平成24年度　大阪大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数I・II・III・A・B・C

1 $a>0$ とする．C_1 を曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，C_2 を直線 $y=2ax-3a$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点Pが C_1 上を動き，点Qが C_2 上を動くとき，線分PQの長さの最小値を $f(a)$ とする．$f(a)$ を a を用いて表せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} f(a)$ を求めよ．

2 次の2つの条件(i)，(ii)をみたす自然数 n について考える．

(i) n は素数ではない．

(ii) l，m を1でも n でもない n の正の約数とすると，必ず

$$|l-m| \leqq 2$$

である．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) n が偶数のとき，(i)，(ii)をみたす n をすべて求めよ．

(2) n が7の倍数のとき，(i)，(ii)をみたす n をすべて求めよ．

(3) $2 \leqq n \leqq 1000$ の範囲で，(i)，(ii)をみたす n をすべて求めよ．

3 xyz 空間に3点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{3},\ 1)$ がある．平面 $z=0$ に含まれ，中心がO，半径が1の円を W とする．点Pが線分OA上を，点Qが円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点R全体がつくる立体を V_A とおく．同様に点Pが線分OB上を，点Qが円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点R全体がつくる立体を V_B とおく．さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 平面 $z=\cos\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ．

(2) 立体 V の体積を求めよ．

4 5次式 $f(x)=x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ ($p,\ q,\ r,\ s,\ t$ は実数) について考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ が等差数列であることと，

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$$

($l,\ m$ は実数) と書けることは互いに同値であることを示せ．

(2) $f(x)$ は (1) の条件をみたすものとする．α を実数，k を 3 以上の自然数とする．k 項からなる数列

$$f(\alpha),\ f(\alpha+1),\ f(\alpha+2),\ \cdots,\ f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α，k の組をすべて求めよ．

5 1個のさいころを3回続けて投げるとき，1回目に出る目を l，2回目に出る目を m，3回目に出る目を n で表すことにする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値

$$\lim_{x\to-1}\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$$

が存在する確率を求めよ．

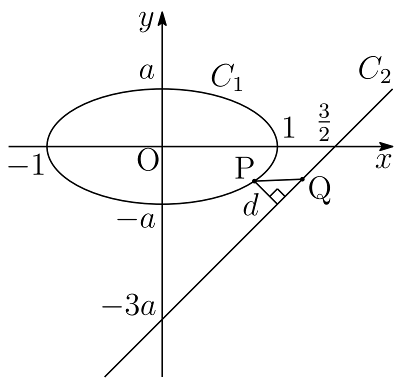
(2) 関数

$$f(x)=\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$$

が，$x>-1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とし，点 P と直線 C_2 の距離を d とすると $(a>0)$



$$d=\frac{|2a\cos\theta-a\sin\theta-3a|}{\sqrt{4a^2+1}}=\frac{a|\sin\theta-2\cos\theta+3|}{\sqrt{4a^2+1}}$$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt5}$，$\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt5}$ とすると

$$d=\frac{a\{\sqrt5\sin(\theta+\alpha)+3\}}{\sqrt{4a^2+1}}$$

$\mathrm{PQ}\geqq d$ であるから，求める PQ の最小値 $f(a)$ は $\boldsymbol{f(a)=\dfrac{(3-\sqrt5)a}{\sqrt{4a^2+1}}}$

別解 $\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると $s^2+\dfrac{t^2}{a^2}=1$ ゆえに $(as)^2+t^2=a^2$

P と $C_2:2ax-y-3a=0$ の距離 d は $d=\dfrac{|2as-t-3a|}{\sqrt{4a^2+1}}$

$\vec{u}=(2,-1)$，$\vec{v}=(as,\ t)$ とおくと $|\vec{u}|=\sqrt5$，$|\vec{v}|=a$

$$-|\vec{u}||\vec{v}|\leqq\vec{u}\cdot\vec{v}\leqq|\vec{u}||\vec{v}| \quad ゆえに \quad -\sqrt5a\leqq 2as-t\leqq\sqrt5a$$

したがって $\dfrac{(3-\sqrt5)a}{\sqrt{4a^2+1}}\leqq d\leqq\dfrac{(3+\sqrt5)a}{\sqrt{4a^2+1}}$ よって $f(a)=\dfrac{(3-\sqrt5)a}{\sqrt{4a^2+1}}$

(2) (1) の結果から

$$\lim_{a\to\infty}f(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{(3-\sqrt5)a}{\sqrt{4a^2+1}}=\lim_{a\to\infty}\frac{3-\sqrt5}{\sqrt{4+\dfrac{1}{a^2}}}=\boldsymbol{\frac{3-\sqrt5}{2}}$$

■

2 (1) $n = 2l$ とおくと (l は 2 以上の整数)，(ii) により

$$|l-2| \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l = 2,\ 3,\ 4 \quad \text{すなわち} \quad n = 4,\ 6,\ 8$$

これらは，条件 (i)，(ii) をみたす．よって　$\boldsymbol{n = 4,\ 6,\ 8}$

(2) $n = 7l$ とおくと (l は 2 以上の整数)，(ii) により

$$|l-7| \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l = 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

すなわち　$n = 35,\ 42,\ 49,\ 56,\ 63$

このうち，条件 (i)，(ii) をみたすものは　$\boldsymbol{n = 35,\ 49}$

(3) 条件 (i)，(ii) をみたす偶数 n は (1) で求めたので，これらの条件をみたす奇数 n を求める．このとき，n は 3 個以上の奇数を約数にもつことはない．実際，3 個の奇数を $p,\ q,\ r$ とすると ($p < q < r$)，$r - p \geqq 4$ であるから，条件 (ii) をみたさない．(i) により n は素数ではないから，n は 2 個の奇素数の積で，条件 (ii) をみたすのは

$$p^2 \quad \text{または} \quad p(p+2) \quad (p,\ p+2\ \text{は奇素数})$$

(a) $n = p^2$ のとき (p は奇素数)，$2 \leqq n \leqq 1000$ であるものは

$$n = 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 11^2,\ 13^2,\ 17^2,\ 19^2,\ 23^2,\ 29^2,\ 31^2$$

(b) $n = p(p+2)$ のとき ($p,\ p+2$ は奇素数)，$2 \leqq n \leqq 1000$ であるものは

$$n = 3{\cdot}5,\ 5{\cdot}7,\ 11{\cdot}13,\ 17{\cdot}19,\ 29{\cdot}31$$

したがって，(1)，(a)，(b) より，求める n は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n = 4,\ 6,\ 8,}&\\ &\mathbf{9,\ 25,\ 49,\ 121,\ 169,\ 289,\ 361,\ 529,\ 841,\ 961,}\\ &\mathbf{15,\ 35,\ 143,\ 323,\ 899}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}_\theta}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_\theta}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

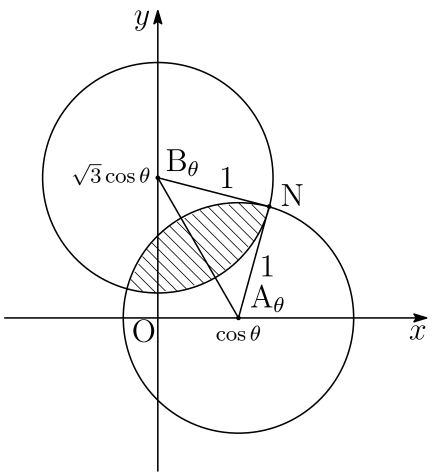
$$\mathrm{A}_\theta(\cos\theta,\ 0,\ \cos\theta),\quad \mathrm{B}_\theta(0,\ \sqrt{3}\cos\theta,\ \cos\theta)$$

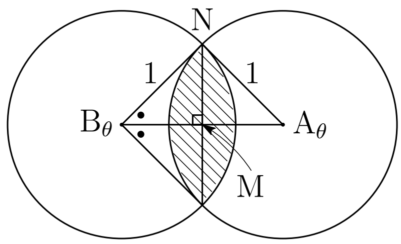
$\mathrm{A}_\theta\mathrm{B}_\theta=2\cos\theta$ であるから，線分 $\mathrm{A}_\theta\mathrm{B}_\theta$ の中点を M とすると

$$\mathrm{B}_\theta\mathrm{M}=\cos\theta$$

A_θ を中心とする半径 1 の円と B_θ を中心とする半径 1 の交点の 1 つを N とすると，$\triangle\mathrm{MNB}_\theta$ は，NB_θ を斜辺とする直角三角形である．右下の図より

$$\angle\mathrm{NB}_\theta\mathrm{M}=\theta$$





求める面積は図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin 2\theta \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{S=2\theta-\sin 2\theta}$$

(2) $z=\cos\theta$ より $\quad \dfrac{dz}{d\theta}=-\sin\theta$

z	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^1 S\,dz=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} S\frac{dz}{d\theta}d\theta\\
&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(2\theta-\sin 2\theta)(-\sin\theta)d\theta\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\theta\sin\theta-\sin^2\theta\cos\theta)d\theta\\
&=2\Big[-\theta\cos\theta+\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 5次式 $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ $(p, q, r, s, t$ は実数$)$ について，数列 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ が等差数列であるとき，その初項を m，公差を l とすると

$$f(k) = lk + m \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

ここで，$g(x) = f(x) - (lx + m)$ とおくと，$g(k) = 0$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ であるから，因数定理により，$g(x)$ は $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ を因数にもつ．このとき，5次式 $f(x)$ の x^5 の係数が1であることに注意して

$$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

したがって

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + lx + m \quad (l, m \text{ は実数})$$

逆に，上式より，数列 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ は等差数列である．

(2) (1) の結果から

$$f(x+1) - f(x) = 5x(x-1)(x-2)(x-3) + l \quad \cdots(*)$$

これから，数列 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ は等差数列ではない．

k $(k \geqq 3)$ 項からなる数列

$$f(\alpha),\ f(\alpha+1),\ f(\alpha+2),\ \cdots,\ f(\alpha+k-1)$$

が等差数列であるとき

$$f(\alpha+1) - f(\alpha) = f(\alpha+2) - f(\alpha+1)$$

が成立することが必要条件であるから，$(*)$ より

$$5\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) + l = 5(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + l$$

ゆえに　$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) = 0$　すなわち　$\alpha = 0,\ 1,\ 2$

(1) の結論により　$\alpha = 0$ のとき　$k = 3,\ 4,\ 5$

$\alpha = 1$ のとき　$k = 3,\ 4$

$\alpha = 2$ のとき　$k = 3$

よって　$\boldsymbol{(\alpha,\ k) = (0,\ 3),\ (0,\ 4),\ (0,\ 5),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3)}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{lx^2+mx+n}{x+1}=\lim_{x\to-1}\left(lx+m-l+\frac{l-m+n}{x+1}\right)$

この極限が存在する条件は　$l-m+n=0$　ゆえに　$l+n=m$

m $(2\leqq m\leqq 6)$ に対して，$(l,\ n)$ の組合せの個数は

$$m-1\ (\text{通り})$$

すべての場合の総数は 6^3 通りであるから，求める確率は

$$\frac{1}{6^3}\sum_{m=2}^{6}(m-1)=\frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=\mathbf{\frac{5}{72}}$$

(2) $f(x)=\dfrac{lx^2+mx+n}{x+1}=lx+m-l+\dfrac{l-m+n}{x+1}$ より

$$f'(x)=l-\frac{l-m+n}{(x+1)^2}=\frac{l(x+1)^2-l+m-n}{(x+1)^2}$$

$g(x)=l(x+1)^2-l+m-n$ とおくと，$y=g(x)$ のグラフは，$x=-1$ を軸とする下に凸の放物線である．$f(x)$ が $x>-1$ で極値をもつとき，$x>-1$ に $g(x)=0$ となる x が存在するから，$g(-1)<0$ より

$$-l+m-n<0\quad\text{ゆえに}\quad m<l+n$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(m<l+n)&=1-P(m\geqq l+n)\\&=1-\frac{1}{6^3}\sum_{m=2}^{6}\sum_{k=2}^{m}(k-1)\\&=1-\frac{1}{6^3}\sum_{m=2}^{6}\frac{1}{2}m(m-1)\\&=1-\frac{1}{6^3}\sum_{m=2}^{6}\frac{1}{6}\{(m+1)m(m-1)-m(m-1)(m-2)\}\\&=1-\frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot7\cdot6\cdot5=1-\frac{35}{6^3}=\mathbf{\frac{181}{216}}\end{aligned}$$

■