令和４年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 三角形 ABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を M，辺 AC を 1 : 2 に内分する点を N とする．また，線分 BN と線分 CM の交点を P とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) 辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とするとき，線分 AP の長さを，$a,\ b,\ c$ を用いて表せ．

2 n を 2 以上の自然数とし，1 個のさいころを n 回投げて出る目の数を順に $X_1,\ X_2, \cdots, X_n$ とする．$X_1,\ X_2, \cdots, X_n$ の最小公倍数を L_n，最大公約数を G_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $L_2 = 5$ となる確率および $G_2 = 5$ となる確率を求めよ．

(2) L_n が素数でない確率を求めよ．

(3) G_n が素数でない確率を求めよ．

3 以下の問いに答えよ．

(1) 実数 $\alpha,\ \beta$ に対し，

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$$

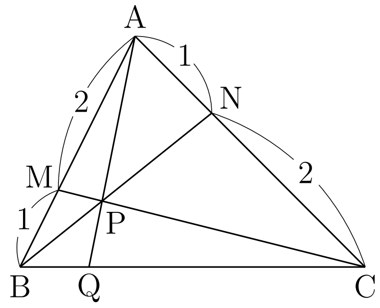
が成り立つことを示せ．

(2) $a,\ b$ を $b > a^2$ を満たす定数とし，座標平面上に点 A$(a,\ b)$ をとる．さらに，点 A を通り，傾きが k の直線を ℓ とし，直線 ℓ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積を $S(k)$ とする．k が実数全体を動くとき，$S(k)$ の最小値を求めよ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{2}x\overrightarrow{\mathrm{AM}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3y\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

P は MC および BN 上の点であるから

$$\frac{3}{2}x+y=1,\quad x+3y=1 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{4}{7},\ y=\frac{1}{7}$$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

別解 直線 AP と辺 BC の交点を Q とする．チェバの定理により

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{2}{1}=1 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=1:4$$

$\triangle$ABQ および直線 MC について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CQ}}\cdot\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AP}}=1 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=5:2$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\quad |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

ゆえに $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2)$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2&=\frac{1}{49}(16|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+8\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\frac{1}{49}\left\{16|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+8\cdot\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2)\right\}\\&=\frac{1}{49}(20|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+5|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-4|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2)=\frac{1}{49}(20c^2+5b^2-4a^2)\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{\mathrm{AP}=\dfrac{1}{7}\sqrt{20c^2+5b^2-4a^2}}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $L_2=5$ となるとき　$(X_1,\ X_2)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5)$

よって，$L_2=5$ となる確率は　$\dfrac{3}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{12}}$

$G_2=5$ となるとき　$(X_1,\ X_2)=(5,\ 5)$

よって，$G_2=5$ となる確率は　$\dfrac{1}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2) L_n が素数であるのは，$L_n=2,\ 3,\ 5$ のときである．

$L_n=2$ となるのは，$X=\{X_1,\ X_2,\cdots,X_n\}$ とすると，$X\subset\{1,\ 2\}$ で $X=\{1\}$ の場合を除くから，その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$L_n=3,\ 5$ の場合もこれと等しい．求める確率はこれらの余事象の確率であるから

$$1-3\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\boldsymbol{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

(3) G_n が素数であるのは，$G_n=2,\ 3,\ 5$ のときである．

$G_n=2$ となるのは，$X=\{X_1,\ X_2,\cdots,X_n\}$ とすると，$X\subset\{2,\ 4,\ 6\}$ で，$X=\{4\}$ と $X=\{6\}$ の場合を除くから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$G_n=3$ となるのは，$X=\{X_1,\ X_2,\cdots,X_n\}$ とすると，$X\subset\{3,\ 6\}$ で，$X=\{6\}$ の場合を除くから，その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$G_n=5$ となるのは，$X=\{X_1,\ X_2,\cdots,X_n\}$ とすると，$X\subset\{5\}$ の場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

G_n が素数となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

この余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha) \\ &= \frac{1}{6}(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3)=\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\,dx \\ &= \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}=\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}\end{aligned}$$

(2) 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り，傾き k の直線 ℓ の方程式は

$$y-b=k(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=kx-ka+b$$

ℓ と放物線 $y=x^2$ の方程式から y を消去すると

$$x^2=kx-ka+b \quad \text{ゆえに} \quad x^2-kx+ka-b=0 \qquad (*)$$

これを解くと　$x=\dfrac{k\pm\sqrt{D}}{2}$　$\cdots$①

ただし　$D=k^2-4(ka-b)=(k-2a)^2+4(b-a^2)$　$\cdots$②

条件から，$b>a^2$ なので　$D>0$

したがって，① の 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha<\beta)$

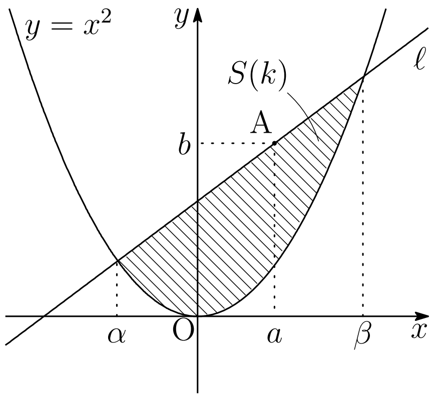
$$\beta-\alpha=\sqrt{D}=\sqrt{(k-2a)^2+4(b-a^2)} \qquad (**)$$

$(*)$ より，2 次方程式 $x^2 - kx + ka - b = 0$ の解が $\alpha,\ \beta$ であるから

$$
\begin{aligned}
S(k) &= \int_{\alpha}^{\beta} (kx - ka + b - x^2)\,dx \\
&= -\int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - kx + ka - b)\,dx \\
&= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{(\alpha-\beta)^3}{6} = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}
\end{aligned}
$$

$S(k)$ が最小となるとき，$(**)$ より，$k = 2a$ であるから，$S(k)$ の最小値は

$$
S(2a) = \frac{\{\sqrt{4(b-a^2)}\}^3}{6} = \boldsymbol{\frac{4}{3}(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}
$$



補足 $S(k)$ が最小となるとき，ℓ の傾き k は $\alpha,\ \beta$ の中央 $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ における $y = x^2$ の接線の傾きと等しい． ■