令和５年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 $a,\ b$ を実数とする．θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$$

が実数解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

2 正の実数 $a,\ x$ に対して，

$$y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$$

とする．

(1) $t = \log_2 x$ とするとき，y を $a,\ t$ を用いて表せ．

(2) x が $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ の範囲を動くとき，y の最大値 M を a を用いて表せ．

3 平面上の 3 点 O，A，B が

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする．

(1) $(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ．

(2) 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})| \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \leqq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $\cos 2\theta = a\sin\theta + b$ より　　$2\sin^2\theta + a\sin\theta + b - 1 = 0$　$\cdots(*)$

$f(t) = 2t^2 + at + b - 1$ とおくと　$f(t) = 2\left(t + \dfrac{a}{4}\right)^2 - \dfrac{a^2}{8} + b - 1$

$(*)$ が実数解をもつことは，$f(t) = 0$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ に解をもつことである．

したがって，次の (i) または (ii) を満たす場合である．

(i) $f(t) = 0$ の解の 1 つだけが $-1 \leqq t \leqq 1$，すなわち，$f(1)f(-1) \leqq 0$ のとき

$$(a + b + 1)(-a + b + 1) \leqq 0$$

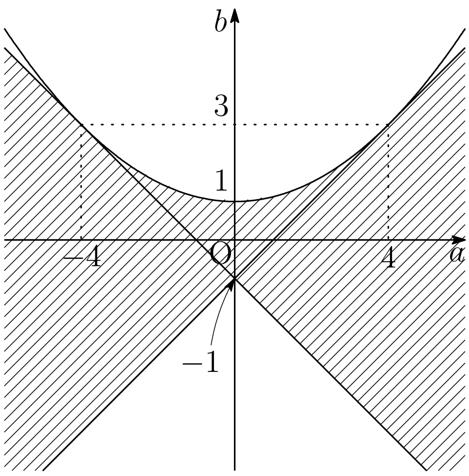
(ii) $f(t) = 0$ の解がともに $-1 \leqq t \leqq 1$ であるとき

$$-1 \leqq -\frac{a}{4} \leqq 1, \quad -\frac{a^2}{8} + b - 1 \leqq 0, \quad f(1) \geqq 0, \quad f(-1) \geqq 0$$

すなわち

$$-4 \leqq a \leqq 4, \quad b \leqq \frac{a^2}{8} + 1, \quad a + b + 1 \geqq 0, \quad -a + b + 1 \geqq 0$$

よって，点 $(a,\ b)$ の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=(\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$ より

$$\begin{aligned} y &= (-\log_2 x)^3 + a(2\log_2 x)\left(\frac{3}{2}\log_2 x\right) \\ &= -(\log_2 x)^3 + 3a(\log_2 x)^2 \end{aligned}$$

$t=\log_2 x$ とすると　　$\boldsymbol{y=-t^3+3at^2}$

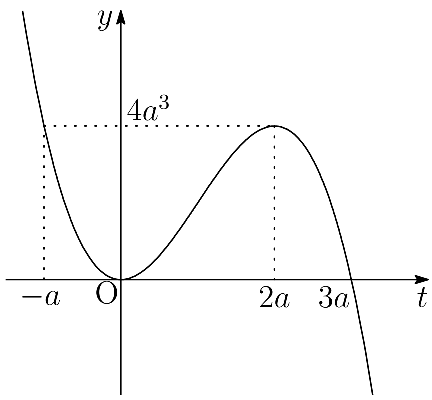
(2) $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ のとき，$-1 \leqq t \leqq 3$ であるから

$$f(t) = -t^3 + 3at^2 \quad (-1 \leqq t \leqq 3)$$

とおくと，$f'(t) = -3t^2 + 6at = -3t(t-2a)$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$

$f(-a)=f(2a)$ に注意すると，$y=f(t)$ のグラフは次のようになる．



(i) $-1 \leqq -a$，すなわち，$0 < a \leqq 1$ のとき　$M=f(-1)$

(ii) $-a \leqq -1$，$2a \leqq 3$，すなわち，$1 \leqq a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき　$M=f(2a)$

(iii) $3 \leqq 2a$，すなわち，$\dfrac{3}{2} \leqq a$ のとき　$M=\max\{f(-1),\ f(3)\}$

$$f(3)-f(-1) = (27a-27)-(3a+1) = 24a-28 = 24\left(a-\frac{7}{6}\right) > 0$$

(i)〜(iii) より　　$\boldsymbol{M} = \begin{cases} \boldsymbol{3a+1} & \boldsymbol{(0 < a \leqq 1)} \\ \boldsymbol{4a^3} & \left(\boldsymbol{1 \leqq a < \dfrac{3}{2}}\right) \\ \boldsymbol{27a-27} & \left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2} \leqq a}\right) \end{cases}$ ■

3 (1)

$$(*)\begin{cases} |2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1 \\ (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{v}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}\vec{u}+\dfrac{1}{3}\vec{v}$

これらを $(*)$ に代入すると　$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$

$$\vec{u}\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}\right)=\frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

よって　$(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\mathbf{0}$

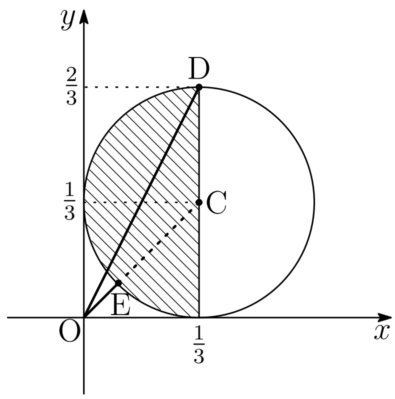
(2) 与えられた条件から

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}\right)\right| \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u} \leqq \frac{1}{3}$$

(1) の結果から，$\vec{u}=(1,\ 0)$，$\vec{v}=(0,\ 1)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とおくと

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 \leqq \frac{1}{9} \quad \text{かつ} \quad x \leqq \frac{1}{3}$$

点 P の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



上の図において　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|-|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}}$ ■