

平成27年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B

- 1 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geq 0)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$ を示せ。

- (2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x) dx$$

で定める。 $0 \leq x \leq 1$ のとき $\log(1+x) \leq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し、その極限值を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい。

- 2 実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき、不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ。

- 3 以下の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ。

(2) $p, q, \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする。そのとき、 $p = q = 0$ であることを示せ。

- 4 座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。 P, Q は時刻 0 において、原点を出発する。 P は x 軸の正の方向に、 Q は x 軸の負の方向に、ともに速さ 1 で動く。その後、ともに時刻 1 で停止する。点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし、空間で $x \geq -1$ の部分を C とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ。

- 5 n を 2 以上の整数とする．正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる．マスは上から第 1 行，第 2 行， \dots ，左から第 1 列，第 2 列， \dots ，と数える．数字の入れ方についての次の条件 p を考える．

条件 p : 1 から $n-1$ までの整数 i, j についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る．

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	
第 1 行	0	1	0	0	
第 2 行	1	0	1	1	→ 第 2 行
第 3 行	0	1	0	0	
第 4 行	1	0	1	1	→ 第 3 列

↓
2 × 2 の 4 個のマス

($n = 4$ の場合の入れ方の例)

- (1) 条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ．
- (2) 条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ．

解答例

□ 1 (1) $\int_0^n \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) dx$ において, $\frac{x}{n} = t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = n \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow n \\ \hline t & 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \int_0^n f_n(x) dx &= \int_0^n \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{nt}{n(1+nt)} \log(1+t) \cdot n dt \\ &= \int_0^1 \frac{nx}{1+nx} \log(1+x) dx \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$ のとき, $0 \leq \frac{nx}{1+nx} < 1$, $\log(1+x) \geq 0$ であるから

$$\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1+x) dx - I_n &= \int_0^1 \log(1+x) dx - \int_0^1 \frac{nx}{1+nx} \log(1+x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+nx} \log(1+x) dx \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$ のとき, $\frac{1}{1+nx} > 0$, $0 \leq \log(1+x) \leq \log 2$ であるから

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+nx} \log(1+x) dx \leq (\log 2) \int_0^1 \frac{dx}{1+nx} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+nx} &= \left[\frac{\log(1+nx)}{n} \right]_0^1 \\ &= \frac{\log(1+n)}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\log(n+1)}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\log(n+1)}{n+1} = 0$$

はさみうちの原理により, ② から $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+nx} \log(1+x) dx = 0$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ より} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n &= \int_0^1 \log(1+x) dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) - x \right]_0^1 = \mathbf{2 \log 2 - 1} \end{aligned}$$

補足 まず, $0 < x \leq 1$ のとき, $-\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す.

$$g(x) = \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (0 < x \leq 1) \text{ とおくと}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で, $g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\text{すなわち} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$$

$$\text{したがって} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -2\sqrt{x} < x \log x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (-2\sqrt{x}) = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理により} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} x \log \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x \log x) = 0$$

2 実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2x\sqrt{1-y^2} \cdot y\sqrt{1-x^2} \\ &= \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \\ &= x^2y^2 + (1-x^2)(1-y^2) - 2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \\ &= \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

別解 $x = \cos \alpha, y = \cos \beta$ とおくと ($0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$)

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \\ &= (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha)^2 = \sin^2(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

このとき, $0 \leq \sin^2(\alpha + \beta) \leq 1$ であるから

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

3 (1) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき, この両辺を平方すると

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{ゆえに} \quad m^2 = 2n^2$$

m^2 は偶数であるから, m も偶数で, ある自然数 m' を用いて $m = 2m'$ とおける. これを上式に代入して

$$(2m')^2 = 2n^2 \quad \text{ゆえに} \quad n^2 = 2m'^2$$

したがって, n^2 は偶数となり, n も偶数である. このとき, m と n がともに偶数となり, m, n が互いに素であることと矛盾する.

よって, $\sqrt{2}$ は有理数ではなく, すなわち, 無理数である.

次に, $\sqrt[3]{3}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt[3]{3} = \frac{k}{l} \quad (k, l \text{ は互いに素である自然数})$$

とおき, この両辺を3乗すると

$$3 = \frac{k^3}{l^3} \quad \text{ゆえに} \quad k^3 = 3l^3$$

k^3 は3の倍数であるから, k も3の倍数で, ある自然数 k' を用いて $k = 3k'$ とおける. これを上式に代入して

$$(3k')^3 = 3l^3 \quad \text{ゆえに} \quad l^3 = 3 \cdot 3k'^3$$

したがって, l^3 は3の倍数となり, l も3の倍数である. このとき, k と l がともに3の倍数となり, k, l が互いに素であることと矛盾する.

よって, $\sqrt[3]{3}$ は有理数ではなく, すなわち, 無理数である.

(2) $\sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q = r$ (r は有理数) $\cdots (*)$ とおく.

(*) より, $\sqrt[3]{3}q = r - \sqrt{2}p$ の両辺を 3 乗すると

$$3q^3 = r^3 - 3r^2p\sqrt{2} + 6rp^2 - 2\sqrt{2}p^3$$

したがって $\sqrt{2}p(2p^2 + 3r^2) = 6p^2r - 3q^3 + r^3$

$p \neq 0$ であると仮定すると, $p(2p^2 + 3r^2) \neq 0$ であるから

$$\sqrt{2} = \frac{6p^2r - 3q^3 + r^3}{p(2p^2 + 3r^2)}$$

p, q, r は, 有理数であるから, 上式の右辺は有理数であり, $\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する. したがって $p = 0$

これを (*) に代入すると $\sqrt[3]{3}q = r$

$q \neq 0$ であると仮定すると $\sqrt[3]{3} = \frac{r}{q}$

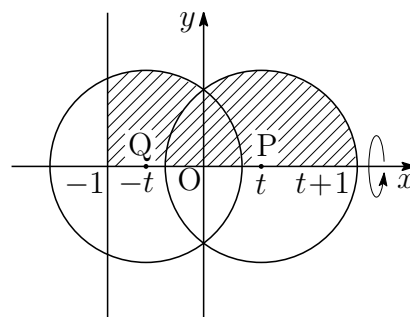
q, r は有理数であるから, 上式の右辺は有理数であり, $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることと矛盾する. したがって $q = 0$

よって $p = q = 0$

- 4** (1) 点 P, Q を中心とする半径 1 の球面が xy 平面によって切り取られる円の方程式は, それぞれ次のようになる.

$$(x - t)^2 + y^2 = 1, \quad (x + t)^2 + y^2 = 1$$

$V(t)$ は右の図の斜線部分を x 軸の周りに一回転させた立体の体積であるから



$$\begin{aligned} \frac{V(t)}{\pi} &= \int_{-1}^0 \{1 - (x + t)^2\} dx + \int_0^{t+1} \{1 - (x - t)^2\} dx \\ &= \left[x - \frac{(x + t)^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[x - \frac{(x - t)^3}{3} \right]_0^{t+1} \\ &= -\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

よって $V(t) = \pi \left(-\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t + \frac{4}{3} \right)$

(2) (1)の結果から $V'(t) = \pi(-t^2 + 2t + 2)$

$0 \leq t \leq 1$ に注意して, $V(t) = 0$ を解くと $t = -1 + \sqrt{3}$

t	0	...	$-1 + \sqrt{3}$...	1
$V'(t)$		+	0	-	
$V(t)$		↗	極大	↘	

$V(t) = \pi \left\{ (-t^2 - 2t + 2) \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \right) + 2t + \frac{2}{3} \right\}$ であること利用すると,
 $V(t)$ の最大値は

$$V(-1 + \sqrt{3}) = \pi \left\{ 2(-1 + \sqrt{3}) + \frac{2}{3} \right\} = \pi \left(-\frac{4}{3} + 2\sqrt{3} \right)$$

- 5** (1) 第 n 列の第 i 行, 第 $i+1$ 行に 0 または 1 がともに現われるとき, 第 i 行, 第 $i+1$ 行において, 各列ごとに交互に 0 と 1 が現われる. このとき, 第 i 行, 第 $i+1$ 行と第 j 列, 第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには, 次ようになる.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \dots \textcircled{1}$$

また, 第 n 行の第 j 列, 第 $j+1$ 列に 0 または 1 がともに現われるとき, 第 j 列, 第 $j+1$ 列において, 各行ごとに交互に 0 と 1 が現われる. このとき, 第 i 行, 第 $i+1$ 行と第 j 列, 第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには, 次ようになる.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \dots \textcircled{2}$$

① と ② は一致しないので, 第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現われる.

- (2) 第 n 行および第 n 列の $2n-1$ 個の数字の入れ方が決まれば, 残りの $(n-1)^2$ 個の数字の入れ方は決定する (例えば, 第 n 行に 0 と 1 が交互に現れると, 下の行から一意的に決定する). (1) の結果から, 次の場合分けができる.
- (i) 第 n 行に 0 と 1 が交互に現われるとき, 第 n 列の第 1 行から第 $n-1$ 行の数字の入れ方は $2 \times 2^{n-1} = 2^n$ (通り)
 - (ii) 第 n 列に 0 と 1 が交互に現われるとき, 第 n 行の第 1 列から第 $n-1$ 列の数字の入れ方は $2 \times 2^{n-1} = 2^n$ (通り)
 - (iii) 第 n 行および第 n 列に 0 と 1 が交互に現われるとき, その数字の入れ方は 2 (通り)
- (i)~(iii) から $a_n = 2^n + 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$