frac{(x+t)^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[x-\frac{(x-t)^3}{3}\right]_{0}^{t+1}\\&=-\frac{t^3}{3}-t^2+2t+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V(t)=\pi\left(-\dfrac{t^3}{3}-t^2+2t+\dfrac{4}{3}\right)}$

(2) (1) の結果から　　$V'(t) = \pi(-t^2 + 2t + 2)$

$0 \leqq t \leqq 1$ に注意して，$V(t) = 0$ を解くと　$t = -1 + \sqrt{3}$

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$V(t) \ = \ \pi\left\{(-t^2 - 2t + 2)\left(\dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{3}\right) + 2t + \dfrac{2}{3}\right\}$ であること利用すると，$V(t)$ の最大値は

$$V(-1+\sqrt{3}) = \pi\left\{2(-1+\sqrt{3}) + \frac{2}{3}\right\} = \boldsymbol{\pi\left(-\frac{4}{3} + 2\sqrt{3}\right)}$$ ■

5 (1) 第 n 列の第 i 行，第 $i+1$ 行に 0 または 1 がともに現われるとき，第 i 行，第 $i+1$ 行において，各列ごとに交互に 0 と 1 が現われる．このとき，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには，次にようになる．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \quad \cdots ①$$

また，第 n 行の第 j 列，第 $j+1$ 列に 0 または 1 がともに現われるとき，第 j 列，第 $j+1$ 列において，各行ごとに交互に 0 と 1 が現われる．このとき，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには，次にようになる．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \quad \cdots ②$$

① と ② は一致しないので，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現われる．

(2) 第 n 行および第 n 列の $2n-1$ 個の数字の入れ方が決まれば，残りの $(n-1)^2$ 個の数字の入れ方は決定する (例えば，第 n 行に 0 と 1 が交互に現れると，下の行から一意的に決定する)．(1) の結果から，次の場合分けができる．

(i) 第 n 行に 0 と 1 が交互に現われるとき，第 n 列の第 1 行から第 $n-1$ 行の数字の入れ方は　$2 \times 2^{n-1} = 2^n$　(通り)

(ii) 第 n 列に 0 と 1 が交互に現われるとき，第 n 行の第 1 列から第 $n-1$ 列の数字の入れ方は　$2 \times 2^{n-1} = 2^n$　(通り)

(iii) 第 n 行および第 n 列に 0 と 1 が交互に現われるとき ((i) かつ (ii))，その数字の入れ方は　2　(通り)

(i)〜(iii) から　$a_n = 2^n + 2^n - 2 = \boldsymbol{2^{n+1} - 2}$ ■