令和６年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 曲線 $y=|x^2-1|$ を C，直線 $y=2a(x+1)$ を ℓ とする．ただし，a は $0<a<1$ を満たす実数とする．

(1) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ．

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標空間内の直線 ℓ と z 軸はねじれの位置にあるとする．ℓ と z の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 素数を小さい順に並べて得られる数列を

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

とする．

(1) p_{15} の値を求めよ．

(2) $n \geqq 12$ のとき，不等式 $p_n>3n$ が成り立つことを示せ．

解答例

1 (1) 曲線 C は $y = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & (x \leqq -1,\ 1 \leqq x) \\ -x^2+1 & (-1 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$

C と $\ell : y = 2a(x+1)$ の共有点は，次の (i)，(ii) の場合に分けて求める．

(i) 曲線 $y = x^2-1$ と直線 ℓ の共有点の共有点の x 座標は

$$x^2-1 = 2a(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-1-2a) = 0$$

$0 < a < 1$ より，$1 < 1+2a$ に注意して　$x = -1,\ 1+2a$

(ii) 曲線 $y = -x^2+1$ と直線 ℓ の共有点の共有点の x 座標は

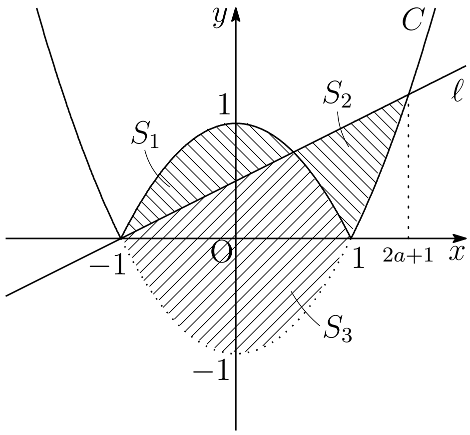
$$-x^2+1 = 2a(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-1+2a) = 0$$

$0 < a < 1$ より，$-1 < 1-2a < 1$ に注意して　$x = -1,\ 1-2a$

求める共有点の座標は (i)，(ii) の結果を ℓ に代入して

$$\boldsymbol{(-1,\ 0),\ (1+2a,\ 4a(1+a)),\ (1-2a,\ 4a(1-a))}$$

(2) 下の図のように，それぞれの斜線部分の面積を S_1，S_2，S_3 とする．



$S_1 = S_2$ であるから，$S_1 + S_3 = S_2 + S_3$ を利用する．

$$S_1 + S_3 = 2 \times \frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3 = \frac{8}{3},$$
$$S_2 + S_3 = \frac{1}{6}\{(2a+1)-(-1)\}^3 = \frac{4}{3}(a+1)^3$$

したがって　$\dfrac{4}{3}(a+1)^3 = \dfrac{8}{3}$　これを解いて　$\boldsymbol{a = \sqrt[3]{2} - 1}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ 直線 ℓ と z 軸の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とする．ℓ と z 軸は平行ではないから，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}$ とし，直線 ℓ および z 軸上の定点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{n})$，$\mathrm{B}(\beta\vec{n})$ とする．

ℓ を含み，$\vec{n}$ に平行な平面 S のベクトル方程式は，媒介変数 s_1，s_2 を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s_1\vec{a}+s_2\vec{n} &= \alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{n}+s_1\vec{a}+s_2\vec{n}\\ &= (s_1+\alpha_1)\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+(s_2+\alpha_3)\vec{n}\end{aligned}$$

z 軸を含み，$\vec{n}$ に平行な平面 T のベクトル方程式は，媒介変数 t_1，t_2 を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t_1\vec{b}+t_2\vec{n} &= \beta\vec{n}+t_1\vec{b}+t_2\vec{n}\\ &= t_1\vec{b}+(t_2+\beta)\vec{n}\end{aligned}$$

S と T の共通部分は

$$(s_1+\alpha_1)\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+(s_2+\alpha_3)\vec{n}=t_1\vec{b}+(t_2+\beta)\vec{n} \qquad (*)$$

これを整理すると

$$(s_1+\alpha_1)\vec{a}+(-t_1+\alpha_2)\vec{b}+(s_2-t_2+\alpha_3-\beta)\vec{n}=\vec{0}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ は，1 次独立であるから

$$s_1+\alpha_1=0, \quad -t_1+\alpha_2=0, \quad s_2-t_2+\alpha_3-\beta=0$$

上の第 1 式，第 2 式から

$$s_1=-\alpha_1, \quad t_1=\alpha_2$$

このとき，直線 ℓ および z 軸上の 2 定点 P，Q をそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s_1\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t_1\vec{b}$$

とおくと，2 平面 S, T の共通部分は，$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s_2\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t_2\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s_2-t_2)\vec{n}$$

よって，直線 ℓ および z 軸の両方に直交する直線 PQ がただ 1 つ存在する． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) k を 0 以上整数とすると，整数

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5$$

について，素数を調べると

$k=0$ のとき，素数は $6k+2=2,\ 6k+3=3,\ 6k+5=5$

$k \geqq 1$ のとき，素数は $6k+1,\ 6k+5$ のどちらかである．

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
$6k+1$	7	13	19		31	37	43			61	67	$\cdots$
$6k+5$	11	17	23	29		41	47	53	59		71	$\cdots$

したがって

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_k	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47

よって　$\boldsymbol{p_{15}=47}$

(2) (1) の表から，$p_{12}=37>3\cdot12$，$p_{13}=41>3\cdot13$

$a_{2k}=6k+1$，$a_{2k+1}=6k+5$ とすると $(k \geqq 6)$

$$a_{2k}=6k+1>3\cdot2k,\quad a_{2k+1}=6k+5>3(2k+1)$$

したがって　$a_n>3n$　$(n \geqq 12)$

$n \geqq 12$ のとき，$p_n \geqq a_n$ であるから　$p_n>3n$　■