平成23年度　大阪大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数I・II・III・A・B・C

1 aを自然数とする．Oを原点とする座標平面上で行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の表す1次変換を f とする．

(1) $r > 0$ および $0 \leqq \theta < 2\pi$ を用いて $A = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ と表すとき，r，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を a で表せ．

(2) 点 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$ に対し，点 Q_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}, \quad \mathrm{Q}_{n+1} = f(\mathrm{Q}_n)$$

で定める．$\triangle\mathrm{OQ}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ．

(3) f によって点 $(2,\ 7)$ に移されるもとの点Pの x 座標の小数第一位を四捨五入して得られる近似値が2であるという．自然数 a の値を求めよ．またこのとき $S(n) > 10^{10}$ となる最小の n の値を求めよ．ただし $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ を用いてよい．

2 実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を考える．θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分PQが通過する部分を D とする．D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ．

3 実数の組 $(p,\ q)$ に対し，$f(x) = (x-p)^2 + q$ とおく．

(1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0,\ 1)$ を通り，しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 $(p,\ q)$ と接点の座標を求めよ．

(2) 実数の組 $(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$ に対して，$f_1(x) = (x-p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x-p_2)^2 + q_2$ とおく．実数 α，β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ．

(3) 長方形 $R : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$ を考える．また，4点 $\mathrm{P}_0(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする．実数の組 $(p,\ q)$ を，放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする．R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ．

4 a，b，c を正の定数とし，x の関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える．以下，定数はすべて実数とする．

(1) 定数 p，q に対し，次をみたす定数 r が存在することを示せ．

$$x \geqq 1 \quad \text{ならば} \quad |px+q| \leqq rx$$

(2) 恒等式 $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ を用いて，次をみたす定数 k，l が存在することを示せ．

$$x \geqq 1 \quad \text{ならば} \quad \left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right| \leqq \frac{l}{x}$$

(3) すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする．このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x)=(x+m)^3$ と表されることを示せ．

5 正数 r に対して，$a_1=0$，$a_2=r$ とおき，数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める．

$$a_{n+1}=a_n+r_n(a_n-a_{n-1}) \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ，表がでたとき $r_n=\dfrac{r}{2}$，裏がでたとき $r_n=\dfrac{1}{2r}$ とする．ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする．a_n の期待値を p_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_3 および p_4 を，r を用いて表せ．

(2) $n \geqq 3$ のときに p_n を，n と r を用いて表せ．

(3) 数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ．

(4) r が (3) で求めた範囲を動くとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ の最小値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ より

$$a=r\cos\theta,\qquad 1=r\sin\theta$$

ゆえに　$r^2=a^2+1$　$r>0$ より　$\boldsymbol{r=\sqrt{a^2+1}}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{a}{r}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2+1}}}$，　$\sin\theta=\dfrac{1}{r}=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2+1}}}$

(2) $\mathrm{Q}_2=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_1 & \mathrm{Q}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_{n-1} & \mathrm{Q}_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_1 & \mathrm{Q}_2 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_{n-1} & \mathrm{Q}_n \end{pmatrix}&=\det A^{n-1}\det\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_1 & \mathrm{Q}_2 \end{pmatrix}\\&=(\det A)^{n-1}\cdot 1=(a^2+1)^{n-1}\end{aligned}$$

よって　$S(n)=\dfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_{n-1} & \mathrm{Q}_n \end{pmatrix}\right|=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(a^2+1)^{n-1}}$

(3) $A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} 2a+7 \\ -2+7a \end{pmatrix}$

$\dfrac{2a+7}{a^2+1}$ を四捨五入して 2 となる自然数 a を求めればよい．

$$\frac{3}{2}\leqq\frac{2a+7}{a^2+1}<\frac{5}{2}\quad\text{すなわち}\quad\begin{cases} a(3a-4)\leqq 11 \\ a(5a-4)>9 \end{cases}$$

これを満たす自然数 a は　**2**

$S(n)=\dfrac{5^{n-1}}{2}$ であるから，$\dfrac{5^{n-1}}{2}>10^{10}$ の両辺の常用対数をとると

$$(n-1)\log_{10}5-\log_{10}2>10\quad\text{ゆえに}\quad n>\frac{11}{\log_{10}5}$$

$0.3<\log_{10}2<0.31$ より，$\dfrac{69}{100}<\log_{10}5<\dfrac{7}{10}$ であるから

$$15\frac{5}{7}=\frac{110}{7}<\frac{11}{\log_{10}5}<\frac{1100}{69}=15\frac{65}{69}$$

よって，求める最小の n は　**16**　■

2 2 点 P$(0,\ \sin\theta)$，Q$(8\cos\theta,\ 0)$ を通る直線の方程式は $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{x}{8\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=1 \quad \text{ゆえに} \quad y=\sin\theta-\frac{x}{8}\tan\theta \quad \cdots ①$$

この直線上の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ であるから

$$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\frac{x}{8\cos^2\theta}=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=8\cos^3\theta \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$y=\sin\theta-\frac{8\cos^3\theta}{8}\tan\theta \quad \text{ゆえに} \quad y=\sin^3\theta \quad \cdots ③$$

②，③ より，直線 PQ の包絡線は，$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のときも成立することに注意して

$$(*)\begin{cases} x=8\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases} \quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

$(*)$ から，θ を消去すると

$$y=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} \quad (0\leqq x\leqq 8)$$

$x=8t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=8$

x	$0 \longrightarrow 8$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^8 y^2\,dx=\int_0^8\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3 dx=8\int_0^1(1-t^{\frac{2}{3}})^3\,dt\\&=8\int_0^1(1-3t^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{4}{3}}-t^2)\,dt\\&=8\Big[\,t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}t^3\,\Big]_0^1=\frac{128}{105}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V=\dfrac{128}{105}\pi}$

別解 $(*)$ より $\dfrac{dx}{d\theta} = -24\cos^2\theta\sin\theta$

x	$0 \longrightarrow 8$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6\theta(-24\cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)^3\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 3\cos^4\theta + 3\cos^6\theta - \cos^8\theta)\sin\theta\,d\theta \\
&= 24\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{3}{5}\cos^5\theta - \frac{3}{7}\cos^7\theta + \frac{1}{9}\cos^9\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{105}
\end{aligned}$$

■

3 (1) 放物線 $y=(x-p)^2+q$ が点 $(0,\ 1)$ を通るから $p^2+q=1$ $\cdots$①

$y=(x-p)^2+q$ と $y=x$ から y を消去すると

$$(x-p)^2+q=x \quad \text{整理すると} \quad x^2-(2p+1)x+p^2+q=0 \quad \cdots(*)$$

上の放物線と直線は接するから，$(*)$ の係数について

$$(2p+1)^2-4(p^2+q)=0 \quad \text{整理すると} \quad 4p-4q+1=0 \quad \cdots②$$

$(*)$ より，接点の x 座標 $\dfrac{2p+1}{2}$ が正であるから

$$\frac{2p+1}{2}>0 \quad \text{これを解いて} \quad p>-\frac{1}{2} \quad \cdots③$$

①，② から q を消去すると

$$4p^2+4p-3=0 \quad \text{ゆえに} \quad (2p+3)(2p-1)=0$$

③ に注意して解くと $\boldsymbol{p=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{3}{4}}$

接点の x 座標は 1 で，直線 $y=x$ 上の点であるから 接点 **(1，1)**

(2) $g(x) = f_2(x) - f_1(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-p_2)^2 + q_2 - (x-p_1)^2 - q_1 \\ &= 2(p_1 - p_2)x - {p_1}^2 + {p_2}^2 - q_1 + q_2 \end{aligned}$$

$g(x)$ のグラフは直線であるから，$m = \dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}$ とおくと

$$g(x) = m(x-\alpha) + g(\alpha) \quad \cdots (\mathrm{A})$$

または

$$g(x) = m(x-\beta) + g(\beta) \quad \cdots (\mathrm{B})$$

とおける $(\alpha < \beta)$．与えられた条件から，$g(\alpha) > 0$，$g(\beta) > 0$ である．

(i) $0 < g(\alpha) \leqq g(\beta)$ のとき

(A) より，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$m \geqq 0$，$x - \alpha \geqq 0$ であるから

$$g(x) = m(x-\alpha) + g(\alpha) \geqq g(\alpha) > 0$$

(ii) $0 < g(\beta) < g(\alpha)$ のとき

(B) より，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$m < 0$，$x - \beta \leqq 0$ であるから

$$g(x) = m(x-\beta) + g(\beta) \geqq g(\beta) > 0$$

(i)，(ii) より，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において　$g(x) > 0$　すなわち　$f_1(x) < f_2(x)$

(3) (1) の結果から

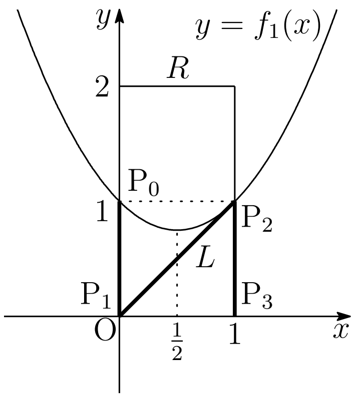
$$f_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$$

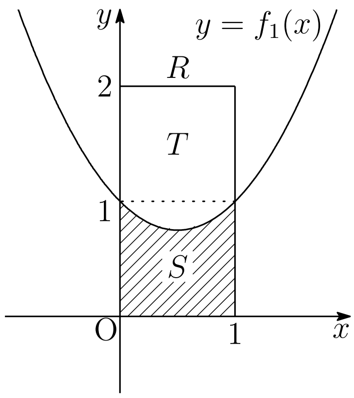
とおくと　　$f_1(0) = 1$，$f_1(1) = 1$

R を通過する放物線 $y = f_2(x)$ が L と共有点がないから

$$f_1(0) < f_2(0),\ f_1(1) < f_2(1)$$

(2) の結論から，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f_1(x) < f_2(x)$ であるから，R の点のうちで放物線 $y = f_2(x)$ が通過する点全体の集合は，R の点うちで放物線 $y = f_1(x)$ の上側である．したがって，R から T を除いた領域 S は右下の図の斜線部分で，境界線を含む．





よって，求める面積は

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)\,dx = \left[\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x \geqq 1$ のとき

$$|px+q| \leqq |px|+|q| \leqq |p|x+|q|x = (|p|+|q|)x$$

$r=|p|+|q|$ とするとき，次が成立する．

$$x \geqq 1 \quad \text{ならば} \quad |px+q| \leqq rx$$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ について，$a=3k$ とおくと $(k>0)$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+3kx^2+bx+c \\ &= (x+k)^3+(b-3k^2)x+c-k^3 \end{aligned}$$

さらに，$p=b-3k^2$，$q=c-k^3$ とおくと

$$f(x)-(x+k)^3 = px+q$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから，$x \geqq 1$ のとき　$f(x)>x^3$

$\alpha=\sqrt[3]{f(x)}$，$\beta=x+k$ とおくと　$\alpha>x$，$\beta>x$

$$\alpha^3-\beta^3 = px+q,$$
$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 > x^2+x{\cdot}x+x^2 = 3x^2$$

$|\alpha^3-\beta^3| = |\alpha-\beta|(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ より

$$|px+q| > \left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right|{\cdot}3x^2$$
$$\left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right| < \frac{|px+q|}{3x^2}$$

$r=3l$ とおいて，(1) の結果を上式に代入すると

$$\left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right| < \frac{3lx}{3x^2} = \frac{l}{x}$$

よって，次を満たす定数 k，l が存在する．

$$x \geqq 1 \quad \text{ならば} \quad \left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right| \leqq \frac{l}{x}$$

(3) (2) の結果に $x=n$ を代入すると (n は自然数)

$$\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-k\right| \leqq \frac{l}{n}$$

$m=[k]$，$\gamma=k-[k]$ とすると ($0 \leqq \gamma < 1$)

$$\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-m-\gamma\right| \leqq \frac{l}{n}$$

したがって　$\gamma-\dfrac{l}{n} \leqq \sqrt[3]{f(n)}-n-m \leqq \gamma+\dfrac{l}{n}$

$I_n=\left[\gamma-\dfrac{l}{n},\ \gamma+\dfrac{l}{n}\right]$，$a_n=\sqrt[3]{f(n)}-n-m$ とおくと (a_n は自然数)

$$a_n \in I_n \quad \cdots(*)$$

(i) $0<\gamma<1$ のとき，次をみたす自然数 N が存在する

$$0<\gamma-\frac{l}{N} \quad \text{かつ} \quad \gamma+\frac{l}{N}<1$$

このとき，$n \geqq N$ に対して，$(*)$ は成立しない．

(ii) $\gamma=0$ のとき，$n>l$ をみたす自然数 n について $(*)$ が成立するから

$$a_n=0 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt[3]{f(n)}-n-m=0$$

(i)，(ii) より，$f(n)=(n+m)^3$ となるから，このとき関数 $f(x)$ は

$$f(x)=(x+m)^3$$

と表される． ■

$\boxed{5}$ (1) 与えられた漸化式より，$\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=r_n$ であるから $(n=2,3,4,\cdots)$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k-a_{k-1}}=\prod_{k=2}^{n}r_k \quad ゆえに \quad \frac{a_{n+1}-a_n}{a_2-a_1}=\prod_{k=2}^{n}r_k$$

$a_1=0$，$a_2=r$ より，$a_{n+1}-a_n=r\displaystyle\prod_{k=2}^{n}r_k$ であるから

$$\sum_{j=2}^{n-1}(a_{j+1}-a_j)=r\sum_{j=2}^{n-1}\prod_{k=2}^{j}r_k \quad ゆえに \quad a_n=r+r\sum_{j=2}^{n-1}\prod_{k=2}^{j}r_k$$

したがって

$$\begin{aligned}p_n&=r+r\sum_{j=2}^{n-1}\prod_{k=2}^{j}\frac{1}{2}r_k=r+r\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2r}\right)^{j-1}\\&=r\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{r^2+1}{4r}\right)^{j-1}\qquad\cdots(*)\end{aligned}$$

よって，$(*)$ に $n=3,\ 4$ を代入すると

$$\begin{aligned}p_3&=r\left(1+\frac{r^2+1}{4r}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{4}(r^2+4r+1)},\\p_4&=r\left\{1+\frac{r^2+1}{4r}+\left(\frac{r^2+1}{4r}\right)^2\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{16r}(r^4+4r^3+18r^2+4r+1)}\end{aligned}$$

(2) $(*)$ より

$$p_n=\frac{r\left\{\left(\dfrac{r^2+1}{4r}\right)^{n-1}-1\right\}}{\dfrac{r^2+1}{4r}-1}=\boldsymbol{\frac{4r^2}{r^2-4r+1}\left\{\left(\frac{r^2+1}{4r}\right)^{n-1}-1\right\}}$$

(3) (2) の結果から，$\{p_n\}$ が収束するとき，$r > 0$ に注意して

$$\frac{r^2+1}{4r} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad r^2 - 4r + 1 < 0 \qquad \cdots (**)$$

これを解いて　　$\boldsymbol{2 - \sqrt{3} < r < 2 + \sqrt{3}}$

(4) r が (3) で求めた範囲を動くとき

$$\lim_{n\to\infty} p_n = -\frac{4r^2}{r^2 - 4r + 1} = \frac{4}{-\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{4}{r} - 1} = \frac{4}{-\left(\dfrac{1}{r} - 2\right)^2 + 3}$$

$(**)$ および (3) の結果に注意すると，$r = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ をとる．■