平成22年度　大阪大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 関数

$$f(x) = 2\log(1+e^x) - x - \log 2$$

を考える．ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする．

(1) $f(x)$ の第2次導関数を $f''(x)$ とする．等式

$$\log f''(x) = -f(x)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2} (x - \log 2)e^{-f(x)}\,dx$ を求めよ．

2 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．2つの曲線

$$C_1 : x^2 + 3y^2 = 3, \qquad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 2$$

の交点のうち，x 座標と y 座標がともに正であるものをPとする．Pにおける C_1，C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とし，y 軸と ℓ_1，ℓ_2 の交点をそれぞれQ，Rとする．θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，線分QRの長さの最小値を求めよ．

3 ℓ，m，n を3以上の整数とする．等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)\ell = 2$$

を満たす ℓ，m，n の組をすべて求めよ．

4 半径3の球 T_1 と半径1の球 T_2 が，内接した状態で空間で固定されている．半径1の球 S が次の条件(A)，(B)を同時に満たしながら動く．

(A) S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している．

(B) S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している．

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ．

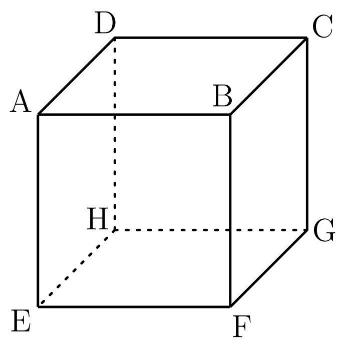
5 n を 0 以上の整数とする．立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P，Q を考える．時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している．時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る．一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない．

(1) 時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか．可能な組み合わせをすべて挙げよ．

(2) 時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ．

(3) 時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする．また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする．p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ．



解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ より

$$f'(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}-1=1-\frac{2}{1+e^x}$$
$$f''(x)=\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

したがって
$$\begin{aligned}\log f''(x)&=\log\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\\&=\log 2+x-2\log(1+e^x)=-f(x)\end{aligned}$$

(2) (1) の結果より，$e^{-f(x)}=f''(x)$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}\,dx&=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)f''(x)\,dx\\&=\Big[\,(x-\log 2)f'(x)\,\Big]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}f'(x)\,dx\\&=f'(0)\log 2-f(\log 2)+f(0)\end{aligned}$$

ここで
$$\begin{aligned}f(\log 2)&=2\log(1+2)-\log 2-\log 2\\&=2\log 3-2\log 2,\\f(0)&=2\log(1+1)-0-\log 2=\log 2,\\f'(0)&=1-\frac{2}{1+1}=0\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}\,dx&=0\cdot\log 2-(2\log 3-2\log 2)+\log 2\\&=3\log 2-2\log 3=\boldsymbol{\log\frac{8}{9}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x^2+3y^2=3$，$\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=2$ より，

$$\begin{cases} x^2+3y^2=3 \\ x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=2\sin^2\theta\cos^2\theta \end{cases}$$

これを x^2 および y^2 の連立方程式として解くと

$$x^2=\frac{3\cos^2\theta(2\sin^2\theta+1)}{3\sin^2\theta+\cos^2\theta}=3\cos^2\theta,$$
$$y^2=\frac{\sin^2\theta(-2\cos^2\theta+3)}{3\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\sin^2\theta$$

$x>0$，$y>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$x=\sqrt{3}\cos\theta,\ \ y=\sin\theta$

C_1，C_2 の共有点が $(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ であるから

$$l_1:\sqrt{3}x\cos\theta+3y\sin\theta=3,\qquad l_2:\frac{\sqrt{3}x}{\cos\theta}-\frac{y}{\sin\theta}=2$$

したがって　$\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$，$\mathrm{R}(0,-2\sin\theta)$　ゆえに　$\mathrm{QR}=2\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}$

$\sin\theta>0$ であるから，相加・相乗平均の大小関係により

$$2\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}\geqq 2\sqrt{2\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}}=2\sqrt{2}$$

上式で等号が成立するとき

$$2\sin\theta=\frac{1}{\sin\theta}\quad \text{ゆえに}\quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{すなわち}\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，QR は最小値 $\mathbf{2\sqrt{2}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\left(\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\right)\ell=2$ より（ℓ，m，n は 3 以上の整数）

$$\frac{n}{m}-\frac{n}{2}+1=\frac{2}{\ell}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\ell n}>\frac{1}{2}\quad (*)$$

$m\geqq 4$，$n\geqq 4$ と仮定すると，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，上の第 2 式に反する．
したがって，m，n の少なくとも一方は 3 である．

(i) $m=3$ のとき

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\ell n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{n}=\frac{1}{6}+\frac{2}{\ell n}>\frac{1}{6}$$

このとき，$n=3,\ 4,\ 5$ であるから

$$(\ell,\ n)=(4,\ 3),\ (6,\ 4),\ (12,\ 5)$$

(ii) $n=3$ のとき

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3\ell} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{m}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3\ell}>\frac{1}{6}$$

このとき，$m=3,\ 4,\ 5$ であるから

$$(\ell,\ m)=(4,\ 3),\ (8,\ 4),\ (20,\ 5)$$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{(\ell,\ m,\ n)=(4,\ 3,\ 3),\ (6,\ 3,\ 4),\ (12,\ 3,\ 5),\ (8,\ 4,\ 3),\ (20,\ 5,\ 3)}$$

別解 $(*)$ より　$mn-2m-2n<0$　ゆえに　$(m-2)(n-2)<4$

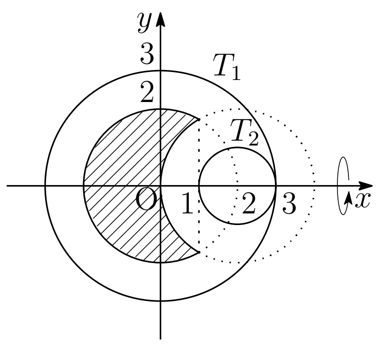
m，n は 3 以上の整数であるから

$$(m-2,\ n-2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1)$$

すなわち　$(m,\ n)=(3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2)$

これらを与えられた等式に代入することにより，ℓ が求まる. ■

4 立体 D の体積は，右の図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転させたものであるから，その体積を V とすると



$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_{-2}^{1}(4-x^2)dx-\int_0^1\left\{4-(x-2)^2\right\}dx\\&=\left[\,4x-\frac{x^3}{3}\,\right]_{-2}^{1}-\left[\,4x-\frac{1}{3}(x-2)^3\,\right]_0^1\\&=\frac{22}{3}\end{aligned}$$

よって　$V=\boldsymbol{\dfrac{22}{3}\pi}$ ■

5 (1) P，Q の可能な組合せは次の次の 7 通り

$$\mathbf{(B,\ D),\ (B,\ G),\ (D,\ B),\ (D,\ G),\ (E,\ B),\ (E,\ D),\ (E,\ G)}$$

(2) P と Q は常に同じ面 (正方形) の対角にあるから，(1) の結果をもとに

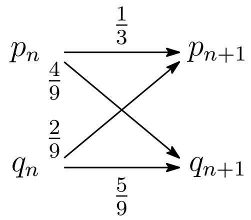
$$r_1 = \frac{7}{3^2} = \frac{7}{9},\quad r_{n+1} = \frac{7}{9}r_n \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n}$$

(3) 時刻 n において，P と Q がそれぞれ頂点 A，C にあるとき，時刻 $n+1$ においてP と Q が異なる頂点に位置する可能な組合せは (1) と等しい．

時刻 n において，P と Q がそれぞれ頂点 A，F にあるとき，時刻 $n+1$ においてP と Q が異なる頂点に位置する可能な組合せは

$$\text{(B, E), (B, G), (D, B), (D, E), (D, G), (E, B), (E, G)}$$

P，Q が他の頂点に位置するときも同様で，
次の確率漸化式が成立する．



$$(*)\left\{\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n \\ q_{n+1} &= \frac{4}{9}p_n + \frac{5}{9}q_n \end{aligned}\right.$$

よって $\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n}$

(4) $(*)$ から $p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{7}{9}(p_n + q_n),\quad 2p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{9}(2p_n - q_n)$

$p_0 = 1,\ q_0 = 0$ であるから

$$p_n + q_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n,\quad 2p_n - q_n = 2\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

したがって $p_n = \frac{1}{3\cdot 9^n}(7^n + 2),\quad q_n = \frac{1}{3\cdot 9^n}(2\cdot 7^n - 2)$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 7^n - 2}{7^n + 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 - \frac{2}{7^n}}{1 + \frac{2}{7^n}} = \mathbf{2}$ ■