平成 15 年度　大阪大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 a を正の実数，$w = a(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$ とする．ただし i は虚数単位である．また，複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$，$z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定める．

(1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ．

(2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする．$1 \leqq n \leqq 17$ であるような n について，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ．

2 (1) $0 < t < 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$$

が成り立つことを示せ．

(2) k を正の定数とする．$a > 0$ とし，曲線 $C : y = e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える．このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ．

3 (1) $f(x)$ を x の整式とし，$\{a_k\}$ は $a_k < a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ および $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ をみたす数列とする．このとき

$$f(a_k) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots$$

ならば $f(x)$ は整式として 0 であることを示せ．

(2) $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ を x の整式とし

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x)\sin x + f_3(x)\sin 2x$$

はすべての実数 x に対して 0 であるとする．このとき $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることを示せ．

4 数列 $\{a_k\}$ が $a_k < a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ および

$$a_{k\ell} = a_k + a_\ell, \quad k = 1, 2, \cdots, \quad \ell = 1, 2, \cdots$$

をみたすとする．

(1) k, ℓ を 2 以上の自然数とする．自然数 n が与えられたとき

$$\ell^{m-1} \leqq k^n < \ell^m$$

をみたす自然数 m が存在することを示せ．

(2) k, ℓ を 2 以上の自然数とするとき

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a_2 = a$ とするとき，数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ．

5 (1) 平面上において座標軸に平行な主軸 (長軸，短軸) をもち，x 軸，y 軸の両方に接する楕円を考える．その中心の x 座標を a とする．このような楕円のうち点 A(1, 2) を通るものが存在するための a の範囲を求めよ．ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする．

(2) (1) の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して，その 2 つの楕円の中心を B，C とする．△ABC の面積を $S(a)$ で表すときこの関数のグラフをかけ．

解答例

1 (1) $z_1 = w$，$z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ より $(n = 1, 2, \cdots)$

$n \geqq 2$ のとき $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{z_{k+1}}{z_k} = \prod_{k=1}^{n-1} w^{2k+1}$ ゆえに $\displaystyle\frac{z_n}{z_1} = \prod_{k=1}^{n-1} w^{2k+1}$

したがって $\displaystyle z_n = w \prod_{k=1}^{n-1} w^{2k+1} = \prod_{k=0}^{n-1} w^{2k+1} = w^{n^2}$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから $z_n = w^{n^2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

$w = a(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$ より $z_n = a^{n^2} \{\cos(n^2 \cdot 5^\circ) + i \sin(n^2 \cdot 5^\circ)\}$

z_n が実数になるための必要十分条件は $n^2 \cdot 5^\circ$ が 180° の倍数，すなわち，n^2 が 36 の倍数であることである．

よって，z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数である．

(2) (1) の結果から

$$\arg z_{n+1} - \arg z_n = (n+1)^2 \cdot 5^\circ - n^2 \cdot 5^\circ = (2n+1) \cdot 5^\circ,$$
$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{a^{(n+1)^2}}{a^n} = a^{2n+1}$$

$1 \leqq n \leqq 17$ より $n = 15^\circ, 25^\circ, 35^\circ, \cdots, 175^\circ$

これから，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形であるとき

$$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} = (2n+1) \cdot 5^\circ = 45^\circ, \quad a^{2n+1} = 2^{\pm\frac{1}{2}}$$

上の第 1 式から $\boldsymbol{n = 4}$ これを第 2 式に代入して $\boldsymbol{a = 2^{\pm\frac{1}{18}}}$ ■

2 (1) $f(t)=-\dfrac{1-t}{1+t}-\dfrac{\log t}{2}=1-\dfrac{2}{1+t}-\dfrac{\log t}{2}$ とおくと

$$f'(t)=\frac{2}{(1+t)^2}-\frac{1}{2t}=-\frac{(1-t)^2}{2t(1+t)^2}<0$$

$f(t)$ は単調減少で，$f(1)=0$ であるから，$0<t<1$ において　$f(t)>0$

$$-\frac{1-t}{1+t}-\frac{\log t}{2}>0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\log t}{2}<-\frac{1-t}{1+t}$$

別解 $x>0$ において　$\dfrac{1}{2x}-\dfrac{2}{(1+x)^2}=\dfrac{(1-x)^2}{2x(1+x)^2}>0$

$0<t<1$ のとき　$\displaystyle\int_t^1\left\{\frac{1}{2x}-\frac{2}{(1+x)^2}\right\}dx=\left[\frac{\log x}{2}+\frac{2}{1+x}\right]_t^1$

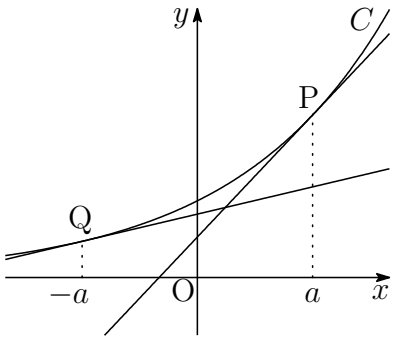
$$=-\frac{\log t}{2}-\frac{1-t}{1+t}>0$$

よって，$0<t<1$ において　$\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}$

(2) $C: y=e^{kx}$ より　$y'=ke^{kx}$

C 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ における接線の方程式は，それぞれ

$$y=ke^{ka}(x-a)+e^{ka},$$
$$y=ke^{-ka}(x+a)+e^{-ka}$$



これらの接線の交点の x 座標は

$$x=-\frac{1}{k}+\frac{a(e^{ka}+e^{-ka})}{e^{ka}-e^{-ka}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x}{a}=-\frac{1}{ka}+\frac{1+e^{-2ka}}{1-e^{-2ka}} \qquad (*)$$

$0<e^{-2ka}<1$ より $(k>0,\ a>0)$，(1) の結果に $t=e^{-2ka}$ を代入すると

$$\frac{\log e^{-2ka}}{2}<-\frac{1-e^{-2ka}}{1+e^{-2ka}} \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{ka}>-\frac{1+e^{-2ka}}{1-e^{-2ka}} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$\dfrac{x}{a}=-\dfrac{1}{ka}+\dfrac{1+e^{-2ka}}{1-e^{-2ka}}>0$

よって，C 上の 2 点 P，Q における 2 接線の交点の x 座標は正である．■

3 (1) 整式 $f(x)$ が，$a_k < a_{k+1}$，$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ を満たす数列 $\{a_k\}$ に対して

$$f(a_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が成立するから，$f(x)$ は，無数の因数

$$x - a_1,\ x - a_2,\ \cdots$$

をもつ．これは $f(x)$ の次数が有限であることに反する．
よって，$f(x)$ は整式として 0 である．

補足 定数 A を用いて $f(x) = A(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_k)\cdots$ であるから，$A \neq 0$ のとき，$f(x)$ の次数が有限であることに反する．

(2) $a_k = k\pi$ として $(k = 1, 2, \cdots)$，$x = a_k$ を $F(x) = 0$ に代入すると

$$f_1(a_k) = 0$$

したがって，(1) の結論により　$f_1(x) = 0$　$\cdots$①
① から

$$F(x) = f_2(x)\sin x + f_3(x)\sin 2x$$

とおき，$b_k = \dfrac{2k-1}{2}\pi$ として $(k = 1, 2, \cdots)$，$x = b_k$ を上式に代入すると

$$f_2(b_k) = 0$$

したがって，(1) の結論により　$f_2(x) = 0$　$\cdots$②

①，② から

$$F(x) = f_3(x)\sin 2x$$

とおき，$c_k = \dfrac{2k-1}{4}$ として $(k = 1, 2, \cdots)$，$x = c_k$ を上式に代入すると

$$f_3(c_k) = 0$$

したがって，(1) の結論により　$f_3(x) = 0$　$\cdots$③

①〜③ から　　$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0$　■

4 (1) 自然数の列 $1, 2, \cdots$ を，2 以上の自然数 ℓ を用いて

$$| 1,\ 2,\ \cdots,\ \ell-1 \mid \ell,\ \ell+1,\ \cdots,\ \ell^2-1 \mid \ell^2,\ \ell^2+1,\ \cdots,\ \ell^3-1 \mid \cdots$$

からなる群数列の第 i 群を $A_i = \{\ell^{i-1}, \ell^{i-1}+1, \cdots, \ell^i-1\}$ とおくと，任意の自然数 N に対し，$N \in A_j$ となる自然数 j が存在する．
したがって，自然数 k^n に対し，$k^n \in A_m$ となる自然数 m が存在し

$$\ell^{m-1} \leqq k^n \leqq \ell^m - 1 \quad \text{すなわち} \quad \ell^{m-1} \leqq k^n < \ell^m$$

(2) 漸化式 $a_{k\ell} = a_k + a_\ell$ に $k = \ell = 1$ を代入すると $(a_k < a_{k+1})$

$$a_1 = a_1 + a_1 \quad \text{ゆえに} \quad a_1 = 0,\ \ a_\ell > a_1 = 0 \quad (\ell = 2, 3, \cdots)$$

$k,\ \ell$ を 2 以上の自然数とすると，(1) の結果により

$$a_{\ell^{m-1}} \leqq a_{k^n} < a_{\ell^m} \quad \text{ゆえに} \quad (m-1)a_\ell \leqq n a_k < m a_\ell$$

辺々を na_ℓ で割ると $\quad \dfrac{m}{n} - \dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{a_k}{a_\ell} < \dfrac{m}{n} \quad \cdots ①$

また，(1) の結果から $\quad \log \ell^{m-1} \leqq \log k^n < \ell^m$

$$(m-1)\log \ell \leqq n \log k < m \log \ell \quad \text{ゆえに} \quad \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leqq \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{m}{n}$$

辺々に -1 を掛けると $\quad -\dfrac{m}{n} < -\dfrac{\log k}{\log \ell} \leqq -\dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{n} \quad \cdots ②$

①，② の辺々を加えると

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{1}{n}$$

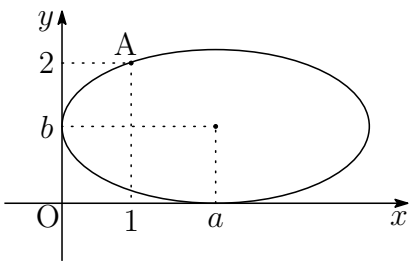
(3) (1) で示した定数 $k,\ \ell$ に対して，$n \to \infty$ とすると，(2) の結果からはさみうちの原理により

$$\frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_k}{\log k} = \frac{a_\ell}{\log \ell} \quad \text{すなわち} \quad a_k = a_l \log_\ell k$$

上式において，$\ell = 2$ とすると，$a_2 = a$ より $\quad a_k = a \log_2 k \quad \cdots (*)$

$(*)$ は $k = 1$ のときも成立するから $\quad \boldsymbol{a_k = a \log_2 k}$ ■

5 (1) 楕円の中心を $(a,\ b)$ とすると，x 軸，y 軸の両方に接する楕円の方程式は



$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$$

これが点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通るから

$$\frac{(1-a)^2}{a^2}+\frac{(2-b)^2}{b^2}=1$$

これを b について整理すると　　$(a-1)^2b^2-4a^2b+4a^2=0 \quad \cdots(*)$

b に関する 2 次方程式 $(*)$ の解 $b\ (\neq 0)$ をもつ条件を求めればよい．

(i) $a=1$ のとき，$(*)$ は解 $b=1$ をもつ (このとき円になる)．

(ii) $a\neq 0,\ 1$ のとき，$(*)$ の係数について

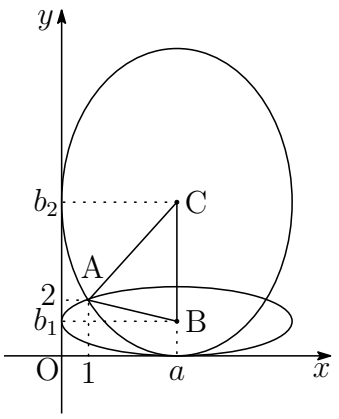
$$D/4=(-2a^2)^2-(a-1)^2\cdot 4a^2=4a^2(2a-1)\geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad a\geqq\frac{1}{2}$$

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{a\geqq\dfrac{1}{2}}$

別解 $\dfrac{(1-a)^2}{a^2}+\dfrac{(2-b)^2}{b^2}=1$ より　　$\dfrac{2a-1}{a^2}=\dfrac{(2-b)^2}{b^2}\geqq 0$

したがって　$2a-1\geqq 0$　これを解いて　$a\geqq\dfrac{1}{2}$

(2) (1) の結果から，楕円がちょうど 2 つ存在するとき，$a>\dfrac{1}{2}\ (a\neq 1)$ である．このとき，b に関する 2 次方程式 $(*)$ を解くと



$$b=\frac{2a^2\pm 2a\sqrt{2a-1}}{(a-1)^2}$$

これら 2 つの解を $b_1,\ b_2$ とすると $(b_1<b_2)$

$$b_2-b_1=\frac{4a\sqrt{2a-1}}{(a-1)^2}$$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{1}{2}|a-1|(b_2-b_1)=\frac{2a\sqrt{2a-1}}{|a-1|}$$

$\dfrac{1}{4}S(a)^2 = \dfrac{a^2(2a-1)}{(a-1)^2} = 2a+3+\dfrac{4}{a-1}+\dfrac{1}{(a-1)^2}$ の両辺を微分すると

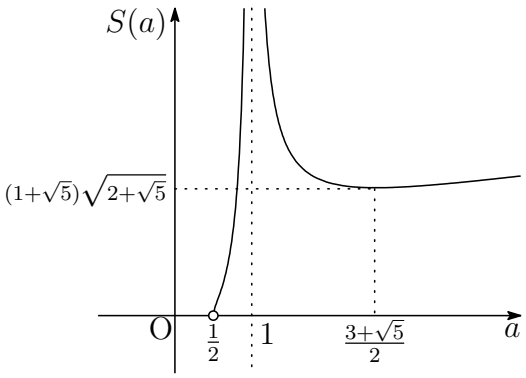
$$\frac{1}{2}S(a)S'(a) = 2-\frac{4}{(a-1)^2}-\frac{2}{(a-1)^3} = \frac{2a(a^2-3a+1)}{(a-1)^3}$$

$$S'(a) = \frac{4a(a^2-3a+1)}{(a-1)^3S(a)} = \frac{4a(a^2-3a+1)}{(a-1)|a-1|^2}\cdot\frac{|a-1|}{2a\sqrt{2a-1}}$$

$$= \frac{2(a^2-3a+1)}{(a-1)|a-1|\sqrt{2a-1}}$$

したがって，$S(a)$ の増減表は

a	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	(1)	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$S'(a)$		$+$		$-$	0	$+$
$S(a)$	(0)	↗		↘	極小	↗

$S\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = (1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}$，$\lim_{a\to 1} S(a) = \infty$，$\lim_{a\to\infty} S(a) = \infty$

よって，求める $S(a)$ のグラフの概形は，次のようになる．