平成25年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数I・II・III・A・B・C

1 三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を示すことにより，$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ．

2 不等式

$$1 \leqq \Big||x|-2\Big| + \Big||y|-2\Big| \leqq 3$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ．

3 4個の整数

$$n+1,\quad n^3+3,\quad n^5+5,\quad n^7+7$$

がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない．これを証明せよ．

4 xyz 空間内の3点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形OAB を x 軸のまわりに1回転させてできる円すいを V とする．円すい V を y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

5 　n を3以上の整数とする．n 個の球 K_1, K_2, $\cdots$, K_n と n 個の空(から)の箱 H_1, H_2, $\cdots$, H_n がある．以下のように，K_1, K_2, $\cdots$, K_n の順番に，球を箱に1つずつ入れていく．

まず，球 K_1 を箱 H_1, H_2, $\cdots$, H_n のどれか1つに無作為に入れる．次に，球 K_2 を，箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ，箱 H_2 が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか1つに無作為に入れる．

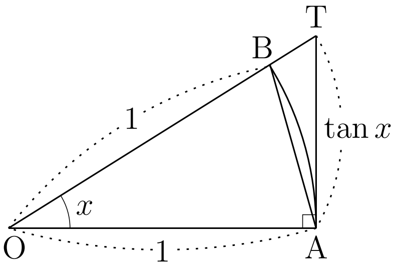
一般に，$i=2,3,\cdots,n$ について，球 K_i を，箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ，箱 H_i が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱のどれか1つに無作為に入れる．

(1) K_n が入(はい)る箱は H_1 または H_n である．これを証明せよ．

(2) K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ．

解答例

1 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　右の図のように，半径が 1，中心角が x ラジアンの扇形 OAB の点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると，面積について



$$\triangle\text{OAB} < \text{扇形 OAB} < \triangle\text{OAT}$$

が成り立つから　$\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin x < \dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x < \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$

よって　$\sin x < x < \tan x$

$\sin x > 0$ より　$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$　ゆえに　$1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$　$\cdots$①

$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき　$0 < -x < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，① により

$$1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x) \qquad \text{すなわち} \qquad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

以上から，$0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$　証終

次に，$f(x) = \sin x$ とおくと，導関数の定義により

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

上式において　$\sin(x+h) - \sin x = \sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x$

$$= (\cos h - 1)\sin x + \cos x\sin h$$

したがって　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\sin x + \frac{\sin h}{h}\cos x\right)$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{\cos h + 1}\cdot\frac{\sin h}{h} = 0$，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ により

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = 0\cdot\sin x + 1\cdot\cos x = \cos x$$

よって　$(\sin x)' = \cos x$

別解 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$1 - \cos x > 0$ であるから

$$\int_0^x (1 - \cos t)\,dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x - \sin x > 0$$

上式から $\displaystyle\int_0^x (t - \sin t)\,dt > 0$ ゆえに $\dfrac{x^2}{2} + \cos x - 1 > 0$

さらに $\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + \cos t - 1\right) dt > 0$ ゆえに $\dfrac{x^3}{6} + \sin x - x > 0$

したがって $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ すなわち $1 - \dfrac{x^2}{6} < \dfrac{\sin x}{x} < 1 \quad \cdots (*)$

$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき，$0 < -x < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$(*)$ より

$$1 - \frac{(-x)^2}{6} < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \quad \text{すなわち} \quad 1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

以上から，$0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $1 - \dfrac{x^2}{6} < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = 1$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 証終

次に，$f(x) = \sin x$ とおくと，導関数の定義により

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x \end{aligned}$$

よって $(\sin x)' = \cos x$

補足 上の結果から，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\int_0^x \left(\frac{t^3}{3!} + \sin t - t\right) dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x^4}{4!} - \cos x + 1 - \frac{x^2}{2!} > 0$$

したがって $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4!} < 1 - \cos x < \dfrac{x^2}{2}$

$0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4!} < \dfrac{1 - \cos x}{x^2} < \dfrac{1}{2}$ よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ■

2 領域 $1 \leqq |x| + |y| \leqq 3 \cdots$ ① について，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad 1 \leqq x + y \leqq 3$$

この不等式の表す領域は，図 1 の斜線部分で境界線を含む．
図 1 の領域にある点 $(x,\ y)$ に対して，点 $(x, -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x, -y)$ は ① を満たす．よって，① の表す領域は，図 2 の斜線部分で境界線を含む．

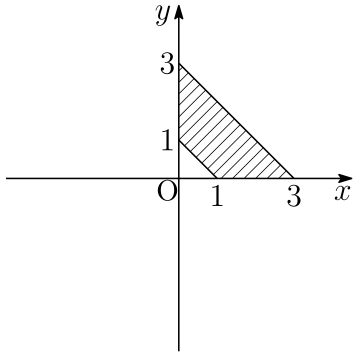


図 1

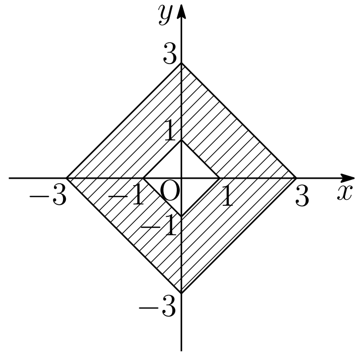


図 2

$1 \leqq \Big||x| - 2\Big| + \Big||y| - 2\Big| \leqq 3 \cdots (*)$ について，
$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき

$$1 \leqq |x - 2| + |y - 2| \leqq 3$$

これは，① の表す領域を x 軸方向に 2，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にある領域で，右の図の斜線部分で境界線を含む．

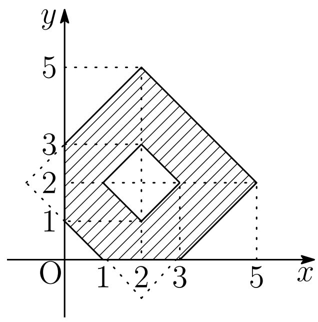
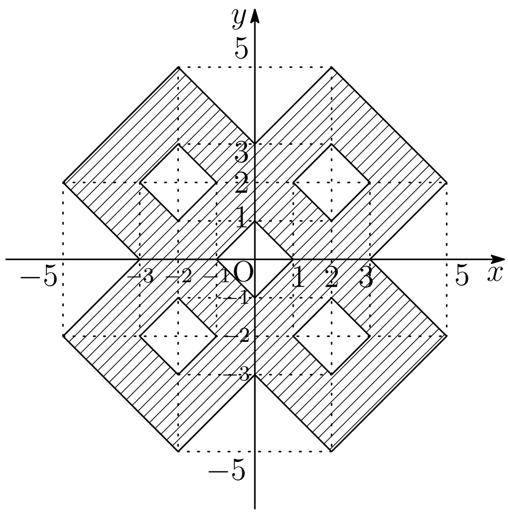


図 3

図 3 の領域にある点 $(x,\ y)$ に対して，点 $(x, -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x, -y)$ は $(*)$ を満たす．よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



■

$\boxed{3}$

$$
\begin{aligned}
&n \equiv -1 \pmod 3 \text{ のとき} && n+1 \equiv 0 \pmod 3\\
&n \equiv 0 \pmod 3 \text{ のとき} && n^3+3 \equiv 0 \pmod 3\\
&n \equiv 1 \pmod 3 \text{ のとき} && n^5+5 \equiv 0 \pmod 3
\end{aligned}
$$

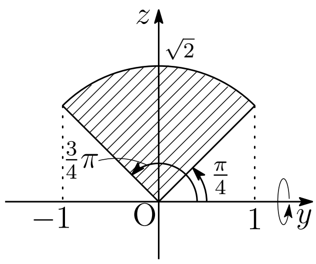
よって，4 個の整数

$$n+1,\quad n^3+3,\quad n^5+5,\quad n^7+7$$

がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない．

補足 $n \equiv -1 \pmod 3$ のとき　$n^7+1 \equiv 0 \pmod 3$ ■

$\boxed{4}$ V は，下の図の斜線部分を y 軸の周りに回転させた立体である．



よって，回転体 V の体積は

$$\frac{2}{3}\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sqrt{2})^3\sin\theta\,d\theta = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \boldsymbol{\frac{8}{3}\pi}$$

解説 極方程式による回転体の体積[1]として求める．東大理科 2017 年 $\boxed{6}$ を参照[2]．

また，九大理系 2012 年の p.7 の例 5 で示した次の公式[3]も利用できる．

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^2 a = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^2\cdot 1 = \frac{8}{3}\pi$$

別解 区間 $-1 \leqq y \leqq 1$ において，円 $y^2+z^2=2$ を y 軸の周りに回転させた回転体の体積から半径 1，高さ 1 の円錐 2 個の体積を引いたものであるので，求める体積を V_0 とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{V_0}{2} &= \pi\int_0^1 (2-y^2)\,dy - \frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 1\\
&= \pi\left[2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf $\boxed{5}$ 参照
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf $\boxed{6}$ 参照
[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

5 (1) K_j が入った時点で $(2 \leqq j \leqq n)$，$H_2, H_3, \cdots, H_j$ には球が入っている．
ゆえに，K_{n-1} が入った時点で，$H_2, H_3, \cdots, H_{n-1}$ には球が入っている．
よって，K_n は H_1 または H_n に入る．

(2) K_j が H_1 に入ると，$K_{j+1}, K_{j+2}, \cdots, K_n$ はそれぞれ $H_{j+1}, H_{j+2}, \cdots, H_n$ に入る．$K_1, K_2, \cdots, K_j$ が H_1 に入らない確率を p_j $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$ とすると，K_1 が H_1 に入らない確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{n-1}{n}$$

$H_2, H_3, \cdots, H_k$ および H_{k+1} の k 個すべての箱に球が入るとき，K_{k+1} が H_1 に入らない確率は (K_k が H_{k+1}，K_{k+1} は H_1 以外に入る)

$$p_k \times \frac{1}{n-k} \cdot \frac{n-k-1}{n-k}$$

$H_2, H_3, \cdots, H_k$ および H_l $(k+2 \leqq l \leqq n)$ の k 個すべての箱に球が入るとき，K_{k+1} が H_1 に入らない確率は (K_k が H_l，K_{k+1} は H_{k+1} に入る)

$$p_k \times \frac{n-k-1}{n-k} \cdot 1$$

上の 2 式から
$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k \times \frac{1}{n-k} \cdot \frac{n-k-1}{n-k} + p_k \times \frac{n-k-1}{n-k} \cdot 1 \\ &= \frac{(n-k+1)(n-k-1)}{(n-k)^2} p_k \end{aligned}$$

したがって $\quad \dfrac{n+1-(k+1)}{n-(k+1)} p_{k+1} = \dfrac{n+1-k}{n-k} p_k$

ゆえに $\quad \dfrac{n+1-k}{n-k} p_k = \dfrac{n}{n-1} p_1$ $\quad$ すなわち $\quad p_k = \dfrac{n-k}{n+1-k} \quad \cdots (*)$

$(*)$ より $\quad p_{n-2} = \dfrac{2}{3}, \quad p_{n-1} = \dfrac{1}{2}$

球を $n-2$ 個入れた時点で，次の $A \sim C$ の事象 (これらの事象では H_2 から H_{n-2} に球が入る) の確率をそれぞれ P_A，P_B，P_C とする．

H_1	H_2		H_{n-2}	H_{n-1}	H_n	
○	●	$\cdots$	●	●	○	$\cdots A$
○	●	$\cdots$	●	○	●	$\cdots B$
●	●	$\cdots$	●	○	○	$\cdots C$

このとき $\quad P_A + P_B + P_C = 1$，$P_A + P_B = p_{n-2}$，$\dfrac{1}{2} P_A + P_B = p_{n-1}$

これを解いて $\quad P_A = P_B = P_C = \dfrac{1}{3}$ $\quad$ よって $\quad P_B + P_C = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

別解 K_{n-1} を H_{n-1} に入れる確率を q_n とする．

K_1 が H_m に入るとき，K_j は H_j に入る $(j=2,3,\cdots,m-1)$．

	H_1	H_2	H_3	H_4	$\cdots$	H_{n-2}	H_{n-1}	H_n	確率
K_1 が H_1 に入る	●	○	○	○	$\cdots$	○	○	○	$\frac{1}{n}$
K_1 が H_2 に入る	○	●	○	○	$\cdots$	○	○	○	$\frac{1}{n}q_{n-1}$
K_1 が H_3 に入る	○	●	●	○	$\cdots$	○	○	○	$\frac{1}{n}q_{n-2}$
K_1 が H_4 に入る	○	●	●	●	$\cdots$	○	○	○	$\frac{1}{n}q_{n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K_1 が H_{n-2} に入る	○	●	●	●	$\cdots$	●	○	○	$\frac{1}{n}q_3$
K_1 が H_{n-1} に入る	○	●	●	●	$\cdots$	●	●	○	0
K_1 が H_n に入る	○	●	●	●	$\cdots$	●	●	●	0

K_1 が H_1，H_2，$\cdots$，H_n に入る場合により次の確率漸化式が成立する．

$$q_n = \frac{1}{n}(1 + q_{n-1} + q_{n-2} + \cdots + q_3)$$

これから
$$nq_n = 1 + q_{n-1} + q_{n-2} + \cdots + q_3$$
$$(n+1)q_{n+1} = 1 + q_n + q_{n-1} + q_{n-2} + \cdots + q_3$$

上の 2 式から　$q_{n+1} = q_n \quad (n \geqq 3) \quad \cdots (*)$

$n=3$ のとき，H_1，H_2，H_3 に球が入る順番とその確率は次の ①〜④．

	H_1	H_2	H_3		確率
①	1	2	3	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
②	2	1	3	$\cdots$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$
③	3	1	2	$\cdots$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$
④	3	2	1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$

K_2 が H_2 に入る確率 q_3 は，①，④ より

$$q_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

これと $(*)$ により，求める確率は

$$q_n = \frac{2}{3} \quad (n \geqq 3)$$