

令和7年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
 文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B・C

問題 1 2 3

- 1 平面上の三角形 OAB を考える. $\angle AOB$ は鋭角, $OA = 3$, $OB = t$ とする. また, 点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし, $OC = 1$ とする. 線分 AB を $2:1$ に内分する点を P, 点 A から直線 OP に下した垂線と直線 OB との交点を R とする.

- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を t を用いて表せ.
- (2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ.
- (3) 線分 OB の中点を M とする. 点 R が線分 MB 上にあるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.

- 2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 正の整数 k, ℓ に対して

$$\frac{k}{k+\ell-1} a_{k+1} a_\ell + \frac{\ell}{k+\ell-1} a_k a_{\ell+1} = a_k a_\ell$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} = 1$$

が成り立つことを示せ.

- 3 座標平面において, $y = x^2 - 1$ で表される放物線を C とする. C 上の点 P における C の接線を ℓ とする. ただし, 点 P は y 軸上にはないものとする. O を原点とし, 放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S , 放物線 C と接線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする. $S - T$ の最大値を求めよ.

- 2 (1) 与えられた漸化式より $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n-1}{2n}$

$$\frac{k}{k+\ell-1}a_{k+1}a_\ell + \frac{\ell}{k+\ell-1}a_k a_{\ell+1} = a_k a_\ell \quad (*)$$

$$\iff \frac{k}{k+\ell-1} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} + \frac{\ell}{k+\ell-1} \cdot \frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} = 1 \quad (A)$$

(A) が成り立つことを示せばよい.

$$\begin{aligned} (A) \text{ の左辺} &= \frac{k}{k+\ell-1} \cdot \frac{2k-1}{2k} + \frac{\ell}{k+\ell-1} \cdot \frac{2\ell-1}{2\ell} \\ &= \frac{1}{k+\ell-1} \cdot \frac{2k-1}{2} + \frac{1}{k+\ell-1} \cdot \frac{2\ell-1}{2} \\ &= \frac{(2k-1) + (2\ell-1)}{2(k+\ell-1)} = 1 \end{aligned}$$

よって, 正の整数 k, ℓ について, $(*)$ が成立する.

- (2) $(*)$ に $\ell = m - k + 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_k a_{m-k+1} &= \frac{k}{m} a_{k+1} a_{m-k+1} + \frac{m-k+1}{m} a_k a_{m-k+2} \\ &= \frac{1}{m} \{k a_{k+1} a_{m-k+1} - (k-1) a_k a_{m-(k-1)+1}\} + a_k a_{m-(k-1)+1} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \{k a_{k+1} a_{m-k+1} - (k-1) a_k a_{m-(k-1)+1}\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m a_k a_{m-(k-1)+1} \\ &= a_{m+1} a_1 + \sum_{k=1}^m a_k a_{m-(k-1)+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} a_k a_{m-(k-1)+1} = \sum_{k=1}^{m+1} a_k a_{(m+1)-k+1} \end{aligned}$$

したがって, 自然数 m の値に関係なく, $\sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1}$ は定数である.

$$\sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} = \sum_{k=1}^1 a_k a_{1-k+1} = a_1^2 = 1^2 = 1$$

■

- 3** (1) $C: y = x^2 - 1$ 上の点 $P(t, t^2 - 1)$ における接線 ℓ の方程式は、 $y' = 2x$ より

$$y - (t^2 - 1) = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2 - 1$$

C は y 軸に関して対称であるから、 $t > 0$ について考える。

$$S + T = \frac{1}{2}t(t^2 + 1),$$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^t \{(x^2 - 1) - (2tx - t^2 - 1)\} dx = \int_0^t (x - t)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - t)^3 \right]_0^t = \frac{t^3}{3} \end{aligned}$$

$f(t) = S - T$ とすると

$$f(t) = (S + T) - 2T = \frac{1}{2}t(t^2 + 1) - 2 \cdot \frac{t^3}{3} = -\frac{t^3}{6} + \frac{t}{2},$$

$$f'(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(t + 1)(t - 1)$$

t	(0)	...	1	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	極大	↘

よって 最大値 $f(1) = \frac{1}{3}$

