

平成 21 年度 大阪大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

- 1 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $A_1(a_1, a_1^2)$, $A_2(a_2, a_2^2)$, $A_3(a_3, a_3^2), \dots$ を, A_{k+2} ($k \geq 1$) における C の接線が直線 $A_k A_{k+1}$ に平行であるようにとる. ただし, $a_1 < a_2$ とする. 三角形 $A_k A_{k+1} A_{k+2}$ の面積を T_k とし, 直線 $A_1 A_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする. このとき次の問いに答えよ.

(1) $\frac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T_k$ を S を用いて表せ.

- 2 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする. 点 $P(16\sqrt{3}, 16)$ をとり, $P_1 = f(P)$, $P_{n+1} = f(P_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする. 正の整数 k に対して, 次の条件をみたす領域を D_k とする.

$$x < 0, \quad y < 0, \quad \sqrt{3}x + y \leq -2^{-k}$$

このとき D_k に含まれる P_n の個数を k で表せ.

- 3 α を 2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解とすると, $(a + 5\alpha)(b + 5c\alpha) = 1$ をみたす整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ. ただし, 必要ならば $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい.

- 4 平面上の三角形 OAB を考え, 辺 AB の中点を M とする.

$$\vec{a} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$$

とおき, 点 P を $\vec{a} \cdot \vec{OP} = -\vec{b} \cdot \vec{OP} > 0$ であるようにとる. 直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする.

(1) $\vec{MQ}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ.

(2) $|\vec{MQ}| = \frac{1}{2}(|\vec{OA}| + |\vec{OB}|)$ であることを示せ.

5 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $y = \log(nx)$ と $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = 1$ の交点のうち第 1 象限にある点を (p_n, q_n) とする.

(1) 不等式 $1 - q_n^2 \leq \frac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ を証明せよ. ただし, e は自然対数の底である.

(2) $S_n = \int_{\frac{1}{n}}^{p_n} \log(nx) dx$ を p_n で表せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ.

解答例

1 (1) $A_k(a_k, a_k^2)$, $A_{k+1}(a_{k+1}, a_{k+1}^2)$, $A_{k+2}(a_{k+2}, a_{k+2}^2)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_k A_{k+1}} &= (a_{k+1} - a_k) \begin{pmatrix} 1 \\ a_{k+1} + a_k \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{A_k A_{k+2}} &= (a_{k+2} - a_k) \begin{pmatrix} 1 \\ a_{k+2} + a_k \end{pmatrix} \\ T_k &= \frac{1}{2} |(a_{k+1} - a_k)(a_{k+2} - a_k)| |1(a_{k+2} + a_k) - 1(a_{k+1} + a_k)| \\ &= \frac{1}{2} |(a_{k+1} - a_k)(a_{k+2} - a_k)(a_{k+2} - a_{k+1})| \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$y = x^2 \text{ より } y' = 2x$$

直線 $A_k A_{k+1}$ の傾きが C 上の点 A_{k+2} における接線の傾きに等しいから

$$\frac{a_{k+1}^2 - a_k^2}{a_{k+1} - a_k} = 2a_{k+2} \quad \text{ゆえに} \quad a_{k+2} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して} \quad T_k = \frac{1}{8} |a_{k+1} - a_k|^3$$

$$\text{また, } \textcircled{2} \text{ より} \quad |a_{k+2} - a_{k+1}| = \frac{1}{2} |a_{k+1} - a_k|$$

$$\text{上の2式から} \quad T_{k+1} = \frac{1}{8} |a_{k+2} - a_{k+1}|^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} |a_{k+1} - a_k|^3 = \frac{1}{8} T_k$$

$$\text{よって} \quad \frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{1}{8}$$

$$(2) \quad S = \frac{1}{6} (a_2 - a_1)^3 \text{ より } T_1 = \frac{1}{8} (a_2 - a_1)^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} (a_2 - a_1)^3 = \frac{3}{4} S$$

$\{T_n\}$ は初項 $\frac{3}{4}S$, 公比 $\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T_k = \frac{\frac{3}{4}S}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{6}{7} S$$

■

2 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ および $OP = 32$ であるから

$$OP_n = 32 \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2^{5-n} \quad \dots (*)$$

OP_n の偏角を θ とすると

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3} = \frac{2n+1}{6}\pi \quad \dots (**)$$

原点 O から直線 $\sqrt{3}x + y = -2^{-k}$ までの距離を d_k とすると

$$d_k = \frac{2^{-k}}{\sqrt{3+1}} = 2^{-k-1}$$

θ は第 3 象限の角であるから, $(**)$ より, j を自然数とすると

$$(2j-1)\pi < \frac{2n+1}{6}\pi < \left(2j - \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{ゆえに} \quad 6j - \frac{7}{2} < n < 6j - 2$$

すなわち $n = 6j - 3$ (j は自然数)

P_n が条件を満たすとき, $OP_n \geq d_k$ であるから, 上式および $(*)$ から

$$2^{5-(6j-3)} \geq 2^{-k-1} \quad \text{ゆえに} \quad j \leq \frac{k+9}{6}$$

これを満たす自然数 j の個数であるから $\left[\frac{k+9}{6} \right]$

■

3 $(a + 5\alpha)(b + 5c\alpha) = 1$ より $ab + 5(b + ac)\alpha + 25c\alpha^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

α は 2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解であるから $\alpha^2 = 2\alpha + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入して $ab + 5(b + ac)\alpha + 25c(2\alpha + 1) = 1$

ゆえに $(ab + 25c - 1) + 5(b + ac + 10c)\alpha = 0$

α は無理数であるから $(*) \begin{cases} ab + 25c - 1 = 0 \\ b = -c(a + 10) \end{cases}$

$(*)$ から, b を消去すると $c(-a^2 - 10a + 25) = 1 \quad \cdots (**)$

上式から $c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき, これを $(**)$ に代入すると

$$-a^2 - 10a + 25 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a + 12)(a - 2) = 0$$

よって $a = -12, 2$

$(*)$ の第 2 式より $a = -12$ のとき $b = 2$
 $a = 2$ のとき $b = -12$

(ii) $c = -1$ のとき, これを $(**)$ に代入すると

$$a^2 + 10a - 25 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a + 5)^2 = 51$$

これを満たす整数 a は存在しない.

(i), (ii) より $(a, b, c) = (-12, 2, 1), (2, -12, 1)$

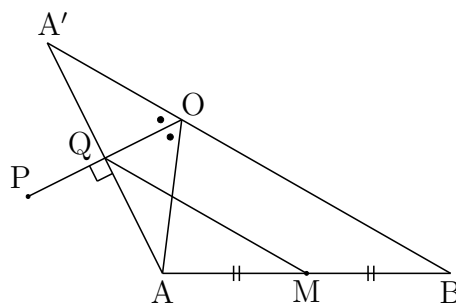


- 4 (1) $\angle AOB$ の外角の二等分線に関して A と対称な点を A' とする. P は $\angle AOA'$ の二等分線上にあり,

$$\triangle OAQ \equiv \triangle OA'Q$$

2点 M, Q はそれぞれ線分 AB, AA' の中点であるから, 中点連結定理により

$$MQ \parallel BA' \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{MQ} \parallel \vec{b}$$



- (2) 中点連結定理により $MQ = \frac{1}{2}BA'$ また $BA' = BO + OA', OA' = OA$

$$\text{ゆえに} \quad MQ = \frac{1}{2}(OA + OB) \quad \text{よって} \quad |\overrightarrow{MQ}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}|)$$

- 別解 (1) $\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\vec{a}, \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}|\vec{b}$
 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OA'}|$ であるから $\overrightarrow{OA'} = -|\overrightarrow{OA}|\vec{b}$

M は線分 AB の中点であるから

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|\vec{a} + |\overrightarrow{OB}|\vec{b})$$

Q は線分 AA' の中点であるから

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|\vec{a} - |\overrightarrow{OA}|\vec{b})$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}|)\vec{b}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{MQ} \parallel \vec{b}$$

- (2) $\vec{b}$ は単位ベクトルであるから, (1) の結果より

$$|\overrightarrow{MQ}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}|)$$

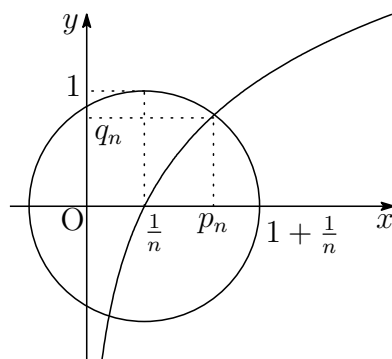


- 5 (1) 点 (p_n, q_n) は曲線 $y = \log(nx)$ および円 $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = 1$ 上の点であるから

$$q_n = \log(np_n), \quad \left(p_n - \frac{1}{n}\right)^2 + q_n^2 = 1$$

上の 2 式から p_n を消去すると

$$\left(\frac{e^{q_n} - 1}{n}\right)^2 = 1 - q_n^2$$



$0 < q_n < 1$ であるから $1 < e^{q_n} < e$ ゆえに $0 < e^{q_n} - 1 < e - 1$

$$\text{よって} \quad 1 - q_n^2 = \left(\frac{e^{q_n} - 1}{n}\right)^2 \leq \frac{(e - 1)^2}{n^2}$$

このとき $q_n \geq 0$, $1 - q_n^2 \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e - 1)^2}{n^2} = 0$

はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q_n^2) = 0$ よって $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$

$$\begin{aligned} (2) \quad S_n &= \int_{\frac{1}{n}}^{p_n} \log(nx) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{p_n} (x)' \log(nx) dx \\ &= \left[x \log(nx) \right]_{\frac{1}{n}}^{p_n} - \int_{\frac{1}{n}}^{p_n} x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= p_n \log(np_n) - p_n + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果および $np_n = e^{q_n}$ により

$$\begin{aligned} nS_n &= np_n \log(np_n) - np_n + 1 \\ &= e^{q_n} q_n - e^{q_n} + 1 = e^{q_n} (q_n - 1) + 1 \end{aligned}$$

(1) の結果により $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n = e^1(1 - 1) + 1 = 1$ ■