平成17年度　大阪大学　2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 $f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく．直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる3点で交わるような実数 m の範囲を求めよ．

2 正の整数 n に対して

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p},\quad T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

とおく．等式 $S(n)=T(n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ．

3 空間内の4点A，B，C，Dが

$$\mathrm{AB}=1,\quad \mathrm{AC}=2,\quad \mathrm{AD}=3$$
$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ,\quad \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$$

をみたしている．この4点から等距離にある点をEとする．線分AEの長さを求めよ．

4 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ をみたす実数とする．時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x=t\cos\theta \\ y=1-t^2+t\sin\theta \end{cases}$$

で与えられるような動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える．t が実数全体を動くとき，点Pが描く曲線を C とする．C が x 軸の $x\geqq 0$ の部分と交わる点をQとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，Qの x 座標を求めよ．

(2) θ が変化すると曲線 C も変化する．θ が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲を変化するとき，C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ．

(3) θ が変化すると点Qも変化する．Qの x 座標が最大となるような θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ．

5 n を正の整数，a を正の実数とする．曲線 $y = x^n$ と曲線 $y = a\log x$ が，点 P で共通の接線をもつとする．ただし，対数は自然対数である．点 P の x 座標を t とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) a，t をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) 曲線 $y = x^n$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする．また，曲線 $y = a\log x$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ．

(3) $x \geqq 0$ のとき，不等式

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1 \leqq \frac{x^2}{2}$$

が成り立つことを，次の (a)，(b) に分けて示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

(a) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^{-x} + x - 1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ．

(b) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1$ が成り立つことを示せ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

解答例

1 直線 $y = mx$ と曲線 $y = 2x^3 + x^2 - 3$ の 2 式から y を消去すると

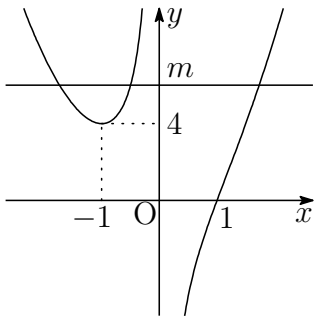
$$mx = 2x^3 + x^2 - 3$$

$x = 0$ はこの方程式の解ではないから，$x \neq 0$ より

$$m = 2x^2 + x - \frac{3}{x} \quad \cdots (*)$$

$g(x) = 2x^2 + x - \dfrac{3}{x}$ とおくと

$$g'(x) = 4x + 1 + \frac{3}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}(x+1)(4x^2 - 3x + 3)$$



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$g(x)$	↘	4	↗		↗

$$\lim_{x \to -0} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \to +0} g(x) = -\infty$$

方程式 $(*)$ が，異なる 3 つの実数解をもつ m の値の範囲を求めればよいから

$$\boldsymbol{m > 4}$$

■

2 n を正の整数とする 2 式

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p},\quad T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

について，等式 $S(n)=T(n)$ を (A) とする．

［1］$n=1$ のとき

$$S(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad T(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned}T(k+1)&=\sum_{q=1}^{k+1}\frac{1}{k+1+q}=\sum_{q=2}^{k+2}\frac{1}{k+q}\\&=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\\&=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\&=T(k)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\&=S(k)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\&=\sum_{p=1}^{2k}\frac{(-1)^{p-1}}{p}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\&=\sum_{p=1}^{2(k+1)}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=S(k+1)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，(A) が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

補足 $S(n)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$

$$\begin{aligned}&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}=T(n)\end{aligned}$$

■

3 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\vec{d}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくと

$$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=1\cdot1\cos60^\circ=\frac{1}{2},\quad \vec{b}\cdot\vec{d}=1\cdot1\cos90^\circ=0$$

E は 3 辺 AB，AC，AD の垂直二等分面上の点であるから

$$\vec{b}\cdot\left(\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=0,\quad \vec{c}\cdot\left(\vec{x}-\vec{c}\right)=0,\quad \vec{d}\cdot\left(\vec{x}-\frac{3}{2}\vec{d}\right)=0$$

ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{x}=\dfrac{1}{2},\quad \vec{c}\cdot\vec{x}=1,\quad \vec{d}\cdot\vec{x}=\dfrac{3}{2}$

$\vec{b}\perp\vec{d}$ より，$\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{b}-(\vec{c}\cdot\vec{d})\vec{d}=\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{d}$ は，$\vec{b}$，$\vec{d}$ と垂直である．

$$\begin{aligned}\left|\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2&=|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{d}\\&=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\left|\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{d}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，$\vec{f}=\sqrt{2}\left(\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{d}\right)$ とおくと，

$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{f}$ は，互いに垂直な単位ベクトルである．

$$\vec{f}\cdot\vec{x}=\sqrt{2}\left(\vec{c}\cdot\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{x}\right)=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)=0$$

$\vec{x}=(\vec{x}\cdot\vec{b})\vec{b}+(\vec{x}\cdot\vec{d})\vec{d}+(\vec{x}\cdot\vec{f})\vec{f}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{d}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AE}=|\vec{x}|&=\frac{1}{2}|\vec{b}+3\vec{d}|=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2+6\vec{b}\cdot\vec{d}+9|\vec{d}|^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1+6\cdot0+9}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}}\end{aligned}$$

■

4　(1)　$$(*)\begin{cases}x=t\cos\theta\\y=1-t^2+t\sin\theta\end{cases}$$

$(*)$ に $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ を代入すると　$x=\dfrac{t}{\sqrt{2}},\quad y=1-t^2+\dfrac{t}{\sqrt{2}}$

上の 2 式から t を消去すると

$$y=-2x^2+x+1\quad\text{ゆえに}\quad y=-(x-1)(2x+1)$$

求める点 Q の座標について，$y=0$，$x\geqq0$ であるから　$\boldsymbol{x=1}$

(2) (i) $\theta \neq \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$ のとき，$(*)$ の第 1 式から　$t = \dfrac{x}{\cos\theta}$

これを $(*)$ の第 2 式に代入すると　$y = -\dfrac{x^2}{\cos^2\theta} + x\tan\theta + 1$

$$y = -x^2(1 + \tan^2\theta) + x\tan\theta + 1$$

上式を $\tan\theta$ について整理すると

$$x^2\tan^2\theta - x\tan\theta + x^2 + y - 1 = 0 \qquad (**)$$

これを $\tan\theta$ に関する方程式とみると，その解は実数解をもつ．
$x \neq 0$ のとき，係数について

$$(-x)^2 - 4x^2(x^2 + y - 1) \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \leqq -x^2 + \frac{5}{4} \quad \cdots ①$$

$x = 0$ を $(**)$ に代入すると　$y = 1$

(ii) $\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$ のとき，$(*)$ より

$$x = 0, \quad y = -t^2 \pm t + 1 = -\left(t \mp \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \quad \text{(複号同順)}$$

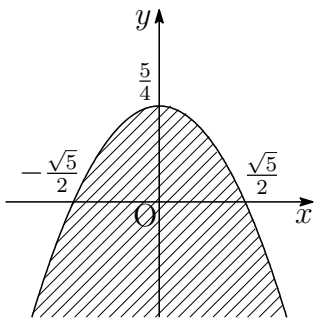
(i)，(ii) から

$x \neq 0$ のとき　　$y \leqq -x^2 + \dfrac{5}{4}$

$x = 0$ のとき　　$y \leqq \dfrac{5}{4}$

よって　　$y \leqq -x^2 + \dfrac{5}{4}$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．



(3) (2) の結果から，Q の x 座標が最大になるとき，$x = \dfrac{\sqrt{5}}{2},\ y = 0$ である．
これを $(**)$ に代入すると

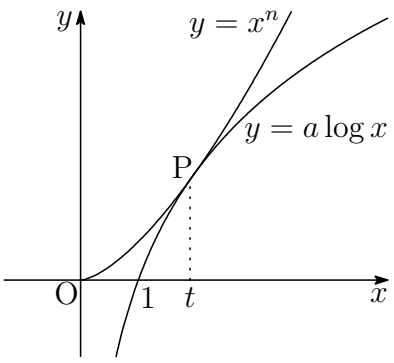
$$\frac{5}{4}\tan^2\theta - \frac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\sqrt{5}\tan\theta - 1)^2 = 0$$

よって　　$\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$ ■

5 (1) $y = x^n$ より　$y' = nx^{n-1}$

$y = a\log x$ より　$y' = \dfrac{a}{x}$

これらの 2 曲線が点 P で共通の接線をもつとき (P の x 座標は t)



$$(*)\quad t^n = a\log t,\quad nt^{n-1} = \frac{a}{t}$$

$(*)$ の第 2 式から　$t^n = \dfrac{a}{n}$　$\cdots$①

① を $(*)$ の第 1 式に代入すると　$\dfrac{a}{n} = a\log t$　$a > 0$ より　$t = e^{\frac{1}{n}}$　$\cdots$②

② を ① に代入して　$e = \dfrac{a}{n}$　よって　$\boldsymbol{a = ne,\ \ t = e^{\frac{1}{n}}}$

(2) S_1, S_2 は，上の図から

$$S_1 = \int_0^t x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\Big[\,x^{n+1}\,\Big]_0^t = \frac{t^{n+1}}{n+1},$$
$$S_2 = \int_1^t a\log x\,dx = a\Big[\,x\log x - x\,\Big]_1^t = a(t\log t - t + 1)$$

したがって

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{n+1}{t^{n+1}}\cdot a(t\log t - t + 1) = \frac{(n+1)a}{t^n}\left(\log t - 1 + \frac{1}{t}\right)$$
$$= \frac{(n+1)ne}{(e^{\frac{1}{n}})^n}\left(\frac{1}{n} - 1 + e^{-\frac{1}{n}}\right) = \boldsymbol{n(n+1)}\left(\boldsymbol{e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} - 1}\right)$$

(3) (a) $0 \leqq t \leqq x$ において，$1 - e^{-t} \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x (1 - e^{-t})\,dt = \Big[\,t + e^{-t}\,\Big]_0^x = e^{-x} + x - 1 \geqq 0$$

これから，$0 \leqq t \leqq x$ において，$e^{-t} + t - 1 \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x (e^{-t} + t - 1)\,dt = \left[-e^{-t} + \frac{t^2}{2} - t\,\right]_0^x$$
$$= -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + 1 \geqq 0 \qquad (**)$$

よって，$x \geqq 0$ のとき，$e^{-x} + x - 1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$

(b) (∗∗) より，$0 \leqq t \leqq x$ において，$-e^{-t} + \dfrac{t^2}{2} - t + 1 \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^x (-e^{-t} + \frac{t^2}{2} - t + 1)\, dt &= \left[\, e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t \,\right]_0^x \\ &= e^{-x} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 \geqq 0\end{aligned}$$

よって，$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1$

(4) (a)，(b) の結果から，$x \geqq 0$ のとき

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1 \leqq \frac{x^2}{2}$$

$x = \dfrac{1}{n}$ を上式に代入すると

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} \leqq e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} - 1 \leqq \frac{1}{2n^2}$$

上式の辺々に $n(n+1)$ を掛けることにより，(2) の結果は

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{6n^2} \leqq \frac{S_2}{S_1} \leqq \frac{n+1}{2n}$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{6n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

よって，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{1}{2}}$ ■