平成 26 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B・C

1 実数 a，b，c，d，e に対して，座標平面上の点 A$(a,\ b)$，B$(c,\ d)$，C$(e,\ 0)$ をとる．ただし点 A と点 B はどちらも原点 O$(0,\ 0)$ とは異なる点とする．このとき，実数 s，t で

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たすものが存在するための，a，b，c，d，e についての必要十分条件を求めよ．

2 $t > 0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件 (ア)(イ) を満たす．

(ア) $t > 0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式

$$t \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + f(t) \geqq 1 + x$$

が成り立つ．

(イ) $t > 0$ に対して，等式

$$t \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + f(t) = 1 + x$$

を満たす実数 x が存在する．

このとき，$f(t)$ を求めよ．

3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ．

$\boxed{4}$ 半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している．互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1，T_2，$\cdots, T_n$ があり，次の条件 (ア)(イ) を満たす．

(ア) T_i は S_1，S_2 にそれぞれ 1 点で接している $(i = 1, 2, \cdots, n)$．

(イ) T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) T_1，T_2，$\cdots, T_n$ の共通の半径 r_n を求めよ．

(2) S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1，T_2，$\cdots, T_n$ の体積の和を W_n とするとき，極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ．

$\boxed{5}$ さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする．n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す．T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2，3，4 のいずれかである確率を q_n とする．

(1) $p_n + q_n$ を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ．

(3) $r_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ．

解答例

$\boxed{\textbf{1}}$ $s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より $\quad s\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots(*)$

したがって $\quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots(**)$

(i) $ad-bc\neq 0$ のとき，$(**)$ を満たす実数 s，t が存在する．

(ii) $ad-bc=0$ のとき，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ であるから，$(*)$ より

$$e\neq 0 \text{ のとき}\quad b=d=0, \qquad e=0 \text{ のとき}\quad s=t=0$$

(i),(ii) より $\quad \boldsymbol{ad-bc=0}$ または $\boldsymbol{b=d=0}$ または $\boldsymbol{e=0}$ ■

$\boxed{2}$ $g(x) = 1 + x - t\cdot\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とおくと $(t > 0)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - t\cdot\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\frac{1}{2e^x}(te^{2x} - 2e^x - t) \\ &= -\frac{t}{2e^x}\left(e^x + \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}\right)\left(e^x - \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t}\right) \end{aligned}$$

$\alpha(t) = \log\dfrac{\sqrt{1+t^2}+1}{t}$ とおくと，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$\alpha(t)$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$\begin{aligned} g(\alpha(t)) &= 1 + \alpha(t) - t\cdot\frac{e^{\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)}}{2} \\ &= 1 + \log\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t} - \frac{t}{2}\left(\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}+1}\right) \\ &= 1 + \log\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t} - \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

条件 (ア) を満たすとき，すべての実数 x に対して

$$f(t) \geqq g(x) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) \geqq g(\alpha(t)) \quad \cdots(*)$$

条件 (イ) を満たすとき，$f(t) = g(x)$ を満たす実数 x が存在し

$$f(t) = g(x) \leqq g(\alpha(t)) \quad \cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ より　　$f(t) = g(\alpha(t))$

よって　　$\boldsymbol{f(t) = 1 + \log\dfrac{\sqrt{1+t^2}+1}{t} - \sqrt{1+t^2}}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を自然数とすると

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

N を 2 以上の整数とすると

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

したがって $\displaystyle \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 < \int_1^N \frac{dx}{\sqrt{x}} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{N}}$

ここで $\displaystyle \int_1^N \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[\, 2\sqrt{x}\, \Big]_1^N = 2(\sqrt{N}-1)$

ゆえに $\displaystyle \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 < 2(\sqrt{N}-1) < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{N}}$

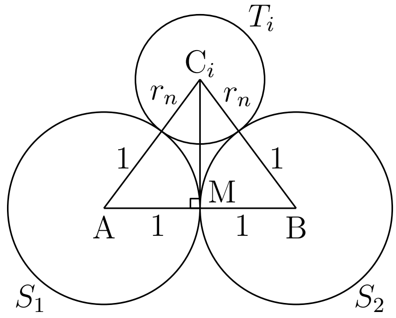
$$2(\sqrt{N}-1) + \frac{1}{\sqrt{N}} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{N} - 1$$

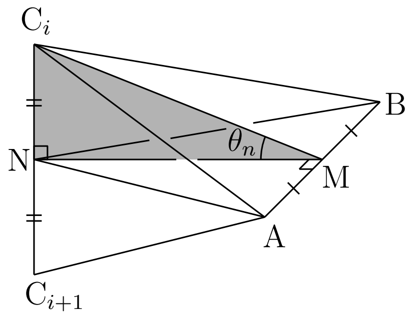
上式に $N = 40000$ を代入すると

$$398 + \frac{1}{200} < \sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}} < 399$$

よって $\displaystyle \sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は **398** ■

$\boxed{4}$ (1) 球 S_1，S_2 の中心をそれぞれ A，B とし，S_1，S_2 の接点を M とする．
球 T_i の中心を C_i とし，球 T_i と T_{i+1} の接点を N とする．





直角三角形 $\mathrm{C}_i\mathrm{AM}$ において

$$\mathrm{C}_i\mathrm{M} = \sqrt{\mathrm{C}_i\mathrm{A}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{(1+r_n)^2 - 1^2} = \sqrt{{r_n}^2 + 2r_n}$$

直角三角形 $\mathrm{C}_i\mathrm{MN}$ において

$$\mathrm{MN} = \sqrt{\mathrm{C}_i\mathrm{M}^2 - \mathrm{C}_i\mathrm{N}^2} = \sqrt{({r_n}^2 + 2r_n) - {r_n}^2} = \sqrt{2r_n}$$

$\theta_n = \angle\mathrm{C}_i\mathrm{MN}$ とおくと

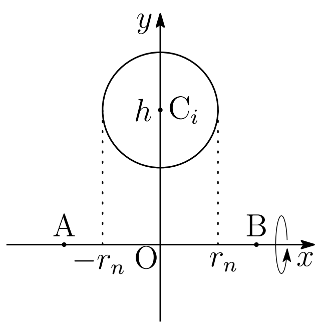
$$\tan\theta_n = \frac{\mathrm{C}_i\mathrm{N}}{\mathrm{MN}} = \frac{r_n}{\sqrt{2r_n}} = \sqrt{\frac{r_n}{2}} \quad \text{ゆえに} \quad r_n = 2\tan^2\theta_n$$

$(2\theta_n)n = 2\pi$ であるから，$\theta_n = \dfrac{\pi}{n}$ より　　$\boldsymbol{r_n = 2\tan^2\dfrac{\pi}{n}}$

(2) $h = \mathrm{C}_i\mathrm{M} = \sqrt{{r_n}^2 + 2r_n}$ とおくと　$h > r_n$
右の図の座標平面上の円

$$x^2 + (y-h)^2 = {r_n}^2$$

を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_n は，$y = h \pm \sqrt{{r_n}^2 - x^2}$ より



$$\begin{aligned} V_n &= \pi\int_{-r_n}^{r_n} \{(h + \sqrt{{r_n}^2 - x^2})^2 - (h - \sqrt{{r_n}^2 - x^2})^2\}dx \\ &= 2\pi h \int_{-r_n}^{r_n} 2\sqrt{{r_n}^2 - x^2}\,dx \end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_{-r_n}^{r_n} 2\sqrt{{r_n}^2 - x^2}\,dx$ は半径 r_n の円の面積に等しいから

$$V_n = 2\pi h\cdot\pi{r_n}^2 = 2\pi^2 h{r_n}^2$$

一方 $$W_n = \frac{4}{3}\pi {r_n}^3 \cdot n = \frac{4}{3}\pi {r_n}^3 n$$

したがって $$\frac{W_n}{V_n} = \frac{\frac{4}{3}\pi {r_n}^3 n}{2\pi^2 h {r_n}^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{n}{\pi}\cdot\frac{r_n}{h}$$

$\dfrac{\pi}{n} = \theta_n$．また，直角三角形 $\mathrm{C}_i\mathrm{MN}$ において $\dfrac{r_n}{h} = \sin\theta_n$ であるから

$$\frac{W_n}{V_n} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\theta_n}\cdot\sin\theta_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}$$

$n \to \infty$ のとき，$\theta_n \to +0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n} = \lim_{\theta_n\to+0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

補足 本題の V_n は次の定理を用いると簡単に求めることができるが，高校数学の範囲外であるから検算として利用するとよい[1]．

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

平面上にある図形 F の面積を S とし，F と同じ平面上にあり F を通らない軸 l の周りで F を一回転させた回転体の体積を V とする．回転させる図形 F の重心 G から回転軸 l までの距離を h としたとき，次式が成立する．

$$V = 2\pi hS$$

回転体の体積は，(回転による重心の軌跡の長さ) $\times$ (面積) である．

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{5}$ (1) T_{n+1} は T_n と X_{n+1} の積である．T_n および T_{n+1} の法 5 に関する合同な値は右の表のようになる．したがって，次の確率漸化式が成立する．

T_{n+1}		X_{n+1}					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
T_n	**0**	0	0	0	0	0	0
	1	1	2	3	4	0	1
	2	2	4	1	3	0	2
	3	3	1	4	2	0	3
	4	4	3	2	1	0	4

$$p_{n+1} = \frac{2}{6}p_n + \frac{3}{18}q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n$$
$$q_{n+1} = \frac{3}{6}p_n + \frac{12}{18}q_n = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}q_n$$

上の 2 式の辺々を加えると　$p_{n+1} + q_{n+1} = \dfrac{5}{6}(p_n + q_n)$

数列 $\{p_n + q_n\}$ は公比 $\dfrac{5}{6}$ の等比数列で，$p_1 = \dfrac{2}{6}$，$q_1 = \dfrac{3}{6}$ であるから

$$p_n + q_n = (p_1 + q_1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

別解 $p_n + q_n$ は，T_n が 5 で割れない，すなわち，X_1，$X_2, \cdots$，X_n が 5 でない確率であるから

$$p_n + q_n = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

補足 問題に誘導がなければ

$$3p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{6}(3p_n - q_n) \quad ゆえに \quad 3p_n - q_n = 3\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

これと (1) の結果から q_n を消去して　$p_n = \dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n + 3\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$

解説 行列を用いると，確率漸化式から　$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$

この行列をスペクトル分解すると

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{6}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

このとき　$\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　ゆえに　$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$q_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n - p_n$

これを (1) で求めた確率漸化式の第 1 式に代入すると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n\right\} = \boldsymbol{\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

(3) (2) で求めた漸化式の両辺に $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{n+1}$ を掛けると

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1} p_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n + \frac{1}{5} \quad \text{ゆえに} \quad r_{n+1} = \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}$$

したがって　$r_{n+1} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}\left(r_n - \dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{r_n - \dfrac{1}{4}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列で，初項は

$$r_1 - \frac{1}{4} = \frac{6}{5}p_1 - \frac{1}{4} = \frac{6}{5}\cdot\frac{2}{6} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

ゆえに　$r_n - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{20}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$　すなわち　$r_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

よって　$p_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\left\{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right\} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$ ■