平成 18 年度　大阪大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3, \cdots$ とし，第 n 番目の点を A_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A_n の x 座標を求めよ．また，点 A_n において，曲線 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ は接していることを示せ．

(2) 線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y = x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

2 直線 $y = x$ を l で，直線 $y = -x$ を l' で表す．直線 $l,\ l'$ のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる．点 A を通る直線 m が 2 直線 $l,\ l'$ とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする．点 Q を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

を満たすようにとる．ただし，O は xy 平面の原点である．直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ．

3 x，y を変数とする．

(1) n を自然数とする．次の等式が成り立つように定数 a，b を定めよ．

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} = \frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,{}_n\mathrm{C}_r\,\frac{1}{x+r}$$

4 三角形 OAB の辺 OA，OB 上に，それぞれ点 P，Q をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad (0 < a < 1,\ 0 < b < 1)$$

とする．三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a，b を用いて表せ．また，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ．ただし，三角形 OPQ の辺上の点は，三角形 OPQ の内部に含まれないと考える．

5 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC，CD，DA，AB 上に，それぞれ点 P，Q，R，S を

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{QPC}, \quad \angle \mathrm{PQC} = \angle \mathrm{RQD}, \quad \angle \mathrm{QRD} = \angle \mathrm{SRA}$$

となるようにとる．ただし，点 P，Q，R，S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする．四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す．$f(t)$ の最大値を求めよ．

解答例

1 (1) $x>0$ において曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ の共有点の x 座標は

$$x\sin^2 x = x \quad \text{ゆえに} \quad x(\sin x-1)(\sin x+1)=0$$

したがって，点 A_n の x 座標を x_n とすると　$x_n=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$

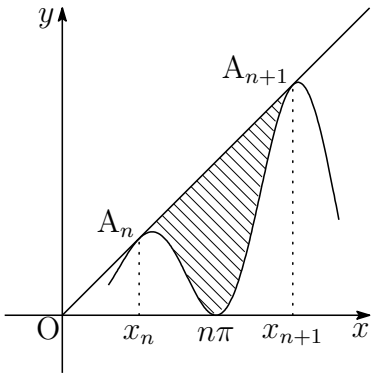
$f(x)=x\sin^2 x$ とおくと，$f'(x)=\sin^2 x+2x\sin x\cos x$ であるから

$$f(x_n)=x_n, \quad f'(x_n)=1$$

曲線 $y=x\sin^2 x$ は，直線 $y=x$ と点 A_n で接している．

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x\sin^2 x)\,dx \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cos 2x\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x\right]_{x_n}^{x_{n+1}} \end{aligned}$$



$x_n=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$，$x_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ より

$\sin 2x_n=\sin 2x_{n+1}=0$，$\cos 2x_n=\cos 2x_{n+1}=-1$ であるから

$$S=\frac{1}{4}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\right\}=\boldsymbol{\frac{n\pi^2}{2}}$$

■

2 直線 m 上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ は 2 直線 $l : y = x$，$l' : y = -x$ 上にないから

$$a^2 - b^2 \neq 0$$

(i) 直線 m の傾きを t とすると，その方程式は

$$y - b = t(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = tx - at + b \quad (t \neq \pm 1)$$

m と $l,\ l'$ との交点 P，P′ の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{at-b}{t-1},\ \frac{at-b}{t-1}\right), \quad \mathrm{P}'\left(\frac{at-b}{t+1}, -\frac{at-b}{t+1}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP'}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (x,\ y)$ とおくと

$$x = \frac{at-b}{t-1} + \frac{at-b}{t+1} - a = \frac{at^2 - 2bt + a}{t^2 - 1},$$
$$y = \frac{at-b}{t-1} - \frac{at-b}{t+1} - b = \frac{-bt^2 + 2at - b}{t^2 - 1}$$

上の 2 式から

$$x + y = \frac{(a-b)(t^2+2t+1)}{t^2-1} = \frac{(a-b)(t+1)}{t-1}$$
$$x - y = \frac{(a+b)(t^2-2t+1)}{t^2-1} = \frac{(a+b)(t-1)}{t+1}$$

したがって $\quad (x+y)(x-y) = (a+b)(a-b)$

すなわち $\qquad x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \quad \cdots (*)$

(ii) m が y 軸と平行であるとき，m と $l,\ l'$ の交点 P，P′ の座標は

$$\mathrm{P}(a,\ a), \quad \mathrm{P}'(a, -a)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP'}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a, -b)$ $\quad$ ゆえに $\quad \mathrm{Q}(a, -b)$

このとき，Q は曲線 $(*)$ 上にある．

(i), (ii) より，点 Q の軌跡は，$l,\ l'$ を漸近線とする双曲線

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2$$

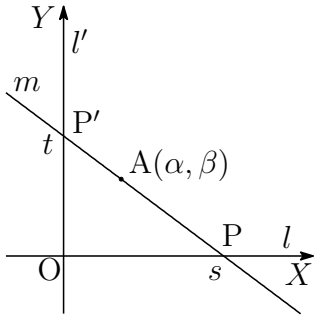
である．

別解 xy 系から XY 系への直交変換を

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

で定義すると　$x=X-Y,\quad y=X+Y$

ゆえに　$X=\dfrac{x+y}{2}$，$Y=\dfrac{-x+y}{2}$



XY 系において，$\mathrm{P}(s,\ 0)$，$\mathrm{P}'(0,\ t)$，$\mathrm{A}(\alpha,\ \beta)$ とおくと

$$\alpha=\frac{a+b}{2},\quad \beta=\frac{-a+b}{2}$$

直線 $\mathrm{PP}':\dfrac{X}{s}+\dfrac{Y}{t}=1$ 上に点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \beta)$ があるから

$$\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{t}=1\quad\text{ゆえに}\quad st-\beta s-\alpha t=0\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}'}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s-\alpha\\t-\beta\end{pmatrix}$$

したがって　　$XY=(s-\alpha)(t-\beta)=st-\beta s-\alpha t+\alpha\beta$

これに ① を代入すると

$$XY=\alpha\beta$$

上の点 Q の軌跡の方程式を xy 系で表すと

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{-x+y}{2}=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{-a+b}{2}\quad\text{すなわち}\quad x^2-y^2=a^2-b^2$$

点 P は $l,\ l'$ 上にないから，$a^2-b^2\neq 0$ である．よって，点 Q の表す軌跡は，$l,\ l'$ を漸近線とする直角双曲線である．

補足 なお，xy 系から XY 系への正規直交変換は次のように行う．

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{X}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

■

3 (1) $$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} = \frac{(y+n+1)-y}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)}$$
$$= \frac{1}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{-1}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

よって　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1}$

(2) 定数 a_r $(r=0,1,\cdots,n)$ を用いて次の部分分数式を考える.

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^{n} \frac{a_r}{x+r} \qquad (*)$$

整式 $f_r(x)$ を

$$f_r(x) = \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{x+r}$$

とおく. $(*)$ の両辺に $x(x+1)\cdots(x+n)$ を掛けると

$$n! = \sum_{r=0}^{n} a_r f_r(x)$$

上式に $x=-r$ を代入すると

$$n! = a_r f_r(-r) = a_r\cdot(-r)(-r+1)\cdots(-1)\times 1\cdot 2\cdots(n-r)$$
$$= a_r(-1)^r r!(n-r)!$$

したがって　$a_r = \dfrac{n!}{(-1)^r r!(n-r)!} = (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r$

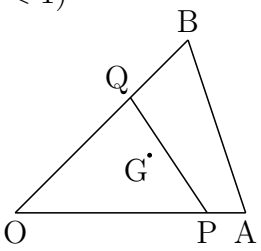
これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

■

4 (1) $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}=b\overrightarrow{OB}$ より $(0<a<1,\ 0<b<1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\\&=\frac{1}{3a}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3b}\overrightarrow{OQ}\end{aligned}$$



重心Gが△OPQの内部に含まれるための必要十分条件は

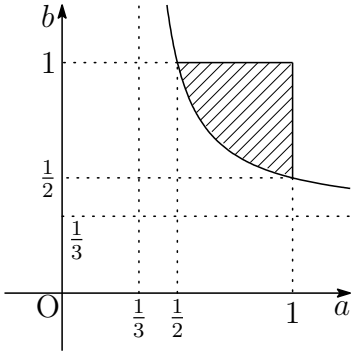
$$\frac{1}{3a}>0,\quad \frac{1}{3b}>0,\quad \frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}<1$$

したがって　　$0<a<1,\quad 0<b<1,\quad ab-\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{3}>0$

求める条件は

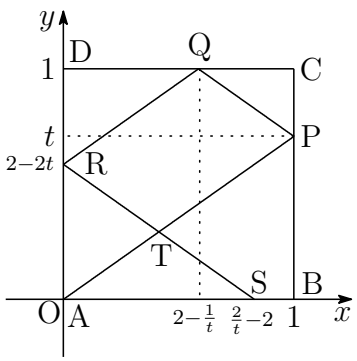
$$0<a<1,\quad 0<b<1,$$
$$\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)>\frac{1}{9}$$

よって，点 $(a,\ b)$ の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線は含まない．



■

5 (1) 正方形 ABCD を右の図のように座標平面上におくと，BP $= t$ より直線 AP の傾きは t で，直線 PQ は点 $(1,\ t)$ を通り傾き $-t$ の直線であるから



$$\mathrm{PQ} : y - t = -t(x-1)$$

直線 PQ と直線 CD との交点 Q は $\left(2-\dfrac{1}{t},\ 1\right)$

直線 QR は点 Q を通り傾き t の直線であるから

$$\mathrm{QR} : y - 1 = t\left(x - 2 + \frac{1}{t}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = tx + 2 - 2t$$

直線 RS は点 $\mathrm{R}(0,\ 2-2t)$ を通り，傾き $-t$ の直線であるから

$$\mathrm{RS} : y = -tx + 2 - 2t$$

直線 RS と直線 AB : $y = 0$ と交点 S は $\left(\dfrac{2}{t} - 2,\ 0\right)$

P，Q，R，S は，それぞれ両端を除く辺 BC，CD，DA，AB 上にあるから

$$0 < t < 1,\quad 2 - \frac{1}{t} < 1,\quad 0 < 2 - 2t < 1,\quad 0 < \frac{2}{t} - 2 < 1$$

これらを同時に満たす t の値の範囲は $\quad \boldsymbol{\dfrac{2}{3} < t < 1}$

(2) 四角形 PQRT は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \left(\frac{1-t}{t},\ 1-t\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{QR}} = \left(\frac{1-2t}{t},\ 2t-1\right)$$

t の値の範囲により $\quad f(t) = \left|\dfrac{1-t}{t}(2t-1) - (1-t)\cdot\dfrac{1-2t}{t}\right|$

$$= \frac{2(1-t)(2t-1)}{t} = 6 - 2\left(2t + \frac{1}{t}\right)$$

相加平均・相乗平均の大小関係により $\quad 2t + \dfrac{1}{t} \geqq 2\sqrt{2t\cdot\dfrac{1}{t}} = 2\sqrt{2}$

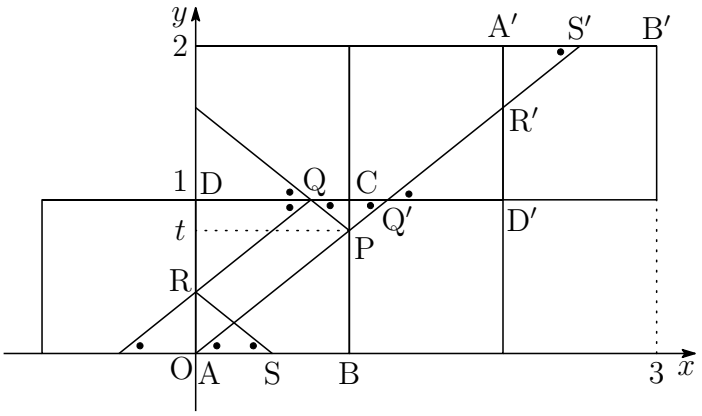
上式において，等号が成立するとき $\quad 2t = \dfrac{1}{t} \quad$ すなわち $\quad t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これは，(1) の結果を満たしている．

よって，求める最大値は $\quad f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6 - 2\cdot 2\sqrt{2} = \boldsymbol{6 - 4\sqrt{2}}$

解説　下の図において，

$$\triangle \mathrm{PCQ} \equiv \triangle \mathrm{PCQ}', \quad \triangle \mathrm{QDR} \equiv \triangle \mathrm{Q}'\mathrm{D}'\mathrm{R}', \quad \triangle \mathrm{RAS} \equiv \triangle \mathrm{R}'\mathrm{A}'\mathrm{S}'$$

(1) の条件を満たすとき，S′ は，両端を除く線分 A′B′ 上にあればよい．

よって　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3} < t < 1}$