

令和3年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
 文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

1 a を実数とする. C を放物線 $y = x^2$ とする.

- (1) 点 $A(a, -1)$ を通るような C の接線は, ちょうど2本存在することを示せ.
- (2) 点 $A(a, -1)$ から C に2本の接線を引き, その接点を P, Q とする. 直線 PQ の方程式は $y = 2ax + 1$ であることを示せ.
- (3) 点 $A(a, -1)$ と直線 $y = 2ax + 1$ の距離を L とする. a が実数全体を動くとき, L の最小値とそのときの a の値を求めよ.

2 空間内に, 同一平面上にない4点 O, A, B, C がある. s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ をみたす実数とする. 線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0 , 線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0 , 線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P , 線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする. さらに4点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるとする.

- (1) t を s を用いて表せ.
- (2) $|\vec{OA}| = 1, |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 2, \angle AOB = 120^\circ, \angle BOC = 90^\circ, \angle COA = 60^\circ, \angle POQ = 90^\circ$ であるとき, s の値を求めよ.

3 整数 a, b, c に関する次の条件 (*) を考える.

$$\int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \dots (*)$$

- (1) 整数 a, b, c が (*) および $a \neq b$ をみたすとき, c^2 を a, b を用いて表せ.
- (2) $c = 3$ のとき, (*) および $a < b$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ.
- (3) 整数 a, b, c が (*) および $a \neq b$ をみたすとき, c は3の倍数であることを示せ.

解答例

- 1 (1) $y = x^2$ より, $y' = 2x$ であるから, 曲線 $C : y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2$$

これが点 $A(a, -1)$ を通るとき

$$-1 = 2ta - t^2 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 2at - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

t に関する2次方程式(*)の判別式は

$$D/4 = (-a)^2 - 1 \cdot (-1) = a^2 + 1 > 0$$

したがって, 2次方程式(*)は異なる2つの実数解をもつ, すなわち, $A(a, -1)$ を通る C の接線は, ちょうど2本存在する.

- (2) 接点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とおくと, 2次方程式(*)の解と係数の関係により

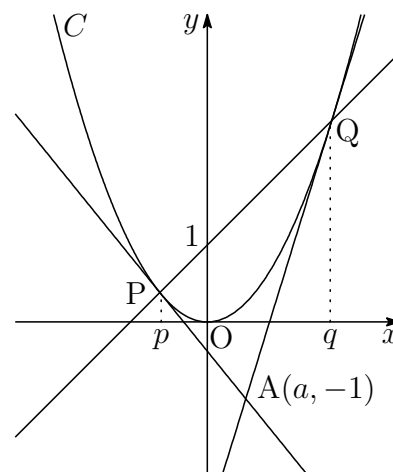
$$p + q = 2a, \quad pq = -1 \quad \cdots (**)$$

2点 $P(p, p^2), Q(q, q^2)$ を通る直線は

$$y - p^2 = \frac{q^2 - p^2}{q - p}(x - p)$$

整理すると $y = (p + q)x - pq$

(**) より $y = 2ax + 1$



- (3) 点 $A(a, -1)$ と直線 $2ax - y + 1 = 0$ の距離 L は

$$\begin{aligned} L &= \frac{|2a \cdot a - (-1) + 1|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = \frac{2(a^2 + 1)}{\sqrt{4a^2 + 1}} = \frac{a^2 + 1}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{a^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

等号が成立するとき $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}}$

$$a^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{これを解いて} \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

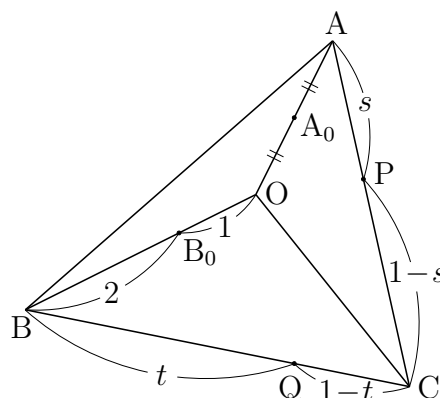
このとき, L の最小値は $\sqrt{3}$

- 2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$
 とすると, $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AC}$ より ($0 < s < 1$)

$$\vec{p} - \vec{a} = s(\overrightarrow{OC} - \vec{a})$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{OC} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{a} + \frac{1}{s}\vec{p}$$

点 Q は線分 BC を $t : (1-t)$ に内分する点であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\left\{\left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{a} + \frac{1}{s}\vec{p}\right\} \\ &= t\left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + \frac{t}{s}\vec{p}\end{aligned}$$

$\vec{a} = 2\overrightarrow{OA_0}$, $\vec{b} = 3\overrightarrow{OB_0}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ であるから

$$\overrightarrow{OQ} = 2t\left(1 - \frac{1}{s}\right)\overrightarrow{OA_0} + 3(1-t)\overrightarrow{OB_0} + \frac{t}{s}\overrightarrow{OP}$$

点 Q は平面 A_0B_0P 上の点であるから

$$2t\left(1 - \frac{1}{s}\right) + 3(1-t) + \frac{t}{s} = 1 \quad \text{よって} \quad t = \frac{2s}{s+1}$$

- (2) 条件から $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos 90^\circ = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$\vec{p} = s\vec{c} + (1-s)\vec{a}$, $\vec{q} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$ について

$$\begin{aligned}\vec{p} \cdot \vec{q} &= \{s\vec{c} + (1-s)\vec{a}\} \cdot \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= s(1-t)\vec{b} \cdot \vec{c} + st|\vec{c}|^2 + (1-s)(1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-s)t\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 4st - (1-s)(1-t) + (1-s)t \\ &= 2t(s+1) + s - 1\end{aligned}$$

(1) の結果および, $\angle POQ = 90^\circ$ より $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ であるから

$$2 \cdot \frac{2s}{s+1}(s+1) + s - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad s = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \cdots (*)$$

$$(*) \text{ より } \int_a^b x^2 dx + b \int_a^c x dx - a \int_b^c x dx = 0$$

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \frac{b}{2}(c^2 - a^2) - \frac{a}{2}(c^2 - b^2) = 0$$

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \frac{c^2}{2}(b - a) + \frac{ab}{2}(b - a) = 0$$

$$a \neq b \text{ であるから } 2(a^2 + ab + b^2) + 3c^2 + 3ab = 0$$

$$\text{したがって } c^2 = -\frac{1}{3}(2a + b)(a + 2b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(2) \quad \textcircled{1} \text{ から } 2a + b \equiv 0 \quad \text{または} \quad a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(2a + b) + (a + 2b) = 3(a + b) \text{ であるから}$$

$$2a + b \equiv 0, \quad a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \frac{2a + b}{3} \cdot \frac{a + 2b}{3} = -\frac{c^2}{3} \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$\frac{2a + b}{3}, \frac{a + 2b}{3} \text{ は, ともに整数である.}$$

$$c = 3 \text{ を } \textcircled{1}' \text{ に代入すると } \frac{2a + b}{3} \cdot \frac{a + 2b}{3} = -3$$

$$\frac{a + 2b}{3} - \frac{2a + b}{3} = \frac{b - a}{3} > 0$$

に注意すると

$$\begin{cases} \frac{2a + b}{3} = -3 \\ \frac{a + 2b}{3} = 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{2a + b}{3} = -1 \\ \frac{a + 2b}{3} = 3 \end{cases}$$

$$\text{これらを解いて } (a, b) = (-7, 5), (-5, 7)$$

$$(3) \quad \textcircled{1}' \text{ の左辺は整数より, } c^2 \text{ は } 3 \text{ で割り切れるから, } c \text{ は } 3 \text{ の倍数である.}$$