

平成26年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

- 1 実数 a, b, c, d, e に対して, 座標平面上の点 $A(a, b), B(c, d), C(e, 0)$ をとる. ただし点 A と点 B はどちらも原点 $O(0, 0)$ とは異なる点とする. このとき, 実数 s, t で

$$s\vec{OA} + t\vec{OB} = \vec{OC}$$

を満たすものが存在するための, a, b, c, d, e についての必要十分条件を求めよ.

- 2 $t > 0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件 (ア)(イ) を満たす.

(ア) $t > 0$ のとき, すべての実数 x に対して不等式

$$t \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + f(t) \geq 1 + x$$

が成り立つ.

(イ) $t > 0$ に対して, 等式

$$t \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + f(t) = 1 + x$$

を満たす実数 x が存在する.

このとき, $f(t)$ を求めよ.

- 3 $\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ.

- 4 半径1の2つの球 S_1 と S_2 が1点で接している. 互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 ($n \geq 3$) の球 T_1, T_2, \dots, T_n があり, 次の条件 (ア)(イ) を満たす.

- (ア) T_i は S_1, S_2 にそれぞれ1点で接している ($i = 1, 2, \dots, n$).
- (イ) T_i は T_{i+1} に1点で接しており ($i = 1, 2, \dots, n-1$), そして T_n は T_1 に1点で接している.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) T_1, T_2, \dots, T_n の共通の半径 r_n を求めよ.
- (2) S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし, T_1, T_2, \dots, T_n の体積の和を W_n とするとき, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ.

- 5 さいころを繰り返し投げ, n 回目に出た目を X_n とする. n 回目までに出した目の積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を T_n で表す. T_n を5で割った余りが1である確率を p_n とし, 余りが2, 3, 4のいずれかである確率を q_n とする.

- (1) $p_n + q_n$ を求めよ.
- (2) p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ.
- (3) $r_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ において r_n を求めることにより, p_n を n の式で表せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad s\vec{OA} + t\vec{OB} = \vec{OC} \text{ より } s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって } \begin{cases} sa + tc = e & \cdots \textcircled{1} \\ sb + td = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times d - \textcircled{2} \times c, \quad \textcircled{2} \times a - \textcircled{1} \times b \text{ より}$$

$$(ad - bc)s = de, \quad (ad - bc)t = -be \quad (*)$$

(i) $ad - bc \neq 0$ のとき, (*) より, 次の s, t が存在する.

$$s = \frac{de}{ad - bc}, \quad t = -\frac{be}{ad - bc}$$

(ii) $ad - bc = 0$ のとき, (*) より $de = 0, \quad be = 0$

$$\text{したがって } b = d = 0 \text{ または } e = 0$$

(i),(ii) より $ad - bc \neq 0$ または $b = d = 0$ または $e = 0$

$$\text{別解 } s\vec{OA} + t\vec{OB} = \vec{OC} \text{ より } s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

$$\text{したがって } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (**)$$

(i) $ad - bc \neq 0$ のとき, (**) を満たす実数 s, t が存在する.

(ii) $ad - bc = 0$ のとき, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ であるから, (*) より

$$e \neq 0 \text{ のとき } b = d = 0, \quad e = 0 \text{ のとき } s = t = 0$$

(i),(ii) より $ad - bc \neq 0$ または $b = d = 0$ または $e = 0$ ■

2 $g(x) = 1 + x - t \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ とおくと ($t > 0$)

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - t \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\frac{1}{2e^x} (te^{2x} - 2e^x - t) \\ &= -\frac{t}{2e^x} \left(e^x + \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t} \right) \left(e^x - \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t} \right) \end{aligned}$$

$\alpha(t) = \log \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t}$ とおくと, $g(x)$ の増減表は

x	...	$\alpha(t)$...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	極大	↘

$$\begin{aligned} g(\alpha(t)) &= 1 + \alpha(t) - t \cdot \frac{e^{\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)}}{2} \\ &= 1 + \log \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t} - \frac{t}{2} \left(\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}+1} \right) \\ &= 1 + \log \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t} - \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

条件 (ア) を満たすとき, すべての実数 x に対して

$$f(t) \geq g(x) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) \geq g(\alpha(t)) \quad \dots (*)$$

条件 (イ) を満たすとき, $f(t) = g(x)$ を満たす実数 x が存在し

$$f(t) = g(x) \leq g(\alpha(t)) \quad \dots (**)$$

(*), (**) より $f(t) = g(\alpha(t))$

よって $f(t) = 1 + \log \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t} - \sqrt{1+t^2}$ ■

3 n を自然数とすると

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

N を 2 以上の整数とすると

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

したがって
$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 < \int_1^N \frac{dx}{\sqrt{x}} < \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{N}}$$

ここで
$$\int_1^N \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x} \right]_1^N = 2(\sqrt{N} - 1)$$

ゆえに
$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 < 2(\sqrt{N} - 1) < \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{N}}$$

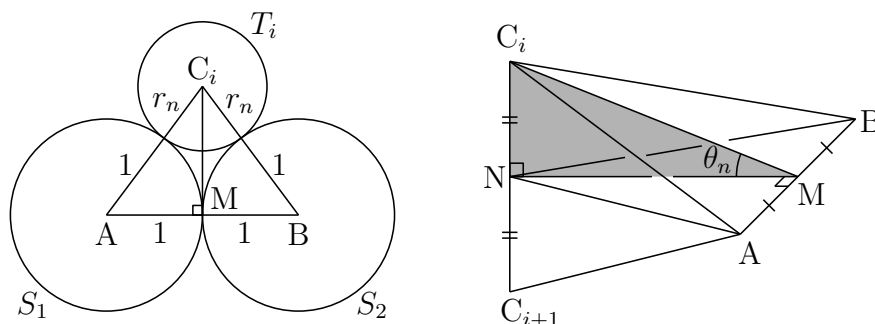
$$2(\sqrt{N} - 1) + \frac{1}{\sqrt{N}} < \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{N} - 1$$

上式に $N = 40000$ を代入すると

$$398 + \frac{1}{200} < \sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}} < 399$$

よって $\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は **398** ■

- 4 (1) 球 S_1, S_2 の中心をそれぞれ A, B とし, S_1, S_2 の接点を M とする.
球 T_i の中心を C_i とし, 球 T_i と T_{i+1} の接点を N とする.



直角三角形 $C_i A M$ において

$$C_i M = \sqrt{C_i A^2 - A M^2} = \sqrt{(1 + r_n)^2 - 1^2} = \sqrt{r_n^2 + 2r_n}$$

直角三角形 $C_i M N$ において

$$M N = \sqrt{C_i M^2 - C_i N^2} = \sqrt{(r_n^2 + 2r_n) - r_n^2} = \sqrt{2r_n}$$

$\theta_n = \angle C_i M N$ とおくと

$$\tan \theta_n = \frac{C_i N}{M N} = \frac{r_n}{\sqrt{2r_n}} = \sqrt{\frac{r_n}{2}} \quad \text{ゆえに} \quad r_n = 2 \tan^2 \theta_n$$

$$(2\theta_n)n = 2\pi \text{ であるから, } \theta_n = \frac{\pi}{n} \text{ より} \quad r_n = 2 \tan^2 \frac{\pi}{n}$$

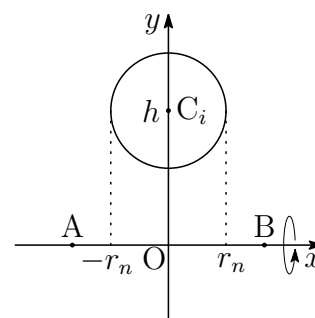
- (2) $h = C_i M = \sqrt{r_n^2 + 2r_n}$ とおくと $h > r_n$

右の図の座標平面上の円

$$x^2 + (y - h)^2 = r_n^2$$

を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積

V_n は, $y = h \pm \sqrt{r_n^2 - x^2}$ より



$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_{-r_n}^{r_n} \{(h + \sqrt{r_n^2 - x^2})^2 - (h - \sqrt{r_n^2 - x^2})^2\} dx \\ &= 2\pi h \int_{-r_n}^{r_n} 2\sqrt{r_n^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

ここで, $\int_{-r_n}^{r_n} 2\sqrt{r_n^2 - x^2} dx$ は半径 r_n の円の面積に等しいから

$$V_n = 2\pi h \cdot \pi r_n^2 = 2\pi^2 h r_n^2$$

$$\text{一方} \quad W_n = \frac{4}{3}\pi r_n^3 \cdot n = \frac{4}{3}\pi r_n^3 n$$

$$\text{したがって} \quad \frac{W_n}{V_n} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_n^3 n}{2\pi^2 h r_n^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{\pi} \cdot \frac{r_n}{h}$$

$\frac{\pi}{n} = \theta_n$. また, 直角三角形 C_iMN において $\frac{r_n}{h} = \sin \theta_n$ であるから

$$\frac{W_n}{V_n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\theta_n} \cdot \sin \theta_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \theta_n}{\theta_n}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $\theta_n \rightarrow +0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{V_n} = \lim_{\theta_n \rightarrow +0} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} = \frac{2}{3}$$

補足 本題の V_n は次の定理を用いると簡単に求めることができるが, 高校数学の範囲外であるから検算として利用するとよい¹.

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

平面上にある図形 F の面積を S とし, F と同じ平面上にあり F を通らない軸 l の周りで F を一回転させた回転体の体積を V とする. 回転させる図形 F の重心 G から回転軸 l までの距離を h としたとき, 次式が成立する.

$$V = 2\pi h S$$

回転体の体積は, (回転による重心の軌跡の長さ) \times (面積) である.



¹ http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri-2012.pdf [1] を参照.

- 5** (1) T_{n+1} は T_n と X_{n+1} の積である. T_n および T_{n+1} の法 5 に関する合同な値は右の表のようになる. したがって, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_{n+1} = \frac{2}{6}p_n + \frac{3}{18}q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n$$

$$q_{n+1} = \frac{3}{6}p_n + \frac{12}{18}q_n = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}q_n$$

T_{n+1}		X_{n+1}					
		1	2	3	4	5	6
T_n	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	2	3	4	0	1
	2	2	4	1	3	0	2
	3	3	1	4	2	0	3
	4	4	3	2	1	0	4

上の 2 式の辺々を加えると $p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{5}{6}(p_n + q_n)$

数列 $\{p_n + q_n\}$ は公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列で, $p_1 = \frac{2}{6}$, $q_1 = \frac{3}{6}$ であるから

$$p_n + q_n = (p_1 + q_1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

別解 $p_n + q_n$ は, T_n が 5 で割れない, すなわち, X_1, X_2, \dots, X_n が 5 でない確率であるから

$$p_n + q_n = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

補足 問題に誘導がなければ

$$3p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{6}(3p_n - q_n) \quad \text{ゆえに} \quad 3p_n - q_n = 3\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

これと (1) の結果から q_n を消去して $p_n = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^n + 3\left(\frac{1}{6}\right)^n \right\}$

解説 行列を用いると, 確率漸化式から $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$

この行列をスペクトル分解すると

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

このとき $\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ゆえに $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n$

これを (1) で求めた確率漸化式の第 1 式に代入すると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n \right\} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(3) (2) で求めた漸化式の両辺に $\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$ を掛けると

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1} p_{n+1} = \frac{1}{5} \left(\frac{6}{5}\right)^n p_n + \frac{1}{5} \quad \text{ゆえに} \quad r_{n+1} = \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}$$

したがって $r_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \left(r_n - \frac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{r_n - \frac{1}{4}\right\}$ は公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列で、初項は

$$r_1 - \frac{1}{4} = \frac{6}{5}p_1 - \frac{1}{4} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{6} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

ゆえに $r_n - \frac{1}{4} = \frac{3}{20} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ すなわち $r_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

よって $p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\} = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ ■