平成 13 年度　大阪大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 2 つの複素数 $z = x + yi,\ w = u + vi$ ($x,\ y,\ u,\ v$ は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) に対し，$x \geqq u$ と $y \geqq v$ がともに成り立つとき，$z \gg w$ と書くことにする．

(1) 次の条件

$$z^2 \gg 3 \quad \text{かつ} \quad \overline{z} \gg -\frac{5}{\overline{z}}$$

をみたす複素数 z の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数とする．

(2) (1) で求めた範囲を z が動くとき，絶対値 $|\,z - 3i\,|$ の最小値，および最小値をあたえる z を求めよ．

2 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$ とおく．曲線 $y = f(x)$ に点 $(0,\ a)$ から接線がただひとつ引けるとし，しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする．このときの a の値を求めよ．

3 半径 1 の円周上に，$4n$ 個の点 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{4n-1}$ が，反時計回りに等間隔に並んでいるとする．ただし，n は自然数である．

(1) 線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k$ の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{4n-1}$ のうちの相異なる 3 点を頂点に持つ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ．

4 関数 $f(x) = 4\cos^2 x - 8\cos x + 3$ を考える．$n,\ k$ を自然数とし

$$g_n(k) = f\left(\frac{\pi}{3n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \cdots + f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく．ただし $n \geqq 2$ とする．

(1) n を固定する．$2 \leqq k \leqq 3n$ の範囲で $g_n(k-1) \geqq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ．また，k が $1 \leqq k \leqq 3n$ の範囲を動くとき，$g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ．

(2) (1) における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする．このとき極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{n}$$

を求めよ．

5 数列 $\{a_n\}$ において，各項 a_n が $a_n \geqq 0$ をみたし，かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ が成り立つとする．さらに各 n に対し

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$$
$$c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

とおく．

(1) すべての n に対し不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つことを，数学的帰納法で示せ．

(2) ある n について $b_{n+1} = c_{n+1}$ が成り立てば，$b_n = c_n$ となることを示せ．

(3) $b_3 = \dfrac{1}{2}$ となるとき，$c_3 = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．また $b_3 = \dfrac{1}{2}$ となる数列 $\{a_n\}$ は全部で何種類あるかを求めよ．

解答例

1 (1) $z=x+yi$ とおくと　$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi,$

$$\overline{z}=x-yi,$$

$$-\frac{5}{\overline{z}}=-\frac{5}{|z|^2}z=-\frac{5}{x^2+y^2}(x+yi)$$

$z\gg 3$ より

$$\begin{cases} x^2-y^2\geqq 3 \\ 2xy\geqq 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x^2-y^2\geqq 3 & \cdots① \\ xy\geqq 0 & \cdots② \end{cases}$$

$\overline{z}\gg -\dfrac{5}{\overline{z}}$ より

$$\begin{cases} x\geqq -\dfrac{5x}{x^2+y^2} \\ -y\geqq -\dfrac{5y}{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad (*)\begin{cases} \dfrac{x(x^2+y^2+5)}{x^2+y^2}\geqq 0 & \cdots③ \\ \dfrac{y(x^2+y^2-5)}{x^2+y^2}\leqq 0 & \cdots④ \end{cases}$$

$(*)$ より，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

(i) $x=0,\ y\neq 0$ のとき，① より　不適

(ii) $x\neq 0,\ y=0$ のとき，①，③ より，それぞれ

$$x^2\geqq 3,\quad x\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad x\geqq\sqrt{3},\ y=0$$

(iii) $xy\neq 0$ のとき，③ より　$x>0$　さらに ② より　$y>0$

これと ①，④ より

$$x>0,\quad y>0,\quad x^2-y^2\geqq 3,\quad x^2+y^2\leqq 5$$

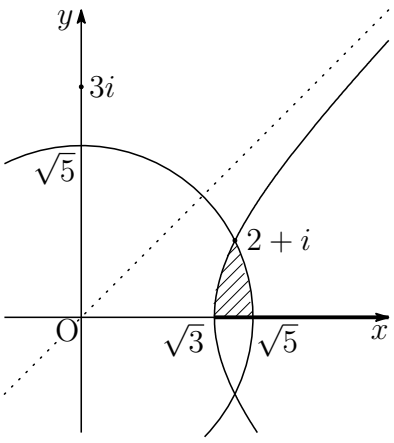
(ii)，(iii) から，求める領域は下の図の斜線部分 (境界線を含む) および $x\geqq\sqrt{3}$ を満たす x 軸上の点である．

(2) $z=x+yi$ とおく．このとき，

$$x=\sqrt{y^2+3}\ \ (0\leqq y\leqq 1)$$

を満たす点について調べればよいから

$$\begin{aligned} |\,z-3i\,|^2 &= x^2+(y-3)^2 \\ &= (y^2+3)+(y-3)^2 \\ &= 2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2} \end{aligned}$$



よって，$y=1$，すなわち，$\boldsymbol{z=2+i}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ をとる．　■

2 $f(x)=x^4+x^3-3x^2$ より　$f'(x)=4x^3+3x^2-6x$

$$f''(x)=12x^2+6x-6=6(x+1)(2x-1)$$

曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

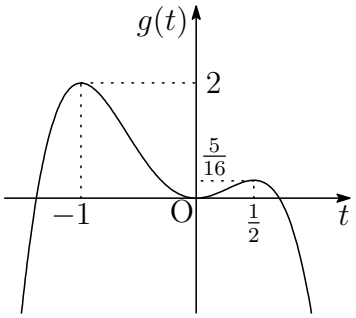
この接線が点 $(0,\ a)$ を通るから

$$a-f(t)=-tf'(t)\quad \text{ゆえに}\quad a=f(t)-tf'(t)$$

$g(t)=f(t)-tf'(t)$ とすると

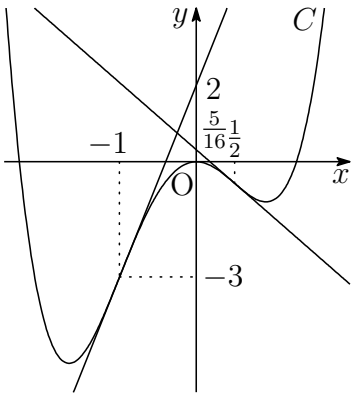
$$g'(t)=-tf''(t)=-6t(t+1)(2t-1)$$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	2	↘	0	↗	$\frac{5}{16}$	↘



よって，方程式 $g(t)=a$ がただ一つの実数解をもつ a の値は　$\boldsymbol{a=2}$

解説 点 $(0,\ 2)$ から曲線 $C:y=f(x)$ に引いた接線の接点は，曲線の変曲点である．
実際，$g'(t)=-tf''(t)$ より，変曲点において，$g(t)$ は極値をとる．
したがって，曲線に引ける接線の本数は，曲線の変曲点における接線と曲線で区分される領域で分類できる．



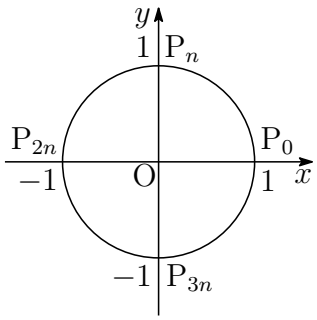
補足 3 次関数のグラフに引ける接線についても同様である [1]．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf (p.12 を参照)

3 (1) 座標平面上に $\mathrm{P}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_n(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_{2n}(-1,\ 0)$，$\mathrm{P}_{3n}(0,-1)$ をとると

$$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_n=\sqrt{2},\quad \mathrm{P}_0\mathrm{P}_{3n}=\sqrt{2}$$

よって　　$\boldsymbol{n\leqq k\leqq 3n}$



(2) 各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上であるとき，$4n$ 個の点 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{4n-1}$ の間が n 個以上離れているから，0 以上の整数 $i,\ j,\ k$ を用いて，3 頂点を

$$\mathrm{P}_i,\ \mathrm{P}_{i+(n+j)},\ \mathrm{P}_{i+(n+j)+(n+k)}\quad \text{すなわち}\quad \mathrm{P}_i,\ \mathrm{P}_{n+i+j},\ \mathrm{P}_{2n+i+j+k}$$

とおき (これらの点は法 $4n$ について同一とみなす)

$$(2n+i+j+k)-i\leqq 3n\quad \text{すなわち}\quad j+k\leqq n$$

を満たせばよい．これを満たす非負整数 $j,\ k$ の組合せは

$${}_3\mathrm{H}_n={}_{3+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$$

また，$i=0,1,\cdots 4n-1$ で，三角形の重複が 3 回であることから

$$g(n)=\frac{1}{2}(n+2)(n+1)\times 4n\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}n(n+1)(n+2)}$$

補足 自然数 n に対して，$j+k+l=n$ を満たす非負整数 $(j,\ k,\ l)$ の個数と $j+k\leqq n$ を満たす非負整数 $(j,\ k)$ の個数はともに重複組合せ ${}_3\mathrm{H}_n$ である．同様に，$j+k+l+m=n$ を満たす非負整数 $(j,\ k,\ l,\ m)$ の個数と $j+k+l\leqq n$ を満たす非負整数 $(j,\ k,\ l)$ の個数はともに

$${}_4\mathrm{H}_n={}_{4+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1)$$

■

4 (1) $n,\ k$ は自然数, $n \geqq 2,\ 2 \leqq k \leqq 3n$,

$g_n(k) = f\left(\dfrac{\pi}{3n}\right) + f\left(\dfrac{2\pi}{3n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{k\pi}{3n}\right)$ より

$$(*) \quad g_n(k) - g_n(k-1) = f\left(\frac{k\pi}{3n}\right), \quad \frac{2\pi}{3n} \leqq \frac{k\pi}{3n} \leqq \pi$$

$f(x) = 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = (2\cos x - 1)(2\cos x - 3)$ より，$(*)$ は

$$g_n(k) - g_n(k-1) = \left(2\cos\frac{k\pi}{3n} - 1\right)\left(2\cos\frac{k\pi}{3n} - 3\right)$$

このとき，$2\cos\dfrac{k\pi}{3n} - 3 < 0$ に注意して

$$g_n(1) > g_n(2) > \cdots > g_n(n-1) = g_n(n) < g_n(n+1) < \cdots < g_n(3n)$$

よって，$g_n(k)$ を最小にする k は　　$\boldsymbol{k = n-1,\ n}$

(2) $G_n = g_n(n-1) = g_n(n)$ であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{g_n(n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{3n}\right) \\
&= \int_0^1 f\left(\frac{\pi}{3}x\right)dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx \\
&= \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2 x - 8\cos x + 3)\,dx \\
&= \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos 2x - 8\cos x + 5)\,dx \\
&= \frac{3}{\pi}\Big[\ \sin 2x - 8\sin x + 5x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{5 - \frac{21}{2\pi}\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

■

5 (1) $a_n \geqq 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ に対し，$\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$$
$$c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

で定義されたとき　　$b_n \geqq c_n \quad \cdots(*)$

［1］$n=1$ のとき　$b_1 = 1-a_1$, $c_1 = 1-a_1$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立する，すなわち

$$\prod_{j=1}^{k}(1-a_j) \geqq 1-\sum_{j=1}^{k} a_j$$

であると仮定すると，$\{a_n\}$ の定義より $0 \leqq a_{k+1} \leqq \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\prod_{j=1}^{k+1}(1-a_j) \geqq (1-a_{k+1})\left(1-\sum_{j=1}^{k} a_j\right)$$
$$= 1-\sum_{j=1}^{k+1} a_j + a_{k+1}\sum_{j=1}^{k} a_j \geqq 1-\sum_{j=1}^{k+1} a_j$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成立する．

［1］, ［2］から，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

(2) $b_{n+1} = (1-a_{n+1})b_n$，$c_{n+1} = c_n - a_{n+1}$ であるから

$$b_{n+1}-c_{n+1} = (1-a_{n+1})b_n - (c_n - a_{n+1})$$
$$= b_n - c_n + a_{n+1}(1-b_n)$$

$\dfrac{1}{2} \leqq 1-a_n \leqq 1$ より，$b_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(1-a_j) \leqq 1$　ゆえに　$1-b_n \geqq 0$

上式および $(*)$ より　　$b_{n+1}-c_{n+1} \geqq b_n - c_n \geqq 0$

したがって，$b_{n+1} = c_{n+1}$，すなわち，$b_{n+1}-c_{n+1} = 0$ のとき

$$b_n - c_n = 0 \quad \text{よって} \quad b_n = c_n$$

(3) (前半) $b_3 = \dfrac{1}{2}$ のとき，(1) の結果から　$c_3 \leqq \dfrac{1}{2}$

$$c_3 = 1 - (a_1 + a_2 + a_3) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a_1 + a_2 + a_3 \geqq \frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

各項 a_n が $a_n \geqq 0$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ より　$a_1 + a_2 + a_3 \leqq \dfrac{1}{2}$　$\cdots ②$

①，② より　$a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{1}{2}$　$\cdots ③$

よって　$c_3 = 1 - (a_1 + a_2 + a_3) = \dfrac{1}{2}$

(後半) $b_3 = \dfrac{1}{2}$ のとき，(前半) の結果から，③ および $c_3 = \dfrac{1}{2}$ が成立する．

このとき　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ および ③ から　$a_n = 0$ $(n \geqq 4)$

$b_3 = c_3$ であるから，(2) の結果から　$b_2 = c_2$

$$(1 - a_1)(1 - a_2) = 1 - (a_1 + a_2) \quad \text{ゆえに} \quad a_1 a_2 = 0$$

したがって　$a_1 = 0$　または　$a_2 = 0$

$b_3 = \dfrac{1}{2}$ および ③ より

$$(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3) = \frac{1}{2}, \quad a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} \qquad (**)$$

(i) $a_1 = 0$ を $(**)$ に代入すると

$$(1 - a_2)(1 - a_3) = \frac{1}{2}, \quad a_2 + a_3 = \frac{1}{2}$$

すなわち　$a_2 + a_3 = \dfrac{1}{2}$，$a_2 a_3 = 0$

これを解いて　$(a_2,\ a_3) = \left(\dfrac{1}{2},\ 0\right),\ \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

(ii) $a_2 = 0$ を $(**)$ に代入すると

$$(1 - a_1)(1 - a_3) = \frac{1}{2}, \quad a_1 + a_3 = \frac{1}{2}$$

これを解いて　$(a_1,\ a_3) = \left(\dfrac{1}{2},\ 0\right),\ \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

(i)，(ii) より　$(a_1,\ a_2,\ a_3) = \left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right),\ \left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right),\ \left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

よって，$\{a_n\}$ は全部で **3 種類**ある．　■