令和３年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 a を実数とする．C を放物線 $y=x^2$ とする．

(1) 点 $\mathrm{A}(a,-1)$ を通るような C の接線は，ちょうど 2 本存在することを示せ．

(2) 点 $\mathrm{A}(a,-1)$ から C に 2 本の接線を引き，その接点を P，Q とする．直線 PQ の方程式は $y=2ax+1$ であることを示せ．

(3) 点 $\mathrm{A}(a,-1)$ と直線 $y=2ax+1$ の距離を L とする．a が実数全体を動くとき，L の最小値とそのときの a の値を求めよ．

2 空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある．s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ をみたす実数とする．線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0，線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．さらに 4 点 A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあるとする．

(1) t を s を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=60^\circ$，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ．

3 整数 a，b，c に関する次の条件 $(*)$ を考える．

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots (*)$$

(1) 整数 a，b，c が $(*)$ および $a\neq b$ をみたすとき，c^2 を a，b を用いて表せ．

(2) $c=3$ のとき，$(*)$ および $a<b$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(3) 整数 a，b，c が $(*)$ および $a\neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ．

解答例

1 (1) $y=x^2$ より，$y'=2x$ であるから，曲線 $C: y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=2tx-t^2$$

これが点 $\mathrm{A}(a,-1)$ を通るとき

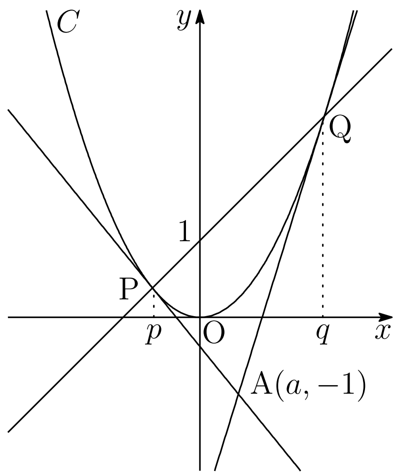
$$-1=2ta-t^2 \quad \text{ゆえに} \quad t^2-2at-1=0 \quad \cdots(*)$$

t に関する 2 次方程式 $(*)$ の判別式は

$$D/4=(-a)^2-1\cdot(-1)=a^2+1>0$$

したがって，2 次方程式 $(*)$ は異なる 2 つの実数解をもつ，すなわち，$\mathrm{A}(a,-1)$ を通る C の接線は，ちょうど 2 本存在する．

(2) 接点 P，Q の x 座標をそれぞれ $p,\ q$ とおくと，2 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係により



$$p+q=2a, \quad pq=-1 \quad \cdots(**)$$

2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ を通る直線は

$$y-p^2=\frac{q^2-p^2}{q-p}(x-p)$$

整理すると　$y=(p+q)x-pq$

$(**)$ より　$y=2ax+1$

(3) 点 $\mathrm{A}(a,-1)$ と直線 $2ax-y+1=0$ の距離 L は

$$L=\frac{|2a\cdot a-(-1)+1|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}=\frac{2(a^2+1)}{\sqrt{4a^2+1}}=\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{a^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}}=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}}\geqq 2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

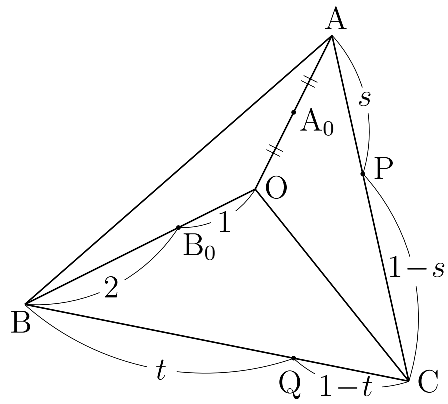
等号が成立するとき　$\sqrt{a^2+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}}$

$$a^2+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

このとき，L の最小値は　$\boldsymbol{\sqrt{3}}$　■

2 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $(0<s<1)$



$$\vec{p}-\vec{a}=s(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\vec{a})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(1-\dfrac{1}{s}\right)\vec{a}+\dfrac{1}{s}\vec{p}$

点 Q は線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(1-t)\vec{b}+t\left\{\left(1-\frac{1}{s}\right)\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{p}\right\}\\&=t\left(1-\frac{1}{s}\right)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\frac{t}{s}\vec{p}\end{aligned}$$

$\vec{a}=2\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2t\left(1-\frac{1}{s}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}+\frac{t}{s}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

点 Q は平面 $\mathrm{A_0B_0P}$ 上の点であるから

$$2t\left(1-\frac{1}{s}\right)+3(1-t)+\frac{t}{s}=1\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{t=\frac{2s}{s+1}}$$

(2) 条件から　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=1\cdot2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 90^\circ=0,\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\vec{p}=s\vec{c}+(1-s)\vec{a}$，$\vec{q}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ について

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=\{s\vec{c}+(1-s)\vec{a}\}\cdot\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}\\&=s(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+st|\vec{c}|^2+(1-s)(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-s)t\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=4st-(1-s)(1-t)+(1-s)t\\&=2t(s+1)+s-1\end{aligned}$$

(1) の結果および，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ より $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ であるから

$$2\cdot\frac{2s}{s+1}(s+1)+s-1=0\quad\text{これを解いて}\quad \boldsymbol{s=\frac{1}{5}}$$

■

3 (1) $\displaystyle\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots(*)$

$(*)$ より $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx + b\int_a^c x\,dx - a\int_b^c x\,dx = 0$

$$\frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{b}{2}(c^2-a^2)-\frac{a}{2}(c^2-b^2)=0$$
$$\frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{c^2}{2}(b-a)+\frac{ab}{2}(b-a)=0$$

$a \neq b$ であるから $2(a^2+ab+b^2)+3c^2+3ab=0$

したがって $\boldsymbol{c^2 = -\frac{1}{3}(2a+b)(a+2b)} \quad \cdots①$

(2) ① から $2a+b \equiv 0$ または $a+2b \equiv 0 \pmod 3$

$(2a+b)+(a+2b)=3(a+b)$ であるから

$$2a+b \equiv 0,\quad a+2b \equiv 0 \pmod 3$$

① より $\displaystyle\frac{2a+b}{3}\cdot\frac{a+2b}{3} = -\frac{c^2}{3} \quad \cdots①'$

$\displaystyle\frac{2a+b}{3},\ \frac{a+2b}{3}$ は，ともに整数である．

$c=3$ を ①$'$ に代入すると $\displaystyle\frac{2a+b}{3}\cdot\frac{a+2b}{3} = -3$

$$\frac{a+2b}{3}-\frac{2a+b}{3}=\frac{b-a}{3}>0$$

に注意すると

$$\begin{cases} \dfrac{2a+b}{3}=-3 \\ \dfrac{a+2b}{3}=1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \dfrac{2a+b}{3}=-1 \\ \dfrac{a+2b}{3}=3 \end{cases}$$

これらを解いて $\boldsymbol{(a,\ b)=(-7,\ 5),\ (-5,\ 7)}$

(3) ①$'$ の左辺は整数より，c^2 は3で割り切れるから，c は3の倍数である． ■