

令和2年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 a を $0 \leq a < 2\pi$ を満たす実数とする. 関数

$$f(x) = 2x^3 - (6 + 3\sin a)x^2 + (12\sin a)x + \sin^3 a + 6\sin a + 5$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ はただ1つの極大値をもつことを示し, その極大値 $M(a)$ を求めよ.
- (2) $0 \leq a < 2\pi$ における $M(a)$ の最大値とそのときの a の値, 最小値とそのときの a の値をそれぞれ求めよ.

2 円周を3等分する点を時計回りに A, B, C とおく. 点 Q は A から出発し, A, B, C を以下のように移動する. 1個のさいころを投げて, 1の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し, 2の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し, その他の目が出た場合は移動しない. さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する確率を p_n とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) p_2 を求めよ.
- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ.
- (3) p_n を求めよ.

3 三角形 ABC において, 辺 AB の長さを c , 辺 CA の長さを b で表す. $\angle ACB = 3\angle ABC$ であるとき, $c < 3b$ を示せ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = 2x^3 - (6 + 3 \sin a)x^2 + (12 \sin a)x + \sin^3 a + 6 \sin a + 5$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 2(6 + 3 \sin a)x + 12 \sin a \\ &= 6(x - \sin a)(x - 2) \end{aligned}$$

x	...	$\sin a$...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって、 $x = \sin a$ で極大値

$$f(\sin a) = 6 \sin^2 a + 6 \sin a + 5$$

をただ1つもつ。

- (2) (1)の結果から $M(a) = 6 \left(\sin a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{2}$

よって $\sin a = -\frac{1}{2}$, すなわち, $a = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ で最小値 $\frac{7}{2}$

$\sin a = 1$, すなわち, $a = \frac{\pi}{2}$ で最大値 17 ■

- 2 (1) 1回投げたあとに Q が A に位置する確率は $p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

1回投げたあとに Q が B, C に位置する確率はともに $\frac{1}{2}(1 - p_1)$

よって $p_2 = p_1 \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2}(1 - p_1) \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

- (2) n 回投げたあとに, Q が B, C に位置する確率はともに $\frac{1}{2}(1 - p_n)$

よって $p_{n+1} = p_n \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2}(1 - p_n) \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}$

- (3) (2)の結果から $p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(p_n - \frac{1}{3} \right)$

ゆえに $p_n - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ よって $p_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$ ■

3 $C = \angle ACB$, $B = \angle ABC$ とする. 正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$C = 3B \text{ であるから } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin 3B} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin 3B}{\sin B} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$B + C < \pi, \quad C = 3B \text{ より, } B < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\sin 3B}{\sin B} = \frac{3 \sin B - 4 \sin^3 B}{\sin B} = 3 - 4 \sin^2 B < 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \frac{c}{b} = \frac{\sin 3B}{\sin B} < 3 \quad \text{よって} \quad c < 3b \quad \blacksquare$$