令和２年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

1 a を $0 \leqq a < 2\pi$ を満たす実数とする．関数

$$f(x) = 2x^3 - (6 + 3\sin a)x^2 + (12\sin a)x + \sin^3 a + 6\sin a + 5$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ はただ 1 つの極大値をもつことを示し，その極大値 $M(a)$ を求めよ．

(2) $0 \leqq a < 2\pi$ における $M(a)$ の最大値とそのときの a の値，最小値とそのときの a の値をそれぞれ求めよ．

2 円周を 3 等分する点を時計回りに A，B，C とおく．点 Q は A から出発し，A，B，C を以下のように移動する．1 個のさいころを投げて，1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し，2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し，その他の目が出た場合は移動しない．さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する確率を p_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) p_n を求めよ．

3 三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す．
$\angle \mathrm{ACB} = 3\angle \mathrm{ABC}$ であるとき，$c < 3b$ を示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=2x^3-(6+3\sin a)x^2+(12\sin a)x+\sin^3 a+6\sin a+5$ より

$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2-2(6+3\sin a)x+12\sin a\\ &=6(x-\sin a)(x-2)\end{aligned}$$

x	$\cdots$	$\sin a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{x=\sin a}$ で極大値

$$f(\sin a)=\boldsymbol{6\sin^2 a+6\sin a+5}$$

をただ 1 つもつ．

(2) (1) の結果から　$M(a)=6\left(\sin a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{2}$

よって　$\sin a=-\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{a=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

$\sin a=1$，すなわち，$\boldsymbol{a=\dfrac{\pi}{2}}$ で最大値 **17**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 1 回投げたあとに Q が A に位置する確率は　$p_1=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

1 回投げたあとに Q が B，C に位置する確率はともに　$\dfrac{1}{2}(1-p_1)$

よって　$p_2=p_1\times\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{2}(1-p_1)\times\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{1}{2}p_1+\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) n 回投げたあとに，Q が B，C に位置する確率はともに　$\dfrac{1}{2}(1-p_n)$

よって　$p_{n+1}=p_n\times\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{2}(1-p_n)\times\dfrac{1}{6}\times 2=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{6}}$

(3) (2) の結果から　$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$

ゆえに　$p_n-\dfrac{1}{3}=\left(p_1-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　よって　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $C = \angle\mathrm{ACB}$，$B = \angle\mathrm{ABC}$ とする．正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$C = 3B$ であるから　$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin 3B}$　ゆえに　$\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin 3B}{\sin B}$　$\cdots$①

$B + C < \pi$，$C = 3B$ より，$B < \dfrac{\pi}{4}$

したがって　$\dfrac{\sin 3B}{\sin B} = \dfrac{3\sin B - 4\sin^3 B}{\sin B} = 3 - 4\sin^2 B < 3$　$\cdots$②

①，② より　$\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin 3B}{\sin B} < 3$　よって　$c < 3b$