

平成19年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

- 1 n を自然数とする. 関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフを C とし, C 上の2点 $(n, \sqrt{n})$ と $(n+1, \sqrt{n+1})$ を通る直線を ℓ とする. C と ℓ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積を V とする. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a V = b$ を満たす正の数 a, b を求めよ.

- 2 次の問いに答えよ.

(1) x が正の数とき $|\log x| \leq \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ.

- (2) p, q, r が $p+q+r=1$ を満たす正の数するとき

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{1}{3}$$

を示せ.

- (3) a, b, c が相異なる正の数で, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} + \frac{bc}{c-b} \log \frac{c}{b} + \frac{ca}{a-c} \log \frac{a}{c} \leq \frac{1}{3}$$

を示せ.

- 3 xy 平面において, 原点 O を通る半径 r ($r > 0$) の円を C とし, その中心を A とする. O を除く C 上の点 P に対し, 次の2つの条件 (a), (b) で定まる点 Q を考える.

(a) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の向きが同じ.

(b) $|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| = 1$

以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P が O を除く C 上を動くとき, 点 Q は $\overrightarrow{OA}$ に直交する直線上を動くことを示せ.
- (2) (1) の直線を l とする. l が C と2点で交わる時, r のとりうる値の範囲を求めよ.

- 4 $f(x) = x^3 - x$ とし, t を実数とする. xy 平面において, 曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし, 直線 $x = t$ に関して C_1 と対称な曲線

$$y = f(2t - x)$$

を C_2 とする.

- (1) C_1 と C_2 が 3 点で交わる時, t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ.

- 5 n を 2 以上の自然数とする. 4 個の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を重複を許して n 個並べたものを

$$M_1, M_2, \dots, M_n$$

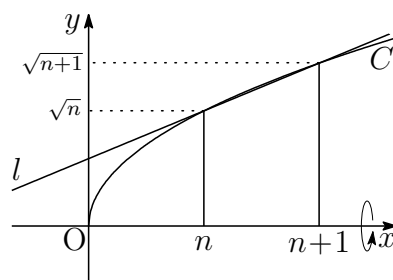
とする.

- (1) 積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義できる場合は何通りあるか. その数を n の式で表せ.
- (2) 積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義できて, その積が零行列でない 2×3 行列となる場合は何通りあるか. その数を n の式で表せ.
- (3) 積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義できて, その積が零行列とならない場合は何通りあるか. その数を n の式で表せ.

解答例

- 1 $n \leq x \leq n+1$ において、 C と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_1 とすると

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_n^{n+1} (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_n^{n+1} x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_n^{n+1} = \frac{\pi}{2} (2n+1) \end{aligned}$$



上底の半径 $\sqrt{n}$, 下底の半径 $\sqrt{n+1}$, 高さ 1 の円錐台の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\pi}{3} \{ (\sqrt{n})^2 + \sqrt{n}\sqrt{n+1} + (\sqrt{n+1})^2 \} \cdot 1 \\ &= \frac{\pi}{3} \{ 2n+1 + \sqrt{n(n+1)} \} \end{aligned}$$

求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} (2n+1) - \frac{\pi}{3} \{ 2n+1 + \sqrt{n(n+1)} \} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(n + \frac{1}{2} - \sqrt{n(n+1)} \right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(n + \frac{1}{2})^2 - n(n+1)}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{n(n+1)}} \end{aligned}$$

したがって $nV = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$ ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} nV = \frac{\pi}{24}$

よって $a = 1, \quad b = \frac{\pi}{24}$

補足 上底の半径 a , 下底の半径 b , 高さ h の円錐台の体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^h \left(\frac{b-a}{h}x + a \right)^2 dx = \int_0^h \left\{ \left(\frac{b-a}{h} \right)^2 x^2 + \frac{2a(b-a)}{h}x + a^2 \right\} dx \\ &= \left[\left(\frac{b-a}{h} \right)^2 \frac{x^3}{3} + \frac{a(b-a)}{h}x^2 + a^2x \right]_0^h \\ &= h \left\{ \frac{1}{3}(b-a)^2 + a(b-a) + a^2 \right\} = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

よって $V = \frac{\pi h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ ■

2 (1) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \log x$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2x\sqrt{x}}$$

x	(0)	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$		+	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$

$$x \geq 1 \text{ のとき} \quad f(x) \geq 0 \text{ より} \quad 0 \leq \log x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \dots (*)$$

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき} \quad f(x) \leq 0 \text{ より} \quad \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \log x \leq 0$$

$$x \text{ が正の数} \text{ のとき} \quad |\log x| \leq \left| \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \quad \text{よって} \quad |\log x| \leq \frac{|x - 1|}{\sqrt{x}}$$

補足 $0 < x \leq 1$ のとき, $\frac{1}{x} \geq 1$ であるから, (*) より

$$0 \leq \log \frac{1}{x} \leq \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{x} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \log x \leq 0$$

(2) シュワルツの不等式により

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(p^2 + q^2 + r^2) \geq (1 \cdot p + 1 \cdot q + 1 \cdot r)^2$$

$$p + q + r = 1 \text{ であるから} \quad p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{1}{3}$$

別解 2つのベクトル $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (p, q, r)$ について ($p + q + r = 1$), $|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ を利用してもよい. 等号が成立するのは, $\vec{u} // \vec{v}$, すなわち, $p = q = r = \frac{1}{3}$ のときである.

(3) $b > a > 0$, すなわち, $\frac{b}{a} > 1$ のとき, (*) より

$$\frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} \leq \frac{ab}{b-a} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) = \frac{ab}{b-a} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

$a > b > 0$, すなわち, $\frac{a}{b} > 1$ のとき, (*) および上の結果を利用して

$$\frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} = \frac{ab}{a-b} \log \frac{a}{b} \leq \sqrt{ab}$$

したがって, 相異なる正の数 a, b について, 次式が成立する.

$$\frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} \leq \sqrt{ab} \quad \dots (**)$$

a, b, c は相異なる正の数であるから, $(**)$ により

$$\frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} + \frac{bc}{c-b} \log \frac{c}{b} + \frac{ca}{a-c} \log \frac{a}{c} \leq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ より

$$a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = 1$$

ゆえに $1 - 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = a + b + c \quad \dots \textcircled{2}$

(2) の結果に $p = \sqrt{a}, q = \sqrt{b}, r = \sqrt{c}$ を適用すると

$$a + b + c \geq \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{3}$$

②, ③ より $1 - 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \geq \frac{1}{3}$

したがって $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{4}$

①, ④ より $\frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} + \frac{bc}{c-b} \log \frac{c}{b} + \frac{ca}{a-c} \log \frac{a}{c} \leq \frac{1}{3}$ ■

3 (1) O を極とし, A を通る始線 OX をとると

$$OP = 2r \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$|\vec{OP}| |\vec{OQ}| = 1 \text{ より } OQ = \frac{1}{2r \cos \theta}$$

点 Q から始線 OX に垂線 QH を引くと

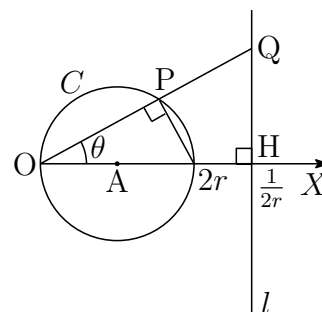
$$OH = OQ \cos \theta = \frac{1}{2r}$$

よって, 点 Q は図の H を通り始線 OX に垂直な直線上にある.

(2) l と C が 2 点で交わる時, 上の図から

$$\frac{1}{2r} < 2r \quad \text{ゆえに} \quad (2r+1)(2r-1) > 0 \quad \text{よって} \quad r > \frac{1}{2}$$

■



4 (1) $f(x) = x^3 - x$ より

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(2t - x) &= x^3 - x - \{(2t - x)^3 - (2t - x)\} \\
 &= x^3 - (2t - x)^3 - 2(x - t) \\
 &= 2(x - t)(x^2 - 2tx + 4t^2 - 1) \\
 &= 2(x - t)\{(x - t)^2 - (1 - 3t^2)\} \\
 &= 2(x - t)(x - t + \sqrt{1 - 3t^2})(x - t - \sqrt{1 - 3t^2})
 \end{aligned}$$

方程式 $f(x) - f(2t - x) = 0$ の解は

$$x = t, \quad t \pm \sqrt{1 - 3t^2} \quad (t \text{ は実数})$$

これらの解が異なる 3 つの実数解であるから

$$1 - 3t^2 > 0 \quad \text{すなわち} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

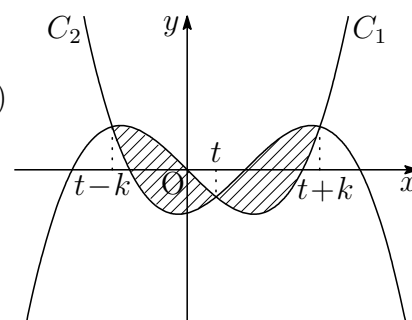
(2) $k = \sqrt{1 - 3t^2}$ とおくと ($k > 0$)

$$f(x) - f(2t - x) = 2(x - t + k)(x - t)(x - t - k)$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{t-k}^{t+k} |f(x) - f(2t - x)| dx \\
 &= 2 \int_{t-k}^{t+k} |(x - t + k)(x - t)(x - t - k)| dx
 \end{aligned}$$

$$u = x - t \text{ とおくと } dx = du \quad \begin{array}{c|c} x & t - k \longrightarrow t + k \\ \hline u & -k \longrightarrow k \end{array}$$



$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_{-k}^k |(u + k)u(u - k)| du \\
 &= 2 \int_{-k}^0 (u + k)u(u - k) du - 2 \int_0^k (u + k)u(u - k) du \\
 &= 2 \int_{-k}^0 (u^3 - k^2u) du - 2 \int_0^k (u^3 - k^2u) du \\
 &= 2 \left[\frac{u^4}{4} - \frac{k^2u^2}{2} \right]_{-k}^0 - 2 \left[\frac{u^4}{4} - \frac{k^2u^2}{2} \right]_0^k = k^4 = (1 - 3t^2)^2
 \end{aligned}$$

(1) の結果に注意すると, $t = 0$ のとき, 最大値 1 をとる. ■

5 (1) 行列 A, B, C, D の型は、それぞれ

$$2 \times 2, \quad 2 \times 3, \quad 3 \times 2, \quad 3 \times 3$$

であるから、これらの行列において積が定義されるのは

$$AA, \quad AB, \quad BC, \quad BD, \quad CA, \quad CB, \quad DC, \quad DD$$

積 $M_1 M_2 \cdots M_k$ が $2 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 2, 3 \times 3$ 型である場合の数をそれぞれ a_k, b_k, c_k, d_k とすると

$$a_{k+1} = a_k + b_k, \quad b_{k+1} = a_k + b_k, \quad c_{k+1} = c_k + d_k, \quad d_{k+1} = c_k + d_k$$

$$\text{したがって} \quad a_{k+1} + b_{k+1} + c_{k+1} + d_{k+1} = 2(a_k + b_k + c_k + d_k)$$

$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$, 求める場合の数は $a_n + b_n + c_n + d_n$ より,

$$(1 + 1 + 1 + 1) \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

(2) A, D が単位行列であることに注意して

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義されたとき、これが 2×3 行列であれば、 M_1 は A または B , M_n は B または D である. $M_1 = A, M_n = D$ とすると、 $M_j = B$ ($1 < j < n$) が存在し、(*) には B が含まれる.

$$(*) \quad M_1, M_2, \dots, M_n$$

から単位行列 A, D を除いた行列 (B と C からなる行列)

$$(**) \quad N_1, N_2, \dots, N_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

を考える. (**) に 2×3 型行列 B が 2 つ以上存在すると仮定すると、その間に 3×2 型行列 C が存在することになり、積 $BC = O$ が現れ、条件に反する. したがって、 B はただ一つ存在する. (**) で B の後ろに C がくることはないが ($BC = O$), B の前に C がくると仮定すると、 M_1 が A または B であるから、 M_1 と C の間に B が存在し、不適. したがって、(**) は B 1 つからなる. これから (*) の B の前にくる単位行列は A で、 B の後ろにくる単位行列は D である. $M_1 M_2 \cdots M_n$ は

$$A^k B D^{n-k-1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad \text{よって} \quad n \text{ 個}$$

- (3) (2) の (**) に 3×2 型行列 C が 2 つ以上含まれると仮定すると、その間に 2×3 型行列 B が存在することになり、積 $BC = O$ が現れ、条件に反する。したがって、 C が存在するとすれば、 C はただ一つである。

- (i) (**) に C が存在するとき、(*) の C の前にくる単位行列は D で、 C の後ろくる単位行列は A である。 $M_1 M_2 \cdots M_n$ は

$$D^k C A^{n-k-1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad \text{よって } n \text{ 個}$$

- (ii) (**) に B と C が存在するとき、 B と C は 1 個ずつで、その順番は C が前で B が後にくるので、(*) は「 $\cdots C \cdots B \cdots$ 」の形になる。このとき、 C の前と B の後ろに並ぶ単位行列は D で、 C と B の間に並ぶ単位行列は A である。したがって、これらの総数は n 個から 2 個選び、その順に B, C を配置する場合の総数に等しいから

$${}_n C_2 = \frac{1}{2} n(n-1) \text{ (個)}$$

- (iii) (**) に B も C も存在しない、すなわち、(*) はすべて A またはすべて D であるとき、その総数は

$$2 \text{ (個)}$$

- (2) の結果および上の (i) ~ (iii) により、求める総数は

$$n + n + \frac{1}{2} n(n-1) + 2 = \frac{1}{2} (n^2 + 3n + 4)$$

